XVI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 1 день

1. *Можно ли вписать в клетки таблицы 3×3 различные натуральные числа так, чтобы как в любой строке, так и в любом столбце у записанных там трех чисел произведение делилось на 2024, а сумма была меньше 100?* (М. Евдокимов)

Ответ. Можно. **Решение**. Заметим, что $2024 = 8\cdot11\cdot23$. Поэтому подходит пример, приведенный справа.

23	$11\cdot2$	12
8	$23\cdot3$	11
$11\cdot3$	4	$23\cdot2$

2. *На доске написано 100 чисел. Оказалось, что произведение любых двух написанных чисел равно сумме всех остальных. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?* (С. Берлов)

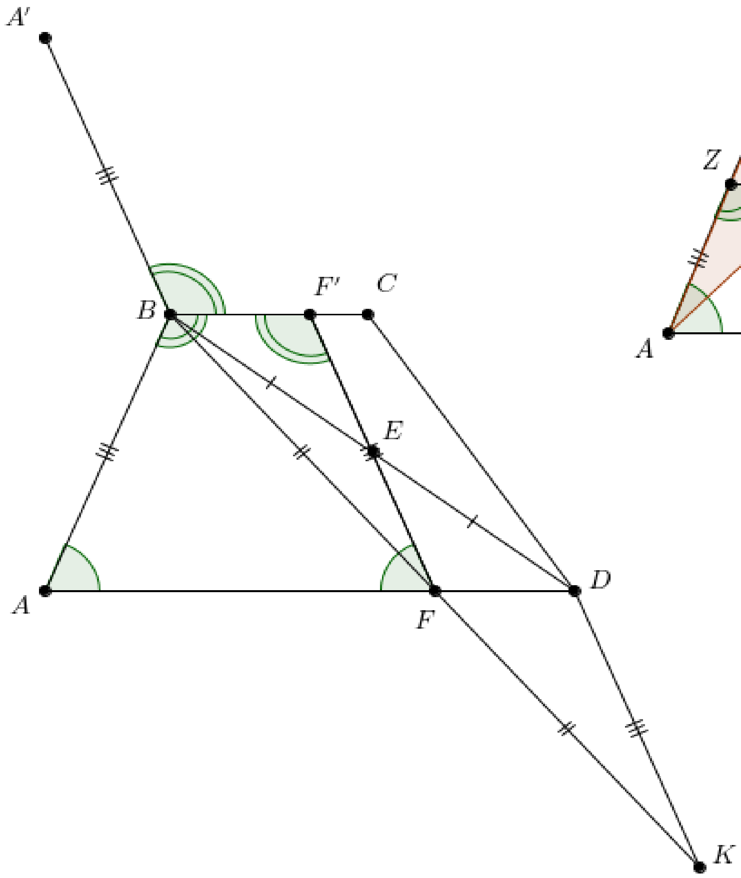
Ответ. –1, 0 или 9800. **Решение**. Обозначим сумму всех чисел через S. Пусть среди написанных есть число a, отличное от –1. Возьмем любое другое написанное число b. По условию $ab = S-a-b \Leftrightarrow (a+1)(b+1) = S+1$ (*) $\Leftrightarrow b=\dfrac{S+1}{a+1}-1$. Получается, что все написанные числа, кроме, возможно, числа a, равны между собой. Если все числа равны, то, подставив в (*) $a = b$, получаем $(a+1)^2-1 = S= 100a \Leftrightarrow a(a+2) = 100a$, откуда $a = 0$ и $S = 0$ или $a = 98$ и $S = 9800$. В противном случае все числа, кроме a, равны –1: если среди написанных если есть еще одно не равное –1 число c, то 98 чисел, отличных от a и c, равны c, и они же равны a, так как мы в (*) вместо a можем взять c, то есть все числа равны между собой. Тогда по условию $a\cdot(-1) = -98 \Leftrightarrow a = 98$ и $S = 98-99 = -1$.

