XVII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
3 (заключительный) этап, 24–27 марта 2025 г.

Первый день.

1. У Андрея на огороде выросли кабачки, среди которых нет двух одинаковой массы. Андрей решил некоторое число самых маленьких взять себе, некоторое число самых маленьких из оставшихся отдать другу, а остальные — в рагу. При таком распределении себе он бы взял 10% от общей массы, а другу досталось бы 50%. Только друг сказал, что ему не нужно столько кабачков. Тогда Андрей распределил кабачки по-другому, но по тому же принципу: некоторое число самых маленьких себе, из оставшихся некоторое число самых маленьких другу, остальное — в рагу. После этого у Андрея и у друга оказалось по 20% общей массы кабачков. Какое наименьшее количество кабачков могло вырасти на огороде у Андрея?

2. Прямая пересекает основание AC равнобедренного треугольника ABC в точке D, боковую сторону AB в точке E и луч CB в точке F, причем $\angle ADE = \angle CDB$. Докажите, что площади треугольников BCE и AEF равны.

3. На доске написано число 9999. За один ход можно уменьшить одну из цифр этого числа на единицу (но так, чтобы результат был не меньше 0). Двое по очереди делают ходы. Проигрывает тот, после хода которого впервые получится число, меньшее, чем 2024. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его соперник?

4. Среди всех остатков, которые дают степени 2 при делении на нечётное число m, большее 1, оказалось ровно k чисел, больших $m/2$. Пусть натуральное число n таково, что 2^n-1 делится на m. Докажите, что если число $\dfrac{2^n-1}{m}$ представлено в виде суммы различных целочисленных степеней двойки, то количество слагаемых в такой сумме делится на k.