А. И. Молев

Операторы Сугавары для классических алгебр Ли

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 512.554.38
ББК 22.14
М75

Молев А. И.
Операторы Сугавары для классических алгебр Ли.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2018.
xiii+340 с.
ISBN 978-5-4439-2093-1

Классическая двойственность Шура–Вейля приводит к эффективным способам построения инвариантных полиномов для простых алгебр Ли. Теория квантовых групп, возникшая в 1980-х гг., привнесла специальную матричную технику, с помощью которой удалось получить аналогичные конструкции новых семейств элементов Казимира для алгебр Ли классических серий. Операторы Сугавары — это аналоги элементов Казимира для аффинных алгебр Каца–Муди.

Цель книги состоит в описании алгебраических структур, связанных с аффинными алгебрами Ли, включая аффинные вертексные алгебры, янгианы и классические W-алгебры. Эти структуры проявляются во многих областях математики и математической физики, таких как теория модулярных форм, конформная теория поля, интегрируемые системы и солитонные уравнения. В книге развивается аффинная версия матричной техники, которая затем применяется для объяснения элегантных конструкций операторов Сугавары, появившихся за последнее десятилетие. Аффинный аналог изоморфизма Хариш-Чандры связывает операторы Сугавары с классическими W-алгебрами, играющими роль инвариантов группы Вейля в конечномерной теории.

Для студентов, аспирантов и научных сотрудников физико-математических специальностей.

Научное издание

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241–08–04
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2093-1

Оруженосцу Кашке

Оглавление

Предисловие

В теории представлений алгебр Ли *операторами Казимира* обычно называются некоторые выражения, построенные из образующих алгебры Ли, которые коммутируют с её действием. Спектры этих операторов важны для понимания соответствующего представления. В частности, конечномерные неприводимые представления простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем комплексных чисел характеризуются собственными значениями операторов Казимира. Этот факт основан на теореме Хариш-Чандры, которая устанавливает изоморфизм между центром $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ и алгеброй полиномов:

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}\big[L_1, \dots, L_n\big], \tag{0.1}$$

где n — это ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $L_1, \dots, L_n$ — полиномиальные функции от старших весов представлений. При этом каждая функция L_i инвариантна относительно некоторого действия группы Вейля, отвечающей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. *Изоморфизм Хариш-Чандры* (0.1) опирается на теорему Шевалле, которая, в свою очередь, получается взятием «классического предела» в соотношении (0.1). А именно, симметрическая алгебра $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ изоморфна присоединённой градуированной алгебре $\mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, а подалгебра $\mathfrak{g}$-инвариантов в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ изоморфна $\mathrm{gr}\,\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$. Взяв символы M_i полиномов L_i, получим *изоморфизм Шевалле*

$$\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \cong \mathbb{C}\big[M_1, \dots, M_n\big]. \tag{0.2}$$

Степени $d_1, \dots, d_n$ инвариантов $M_1, \dots, M_n$ группы Вейля — это увеличенные на 1 экспоненты алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Проблема описания изоморфизма (0.1) в терминах конкретных образующих обеих алгебр привлекла значительное внимание в литературе как по математической физике, так и по теории представлений. Особенно это касается алгебр Ли $\mathfrak{g}$ классических серий A, B, C и D. Были построены многочисленные семейства образующих центра $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ и вычислены их образы Хариш-Чандры.

Простые алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно рассматривать как часть семейства *алгебр Каца–Муди*, которое параметризуется обобщёнными матрицами Картана. Особый интерес представляет класс *аффинных алгебр Каца–Муди* $\widehat{\mathfrak{g}}$, допускающих простую реализацию: $\widehat{\mathfrak{g}}$ — это центральное расширение $\mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ алгебры Ли полиномов Лорана с коэффициентами в $\mathfrak{g}$. Основополагающие результаты теории представлений этих алгебр Ли и её приложений к конформной теории поля, модулярным формам и солитонным уравнениям изложены в книге В. Каца [**86**]. Естественный вопрос, возникающий в связи с широким спектром приложений алгебр Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$, состоит в том, как устроен центр универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$. Однако такой прямой вопрос оказывается слишком наивным, чтобы иметь содержательный ответ. Прежде всего, обёртывающая алгебра «слишком мала»: в ней нет центральных элементов, кроме полиномов от K. Канонический квадратичный элемент Казимира уже оказывается формальным рядом, составленным из элементов алгебры $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$, поэтому необходимо рассматривать её пополнение. Естественный выбор такого пополнения диктуется условием, чтобы действие его элементов было корректно определено на *гладких модулях* над $\widehat{\mathfrak{g}}$. Кроме того, центральному элементу K должно быть присвоено однозначно определённое значение, называемое *критическим уровнем*. При стандартном выборе инвариантной билинейной формы на $\mathfrak{g}$ это значение совпадает с противоположным дуальным числом Кокстера, $K = -h^\vee$. Пополненная универсальная обёртывающая алгебра $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$ на критическом уровне теперь содержит большой центр $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, так что вопрос, уточнённый таким образом, имеет замечательный исчерпывающий ответ, который подробно объяснён в книге Э. Френкеля [**46**]. По аналогии с изоморфизмом (0.1) центр $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ оказывается пополненной алгеброй полиномов

$$\mathbb{C}\big[S_{1\,[r]}, \dots, S_{n\,[r]} \mid r \in \mathbb{Z}\big]$$

от бесконечного числа переменных. Кроме того, элементы $S_{i\,[r]}$, называемые *операторами Сугавары*, можно получить из семейства образующих $S_1, \dots, S_n$ коммутативной дифференциальной алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, применяя инструменты *теории вертексных алгебр*: вакуумный модуль на критическом уровне над $\widehat{\mathfrak{g}}$ обладает структурой вертексной алгебры, а $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это её *центр*.

Таким образом, меньшая алгебра $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ содержит ключ к пониманию центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$. Эта меньшая алгебра называется *центром Фейгина–Френкеля*, поскольку её структура описывается теоремой Б. Фейгина и Э. Френкеля, доказанной в их статье [**39**]. Теорема утверждает, что $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это алгебра полиномов,

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \mathbb{C}\big[T^r S_1, \dots, T^r S_n \mid r = 0, 1, \dots\big],$$

где T — это дифференцирование, определённое как *трансляционный оператор* вертексной алгебры. Для серии A эту теорему можно вывести из предшествующих результатов Р. Гудмана и Н. Уоллаха [**58**], а для серий A, B и C — из независимой работы Т. Хаяши [**65**]. Обе эти статьи были посвящены выводу формулы для характеров неприводимого фактора $L(\lambda)$ модуля Верма $M(\lambda)$ над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ на критическом уровне. Операторы Сугавары образуют коммутативное семейство $\widehat{\mathfrak{g}}$-эндоморфизмов модуля $M(\lambda)$, что позволяет вычислить характер и тем самым доказать гипотезу Каца–Каждана [**89**]. Выбор названия книги был продиктован терминологией, использованной в обеих основополагающих работах [**58**] и [**65**], хотя термин *операторы Сигала–Сугавары* тоже часто используется в литературе. Терминология восходит к статье Х. Сугавары [**145**] и неопубликованной работе Грэма Сигала; см. статью И. Б. Френкеля [**52**]. Мы будем называть элементы алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ *векторами Сигала–Сугавары*, чтобы яснее различать векторы и операторы.

В последнее время были построены новые семейства векторов Сигала–Сугавары. Это сделано А. Червовым и Д. Талалаевым [**24**] для алгебр Ли серии A, автором — для серий B, C и D [**110**] и в совместной работе с Э. Рагуси и Н. Рожковской [**116**] — для алгебры Ли типа G_2. Эти конструкции приводят к прямому доказательству теоремы Фейгина–Френкеля для соответствующих алгебр Ли, которое опирается на аффинную версию изоморфизма Шевалле (0.2). Для «классического предела» алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ имеет место изоморфизм

$$\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{g}[t]} \cong \mathbb{C}\big[T^r M_1, \ldots, T^r M_n \mid r = 0, 1, \ldots\big].$$

Это следует из результатов М. Раиса и П. Товеля [**135**], и независимо доказано А. Бейлинсоном и В. Дринфельдом; см. [**46**, Theorem 3.4.2].

Подробное описание конструкций векторов Сигала–Сугавары составляет основную цель настоящей книги. Вместе с общей теорией, изложенной в книге [**46**], явные формулы должны привнести дополнительное содержание в эту красивую теорию и сделать её более доступной через конкретные примеры. Векторы Сигала–Сугавары будут также использоваться в приложениях, в соответствии в общими результатами, полученными в фундаментальной работе Б. Фейгина, Э. Френкеля и Н. Решетихина [**40**]. В частности, элементы $S \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ порождают высшие гамильтонианы в модели Годена, описывающей квантовую спиновую цепочку. Их собственные значения на векторах Бете могут быть вычислены с помощью аффинной версии изоморфизма Хариш-Чандры для алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$. Роль инвариантных полиномов в соотношении (0.1) теперь будут играть элементы *классической $\mathcal{W}$-алгебры* $\mathcal{W}({}^L\mathfrak{g})$, отвечающей двойственной по Ленглендсу алгебре Ли ${}^L\mathfrak{g}$. Так же как и в конечномерной теории, аффинный изоморфизм Хариш-Чандры можно понимать, используя действие элементов центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ в *модулях Вакимото* над $\widehat{\mathfrak{g}}$: центральные элементы действуют умножением на скаляры, которые интерпретируются как образы Хариш-Чандры.

В качестве ещё одного приложения явных конструкций векторов Сигала–Сугавары будет дано решение проблемы Э. Б. Винберга о квантовании [**150**]. Оно основано на общих результатах Л. Г. Рыбникова [**140**], а также Б. Фейгина, Э. Френкеля и В. Толедано Ларедо [**42**], в которых алгебраически независимые семейства образующих коммутативных подалгебр в $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ построены с помощью образующих алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$.

Все конструкции векторов Сигала–Сугавары, которые мы обсуждаем в книге, можно объяснить единообразно с использованием *процедуры слияния*, позволяющей выразить примитивные идемпотенты централизаторных алгебр, связанных с представлениями алгебры Ли $\mathfrak{g}$, как произведения рациональных *R-матриц*. В принципе, такой подход можно применять ко всем простым алгебрам Ли при условии, что соответствующая версия процедуры слияния имеет место. Если бы удалось найти такие версии для исключительных типов, то это привело бы к единообразному описанию центра Фейгина–Френкеля.

