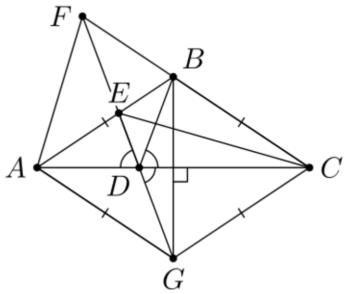
XVII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 1 день

1. *У Андрея на огороде выросли кабачки, среди которых нет двух одинаковой массы. Андрей решил некоторое число самых маленьких взять себе, некоторое число самых маленьких из оставшихся отдать другу, а остальные — в рагу. При таком распределении себе он бы взял 10% от общей массы, а другу досталось бы 50%. Только друг сказал, что ему не нужно столько кабачков. Тогда Андрей распределил кабачки по-другому, но по тому же принципу: некоторое число самых маленьких себе, из оставшихся некоторое число самых маленьких другу, остальное — в рагу. После этого у Андрея и у друга оказалось по 20% общей массы кабачков. Какое наименьшее число кабачков могло вырасти на огороде у Андрея?*

Ответ. 9. **Решение**. Примем общую массу всех кабачков за 100. Начнём с очевидного замечания: если общая масса набора из нескольких самых маленьких кабачков равна a, и в то же время общая масса набора из нескольких самых маленьких кабачков равна $b > a$, то все кабачки первого набора входят во второй, а остальные кабачки второго набора составляют набор массой $b–a$. По условию существуют: набор I самых маленьких кабачков массой 10; набор самых маленьких кабачков массой 2 — удалив из него набор I, получим набор II также массой 10; набор самых маленьких кабачков массой 20+20 = 40 — удалив из него наборы I и II, получим набор III массой 20; набор самых маленьких кабачков массой 10+50 = 60 — удалив наборы I, II и III, получим набор IV также массой 20; не входящие в наборы I–IV кабачки составят набор V массой 40. В каждом из наборов IV и V должно быть хотя бы по одному кабачку. Масса (каждого) кабачка, входящего в набор IV, не более 20, а кабачки в наборе III меньше, поэтому их не менее двух. Масса меньшего из них меньше 10, поэтому в наборе II все кабачки также имеют массу меньше 10 и их тоже не менее двух. Наконец, масса меньшего из кабачков набора II меньше 5, следовательно, в наборе I все кабачки также имеют массу меньше 5, и потому их не менее трёх. Вместе получается не менее 9 кабачков. Пример на 9 кабачков дают массы 2; 3,5; 4,5 (набор I), 4,6; 5,4 (набор II), 9; 11 (набор III), 20 (набор IV) и 40 (набор V).

2. *Прямая пересекает основание AC равнобедренного треугольника ABC в точке D, боковую сторону AB в точке E и луч CB в точке F, причем $\angle ADE = \angle CDB$. Докажите, что площади треугольников BCE и AEF равны.* (А. Кузнецов)



Первое решение. Достроим треугольник ABC до ромба $ABCG$. Тогда в силу равенства $\angle ADE = \angle CDB$ точка G окажется на прямой DE. Так как $CG \parallel AB$, $S(BCE) = S(BGE)$. Заметим теперь, что, так как $AG \parallel BF$, $S(BGE)+S(BFE) = S(BGF) = S(BAF) = S(AEF)+S(BFE)$, откуда $S(BCE) = S(BGE) = S(AEF)$. **Второе решение**. Треугольники ADE и CDB подобны по двум углам. Поскольку равны углы EDB и BDF, точки B и F — соответственные в этих подобных треугольниках. Значит,
$S(AEF)/S(BEF) = AE/EB = CB/BF = S(BCE)/S(BEF)$, откуда $S(AEF) = S(BCE)$.

