

XVI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 2 день

5. Звезда состоит из 100 горючих шнуров OA_1, \dots, OA_{100} , соединенных в единственной точке O . Время горения каждого шнура не зависит от того, с какого конца его поджигают, а скорость горения не обязана быть постоянной. Если поджечь звезду в точке A_1 , она полностью сгорит за 201 секунду, если в точке A_2 — за 202 секунды, ..., если в точке A_{99} — за 299 секунд. За какое время звезда полностью сгорит, если ее поджечь в точке A_{100} ? (И. Рубанов)

Ответ. За 299 секунд.

Решение. Пусть OX и OY — фитили с самым большим (равным x) и вторым по длительности (равным y) временем горения соответственно. Очевидно, что если поджечь звезду в точке X или в точке Y , то время ее горения будет одним и тем же, равным $x+y$, и это наибольшее возможное время горения звезды. Это время должно быть среди чисел 201, 202, ..., 299, и оно — наибольшее из них, то есть равно 299.

6. Существует ли такое натуральное число n , что неполные частные от деления n на все натуральные числа от 10 до 1000 включительно — это различные нечетные простые числа, а остатки — составные числа (не обязательно различные)? Напомним, что 0 не является составным числом. (С. Берлов)

Ответ. Не существует.

Первое решение. Будем делить с остатком число n на числа от 10 до 20. Этих чисел 11. Остатки от деления на них меньше 20, а среди таких чисел только 10 составных: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18. Значит, при делении на какие-то числа a и b получатся два одинаковых остатка, то есть $n = ap+r = bq+r$, где a и b не больше 20, а p и q — различные простые. Но тогда $ap = bq$, и b делится на p , а a — на q . То есть p и q тоже не больше 20. Но тогда $n < 20^2 = 400$ и при делении на числа, большие 400, будет давать неполное частное 0.

Второе решение. По условию все остатки — составные числа, меньшие 1000. Таких составных чисел меньше, чем 990, поэтому при делении на какие-то числа a и b получатся одинаковые остатки. Тогда $ap = bq$, где p и q — соответствующие неполные частные. Так как числа p и q — простые и различные, $a = pt$ и $b = qt$ для некоторого натурального t . Поэтому $a-b \geq q-p$. Неполные частные от деления на все числа от a до b лежат в отрезке $[p, q]$ и различны. Значит, они принимают все значения от p до q . Но между нечетными простыми числами p и q есть хотя бы одно четное число, которое по условию не может равняться такому неполному частному.

7. У ювелира есть 100 золотых монет. Покупатель знает лишь, что веса этих монет равны 1, 2, ..., 100 г в каком-то порядке, а ювелир знает, какая сколько весит. Как ювелиру за два взвешивания на чашечных весах без гирь доказать покупателю, что известная ювелиру однограммовая монета действительно весит 1 г, но при этом не дать покупателю возможности определить вес никакой другой монеты? (К. Кноп)

Решение. Суммарный вес 9 монет не превосходит $92 + \dots + 100 = 864$. Суммарный вес 41 монеты не меньше, чем $1 + \dots + 41 = 861$. Легко проверить, что, кроме указанного, наборов из 41 монеты с суммарным весом меньше, чем 864, есть еще только три: 1, ..., 40, 42; 1, ..., 40, 43 и 1, ..., 39, 41, 42. При этом только два последних набора обладают тем свойством, что имеются два входящих в набор числа $a < b$ и одно число c , не входящее в набор, такие, что $a + c < b$, и для каждого набора такая тройка чисел только одна: $1 + 41 < 43$ и $1 + 40 < 42$.

Первым взвешиванием сравним монеты 1, ..., 40, 43 с монетами 92, ..., 100. Так как чаша с 9 монетами перевесила, на другой чаше может быть только один из четырех описанных выше наборов из 41 монеты. Вторым взвешиванием сравним монеты 43 и $41 + 1$. Так как чаша с одной монетой перевесила, на другой чаше может быть только набор $1 + 41$ или $1 + 40$. При этом в обоих случаях монета 1 использовалась в первом взвешивании, а монета, лежащая на чаше с ней, нет. Поэтому покупатель сможет определить монету 1, а понять, взвешивалась с ней монета 40 или 41, не сможет. Очевидно, он не сможет определить и ни одну из других монет.

8. На плоскости отмечено n точек. Если провести серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему любые две отмеченные точки, то с одной стороны от него лежит одна отмеченная точка, а с другой стороны от него — $n - 1$ отмеченная точка (на самом серединном перпендикуляре отмеченных точек нет). Каково наибольшее возможное значение n ? (М. Иванов)

Ответ. 5. Решение. Оценка. Пусть AB — кратчайший отрезок между отмеченными точками. Рассмотрим любые две из оставшихся точек: C и D . Если провести серединный перпендикуляр к AC , то A и B окажутся от него по одну сторону, а C — по другую. Тогда D окажется в той же полуплоскости, что и A , откуда $AD < CD$. Аналогично доказываются неравенства $AC < CD$, $BD < CD$ и $BC < CD$. Следовательно, $\angle CAD > 60^\circ$ и $\angle CBD > 60^\circ$. Далее, проведем серединный перпендикуляр к AB . Не умаляя общности, пусть все отмеченные точки, кроме A , находятся по одну сторону относительно этого перпендикуляра. Тогда проведем из A лучи во все $n - 2$ отмеченные точки, кроме A и B , и упорядочим эти лучи по часовой стрелке. Получится $n - 3$ угла. По доказанному выше, все эти углы больше 60° . Но все вместе они образуют угол, меньший развернутого, поскольку все проведенные лучи лежат в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через A перпендикулярно AB . Поэтому $n - 3 \leq 2$, а $n \leq 5$.

Пример. Точки $(0,7)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(5,6)$, $(7,0)$ на координатной плоскости. Проверка не составляет труда.