В соответствии с общепринятой терминологией, R-матрицей называется решение *уравнения Янга–Бакстера*. По такому решению можно определить алгебру с помощью *RTT-соотношения*, в котором образующие алгебры собраны в матрицу. Этот общий подход был развит в работах ленинградской школы Л. Д. Фаддеева по *квантовому методу обратной задачи* в начале 1980-х гг. Опираясь на эти работы, В. Г. Дринфельд [**30**] и М. Дзимбо [**81**] открыли *квантовые группы*. Деформации универсальных обёртывающих алгебр в классе алгебр Хопфа — это один из самых важных примеров квантовых групп. Реализации этих алгебр Хопфа, использующие R-матрицы, приводят к специальным алгебраическим методам для изучения их структуры и представлений; см., например, [**32**], [**96**], [**137**]. Более того, эти методы применимы и к самим алгебрам Ли, что позволяет обнаружить новые свойства связанных с ними объектов. Именно R-матричная техника и составляет основу нашего подхода. Мы начнём её развивать с приложений к простым алгебрам Ли $\mathfrak{g}$ классических серий. Затем перейдём к соответствующим аффинным алгебрам Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{g}}$ и классу квантовых групп $\mathrm{Y}(\mathfrak{g})$, называемых *янгианами*. В обоих случаях определяющие соотношения этих алгебр записываются в терминах матриц, составленных из образующих. Такие матрицы можно понимать как «операторы» в пространстве тензоров $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ с коэффициентами в соответствующих алгебрах. По этой причине существенную роль будет играть *двойственность Шура–Вейля*, которую составляют естественное действие классической алгебры Ли в пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ и коммутирующее действие либо симметрической группы (для серии A), либо алгебры Брауэра (для серий B, C и D).

Мы начнём с обзора нескольких конструкций примитивных идемпотентов для симметрической группы и алгебры Брауэра, основанных на соответствующих процедурах слияния, приводящих к мультипликативным R-матричным формулам для идемпотентов (гл. 1). Они будут применяться для построения инвариантов симметрических алгебр $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ в гл. 2. После этого мы будем использовать R-матричную технику, чтобы вывести основные алгебраические свойства *матриц Манина* (гл. 3). Они будут нужны для построения элементов Казимира для общих линейных алгебр Ли (гл. 4). Аналогичные конструкции для ортогональной и симплектической алгебр Ли с применением симметризаторов и антисимметризаторов в алгебре Брауэра будут обсуждаться в гл. 5.

В гл. 6 мы вводим центр аффинной вертексной алгебры на критическом уровне, связанный с аффинной алгеброй Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{g}}$. Образующие центра для классических серий будут построены в явном виде в гл. 7 и 8. Они будут использоваться для доказательства теоремы Фейгина–Френкеля. В гл. 9 мы применим эти образующие для построения коммутативных подалгебр в классических универсальных обёртывающих алгебрах. Это даёт решение проблемы «квантования» подалгебр сдвига аргумента в симметрических алгебрах.

При вычислении образов Хариш-Чандры векторов Сигала–Сугавары мы будем опираться на формулы для характеров некоторых конечномерных представлений янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{g})$. Ключевую роль в выводе этих формул, который мы обсудим в гл. 10 и 11, будет снова играть R-матричная техника. В гл. 12 мы определим классические $\mathcal{W}$-алгебры и построим их образующие. Некоторые специальные семейства образующих классической $\mathcal{W}$-алгебры $\mathcal{W}({}^L\mathfrak{g})$, связанной с двойственной по Ленглендсу алгеброй Ли ${}^L\mathfrak{g}$, возникнут как образы векторов Сигала–Сугавары относительно аффинной версии изоморфизма Хариш-Чандры (гл. 13). Приложения к модели Годена будут обсуждаться в гл. 14. В заключительной гл. 15 мы приведём конструкцию модулей Вакимото над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ для всех классических серий и вычислим собственные значения операторов Сугавары в этих модулях.

Библиографические замечания в конце каждой главы указывают на оригинальные источники и содержат дополнительные ссылки на литературу. Нумерация глав, параграфов, утверждений и формул соответствует английскому изданию («Sugawara operators for classical Lie algebras», Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 229. Providence, RI: AMS, 2018). Несколько опечаток и неточностей были исправлены при переводе.

Начальный вариант изложения основывался на записках лекций, прочитанных автором на *Второй китайско–американской летней школе по теории представлений* в Гуанчжоу (2011), которую организовали Лёк Хелминк и Наихуан Джинг, а также на *Международной конференции по тропической и квантовой геометриям* в Киото (2012), которую организовали Анатолий Кириллов и Шигефуми Мори. Я очень благодарен организаторам за приглашения. Я также благодарен Алексею Исаеву, Евгению Мухину, Эрику Рагуси, Вячеславу Футорному и Александру Червову за сотрудничество в работе над проектами, которые легли в основу книги.

Александр Молев

Москва, Сидней

Глава 1

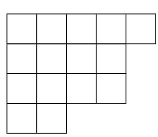
Идемпотенты и следы

Мы начнём с обзора некоторых основных фактов, касающихся представлений симметрической группы и алгебры Брауэра. Кроме стандартного материала, который можно найти в книгах Гудмана и Уоллаха [**59**], Джеймса и Кербера [**79**] и Сагана [**142**], мы обсудим процедуры слияния, приводящие к мультипликативным формулам для примитивных идемпотентов в обоих случаях. Идемпотенты, связанные с одномерными представлениями, будут играть ключевую роль в конструкциях образующих центра Фейгина–Френкеля в гл. 7 и 8. Кроме того, мы определим отображения следов на алгебре Брауэра и установим их связь со следами линейных операторов, возникающих из естественных действий симметрической группы и алгебры Брауэра в тензорах.

§ 1.1. Примитивные идемпотенты для симметрической группы

Мы будем использовать обозначение $\mathfrak{S}_m$ для симметрической группы, элементы которой — это перестановки множества $\{1, \dots, m\}$. Группу $\mathfrak{S}_{m-1}$ мы будем отождествлять с подгруппой в $\mathfrak{S}_m$, состоящей из таких перестановок s, что $s(m) = m$. Транспозицию $(a\,b)$ элементов a и b, удовлетворяющих условию $1 \leqslant a < b \leqslant m$, мы будем часто обозначать через $s_{a\,b}$.

Разбиение λ — это такая невозрастающая последовательность целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, что $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Мы будем отождествлять разбиение λ с его *диаграммой* (*Юнга*), которая представляет собой таблицу строк из единичных квадратов (клеток), выровненных к левому краю, так что верхняя строка содержит λ_1 клеток, вторая строка λ_2 клеток и т. д. Число ненулевых строк называется *длиной* разбиения λ и обозначается через $\ell(\lambda)$. Клетка диаграммы $\alpha = (i, j)$ определяется по номеру её строки i и столбца j. *Содержание* такой клетки — это число $c(\alpha) = j - i$. Положим $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Если $|\lambda| = m$, то λ — это *разбиение числа* m, что записывается как $\lambda \vdash m$. Например, длина разбиения $(5, 4, 4, 2)$ числа 15 равна 4, а диаграмма имеет вид



Клетка диаграммы λ называется *удаляемой*, если после её удаления остаётся диаграмма. Клетка вне λ называется *добавляемой*, если её объединение с λ — это диаграмма. В приведённом примере клетки $(1,5)$, $(3,4)$ и $(4,2)$ удаляемые, а клетки $(1,6)$, $(2,5)$, $(4,3)$ и $(5,1)$ добавляемые.

Таблица $\mathcal{U}$ *формы* $\lambda \vdash m$ (или λ-*таблица* $\mathcal{U}$) получается заполнением каждой клетки диаграммы одним из чисел, взятым из фиксированного множества $\{1,\dots,N\}$. Таблица называется *полустандартной*, если числа в каждой строке не убывают слева направо, а числа в каждом столбце (строго) возрастают сверху вниз. Запись $\mathrm{sh}(\mathcal{U}) = \lambda$ означает, что таблица $\mathcal{U}$ имеет форму λ.

Таблица $\mathcal{U}$, клетки которой биективно заполнены числами из множества $\{1,\dots,m\}$, называется *стандартной*, если числа в каждой строке возрастают слева направо, а числа в каждом столбце возрастают сверху вниз. Вот пример стандартной таблицы формы $(4,4,1)$:

1	3	4	5
2	6	7	9
8			

Неприводимые представления симметрической группы $\mathfrak{S}_m$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ параметризуются разбиениями числа m. Обозначим представление, отвечающее разбиению $\lambda \vdash m$, через V_λ. Пространство V_λ обладает $\mathfrak{S}_m$-инвариантным скалярным произведением $(\ ,\ )$. Ортонормированный *базис Юнга* $\{v_{\mathcal{U}}\}$ в V_λ параметризуется множеством стандартных λ-таблиц $\mathcal{U}$. Действие образующих $s_a = s_{a\,a+1}$ симметрической группы $\mathfrak{S}_m$ в базисе Юнга описывается следующим образом. Обозначим через $c_b = c_b(\mathcal{U})$ содержание клетки стандартной λ-таблицы $\mathcal{U}$, занятой числом b. Для любого $a \in \{1,\dots,m-1\}$ имеем

$$s_a \cdot v_{\mathcal{U}} = d v_{\mathcal{U}} + \sqrt{1-d^2}\, v_{s_a\mathcal{U}}, \qquad d = (c_{a+1} - c_a)^{-1}, \tag{1.1}$$

где $s_a\mathcal{U}$ обозначает таблицу, полученную из $\mathcal{U}$ перестановкой элементов a и $a+1$, и мы считаем, что $v_{s_a\mathcal{U}} = 0$ если таблица $s_a\mathcal{U}$ не является стандартной.

Групповая алгебра $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ изоморфна прямой сумме матричных алгебр:

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m] \cong \bigoplus_{\lambda \vdash m} \mathrm{Mat}_{f_\lambda}(\mathbb{C}), \tag{1.2}$$

где $f_\lambda = \dim V_\lambda$. Эта размерность равна числу стандартных таблиц формы λ, её можно вычислить по *формуле крюков*

$$f_\lambda = \frac{m!}{h(\lambda)}, \qquad h(\lambda) = \prod_{(i,j)\in\lambda} (\lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1), \tag{1.3}$$

где λ'_j обозначает число клеток в столбце j диаграммы λ.