3. *На доске написано число 9999. За один ход можно уменьшить одну из цифр этого числа на единицу (но так, чтобы результат был не меньше 0). Двое по очереди делают ходы. Проигрывает тот, после хода которого впервые получится число, меньшее, чем 2024.*

Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его соперник? (И. Рубанов)

Ответ. Тот, кто ходит первым. **Решение**. Рассмотрим все числа, где тот, чья очередь ходить, сразу проигрывает. Это 3000, 2100, 2030 и 2024. Так как сумма цифр исходного числа 9999 четна, и каждый ход меняет четность суммы цифр, в трех первых позициях, у которых сумма цифр нечетна, очередь хода за вторым. Значит, первый победит, если не допустит появления в игре числа 2024. Для этого ему достаточно не более чем шестью своими первыми ходами уменьшать на 1 последнюю цифру, пока она не станет меньше 4 (при этом он не проиграет, так как даже после его шестого хода первая цифра останется не меньше 4). После этого он может делать любые не проигрывающие немедленно ходы и, как уже объяснено выше, гарантированно выиграет.

4. *Среди всех остатков, которые дают степени 2 при делении на нечётное число m, большее 1, оказалось ровно k чисел, больших $m/2$. Пусть натуральное число n таково, что $2^n–1$ делится на m. Докажите, что если число $(2^n–1)/m$ представлено в виде суммы различных целочисленных степеней двойки, то количество слагаемых в такой сумме делится на k.* (А. Голованов)

Решение. Рассмотрим последовательность остатков от деления на m чисел 2, 4, ..., 2^s, … . В этой последовательности встречаются единицы: если 2^s и $2^l > 2^s$ дают при делении на m одинаковые остатки, то $2^{l–s}–1$ делится на m. Если первая единица оказалась на d-м месте, последовательность имеет период d, все остатки в периоде различны, и в каждом периоде ровно k остатков, больших $m/2$. Таким образом, количество остатков, больших $m/2$, которые дают числа 2, 4, ..., 2^n, кратно k. Докажем, что это количество и есть количество различных степеней двойки, в сумму которых раскладывается число $(2^n–1)/m$. Поделим каждую степень двойки 2^i, где $1 \le i \le n$, на m с остатком: $2^i = mq_i+r_i$, $0 \le r_i < m$. Как известно, каждое натуральное число раскладывается в сумму различных степеней двойки единственным образом. Мы докажем, что число q_i раскладывается в сумму стольких различных степеней двойки, сколько среди остатков r_1, r_2, ..., $r_{i–1}$ таких, которые больше $m/2$. При $i = 1$ это так: $q_1 = 0$. Заметим, что если $r_i < m/2$, то $2^{i+1} = m\cdot 2q_i+2r_i$, где $2r_i < m$, то есть $q_{i+1} = 2q_i$, а если $r_i > m/2$, то $2^{i+1} = m\cdot(2q_i+1)+(2r_i–m)$, и $q_{i+1} = 2q_i+1$. Значит, если $r_i < m/2$, то в разложении числа $(2^{i+1}–r_{i+1})/m = 2q_i$ в сумму различных степеней двойки столько же слагаемых, сколько в разложении числа $(2^i–r_i)/m$, а если $r_i > m/2$, то $(2^{i+1}–r_{i+1})/m = 2q_i+1$, и в разложении этого числа в сумму различных степеней двойки на одно слагаемое больше, чем в разложении числа q_i. Таким образом, количество слагаемых в разложении числа $(2^n–r_n)/m$ равно количеству остатков, больших $m/2$, среди чисел r_1, ..., $r_{n–1}$. Учитывая, что $r_n = 1$, это и есть то, что требовалось. **Замечание**. Проведенное решение можно записать короче и нагляднее, если использовать двоичную систему счисления. Рассмотрим процесс деления в столбик числа $2^n = 10…0_2$ (n нулей) на m. После обработки первых k знаков под чертой записан остаток r_k от деления числа 2^k на m. Значит, в частном появится единица, если число, которое получается дописыванием к r_k нуля справа, не меньше m, то есть когда $r_k > m/2$. Значит, в результате деления количество единиц в частном (равном $(2^n–1)/m$) будет равно количеству встретившихся остатков, больших $m/2$, которое, как показано в начале решения делится на k.