XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *Два бегуна бегают с равными постоянными скоростями по диагоналям AC и BD соответственно квадрата ABCD. Добежав до конца диагонали, бегун сразу поворачивает обратно. Стартовали они одновременно из двух случайно выбранных точек своих диагоналей. Докажите, что найдётся момент, когда расстояние между бегунами будет* ***строго*** *меньше половины диагонали квадрата.* (И. Рубанов)

Решение. Рассмотрим момент, когда бегун с диагонали AC находится в точке O пересечения диагоналей. Если второй бегун в этот момент не находится в точке B или D, расстояние между бегунами будет меньше половины диагонали, и задача решена. В противном случае будем считать для определенности, что второй бегун в этот момент находится в точке B, а первый движется из A в C. Поскольку скорости бегунов равны, в момент, когда первый добежит до середины E отрезка OC, второй будет в середине F отрезка BO, и расстояние $EF < EO+OF = AC/2$, что и требовалось.

2. *Пусть p_1, p_2, ..., p_{100} — сто простых чисел, среди которых нет одинаковых. Натуральные числа a_1, ..., a_k, большие 1, таковы, что каждое из чисел $p_1p_2^3, p_2p_3^3, \ldots, p_{99}p_{100}^3, p_{100}p_1^3$ равно произведению каких-то двух из чисел a_1, ..., a_k. Докажите, что $k \geq 150$.* (И. Рубанов)

Решение. Будем называть натуральное число *белым*, если оно делится на квадрат какого-нибудь простого числа, и *черным* в противном случае. Скажем, что число a_i *обслуживает* число из списка $p_1p_2^3, p_2p_3^3, \ldots, p_{99}p_{100}^3, p_{100}p_1^3$ (*), если оно дает его в произведении с каким-либо a_j. Очевидно, что при этом одно из чисел a_i, a_j — белое, а другое — черное. Так как белое число может обслуживать не более одного числа из списка (*), *белых чисел среди a_i не менее 100*. Кроме того, если черное число обслуживает число $p_{k-1}p_k^3$, то оно равно p_{k-1}, p_k или $p_{k-1}p_k$, и потому может обслуживать не более двух чисел из списка (*). Значит, *черных чисел среди a_i не менее 50*. Таким образом, $k \geq 100+50 = 150$, что и требовалось доказать.

3. *В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа 1, 2, ..., 99, 100. Назовём* ***уголком*** *фигуру, которая получается удалением одной клетки из квадрата 2×2. Назовем уголок* ***хорошим****, если число в его клетке, граничащей по сторонам с двумя другими, больше чисел, стоящих в этих двух других клетках. Каково наибольшее возможное число хороших уголков? (Каждый уголок учитывается независимо от того, как он расположен по отношению к другим, разные уголки могут частично накладываться).* (А. Голованов)

Ответ. 162. **Решение**. Назовём *центром* уголка клетку, которая граничит по сторонам с двумя другими его клетками. В любом квадрате 2×2 из четырех содержащихся в нем уголков хорошими могут быть не больше двух: тех, в центрах которых — два наибольших числа из этого квадрата. Всего в нашей таблице 81 квадрат 2×2, так как левые верхние клетки всех таких квадратов образуют квадрат 9×9. Поэтому хороших уголков не больше, чем 2×81 = 162. Приведем пример, когда их ровно 162. Покрасим клетки таблицы в два цвета в шахматном порядке, и произвольным образом поставим на чёрные клетки числа от 51 до 100, а на белые — числа от 1 до 50. Легко видеть, что в этом случае в каждом квадрате 2×2 будет ровно два хороших уголка с центрами в черных клетках.

4. *На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E. Биссектриса AL пересекает отрезок BE в точке X. Оказалось, что AX = XE и AL = BX. Чему равно отношение углов A и B треугольника?* (С. Берлов)

Ответ. 2. **Решение**. Пусть прямая, проходящая через точку E параллельно AL, пересекает прямые BC и BA в точках P и Q соответственно. Из подобия треугольников ABL и QBP имеем $PQ/AL = BE/BX = BE/AL$, откуда $PQ = BE$. В силу параллельности прямых AL и PQ имеем $\angle AQE = \angle BAX = \angle XAE = \angle AEQ$, откуда $AE = AQ$. Кроме того, из равенства $AX = XE$ следует, что $\angle AEB = \angle AEX = \angle XAE$, откуда $\angle AEB = \angle AQE$. Таким образом, треугольники AQP и AEB равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AP = AB$ и $\angle BAE = \angle PAQ = 2\angle CBA$, откуда и получаем ответ.

5. *По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел?* (С. Берлов)

Ответ.198. **Решение**. Пусть подряд стоят числа a, b, c, d, e. Заметим, что если $a > c$, то $a+b > b+c$, откуда $cd > de$, то есть $c > e$. Продолжая это рассуждение, получим, что каждое число больше числа, идущего по часовой стрелке через одно от него. Но тогда, записав цепочку из 99 таких неравенств, начиная с какого-то числа a, получим, что $a > a$ — противоречие. Значит, все 99 расставленных чисел равны одному и тому же числу a, такому, что $2a = a^2$, откуда $a = 2$, а искомая сумма равна 2×99 = 198.