Матричные единицы $e_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} \in \mathrm{Mat}_{f_\lambda}(\mathbb{C})$ параметризуются парами стандартных λ-таблиц $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$. Мы будем отождествлять групповую алгебру $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ с прямой суммой матричных алгебр по формулам

$$e_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \frac{f_\lambda}{m!}\, \phi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}, \tag{1.4}$$

где $\phi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ — это матричный элемент, соответствующий базисным векторам $v_{\mathcal{U}}$ и $v_{\mathcal{U}'}$ в представлении V_λ,

$$\phi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \sum_{s\in\mathfrak{S}_m} (s\cdot v_{\mathcal{U}}, v_{\mathcal{U}'})\, s^{-1} \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]. \tag{1.5}$$

Положим $\phi_{\mathcal{U}} = \phi_{\mathcal{U}\mathcal{U}}$. Диагональные матричные единицы $e_{\mathcal{U}} = e_{\mathcal{U}\mathcal{U}}$ — это *примитивные идемпотенты* групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$. Они попарно ортогональны:

$$e_{\mathcal{U}}\, e_{\mathcal{V}} = 0 \qquad \text{если} \quad \mathcal{U} \neq \mathcal{V}.$$

Кроме того, $e_{\mathcal{U}}^2 = e_{\mathcal{U}}$, и справедливо разложение единицы в сумму идемпотентов:

$$1 = \sum_{\lambda\vdash m}\ \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\lambda} e_{\mathcal{U}}.$$

Отметим некоторые простые свойства матричных единиц, которые понадобятся позже.

Лемма 1.1.1. *Пусть $\mathcal{U}$ — это стандартная таблица формы λ, и пусть $a \in \{1,\dots,m-1\}$. Тогда*

$$e_{\mathcal{U}}\,(s_a - d) = e_{\mathcal{U}}\, s_a\, e_{s_a\mathcal{U}} \tag{1.6}$$

и

$$e_{s_a\mathcal{U}}\, s_a\, e_{\mathcal{U}}\, s_a\, e_{s_a\mathcal{U}} = (1-d^2)\, e_{s_a\mathcal{U}}, \tag{1.7}$$

где d вычисляется так же, как в (1.1), и мы предполагаем, что $e_{s_a\mathcal{U}} = 0$, если таблица $s_a\mathcal{U}$ не стандартная.

Доказательство. Имеем

$$\phi_{\mathcal{U}}\, s_a = \sum_{s\in\mathfrak{S}_m} (s\cdot v_{\mathcal{U}}, v_{\mathcal{U}})\,(s_a s)^{-1} = \sum_{t\in\mathfrak{S}_m} (s_a t\cdot v_{\mathcal{U}}, v_{\mathcal{U}})\, t^{-1} = \sum_{t\in\mathfrak{S}_m} (t\cdot v_{\mathcal{U}}, s_a\cdot v_{\mathcal{U}})\, t^{-1}.$$

Следовательно, применяя соотношение (1.1), получаем

$$\phi_{\mathcal{U}}\, s_a = d\,\phi_{\mathcal{U}} + \sqrt{1-d^2}\,\phi_{\mathcal{U}\, s_a\mathcal{U}},$$

так что в силу (1.4)

$$e_{\mathcal{U}}\,(s_a - d) = \sqrt{1-d^2}\, e_{\mathcal{U}\, s_a\mathcal{U}}. \tag{1.8}$$

Этот элемент не изменится, если его умножить справа на матричную единицу $e_{s_a\mathcal{U}}$. Отсюда следует (1.6), поскольку $e_{\mathcal{U}}\, e_{s_a\mathcal{U}} = 0$. Теперь, предполагая, что $e_{s_a\mathcal{U}} \neq 0$, и заменяя $\mathcal{U}$ на $s_a\mathcal{U}$ в (1.8), получим

$$e_{s_a\mathcal{U}}\,(s_a + d) = \sqrt{1-d^2}\, e_{s_a\mathcal{U}\,\mathcal{U}}.$$

Вместе с (1.8) это даст соотношение

$$e_{s_a\mathcal{U}}\, s_a\, e_{\mathcal{U}}\, s_a\, e_{s_a\mathcal{U}} = e_{s_a\mathcal{U}}\,(s_a+d)\, e_{\mathcal{U}}\,(s_a-d)\, e_{s_a\mathcal{U}} = (1-d^2)\, e_{s_a\mathcal{U}},$$

что доказывает (1.7). □

Мы будем рассматривать *характер* представления V_λ как элемент групповой алгебры

$$\chi_\lambda = \sum_{s\in\mathfrak{S}_m} \chi_\lambda(s)\, s^{-1} \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m],$$

так что

$$\chi_\lambda = \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\lambda} \phi_{\mathcal{U}} = h(\lambda) \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\lambda} e_{\mathcal{U}}.$$

Отметим полезное тождество: для любой стандартной λ-таблицы $\mathcal{U}$ имеем

$$\chi_\lambda = \sum_{s\in\mathfrak{S}_m} s\, e_{\mathcal{U}}\, s^{-1}. \tag{1.9}$$

Примитивные идемпотенты $e_{\mathcal{U}}$ допускают явные выражения в терминах *элементов Юциса–Мёрфи* $x_1, \ldots, x_m$ групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$, заданных по правилу

$$x_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad x_a = s_{1\,a} + \cdots + s_{a-1\,a} \qquad \text{для} \quad a = 2, \ldots, m. \tag{1.10}$$

Заметим, что x_m коммутирует с любым элементом подгруппы $\mathfrak{S}_{m-1}$. Поэтому элементы Юциса–Мёрфи порождают коммутативную подалгебру в групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$. Кроме того, векторы базиса Юнга являются собственными векторами для действия элементов x_a в пространстве V_λ. Для произвольной стандартной λ-таблицы $\mathcal{U}$ имеем

$$x_a \cdot v_{\mathcal{U}} = c_a(\mathcal{U})\, v_{\mathcal{U}}, \qquad a = 1, \ldots, m.$$

Из этих соотношений следует, что

$$x_a\, e_{\mathcal{U}} = e_{\mathcal{U}}\, x_a = c_a(\mathcal{U})\, e_{\mathcal{U}}, \qquad a = 1, \ldots, m. \tag{1.11}$$

В частности, в групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ справедливо тождество

$$x_m = \sum_{\lambda\vdash m} \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\lambda} c_m(\mathcal{U})\, e_{\mathcal{U}}, \tag{1.12}$$

так что при отождествлении (1.2) элемент x_m можно рассматривать как диагональную матрицу.

Пусть теперь $m \geqslant 2$, и пусть λ — это разбиение числа m. Зафиксируем стандартную λ-таблицу $\mathcal{U}$ и обозначим через $\mathcal{V}$ стандартную таблицу, полученную из $\mathcal{U}$ удалением клетки α, занятой числом m. Тогда форма таблицы $\mathcal{V}$ — это диаграмма, которую мы обозначим через μ. Пусть c обозначает содержание клетки α, а u — это переменная. В силу (1.12) выражение

$$e_{\mathcal{V}}\, \frac{u-c}{u-x_m} \tag{1.13}$$

— это рациональная функция от u со значениями в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$. Поскольку $e_{\mathcal{U}_0} = 1$ для (1)-таблицы $\mathcal{U}_0$ с единственным элементом 1, следующие рекуррентные соотношения позволяют выразить примитивный идемпотент $e_{\mathcal{U}}$ в терминах элементов Юциса–Мёрфи x_a.

Предложение 1.1.2. *В алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ выполняется соотношение*

$$e_{\mathcal{U}} = e_{\mathcal{V}} \frac{(x_m - a_1)\dots(x_m - a_l)}{(c - a_1)\dots(c - a_l)}, \tag{1.14}$$

где $a_1, \dots, a_l$ — это содержания всех добавляемых клеток к μ, кроме α, а c — это содержание клетки α. Кроме того, рациональная функция (1.13) *регулярна при $u = c$, и справедлива формула*

$$e_{\mathcal{U}} = e_{\mathcal{V}} \frac{u - c}{u - x_m}\Big|_{u=c}. \tag{1.15}$$

Доказательство. Из свойств базиса Юнга вытекает соотношение

$$e_{\mathcal{V}} = \sum_{\mathcal{U}'} e_{\mathcal{U}'}, \tag{1.16}$$

где суммирование производится по стандартным таблицам $\mathcal{U}'$, которые получаются из $\mathcal{V}$ добавлением одной клетки, содержащей число m. Применим теперь это соотношение, чтобы упростить правую часть формулы (1.14). Она оказывается равной $e_{\mathcal{U}}$, так как произведение

$$e_{\mathcal{U}'} \frac{(x_m - a_1)\dots(x_m - a_l)}{(c - a_1)\dots(c - a_l)}$$

равно нулю для всех $\mathcal{U}' \neq \mathcal{U}$ и равно 1 для $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$ в силу соотношений (1.11). Аналогично, применяя (1.11) и (1.16), получим

$$e_{\mathcal{V}} \frac{u - c}{u - x_m} = \sum_{\mathcal{U}'} e_{\mathcal{U}'} \frac{u - c}{u - c_m(\mathcal{U}')} = e_{\mathcal{U}} + \sum_{\mathcal{U}' \neq \mathcal{U}} e_{\mathcal{U}'} \frac{u - c}{u - c_m(\mathcal{U}')}.$$

Поскольку $c_m(\mathcal{U}') \neq c$ для всех стандартных таблиц $\mathcal{U}'$, отличных от $\mathcal{U}$, значение этой рациональной функции при $u = c$ равно $e_{\mathcal{U}}$. □

