XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
3 (заключительный) этап, 27–30 марта 2023 г.

Второй день.

5. Маша взяла четыре различных положительных числа и записала шесть их попарных произведений в ряд в порядке возрастания. Могли ли все пять разностей между соседними числами этого ряда оказаться одинаковыми?

6. В Тридевятом царстве 100 городов, и каждые два города соединены не более чем одной дорогой. Однажды царь приказал ввести на каждой дороге одностороннее движение, а заодно покрасить каждую дорогу в белый или черный цвет. Министр транспорта с гордостью сообщил, что после выполнения приказа из любого города в любой другой можно добраться по дорогам, чередуя их цвета, причем так, что первая дорога в пути будет белой. Какое наименьшее количество дорог могло быть в этой стране? Добираясь из города в город, можно проезжать через промежуточные города любое число раз.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = CD = 4$. На сторонах AB и CD выбраны точки K и L соответственно таким образом, что $AK = DL = 1$. На стороне AD снаружи четырёхугольника построен треугольник AMD, в котором $AM = MD = 2$. Оказалось, что $KL = 2$. Докажите, что $BM = CM$.

8. Дано натуральное число k, большее 1. Натуральное число n, большее 1 и взаимно простое с k, назовём *правильным*, если для любого натурального делителя d ($d < n$) числа n число $d+k$ не взаимно просто с n. Докажите, что правильных чисел — конечное количество.