XVII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 2 день

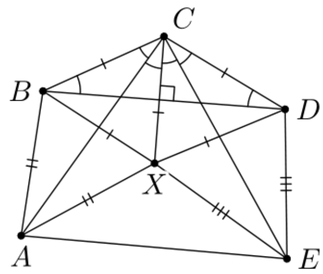
5. *Дано натуральное число n. Докажите, что при некотором натуральном m у числа m^3+m ровно один или ровно два различных простых делителя, больших n.* (А. Кузнецов)

Решение. Пусть m — наименьшее простое число, большее n. Тогда одним из простых делителей числа $m^3+m = m(m^2+1)$ будет само m, а остальными — простые делители числа m^2+1. Так как m^2+1 взаимно просто с m, все его простые делители, большие n, также больше m. Если таких делителей хотя бы два, то уже их произведение больше, чем $(m+1)^2 > m^2+1$. Поэтому таких делителей у числа m^2+1 не больше одного, откуда и вытекает утверждение задачи.

6. *По кругу расставлены 2025 ненулевых чисел. Может ли для любых пяти подряд идущих чисел a, b, c, d, e быть выполнено равенство $ab+de = bd$?* (А. Кузнецов)

Ответ. Не может. **Первое решение**. Положим $A_1 = abc$, $A_2 = bcd$, $A_3 = cde$ и т. д. Домножив равенство $ab = bd–de$ на c, получаем $A_1 = A_2–A_3$. Аналогично $A_2 = A_3–A_4$, откуда $A_1 = (A_3–A_4)–A_3 = –A_4$. Так как $2026 = 675·3+1$, $A_1 = A_{2026} = (–1)^{675}A_1 = –A_1$, откуда $A_1 = 0$, что запрещено условием. **Второе решение**. Прибавив к обеим частям равенства из условия ae, перепишем его в виде $ae = (b–e)(d–a)$ и перемножим все такие равенства. Слева получим положительное число — произведение квадратов всех чисел, а справа — отрицательное: каждая разность двух чисел, идущих через 2, встретится дважды с разными знаками, а таких пар 2025.

7. *В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle ACB = \angle CBD = \angle DCE = \angle BDC = 30°$, а $AB+BC+CD+DE = AD+BE$. Чему может быть равен угол A этого пятиугольника?* (С. Берлов)



Ответ. 90º. **Решение**. Построим точку X, симметричную точке C относительно прямой BD. Так как $\angle CBD = \angle BDC = 30º$, выполнены равенства $BX = BC = CD = DX$ и $\angle CBX = \angle CDX = 60º$. Значит, $BCDX$ — ромб, а треугольники BXC и DXC — равносторонние. Поэтому $\angle ACX = \angle BCX–\angle ACB = 30º$, откуда AC — серединный перпендикуляр к отрезку BX и $AX = AB$. Аналогично, $EX = ED$. Значит, выполнено неравенство $AB+CD = AX+DX \geq AD$. Складывая его с аналогичным неравенством $BC+DE \geq BE$, получаем, что $AB+BC+CD+DE = AD+BE$ только тогда, когда $AB+CD = AX+XD = AD$ и $BC+DE = BX+XE = BE$. Первое равенство выполнено только когда X лежит на отрезке AD, второе — только когда X лежит на отрезке BE. Таким образом, X совпадает с точкой пересечения диагоналей AD и BE. Тогда треугольник ABX — равносторонний, так как $AX = AB$ и $\angle BXA = 180°–\angle BXD = 60°$. Аналогично треугольник EDX — равносторонний. Тогда $AX = BX = DX = EX$, следовательно, треугольник AXE — равнобедренный. При этом $\angle AXE = \angle BXD = 120°$, откуда $\angle XAE = 30°$. Поэтому $\angle BAE = \angle BAX+\angle XAE = 60°+30° = 90°$.