Пример 1.1.3. Тривиальное одномерное представление группы $\mathfrak{S}_m$ отвечает разбиению (m); его диаграмма — это строка с m клетками. Из определений (1.4) и (1.5) вытекает, что идемпотент $e_{\mathcal{U}}$, соответствующий единственной стандартной таблице $\mathcal{U}$ формы (m), совпадает с *симметризатором*

$$h^{(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_m} s. \tag{1.17}$$

Из предложения 1.1.2 следует мультипликативная формула

$$h^{(m)} = \frac{(1 + x_2)(1 + x_3)\dots(1 + x_m)}{m!}. \tag{1.18}$$

□

Пример 1.1.4. Представление знака группы $\mathfrak{S}_m$ отвечает разбиению (1^m); его диаграмма — это столбец с m клетками. В силу (1.4) и (1.5) идемпотент $e_{\mathcal{U}}$, соответствующий единственной стандартной таблице $\mathcal{U}$ формы (1^m), совпадает с *антисимметризатором*

$$a^{(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn} s \cdot s. \tag{1.19}$$

Из предложения 1.1.2 следует мультипликативная формула

$$a^{(m)} = \frac{(1-x_2)(1-x_3)\dots(1-x_m)}{m!}. \tag{1.20}$$

□

Пример 1.1.5. При $m=2$ имеется два примитивных идемпотента — симметризатор $h^{(2)}$ и антисимметризатор $a^{(2)}$. При $m=3$ кроме симметризатора $h^{(3)}$ и антисимметризатора $a^{(3)}$ есть ещё два примитивных идемпотента, соответствующих стандартным таблицам

$$\mathcal{U} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{V} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Они задаются формулами

$$e_{\mathcal{U}} = \frac{1}{6}\big(1+(1\,2)\big)\big(2-(1\,3)-(2\,3)\big) \quad \text{и} \quad e_{\mathcal{V}} = \frac{1}{6}\big(1-(1\,2)\big)\big(2+(1\,3)+(2\,3)\big).$$

□

Отметим здесь одно свойство элементов Юциса–Мёрфи, которое будет использоваться для вычисления следов в §1.3.

Лемма 1.1.6. *Выполняется тождество для рациональных функций от u со значениями в групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$:*

$$\frac{1}{u-x_m} = s_{m-1}\,\frac{1}{u-x_{m-1}}\,s_{m-1} + \frac{1}{u-x_{m-1}}\left(s_{m-1} + \frac{1}{u-x_m}\right)\frac{1}{u-x_{m-1}}. \tag{1.21}$$

Доказательство. В групповой алгебре имеем $s_{m-1}x_m = x_{m-1}s_{m-1}+1$. Отсюда следует, что

$$s_{m-1} + \frac{1}{u-x_m} = (u-x_{m-1})\,s_{m-1}\,\frac{1}{u-x_m}. \tag{1.22}$$

Умножая слева на обратный элемент к $(u-x_{m-1})\,s_{m-1}$, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{u-x_m} &= s_{m-1}\,\frac{1}{u-x_{m-1}}\left(s_{m-1}+\frac{1}{u-x_m}\right) = \\ &= s_{m-1}\,\frac{1}{u-x_{m-1}}\,s_{m-1} + s_{m-1}\,\frac{1}{(u-x_{m-1})(u-x_m)}.\end{aligned}$$

Остаётся переставить два множителя в знаменателе последней дроби и ещё раз применить (1.22), чтобы получить (1.21). □

Другой способ выразить примитивные идемпотенты $e_{\mathcal{U}}$ предоставляет *процедура слияния*, восходящая к работе Юциса [**84**]. С тех пор различные варианты этой процедуры были обнаружены многими авторами. Возьмём m переменных $u_1,\dots,u_m$ и рассмотрим рациональную функцию со значениями в групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$, определённую по формуле

$$\phi(u_1,\dots,u_m) = \prod_{1\leqslant a<b\leqslant m}\left(1-\frac{s_{ab}}{u_a-u_b}\right), \tag{1.23}$$

в которой произведение берётся в соответствии с лексикографическим порядком на множестве пар (a,b). Пусть λ — это разбиение числа m, и пусть $\mathcal{U}$ — это стандартная λ-таблица. Как и раньше, положим $c_a = c_a(\mathcal{U})$ для $a = 1, \ldots, m$, так что $c_a = j - i$, если a занимает клетку (i, j) в таблице $\mathcal{U}$.

Предложение 1.1.7. *Последовательные значения рациональной функции $\phi(u_1, \ldots, u_m)$ в указанных ниже точках корректно определены. Её значение совпадает с примитивным идемпотентом $e_{\mathcal{U}}$, умноженным на произведение длин крюков*:

$$\phi(u_1, \ldots, u_m)\big|_{u_1=c_1}\big|_{u_2=c_2} \ldots \big|_{u_m=c_m} = h(\lambda)\, e_{\mathcal{U}}.$$

Доказательство. Групповую алгебру $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ можно рассматривать как фактор алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ по идеалу, порождённому всеми элементами ϵ_{ab}; см. §1.2. Поэтому требуемое утверждение вытекает из предложения 1.2.3. Кроме того, прямое рассуждение можно также получить с помощью очевидных упрощений доказательства этого предложения. $\square$

Пример 1.1.8. Содержания единственной стандартной таблицы-строки с m клетками имеют вид $c_a = a - 1$ при $a = 1, \ldots, m$. Следовательно, симметризатор (1.17) задаётся мультипликативной формулой

$$h^{(m)} = \frac{1}{m!} \prod_{1 \leqslant a < b \leqslant m} \Big(1 + \frac{s_{ab}}{b - a}\Big),$$

в которой произведение берётся в соответствии с лексикографическим порядком на множестве пар (a, b). $\square$

Пример 1.1.9. Содержания единственной стандартной таблицы-столбца с m клетками имеют вид $c_a = -a + 1$ при $a = 1, \ldots, m$. Поэтому антисимметризатор (1.19) задаётся мультипликативной формулой

$$a^{(m)} = \frac{1}{m!} \prod_{1 \leqslant a < b \leqslant m} \Big(1 - \frac{s_{ab}}{b - a}\Big), \tag{1.24}$$

в которой произведение берётся в соответствии с лексикографическим порядком на множестве пар (a, b). $\square$

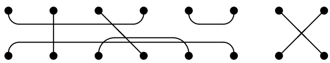
Пример 1.1.10. В силу предложения 1.1.7 примитивные идемпотенты $e_{\mathcal{U}}$ и $e_{\mathcal{V}}$ из примера 1.1.5 задаются формулами

$$e_{\mathcal{U}} = \frac{1}{3} \big(1 + (1\,2)\big)\big(1 - (1\,3)\big)\Big(1 - \frac{(2\,3)}{2}\Big),$$
$$e_{\mathcal{V}} = \frac{1}{3} \big(1 - (1\,2)\big)\big(1 + (1\,3)\big)\Big(1 + \frac{(2\,3)}{2}\Big).$$

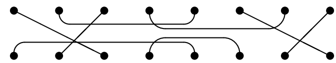
§ 1.2. Примитивные идемпотенты для алгебры Брауэра

Пусть ω — это переменная. Назовём *m-диаграммой* набор из $2m$ вершин (точек на плоскости), расположенных в два ряда по m вершин в каждом ряду и соединённых m рёбрами так, что каждая вершина принадлежит только одному ребру. Чтобы определить произведение dd' двух диаграмм d и d', поместим диаграмму d под d' и отождествим вершины нижнего ряда в d'

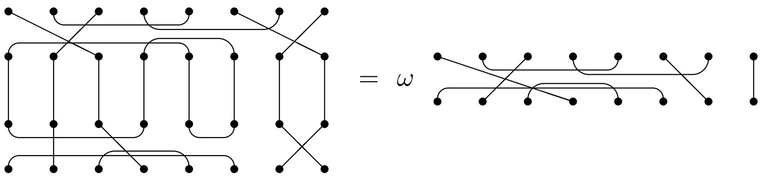
с соответствующими вершинами верхнего ряда в d. Пусть s — это число замкнутых петель, образовавшихся в результате этой процедуры. Произведение dd' равно степени переменной ω^s, умноженной на получившуюся диаграмму без петель. Например, произведение 8-диаграмм



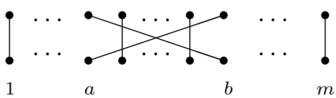
и



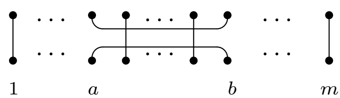
вычисляется следующим образом:



Алгебра Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ определяется как $\mathbb{C}(\omega)$-линейная оболочка всех m-диаграмм с определённым выше умножением. Размерность алгебры — это число m-диаграмм, оно равно $1 \cdot 3 \cdots (2m-1)$. При $1 \leqslant a < b \leqslant m$ обозначим через $s_{a\,b}$ и $\epsilon_{a\,b}$ соответствующие диаграммы вида



и



Подалгебра в $\mathcal{B}_m(\omega)$, порождённая над полем $\mathbb{C}$ всеми элементами $s_{a\,b}$, изоморфна групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$. При этом m-диаграмма $s_{a\,b}$ соответствует транспозиции $(a\,b)$. Иногда мы будем использовать эти обозначения с переставленными индексами, так что $s_{b\,a} = s_{a\,b}$ и $\epsilon_{b\,a} = \epsilon_{a\,b}$. Алгебра Брауэра $\mathcal{B}_{m-1}(\omega)$ будет рассматриваться как естественная подалгебра в $\mathcal{B}_m(\omega)$. Эта подалгебра линейно порождается всеми m-диаграммами, в которых m-е вершины в верхнем и нижнем ряду соединены ребром. Алгебра $\mathcal{B}_m(\omega)$ порождается элементами

$$s_a = s_{a\,a+1}, \qquad \epsilon_a = \epsilon_{a\,a+1}, \qquad a = 1, \dots, m-1, \tag{1.25}$$

со следующими определяющими соотношениями:

$$s_a^2 = 1, \qquad \epsilon_a^2 = \omega\,\epsilon_a, \qquad s_a\epsilon_a = \epsilon_a s_a = \epsilon_a, \qquad a = 1, \dots, m-1,$$

$$s_a s_b = s_b s_a, \qquad \epsilon_a\epsilon_b = \epsilon_b\epsilon_a, \qquad s_a\epsilon_b = \epsilon_b s_a, \qquad |a-b| > 1,$$

$$s_a s_{a+1} s_a = s_{a+1} s_a s_{a+1}, \qquad \epsilon_a\epsilon_{a+1}\epsilon_a = \epsilon_a, \qquad \epsilon_{a+1}\epsilon_a\epsilon_{a+1} = \epsilon_{a+1},$$

$$s_a\epsilon_{a+1}\epsilon_a = s_{a+1}\epsilon_a, \qquad \epsilon_{a+1}\epsilon_a s_{a+1} = \epsilon_{a+1} s_a, \qquad a = 1, \dots, m-2.$$

Элементы Юциса–Мёрфи $y_1, \dots, y_m$ для алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ определяются формулами

$$y_b = \frac{\omega - 1}{2} + \sum_{a=1}^{b-1} (s_{a\,b} - \epsilon_{a\,b}), \qquad b = 1, \dots, m. \tag{1.26}$$

Простая проверка показывает, что y_m коммутирует со всеми элементами подалгебры $\mathcal{B}_{m-1}(\omega)$. Отсюда следует, что элементы $y_1, \dots, y_m$ алгебры $\mathcal{B}_m(\omega)$ попарно коммутируют.