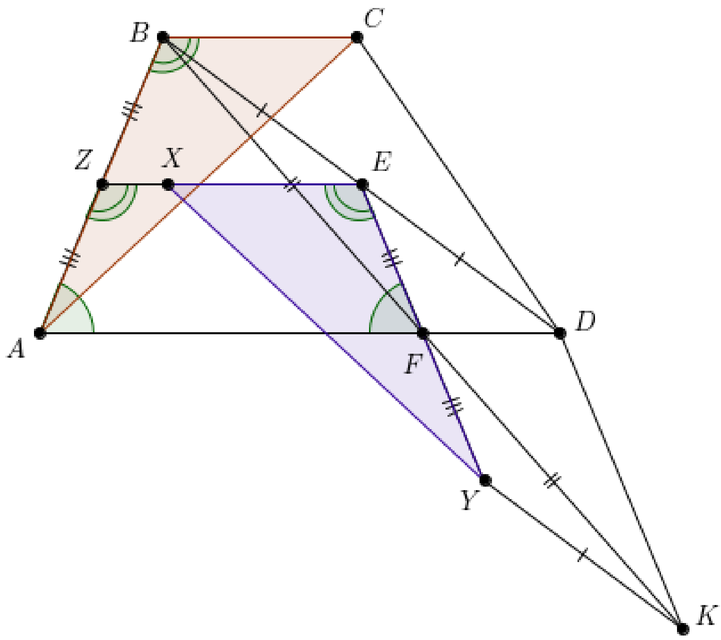
3. *Точка E — середина диагонали BD трапеции $ABCD$. На основании AD отмечена такая точка F, что $\angle AFE = \angle BAD$. Точка K симметрична точке B относительно F. Докажите, что $AC+CE \geq EK$.* (А. Пастор)

Первое решение. Пусть точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Продлим луч FE до пересечения с прямой BC в точке F'. Так как $\angle AFE = \angle BAD$, $ABF'F$ — равнобедренная трапеция, откуда $A'BC = \angle ABC = \angle BF'F$, $A'B = AB = FF'$ и $A'B \parallel FF'$. Кроме того, EF — средняя линия треугольника BDK, откуда $A'B = FF' = 2EF = DK$ и $A'B \parallel FF' \parallel DK$. Таким образом, $A'BKD$ — параллелограмм, и $AC+CE = A'C+CE \geq A'E = AE = EK$.

Второе решение. Пусть точка X такова, что $BCEX$ — параллелограмм, точка Y симметрична E относительно F и Z — середина AB. Тогда точки Z, X, E лежат на средней линии треугольника ABD. Следовательно, $AZEF$ — равнобедренная трапеция, откуда $AB = 2AZ = 2EF = EY$. Далее, $BC = EX$ и $\angle ABC = \angle AZE = \angle XEY$. Тогда треугольники ABC и YEX равны по двум сторонам и углу между ними, откуда

$AC+CE = YX+XB > YB = EK$. (Последнее равенство следует из того, что BE равно и параллельно YK, поэтому $BEKY$ — параллелограмм)





4. *Дано натуральное число k. Из натуральных чисел, не превосходящих* $12k^3$, *выбраны* $6k+20$ *чисел. Докажите, что из них можно выбрать две непересекающиеся шестерки чисел с равными суммами.* (И. Богданов)

Решение. Предположим противное. Будем выбирать пары пар чисел с равными суммами и выкидывать их из множества. Если нашлись три таких пары, из них собираются две шестёрки. Значит, выкинуто не более 8 чисел.

В оставшемся множестве нет пар с равными суммами. Значит, если две тройки имеют равные суммы, они не пересекаются. Если найдутся две тройки с равными суммами, выкинем их. Два раза это повторить нельзя, иначе нашлись требуемые шестёрки. Значит, всего выкинуто не более, чем 8+6 = 14 чисел.

В оставшемся множестве суммы всех троек различны. Однако все эти суммы меньше $3\cdot 12k^3 = 36k^3$, а троек хотя бы $(6k+6)(6k+5)(6k+4)/6 > 36k^3$. Противоречие.