8. *В клетках таблицы 6×6 расставлены все натуральные числа от 1 до 36 (в каждой клетке стоит одно число). Назовем* ***уголком*** *фигуру, которая получается удалением одной клетки из квадрата 2×2. Обозначим через m наименьшую сумму чисел в уголке, а через M*

— наибольшее из m по всем возможным расстановкам чисел в таблице. Найдите M. (И. Рубанов)

1	36	4	30	7	24
10	35	13	29	16	23
2	34	5	28	8	22
11	33	14	27	17	21
3	32	6	26	9	20
12	31	15	25	18	19

Ответ. $M = 46$. **Решение**. Пример, когда все суммы в «уголках» не меньше 46, — на рисунке.

Оценка. Предположим, что в некоторой таблице сумма в каждом уголке не меньше 47. Разобьём нашу таблицу на 9 *квадратиков* 2×2 и занумеруем их числами от 1 до 9. В i-м квадратике выберем наибольшее число a_i и следующее за ним по величине b_i. Выделим в i-м квадратике уголок без a_i. Сумма чисел в каждом выделенном уголке не меньше 47, но может быть и больше 47. Обозначим сумму таких девяти избытков (некоторые из них могут быть нулевыми) через D. Обозначим через A и B суммы всех a_i и всех b_i соответственно. Заметим сразу, что $b_i \le a_i–1$, поэтому $B \le A–9$. Кроме того, $b_i \ge 17$ — иначе сумма в соответствующем выделенном уголке не превосходит 16+15+14 = 45. Значит, a_i и b_i — это все числа от 17 до 36, кроме двух. Обозначим эти два исключительных числа через x и y.

Сумма чисел во всех выделенных уголках равна $(1+2+\ldots+36)–A = 9\cdot47+D$, откуда $A = 9\cdot74–9\cdot47–D = 9\cdot27–D$. Тогда $B \le A–9 = 9\cdot26–D$, и потому

$$x+y = (17+18+\ldots+36)–A–B \ge 10\cdot53–9\cdot53+2D = 53+2D.$$

Если числа x и y расположены в одном квадратике, избыток суммы в нём уже не меньше $53+2D-47 > D$, что невозможно. Если же числа x и y находятся в i–м и j–м квадратиках, то $b_i+b_j \ge x+y+2 \ge 55+2D$, и сумма избытков в соответствующих двух выделенных уголках не меньше, чем $55+2D+53+2D–2\cdot47 > D$, что снова невозможно.

Другое доказательство оценки. Назовем числа, не превосходящие 18, *малыми*, а числа, большие 18, *большими*. Заметим, что любые три числа, находящиеся в одном и том же квадрате 2×2, образуют уголок. Допустим, есть расстановка, где суммы чисел во всех уголках не меньше 47. Отметим в каждом из девяти определенных в первом доказательстве *квадратиков* наибольшее число. Заметим, что поскольку сумма остальных трех чисел в каждом квадратике не меньше 47, то сумма отмеченных чисел не больше, чем $666–9\cdot47 = 243$. Если хотя бы в двух квадратиках есть хотя бы по три малых числа, то хотя бы в одном из них сумма трех малых чисел не превосходит $(13+\ldots+18)/2 = 46{,}5 < 47$. Следовательно, есть не более одного квадратика, содержащего не более одного большого числа. Значит, есть не более двух квадратиков, содержащих не менее трех больших чисел. Тогда сумма всех отмеченных чисел не меньше, чем 36+32+30+28+26+24+22+20+18 = 236 (можно выкинуть не более двух больших чисел так, чтобы в каждом квадратике осталось не более двух больших; тогда отмеченные числа в порядке убывания будут не менее первого, третьего, пятого и т. д. из оставшихся) Но тогда если есть квадратик, содержащий три больших числа, бóльших 26, то сумма трёх наименьших чисел в нём будет не меньше, чем 27+28+1 = 56, и тогда общая сумма будет не меньше, чем $236+47\cdot8+56 = 668 > 666$ — противоречие. Поэтому сумма отмеченных чисел в квадратиках будет (из соображений, описанных в скобках выше) не меньше, чем 36+34+32+30+28+24+22+20+18 = 244 > 243 — противоречие.