По теореме Вензля [**153**, Theorem 3.2] алгебра $\mathcal{B}_m(\omega)$ над полем $\mathbb{C}(\omega)$ полупроста. Она изоморфна прямой сумме матричных алгебр, где размеры матриц — это размерности неприводимых представлений. Эти представления параметризуются разбиениями λ чисел $m - 2f$ при $f = 0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor$. Будем называть *ud-таблицей*[1] *формы* λ такую последовательность диаграмм $\mathcal{U} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$, что для каждого $r = 1, \dots, m$ диаграмма Λ_r получается из Λ_{r-1} добавлением или удалением одной клетки; при этом $\Lambda_0 = \varnothing$ — это пустая диаграмма, и $\Lambda_m = \lambda$. Неприводимое представление алгебры $\mathcal{B}_m(\omega)$, отвечающее разбиению λ, обладает базисом, аналогичным базису Юнга; его векторы теперь нумеруются ud-таблицами формы λ. Сопоставим каждой ud-таблице $\mathcal{U}$ последовательность *содержаний* $(c_1, \dots, c_m)$, $c_r = c_r(\mathcal{U})$, где

$$c_r = \frac{\omega - 1}{2} + j - i \qquad \text{или} \qquad c_r = -\Big(\frac{\omega - 1}{2} + j - i\Big),$$

если Λ_r получается добавлением клетки (i, j) к Λ_{r-1} или удалением этой клетки из Λ_{r-1}, соответственно.

Точно так же, как для изоморфизма (1.2), примитивные идемпотенты $e_{\mathcal{U}} = e^{\lambda}_{\mathcal{U}} \in \mathcal{B}_m(\omega)$, отвечающие ud-таблицам $\mathcal{U}$, соответствуют диагональным матричным единицам (мы будем опускать верхние индексы λ, поскольку они однозначно определяются по ud-таблицам). Когда λ пробегает все разбиения чисел $m, m-2, \dots$, а $\mathcal{U}$ пробегает все ud-таблицы формы λ, элементы $e_{\mathcal{U}}$ составляют полный набор попарно ортогональных примитивных идемпотентов для алгебры $\mathcal{B}_m(\omega)$. Выполняются следующие аналоги соотношений (1.11):

$$y_r\, e_{\mathcal{U}} = e_{\mathcal{U}}\, y_r = c_r(\mathcal{U})\, e_{\mathcal{U}}, \qquad r = 1, \dots, m. \tag{1.27}$$

Примитивные идемпотенты можно получить с помощью следующих рекуррентных формул, аналогичных формулам (1.14). Для данной ud-таблицы $\mathcal{U} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$ формы λ положим $\mu = \Lambda_{m-1}$ и рассмотрим ud-таблицу $\mathcal{V} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m-1})$ формы μ. Пусть α — это та клетка, которую добавили к диаграмме μ или удалили из неё, чтобы получить λ, и пусть c — это содержание клетки α.

Предложение 1.2.1. *В алгебре $\mathcal{B}_m(\omega)$ выполняется соотношение*

$$e_{\mathcal{U}} = e_{\mathcal{V}}\, \frac{(y_m - a_1) \dots (y_m - a_k)}{(c - a_1) \dots (c - a_k)}, \tag{1.28}$$

[1] Соответствующий английский термин — «updown tableau».

где $a_1, \dots, a_k$ *— это содержания всех добавляемых и удаляемых клеток для* μ*, кроме* α*. Кроме того, в следующей формуле рациональная функция регулярна при* $u = c$*, а примитивный идемпотент находится как её значение*:

$$e_{\mathcal{U}} = e_{\mathcal{V}}\, \frac{u-c}{u-y_m}\Big|_{u=c}. \tag{1.29}$$

Доказательство. Обе части проверяются с помощью таких же рассуждений, как в доказательстве предложения 1.1.2, с использованием свойств ветвления неприводимых представлений алгебры Брауэра. Для ud-таблицы $\mathcal{V} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m-1})$ справедливо соотношение

$$e_{\mathcal{V}} = \sum_{\mathcal{U}'} e_{\mathcal{U}'} \tag{1.30}$$

с суммированием по всем ud-таблицам вида $\mathcal{U}' = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m-1}, \Lambda'_m)$. Остаётся только применить свойства (1.27). $\square$

Пример 1.2.2. Алгебра Брауэра $\mathcal{B}_2(\omega)$ имеет три одномерных представления. При этом ud-таблицы, отвечающие диаграммам (2), (1^2) и $\varnothing$, имеют вид

$$\mathcal{U}_1 = \big(\square,\ \ \square\!\square\big), \qquad \mathcal{U}_2 = \Big(\square,\ \ \begin{smallmatrix}\square\\ \square\end{smallmatrix}\Big), \qquad \mathcal{U}_3 = \big(\square,\ \ \varnothing\big).$$

Соответствующие содержания (c_1, c_2) задаются выражениями

$$\Big(\frac{\omega-1}{2}, \frac{\omega+1}{2}\Big), \qquad \Big(\frac{\omega-1}{2}, \frac{\omega-3}{2}\Big), \qquad \Big(\frac{\omega-1}{2}, -\frac{\omega-1}{2}\Big).$$

Примитивные идемпотенты имеют вид

$$e_{\mathcal{U}_1} = \frac{1+s_1}{2} - \frac{\epsilon_1}{\omega}, \qquad e_{\mathcal{U}_2} = \frac{1-s_1}{2}, \qquad e_{\mathcal{U}_3} = \frac{\epsilon_1}{\omega}.$$

$\square$

Тривиальное одномерное представление алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ отвечает разбиению (m). Имеется единственная ud-таблица формы (m), которую можно также рассматривать как стандартную таблицу-строку с числами $1, \dots, m$, вписанными в клетки слева направо. Соответствующий примитивный идемпотент — это *симметризатор* $s^{(m)} \in \mathcal{B}_m(\omega)$. Этот идемпотент однозначно определяется своими свойствами

$$s_{ab}\, s^{(m)} = s^{(m)}\, s_{ab} = s^{(m)} \qquad \text{и} \qquad \epsilon_{ab}\, s^{(m)} = s^{(m)}\, \epsilon_{ab} = 0 \tag{1.31}$$

для всех $1 \leqslant a < b \leqslant m$. В силу (1.28) он выражается через элементы Юциса–Мёрфи по формуле

$$s^{(m)} = \frac{1}{m!} \prod_{r=2}^{m} \frac{(y_r - c_1 + 1)(y_r + c_1 + r - 2)}{\omega + 2r - 4}, \qquad c_1 = \frac{\omega - 1}{2}. \tag{1.32}$$

Для алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ имеются два варианта процедуры слияния. Они оба выражают примитивный идемпотент $e_{\mathcal{U}}$ в терминах некоторых универсальных рациональных функций со значениями в алгебре $\mathcal{B}_m(\omega)$ по аналогии с предложением 1.1.7. Нам понадобятся только частные случаи этих вариантов, в которых λ — это разбиение числа m. Чтобы сформулировать результаты в этих случаях, заметим, что ud-таблицу $\mathcal{U} = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$ формы λ можно также рассматривать как стандартную таблицу. Она получится, если каждый элемент r множества $\{1, \ldots, m\}$ поместить в клетку диаграммы λ, которую следует добавить к диаграмме Λ_{r-1}, чтобы получить Λ_r. Как и раньше, $(c_1, \ldots, c_m)$ будет обозначать последовательность содержаний $c_a = c_a(\mathcal{U})$, отвечающую таблице $\mathcal{U}$.

Введём рациональную функцию от m переменных $u_1, \ldots, u_m$ по формуле

$$\psi(u_1, \ldots, u_m) = \prod_{1 \leqslant a < b \leqslant m} \Big(1 - \frac{\epsilon_{ab}}{u_a + u_b}\Big) \prod_{1 \leqslant a < b \leqslant m} \Big(1 - \frac{s_{ab}}{u_a - u_b}\Big), \tag{1.33}$$

в которой оба произведения берутся в соответствии с лексикографическим порядком на множестве пар (a, b).

Предложение 1.2.3. *Последовательные значения рациональной функции $\psi(u_1, \ldots, u_m)$ в указанных ниже точках корректно определены, и справедлива формула*

$$\psi(u_1, \ldots, u_m)\big|_{u_1=c_1}\big|_{u_2=c_2} \ldots \big|_{u_m=c_m} = h(\lambda)\, e_{\mathcal{U}}, \tag{1.34}$$

где $h(\lambda)$ — это произведение длин крюков диаграммы λ, определённое в (1.3).

