XVII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *Найдите три* ***нецелых*** *положительных числа a, b, c таких, что все числа* $\frac{a+b}{a-b}, \frac{b+c}{b-c}, \frac{c+a}{c-a}$ *— целые.*

(В. Шурыгин)

Ответ. Например, 1/5, 2/5 и 3/5. **Комментарий**. Достаточно заметить, что условию удовлетворяют числа 1, 2 и 3, а затем поделить каждое из них на одно и то же число, большее трёх.

2. *В пещере собрались 100 гномов — по 10 гномов из 10 разных кланов. Каждый из них — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжет. Каждый из собравшихся назвал клан, из которого, по его мнению, на собрание пришли одни лжецы. Оказалось, что каждый из 10 кланов назвало ровно 10 гномов. Докажите, что лжецов в пещере не меньше, чем рыцарей.* (И. Рубанов)

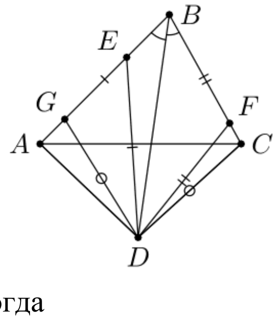
Решение. Допустим, лжецов в пещере меньше, чем рыцарей. Тогда рыцарей там, самое меньшее, 51, и потому среди них есть представители по крайней мере шести кланов. Но тогда все гномы, сказавшие, что из этих кланов на собрание пришли одни лжецы, солгали, и получается, что лжецов среди собравшихся по крайней мере 60, в то время как по нашему предположению их не больше, чем 49. Противоречие.

3. *Числа x, y, z таковы, что* $x > y^2+z^2$, $y > z^2+x^2$, $z > x^2+y^2$. *Докажите, что каждое из чисел x, y, z меньше 1/2.* (Н. Агаханов, А. Храбров)

Первое решение. Так как совокупность данных в условии неравенств сохраняется при перестановках переменных, можно считать, что $x \ge y \ge z$. Тогда $y \ge z > x^2+y^2$, откуда $1/4 > x^2+(y-1/2)^2$ и $1/2 > x \ge y \ge z$, что и требовалось доказать. **Второе решение**. Заметим, что $y+z > (z^2+x^2)+(x^2+y^2)$. Поэтому $2x^2 < (y-y^2)+(z-z^2) = 1/4-(1/2-y)^2+1/4-(1/2-z)^2 < 1/2$. Тогда $x^2 < 1/4$, откуда $x < 1/2$. Аналогично, $y < 1/2$ и $z < 1/2$.

4. *В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублёвой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, начинает Даша. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть её: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, Соня — на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достаётся Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные деньги. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша?* (А. Кузнецов)

Ответ. 300 рублей. **Решение**. Разобьём доску на 100 квадратов 2×2. Если перед ходом Сони на доске есть хотя бы 101 монета, то найдется квадрат, в котором лежат хотя бы две монеты. Если они в соседних клетках, Соня своим ходом ставит одну из них в клетку с другой и забирает монету. В противном случае Соня сдвигает одну из монет в клетку, находящуюся в том же столбце, что и вторая монета, а после следующего хода Даши ставит эту монету в одну клетку со второй и также забирает монету. Действуя таким образом, Соня может забрать с доски по крайней мере 300 монет.
Покажем, что Даша может помешать Соне забрать с доски больше 300 монет. Пусть она отметит в каждом из описанных выше квадратов 2×2 левую нижнюю монету. Покажем, как ей играть, чтобы никакие две отмеченные монеты не оказывались в одной клетке — тогда всякий раз можно считать, что все 100 отмеченных монет остаются на доске. Если Соня подвинула отмеченную монету из ее исходного столбца, Даша подвинет эту монету обратно в исходный столбец. В противном же случае она двигает крайнюю правую отмеченную монету между двумя крайними справа столбцами.



5. *На биссектрисе угла ABC отмечена точка D. На отрезке AB отмечена точка E, а на отрезке BC — точка F, причём AB = DE и BC = DF. Докажите, что из отрезков AD, CD и EF можно сложить треугольник.* (А. Кузнецов)

Решение. Заметим, что $AD+AE > DE$, поэтому $AD > DE-AE = AB-AE = BE$. Аналогично $DC > BF$, откуда $AD+DC > BE+BF > EF$. Без ограничения общности положим $AB \ge BC$. Пусть точка G симметрична точке C относительно прямой BD. Тогда

$$|AD-DC| = |AD-DG| < AG = AB-BG = AB-BC = DE-DF < EF.$$

Итак, $AD+DC > EF > |AD-DC|$, откуда и вытекает утверждение задачи.