

XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 2 день

6. Можно ли число 240 представить в виде суммы девяти двузначных чисел (среди которых могут быть и одинаковые), в десятичной записи каждого из которых есть девятка? (И. Богданов)

Ответ. Нельзя. **Решение.** Допустим, можно. С девятки должно начинаться хотя бы одно слагаемое, иначе все девятки будут в разряде единиц, и сумма будет оканчиваться на 1. Это слагаемое не меньше 90, а каждое из остальных — не меньше 19. Поэтому их сумма не меньше $90 + 8 \cdot 19 = 242 > 240$. Противоречие.

7. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E , лежащая на биссектрисе угла A , и точка F , лежащая на биссектрисе угла C . Известно, что середина отрезка BF лежит на отрезке AE . Докажите, что середина отрезка DE лежит на прямой CF . (А. Кузнецов)

Решение. Пусть $\angle BAD = \angle BCD = 2\alpha$, а биссектриса AE пересекает прямую BC в точке K . Тогда $\angle BAK = \angle KAD = \alpha = \angle FCB$. Значит, биссектрисы углов A и C параллельны. Пусть O — середина отрезка BF . Так как по условию она лежит на AE , а $AE \parallel CF$, OK — средняя линия треугольника BFC , откуда $BK = BC/2$. Обозначим через M точку пересечения биссектрисы CF и прямой AD и заметим, что треугольники ABK и CDM равны, так как $AB = CD$, $\angle MCD = \angle KAB = \alpha$, $\angle ABK = \angle CDM = 180^\circ - 2\alpha$. Значит, $MD = BK = BC/2 = AD/2$. Следовательно, средняя линия треугольника DAE лежит на прямой CF , откуда и вытекает утверждение задачи. **Замечание.** Параллельность биссектрис углов A и C и равенство треугольников ABK и CDM можно сразу вывести из симметричности параллелограмма $ABCD$ относительно его центра.

8. Назовем два числа **почти равными** друг другу, если они равны друг другу или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Клетчатый прямоугольник со сторонами, равными натуральным числам a и b , таков, что из него нельзя по линиям сетки вырезать прямоугольник, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника. Какое наименьшее значение может принимать число $|a-b|$? (Е. Молчанов, С. Берлов)

Ответ. 4. **Решение.** Если одна из сторон прямоугольника четна, от него можно по средней линии отрезать прямоугольник вдвое меньшей площади. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда обе стороны нечетны. В этом случае $|b-a|$ четно. Если $|b-a| = 0$, то $a = b = 2n+1$, половина площади прямоугольника равна $2n^2 + 2n + 0,5$, и мы можем вырезать из него прямоугольник $2n \times (n+1)$ почти равной этому числу площади $2n(n+1)$. Если $|b-a| = 2$, то $a = 2n+1$, $b = 2n-1$, половина площади прямоугольника равна $2n^2 - 0,5$, и мы можем вырезать из него прямоугольник $2n \times n$ почти равной этому числу площади $2n^2$. Таким образом, $|a-b| \geq 4$. Полагая $a = 2n+3$, $b = 2n-1$, получаем прямоугольник, половина площади которого равна $2n^2 + 2n - 1,5$. Почти равны ей целочисленные площади $2n^2 + 2n - 1$ и $2n^2 + 2n - 2$. При $n = 3$ $2n^2 + 2n - 1 = 23$ и $2n^2 + 2n - 2 = 22 = 2 \cdot 11$. Простые числа 23 и 11 больше сторон получающегося при $n = 3$ прямоугольника 9×5 , поэтому вырезать из него по линиям сетки прямоугольник, площадь которого почти равна половине его площади, невозможно. Таким образом, минимальное возможное значение $|a-b|$ равно 4.

9. Будем говорить, что мы **укоротили** число, если стерли его последнюю цифру. Натуральное число, большее миллиона, таково, что если укоротить его, получится квадрат натурального числа, если укоротить этот квадрат, получится куб натурального числа, укоротив этот куб, получим четвертую степень натурального числа, а, укоротив эту четвертую степень, получим пятую степень натурального числа. Докажите, что если укоротить эту пятую степень, то получится шестая степень натурального числа. (А. Кузнецов)

Решение. Пусть число после первого укорачивания равно n^2 , а после третьего — m^4 . Тогда $100m^4$ отличается от n^2 только двумя последними цифрами, то есть $100 \geq n^2 - (10m^2)^2 = (n - 10m^2)(n + 10m^2) \geq 0$. Так как по условию $m^4 \geq 1000$, $10m^2 > 100$, что возможно только если $n = 10m^2$. Значит, вторая и третья цифры исходного числа — нули, и куб k^3 , получающийся после третьего укорачивания, оканчивается на 0. Следовательно, четвертая и пятая цифры исходного числа — тоже нули, и после пятого укорачивания мы получим число $(k/10)^3 = (n/100)^2$. Поскольку в разложение числа, являющегося одновременно точным квадратом и точным кубом, все простые множители входят в степенях, кратных 6, это число является точной шестой степенью.

10. На столе есть две кучки камней, в которых соответственно 100 и 101 камень. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход разрешается взять кучку, убрать из неё какое-то количество камней (хотя бы один) и разбить оставшиеся в этой кучке камни на две непустые кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его соперник? (М. Туревский)

Ответ. Тот, кто делает первый ход. **Решение.** Пусть первого игрока зовут Петей, а второго — Васей. Первым ходом Петя уберет из кучки 101 один камень, а оставшиеся разделит на кучки из 1 (про которую можно забыть) и 99 камней. Теперь докажем более общий факт: если на столе лежат кучки из $2k$ и $2k-1$ камней, то проигрывает тот, чья очередь ходить.

Пусть соперник Пети Вася сделал ответный ход в кучку $2k-1$ или разделил кучку $2k$ на две, взяв из нее больше одного камня. У него получились кучки из a и b камней, где $a+b \leq 2k-2$. Тогда Петя следующим ходом создает две такие же кучки, получает позицию a, a, b, b и выигрывает, делая ходы, симметричные ходам первого.

Пусть Вася возьмет один камень из кучки $2k$ и разделит ее на кучки из a и b камней. Тогда числа a и b будут разной четности. Пусть a четно. Тогда Петя из кучки в $2k-1$ камней получит кучки из $a-1$ и b камней (что возможно, так как $a \geq 2$), после чего мысленно разделяет игру на две: одну на паре равных кучек b, b , где он побеждает, делая ходы, симметричные ходам первого, и вторую — на паре кучек $a, a-1$, где он снова применяет стратегию, описанную выше.

Таким образом, у второго всегда есть возможность сделать ход, и он побеждает в силу того, что всего в игре можно сделать не больше 200 ходов.