Доказательство. В качестве первого шага проверим индуктивную формулу для функции $\psi(u_1, \ldots, u_m)$:

$$\begin{aligned}\psi(u_1, \ldots, u_m) = \psi(u_1, \ldots, u_{m-1}) \Big(1 - \frac{\epsilon_{m-1\, m}}{u_{m-1} + u_m}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{\epsilon_{1\, m}}{u_1 + u_m}\Big) \\ \times \Big(1 - \frac{s_{1\, m}}{u_1 - u_m}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{s_{m-1\, m}}{u_{m-1} - u_m}\Big).\end{aligned} \tag{1.35}$$

Она следует из легко проверяемых тождеств для рациональных функций от u и v со значениями в алгебре $\mathcal{B}_m(\omega)$: если $a < b < c$, то

$$\Big(1 - \frac{\epsilon_{a\, c}}{u}\Big)\Big(1 - \frac{\epsilon_{b\, c}}{v}\Big)\Big(1 - \frac{s_{a\, b}}{u - v}\Big) = \Big(1 - \frac{s_{a\, b}}{u - v}\Big)\Big(1 - \frac{\epsilon_{b\, c}}{v}\Big)\Big(1 - \frac{\epsilon_{a\, c}}{u}\Big). \tag{1.36}$$

Заметим, что элементы $\epsilon_{a\, b}$ и $\epsilon_{c\, d}$ алгебры $\mathcal{B}_m(\omega)$ коммутируют при условии, что все индексы a, b, c, d различны. Поэтому первое произведение в (1.33) можно записать как

$$\begin{aligned}\prod_{1 \leqslant a < b \leqslant m} \Big(1 - \frac{\epsilon_{a\, b}}{u_a + u_b}\Big) = \prod_{1 \leqslant a < b \leqslant m-1} \Big(1 - \frac{\epsilon_{a\, b}}{u_a + u_b}\Big) \\ \times \Big(1 - \frac{\epsilon_{1\, m}}{u_1 + u_m}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{\epsilon_{m-1\, m}}{u_{m-1} + u_m}\Big).\end{aligned}$$

Последовательно применяя тождества (1.36), получим

$$\begin{aligned}\Big(1 - \frac{\epsilon_{1\, m}}{u_1 + u_m}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{\epsilon_{m-1\, m}}{u_{m-1} + u_m}\Big) \prod_{1 \leqslant a < b \leqslant m-1} \Big(1 - \frac{s_{a\, b}}{u_a - u_b}\Big) \\ = \prod_{1 \leqslant a < b \leqslant m-1} \Big(1 - \frac{s_{a\, b}}{u_a - u_b}\Big)\Big(1 - \frac{\epsilon_{m-1\, m}}{u_{m-1} + u_m}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{\epsilon_{1\, m}}{u_1 + u_m}\Big),\end{aligned}$$

откуда следует формула (1.35).

Докажем предложение индукцией по m. По предположению индукции, полагая $u = u_m$, получаем

$$\psi(u_1, \dots, u_m)\big|_{u_1=c_1}\big|_{u_2=c_2} \dots \big|_{u_{m-1}=c_{m-1}}$$
$$= h(\mu)\, e_{\mathcal{V}} \Big(1 - \frac{\epsilon_{m-1\,m}}{c_{m-1}+u}\Big) \dots \Big(1 - \frac{\epsilon_{1\,m}}{c_1+u}\Big)\Big(1 - \frac{s_{1\,m}}{c_1-u}\Big) \dots \Big(1 - \frac{s_{m-1\,m}}{c_{m-1}-u}\Big),$$

где $\mathcal{V}$ — это стандартная таблица, полученная из $\mathcal{U}$ удалением клетки, содержащей число m, а μ — это форма таблицы $\mathcal{V}$. Теперь проверим тождество

$$e_{\mathcal{V}} \Big(1 - \frac{\epsilon_{m-1\,m}}{c_{m-1}+u}\Big) \dots \Big(1 - \frac{\epsilon_{1\,m}}{c_1+u}\Big)\Big(1 - \frac{s_{1\,m}}{c_1-u}\Big) \dots \Big(1 - \frac{s_{m-1\,m}}{c_{m-1}-u}\Big)$$
$$= \frac{u-c_1}{u-c_m} \prod_{r=1}^{m-1} \Big(1 - \frac{1}{(u-c_r)^2}\Big)\, e_{\mathcal{V}}\, \frac{u-c_m}{u-y_m}. \tag{1.37}$$

Заметим, что элемент Юциса–Мёрфи y_m коммутирует с идемпотентом $e_{\mathcal{V}}$. Далее, справедливы формулы

$$\Big(1 - \frac{s_{r\,m}}{c_r-u}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{1}{(u-c_r)^2}\Big) = 1 + \frac{s_{r\,m}}{c_r-u}$$

и

$$\Big(1 - \frac{\epsilon_{r\,m}}{c_r+u}\Big)^{-1} = 1 + \frac{\epsilon_{r\,m}}{c_r+u-\omega},$$

вытекающие из тождеств $s_{r\,m}^2 = 1$ и $\epsilon_{r\,m}^2 = \omega\, \epsilon_{r\,m}$. Поэтому соотношение (1.37) эквивалентно следующему:

$$e_{\mathcal{V}} \Big(1 + \frac{s_{m-1\,m}}{c_{m-1}-u}\Big) \dots \Big(1 + \frac{s_{1\,m}}{c_1-u}\Big)$$
$$\times \Big(1 + \frac{\epsilon_{1\,m}}{c_1+u-\omega}\Big) \dots \Big(1 + \frac{\epsilon_{m-1\,m}}{c_{m-1}+u-\omega}\Big) = e_{\mathcal{V}}\, \frac{u-y_m}{u-c_1}. \tag{1.38}$$

Зафиксируем целое число $n \geqslant m$ и отождествим алгебру $\mathcal{B}_m(\omega)$ с естественной подалгеброй в $\mathcal{B}_n(\omega)$. Теперь индукцией по m проверим более общее тождество

$$e_{\mathcal{V}} \Big(1 + \frac{s_{m-1\,n}}{c_{m-1}-u}\Big) \dots \Big(1 + \frac{s_{1\,n}}{c_1-u}\Big)$$
$$\times \Big(1 + \frac{\epsilon_{1\,n}}{c_1+u-\omega}\Big) \dots \Big(1 + \frac{\epsilon_{m-1\,n}}{c_{m-1}+u-\omega}\Big) = e_{\mathcal{V}}\, \frac{u-y_m^{(n)}}{u-c_1}, \tag{1.39}$$

где

$$y_m^{(n)} = \frac{\omega-1}{2} + \sum_{a=1}^{m-1} (s_{a\,n} - \epsilon_{a\,n}).$$

Оно, очевидно, выполнено при $m=1$. Предположим, что $2 \leqslant m \leqslant n$. Из соотношения (1.16) следует, что $e_{\mathcal{V}} = e_{\mathcal{V}}\, e_{\mathcal{W}}$, где $\mathcal{W}$ — это стандартная таблица, полученная из $\mathcal{V}$ удалением клетки, содержащей число $m-1$. Следовательно, применяя предположение индукции, мы можем записать левую часть равенства (1.39) в виде

$$e_{\mathcal{V}}\left(1+\frac{s_{m-1\,n}}{c_{m-1}-u}\right)e_{\mathcal{W}}\,\frac{u-y^{(n)}_{m-1}}{u-c_1}\left(1+\frac{\epsilon_{m-1\,n}}{c_{m-1}+u-\omega}\right),$$

А это выражение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{u-c_1}\,e_{\mathcal{V}}\Bigg(u-y^{(n)}_{m-1}+\frac{s_{m-1\,n}\,(u-y^{(n)}_{m-1})}{c_{m-1}-u}$$
$$+\frac{(u-y^{(n)}_{m-1})\,\epsilon_{m-1\,n}}{c_{m-1}+u-\omega}+\frac{s_{m-1\,n}\,(u-y^{(n)}_{m-1})\,\epsilon_{m-1\,n}}{(c_{m-1}-u)(c_{m-1}+u-\omega)}\Bigg).$$

Теперь будем использовать соотношения в алгебре Брауэра $\mathcal{B}_n(\omega)$, которые выполняются при $1\leqslant r<m-1$:

$$s_{m-1\,n}\,s_{r\,n}=s_{r\,m-1}\,s_{m-1\,n},\qquad s_{m-1\,n}\,\epsilon_{r\,n}=\epsilon_{r\,m-1}\,s_{m-1\,n}$$

и

$$s_{r\,n}\,\epsilon_{m-1\,n}=\epsilon_{r\,m-1}\,\epsilon_{m-1\,n},\qquad \epsilon_{r\,n}\,\epsilon_{m-1\,n}=s_{r\,m-1}\,\epsilon_{m-1\,n}.$$

Из них следует, что

$$s_{m-1\,n}\,y^{(n)}_{m-1}=y_{m-1}\,s_{m-1\,n}$$

и

$$y^{(n)}_{m-1}\,\epsilon_{m-1\,n}=\big(\omega-1-y_{m-1}\big)\,\epsilon_{m-1\,n}.$$

Вместе с соотношением $e_{\mathcal{V}}\,y_{m-1}=c_{m-1}\,e_{\mathcal{V}}$, вытекающим из (1.27), это позволяет привести левую часть в (1.39) к виду

$$\frac{1}{u-c_1}\,e_{\mathcal{V}}\Big(u-y^{(n)}_{m-1}-s_{m-1\,n}+\epsilon_{m-1\,n}\Big)=e_{\mathcal{V}}\,\frac{u-y^{(n)}_{m}}{u-c_1},$$

что и требовалось. Это доказывает (1.39) и, следовательно, (1.37).

Наконец, произведение

$$\frac{u-c_1}{u-c_m}\,\prod_{r=1}^{m-1}\left(1-\frac{1}{(u-c_r)^2}\right)$$

зависит только от формы μ таблицы $\mathcal{V}$, так что мы можем выбрать конкретную таблицу для его вычисления. В качестве $\mathcal{V}$ возьмём таблицу, которая получается заполнением клеток диаграммы μ числами $1,\dots,m-1$ последовательно по строкам слева направо начиная с верхней строки. Короткое вычисление показывает, что это произведение регулярно при $u=c_m$, а значение равно отношению $h(\lambda)/h(\mu)$. Для завершения доказательства остаётся применить формулу (1.29). □

Пример 1.2.4. Предложение 1.2.3 даёт следующую формулу для симметризатора (1.32):

$$s^{(m)}=\prod_{1\leqslant a<b\leqslant m}\left(1-\frac{\epsilon_{ab}}{\omega+a+b-3}\right)h^{(m)},\tag{1.40}$$

где $h^{(m)}$ — это симметризатор для группы $\mathfrak{S}_m$; см. пример 1.1.8. □

Предложение 1.2.5. *Выражение* (1.40) *можно записать в виде*

$$s^{(m)} = h^{(m)} \sum_{r=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^r}{2^r\, r!} \binom{\omega/2+m-2}{r}^{-1} \sum_{a_i<b_i} \epsilon_{a_1 b_1} \epsilon_{a_2 b_2} \dots \epsilon_{a_r b_r}, \tag{1.41}$$

где вторая сумма берётся по всем неупорядоченным наборам непересекающихся пар индексов $\{(a_1, b_1), \dots, (a_r, b_r)\}$ *из множества* $\{1, \dots, m\}$.

Доказательство. Для каждого значения r вторая сумма коммутирует с любым элементом группы $\mathfrak{S}_m$ и поэтому коммутирует с симметризатором $h^{(m)}$. Применим теперь формулу (1.40) и запишем $h^{(m)} = h^{(m-1)} h^{(m)}$. Поскольку $\epsilon_{a\,m} \epsilon_{b\,m} h^{(m-1)} = \epsilon_{a\,m} s_{a\,b} h^{(m-1)} = \epsilon_{a\,m} h^{(m-1)}$ при $a \neq b$, получаем

$$\Big(1 - \frac{\epsilon_{1m}}{\omega+m-2}\Big) \dots \Big(1 - \frac{\epsilon_{m-1\,m}}{\omega+2m-4}\Big) h^{(m-1)} \\ = \Big(1 - \frac{\epsilon_{1m} + \dots + \epsilon_{m-1\,m}}{\omega+2m-4}\Big) h^{(m-1)},$$

что фактически представляет собой вариант соотношения (1.38) и проверяется таким же вычислением. Рассуждая теперь по индукции, приходим к проверке того, что если соотношение (1.41) выполняется при m, заменённом на $m-1$, тогда выражение

$$s^{(m-1)} \Big(1 - \frac{\epsilon_{1m} + \dots + \epsilon_{m-1\,m}}{\omega+2m-4}\Big) h^{(m)}$$

совпадает с правой частью в (1.41). Если ни одна из пар (a_i, b_i) не содержит индекса $c \in \{1, \dots, m-1\}$, то произведение $\epsilon_{a_1 b_1} \epsilon_{a_2 b_2} \dots \epsilon_{a_r b_r} \epsilon_{c\,m}$ войдёт в соответствующую сумму в правой части равенства (1.41). В противном случае, если $c = a_i$ или $c = b_i$ для некоторого i, имеем

$$\epsilon_{a_1 b_1} \epsilon_{a_2 b_2} \dots \epsilon_{a_r b_r} \epsilon_{c\,m} h^{(m)} = \epsilon_{a_1 b_1} \epsilon_{a_2 b_2} \dots \epsilon_{a_r b_r} h^{(m)}$$

в силу соотношений

$$\epsilon_{c\,b_i} \epsilon_{c\,m} h^{(m)} = \epsilon_{c\,b_i} s_{b_i\,m} h^{(m)} = \epsilon_{c\,b_i} h^{(m)} \tag{1.42}$$

и их аналогов при $c = b_i$. Требуемый результат получается приведением подобных членов. □

Следствие 1.2.6. *Имеет место выражение для симметризатора* $s^{(m)}$ *в терминах диаграмм Брауэра*:

$$s^{(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{r=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^r \binom{\omega/2+m-2}{r}^{-1} \sum_{d \in \mathcal{D}^{(r)}} d, \tag{1.43}$$

где $\mathcal{D}^{(r)} \subset \mathcal{B}_m(\omega)$ *обозначает множество диаграмм, у которых имеется ровно* r *горизонтальных рёбер, соединяющих вершины в верхнем ряду.*

Доказательство. По существу, эта формула равносильна (1.41). В самом деле, их эквивалентность следует из соотношения

$$\sum_{s\in\mathfrak{S}_m} s \sum_{a_i<b_i} \epsilon_{a_1b_1}\epsilon_{a_2b_2}\dots\epsilon_{a_rb_r} = 2^r\, r! \sum_{d\in\mathcal{D}^{(r)}} d,$$

которое выполняется при всех $r = 0, 1, \dots, \lfloor m/2\rfloor$. Зафиксируем диаграмму $d \in \mathcal{D}^{(r)}$ и предположим, что горизонтальные рёбра в верхнем ряду диаграммы d соединяют r пар вершин (a_i, b_i) в соответствии со слагаемым в левой части, в то время как горизонтальные рёбра в нижнем ряду соединяют r пар вершин $\{(g_1, h_1), \dots, (g_r, h_r)\}$. Число перестановок $s \in \mathfrak{S}_m$, обладающих свойством $s\,\epsilon_{a_1b_1}\epsilon_{a_2b_2}\dots\epsilon_{a_rb_r} = d$, равно $2^r\, r!$. Чтобы в этом убедиться, представим перестановку s в виде диаграммы без горизонтальных рёбер. Чтобы выполнялось требуемое свойство, вершины g_1 и h_1 в нижнем ряду диаграммы s должны быть соединены с вершинами a_i и b_i в верхнем ряду для некоторого $i \in \{1, \dots, r\}$. Таким образом, имеется $2r$ способов выбрать рёбра с концами g_1 и h_1. Требуемое соотношение получается, если применить то же вычисление к остальным вершинам в нижнем ряду. □

Следствие 1.2.7. *Справедлива формула*

$$s^{(m)} = h^{(m)} \sum_{r=0}^{\lfloor m/2\rfloor} \frac{(-1)^r}{r!\,(\omega+2m-4)(\omega+2m-6)\dots(\omega+2m-2r-2)}$$
$$\times \sum_{a<b}\epsilon_{ab}\Big(\sum_{a<b}\epsilon_{ab} - (\omega+2m-4)\Big)\dots\Big(\sum_{a<b}\epsilon_{ab} - (r-1)(\omega+2m-2r)\Big). \tag{1.44}$$

Доказательство. Это ещё одна форма соотношения (1.41). Мы проверим их эквивалентность, вычислив произведение множителей в правой части (1.44). Рассуждая по индукции, мы приходим к проверке соотношений

$$h^{(m)} \sum_{a_i<b_i} \epsilon_{a_1b_1}\epsilon_{a_2b_2}\dots\epsilon_{a_{r-1}b_{r-1}}\Big(\sum_{c<d}\epsilon_{cd} - (r-1)(\omega+2m-2r)\Big)$$
$$= r\,h^{(m)} \sum_{a_i<b_i} \epsilon_{a_1b_1}\epsilon_{a_2b_2}\dots\epsilon_{a_rb_r} \tag{1.45}$$

при $r \leqslant \lfloor m/2\rfloor$, где обозначения такие же как в формуле (1.41). Взяв в левой части множители, отвечающие парам (c, d), которые не имеют общих элементов с парами (a_i, b_i), мы получим правую часть. Поэтому достаточно проверить, что все оставшиеся слагаемые дают нулевой вклад. Если только один из индексов c или d совпадает с a_i или b_i, то по аналогии с (1.42) мы имеем $h^{(m)}\,\epsilon_{a_ib_i}\,\epsilon_{cd} = h^{(m)}\,\epsilon_{cd}$. Далее, если $c = a_i$ и $d = b_i$ для некоторого i, то произведение образующих вычисляется по правилу $\epsilon_{cd}^2 = \omega\,\epsilon_{cd}$. Наконец, возможен случай, когда $c = a_i$ или $c = b_i$, в то время как $d = a_j$ или $d = b_j$ для некоторых $i \neq j$. Тогда, взяв, например, $c = a_i$ и $d = a_j$, мы можем упростить произведение следующим образом:

$$h^{(m)}\,\epsilon_{a_ib_i}\,\epsilon_{a_jb_j}\,\epsilon_{cd} = h^{(m)}\,\epsilon_{a_ib_i}\,s_{cb_j}\,\epsilon_{cd} = h^{(m)}\,s_{cb_j}\,\epsilon_{b_ib_j}\,\epsilon_{cd} = h^{(m)}\,\epsilon_{b_ib_j}\,\epsilon_{cd}.$$

Подсчитывая суммарный коэффициент в левой части равенства (1.45) при произведении $h^{(m)}\epsilon_{a_1b_1}\epsilon_{a_2b_2}\dots\epsilon_{a_{r-1}b_{r-1}}$, получаем

$$(r-1)\omega+2(r-1)(m-2r+2)+2(r-1)(r-2)-(r-1)(\omega+2m-2r)=0,$$

как требовалось. □

Отметим ещё одну мультипликативную формулу для симметризатора.

Предложение 1.2.8. *Справедлива формула*

$$s^{(m)}=\frac{1}{m!}\prod_{1\leqslant a<b\leqslant m}\Big(1+\frac{s_{ab}}{b-a}-\frac{\epsilon_{ab}}{\omega/2+b-a-1}\Big), \tag{1.46}$$

в которой произведение берётся в соответствии с лексикографическим порядком на множестве пар (a,b).

Доказательство. Положим

$$\rho_{ab}(u)=1-\frac{s_{ab}}{u}-\frac{\epsilon_{ab}}{\omega/2-u-1}.$$

Хорошо известно (это восходит к работе [**156**]) и нетрудно проверить, что рациональные функции $\rho_{ab}(u)$ удовлетворяют *уравнению Янга–Бакстера*

$$\rho_{ab}(u)\,\rho_{ac}(u+v)\,\rho_{bc}(v)=\rho_{bc}(v)\,\rho_{ac}(u+v)\,\rho_{ab}(u) \tag{1.47}$$

для любых различных индексов a,b,c, где мы считаем, что $\rho_{ba}(u)=\rho_{ab}(u)$ при $a<b$. Формулу (1.46) можно записать в виде

$$s^{(m)}=\frac{1}{m!}\prod_{1\leqslant a<b\leqslant m}\rho_{ab}(a-b).$$

Для любого $c\in\{1,\dots,m-1\}$ мы можем применить соотношения (1.47) и так упорядочить множители в произведении, чтобы оно начиналось (или кончалось) множителем $\rho_{c\,c+1}(-1)$. Поскольку

$$s_c\,\rho_{c\,c+1}(-1)=\rho_{c\,c+1}(-1)\,s_c=\rho_{c\,c+1}(-1)\qquad\text{и}$$
$$\epsilon_c\,\rho_{c\,c+1}(-1)=\rho_{c\,c+1}(-1)\,\epsilon_c=0,$$

мы приходим к выводу, что произведение в правой части (1.46) — это идемпотент в алгебре $\mathcal{B}_m(\omega)$, удовлетворяющий условиям (1.31). Поэтому он совпадает с симметризатором $s^{(m)}$. □

Пример 1.2.9. Если $\lambda=(1^m)$ — это диаграмма-столбец с m клетками, то единственную ud-таблицу формы λ можно рассматривать как стандартную таблицу, в которой числа $1,\dots,m$ вписаны в клетки диаграммы λ сверху вниз. Соответствующий примитивный идемпотент — это *антисимметризатор* $a^{(m)}\in\mathcal{B}_m(\omega)$. Он совпадает с антисимметризатором в групповой алгебре для симметрической группы $\mathfrak{S}_m$, который даётся формулами (1.19) и (1.24), и обладает свойствами

$$s_{ab}\,a^{(m)}=a^{(m)}\,s_{ab}=-a^{(m)}\qquad\text{и}\qquad\epsilon_{ab}\,a^{(m)}=a^{(m)}\,\epsilon_{ab}=0 \tag{1.48}$$

для всех $1\leqslant a<b\leqslant m$. □

§ 1.3. Следы на алгебре Брауэра

Для данного множества положительных целых чисел $\{c_1, \ldots, c_m\}$ обозначим через $\mathcal{B}_{\{c_1,\ldots,c_m\}}(\omega)$ линейную оболочку над $\mathbb{C}(\omega)$ диаграмм Брауэра, в которых верхние и нижние вершины занумерованы числами $c_1, \ldots, c_m$. Произведение двух таких диаграмм определяется обычным способом, как в §1.2, так что алгебра $\mathcal{B}_{\{c_1,\ldots,c_m\}}(\omega)$ изоморфна $\mathcal{B}_m(\omega)$.

Для $a \in \{1, \ldots, m\}$ определим *частичный след* tr_a (или *a-е замыкание*) как линейное отображение

$$\mathrm{tr}_a : \mathcal{B}_m(\omega) \to \mathcal{B}_{\{1,\ldots,\widehat{a},\ldots,m\}}(\omega), \tag{1.49}$$

где символ $\widehat{a}$ означает, что индекс a должен быть пропущен. К данной диаграмме $d \in \mathcal{B}_m(\omega)$ добавим ребро, соединяющее a-е вершины в верхнем и нижнем ряду. Пусть s — это число образовавшихся замкнутых петель (так что $s = 0$ или $s = 1$). Тогда $\mathrm{tr}_a(d)$ равен произведению ω^s на полученную диаграмму без петель и без a-х вершин в верхнем и нижнем ряду. Точно так же определяется частичный след tr_a на алгебре $\mathcal{B}_{\{c_1,\ldots,c_m\}}(\omega)$ при условии $a \in \{c_1, \ldots, c_m\}$.

Если $\{a_1, \ldots, a_k\}$ — это подмножество множества $\{1, \ldots, m\}$, то соответствующий частичный след $\mathrm{tr}_{a_1,\ldots,a_k}$ на алгебре $\mathcal{B}_m(\omega)$ определяется как композиция $\mathrm{tr}_{a_1} \circ \cdots \circ \mathrm{tr}_{a_k}$. Легко проверить совпадение отображений $\mathrm{tr}_a \circ \mathrm{tr}_b = \mathrm{tr}_b \circ \mathrm{tr}_a$ на алгебре $\mathcal{B}_m(\omega)$ при любых $a < b$. Поэтому частичный след $\mathrm{tr}_{a_1,\ldots,a_k}(d)$ диаграммы $d \in \mathcal{B}_m(\omega)$ можно также определить по аналогии с (1.49). А именно, для каждого $i = 1, \ldots, k$ добавим к диаграмме d ребро, соединяющее a_i-е вершины в верхнем и нижнем ряду. Пусть s — это число образовавшихся замкнутых петель. Тогда след $\mathrm{tr}_{a_1,\ldots,a_k}(d)$ равен произведению ω^s на полученную диаграмму без петель и без вершин $a_1, \ldots, a_k$ в верхнем и нижнем ряду. В частности, *полный след* — это отображение

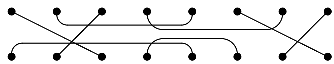
$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m} : \mathcal{B}_m(\omega) \to \mathbb{C}(\omega).$$

Из определения ясно, что оно обладает *свойством цикличности*:

$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}(dd') = \mathrm{tr}_{1,\ldots,m}(d'd) \tag{1.50}$$

для любых двух диаграмм d и d'.

Пример 1.3.1. След диаграммы $d \in \mathcal{B}_8(\omega)$, представленной на рисунке



равен ω^2. □

Лемма 1.3.2. *Для частичного следа симметризатора $s^{(m)} \in \mathcal{B}_m(\omega)$ выполняется равенство*

$$\mathrm{tr}_m\, s^{(m)} = \frac{(\omega + m - 3)(\omega + 2m - 2)}{m\,(\omega + 2m - 4)}\, s^{(m-1)}. \tag{1.51}$$

Следовательно, полный след равен

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, s^{(m)} = \frac{\omega+2m-2}{\omega+m-2}\binom{\omega+m-2}{m}. \tag{1.52}$$

Доказательство. Из формулы (1.32) для симметризатора вытекает рекуррентная формула

$$s^{(m)} = \frac{1}{m(\omega+2m-4)}\Big(1+\sum_{a=1}^{m-1}(s_{a\,m}-\epsilon_{a\,m})\Big) \times \Big(\omega+m-3+\sum_{a=1}^{m-1}(s_{a\,m}-\epsilon_{a\,m})\Big)\, s^{(m-1)} \tag{1.53}$$

для элементов алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$. Имеем $\mathrm{tr}_m s_{a\,m} = \mathrm{tr}_m \epsilon_{a\,m} = 1$, в то время как

$$\mathrm{tr}_m\, s_{a\,m} s_{b\,m} = \mathrm{tr}_m\, \epsilon_{a\,m}\epsilon_{b\,m} = s_{ab} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{tr}_m\, s_{a\,m}\epsilon_{b\,m} = \mathrm{tr}_m\, \epsilon_{a\,m} s_{b\,m} = \epsilon_{ab}$$

при $a \neq b$. Из этих соотношений и свойств (1.31) следует равенство (1.51). □

Лемма 1.3.3. *Для частичного следа антисимметризатора $a^{(m)} \in \mathcal{B}_m(\omega)$ справедлива формула*

$$\mathrm{tr}_m\, a^{(m)} = \frac{\omega-m+1}{m}\, a^{(m-1)}. \tag{1.54}$$

Следовательно, полный след равен

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, a^{(m)} = \binom{\omega}{m}.$$

Доказательство. Как мы отметили в примере 1.2.9, $a^{(m)}$ совпадает с антисимметризатором в групповой алгебре для симметрической группы и вычисляется по формуле (1.20). Поэтому справедливо рекуррентное соотношение

$$a^{(m)} = \frac{1}{m}\Big(1-\sum_{a=1}^{m-1} s_{a\,m}\Big)\, a^{(m-1)}.$$

Поскольку $\mathrm{tr}_m s_{a\,m} = 1$, отсюда следует формула (1.54). □

Лемма 1.3.4. *Для частичного следа элемента $h^{(m)} \in \mathcal{B}_m(\omega)$ справедлива формула*

$$\mathrm{tr}_m\, h^{(m)} = \frac{\omega+m-1}{m}\, h^{(m-1)}. \tag{1.55}$$

Следовательно, полный след равен

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, h^{(m)} = \binom{\omega+m-1}{m}.$$

Доказательство. В силу (1.18) справедливо рекуррентное соотношение

$$h^{(m)} = \frac{1}{m}\Big(1 + \sum_{a=1}^{m-1} s_{a\,m}\Big)\, h^{(m-1)},$$

из которого вытекает формула (1.55). □

Теперь мы хотим обобщить последние две леммы и вычислить следы примитивных идемпотентов, соответствующих стандартным таблицам. Эти вычисления будут нужны для вывода формул крюков для размерностей представлений группы GL_N с помощью двойственности Шура–Вейля; см. §4.4. Этот подход можно также использовать для доказательства таких формул в случае ортогональной и симплектической групп. Вычисления здесь, однако, оказываются более длинными, и мы их опустим, а приведём только формулы для размерностей в §5.2.

Примитивные идемпотенты для симметрической группы можно рассматривать как элементы алгебры Брауэра в силу вложения $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m] \subset \mathcal{B}_m(\omega)$. Вспомним, что $h(\lambda)$ обозначает произведение длин крюков диаграммы λ; см. (1.3).

Предложение 1.3.5. *Пусть λ — это диаграмма с m клетками, и пусть $\mathcal{U}$ — это стандартная таблица формы λ. Тогда след соответствующего примитивного идемпотента $e_{\mathcal{U}} \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m] \subset \mathcal{B}_m(\omega)$ находится по формуле*

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, e_{\mathcal{U}} = \frac{1}{h(\lambda)} \prod_{(i,j)\in\lambda} \big(\omega + j - i\big). \tag{1.56}$$

Доказательство. Для частичных следов выполняется соотношение

$$\mathrm{tr}_m\Big(s_{m-1}\,\frac{1}{u - x_{m-1}}\,s_{m-1}\Big) = \mathrm{tr}_{m-1}\Big(\frac{1}{u - x_{m-1}}\Big).$$

Поэтому из леммы 1.1.6 вытекает рекуррентная формула для рациональных функций

$$A_m(u) = \mathrm{tr}_m\Big(\frac{1}{u - x_m}\Big),$$

имеющая вид

$$A_m(u) = A_{m-1}(u) + \frac{1}{(u - x_{m-1})^2}\,\big(1 + A_m(u)\big),$$

что эквивалентно формуле

$$A_m(u) = \frac{(u - x_{m-1})^2}{(u - x_{m-1})^2 - 1}\,A_{m-1}(u) + \frac{1}{(u - x_{m-1})^2 - 1}.$$

При $m = 1$ имеем $A_1(u) = \omega/u$. Поэтому, решая рекуррентное соотношение, получаем, что

$$A_m(u) = \frac{u + \omega}{u} \prod_{a=1}^{m-1} \frac{(u - x_a)^2}{(u - x_a)^2 - 1} - 1.$$

Это вычисление и рекуррентная формула (1.15) позволяют найти частичный след $\operatorname{tr}_m e_{\mathcal{U}}$. Действительно, используя такие же обозначения, как в формуле (1.15), из свойств (1.11) элементов Юциса–Мёрфи получаем

$$\operatorname{tr}_m e_{\mathcal{U}} = e_{\mathcal{V}} \Big[(u-c)\, A_m(u)\Big]_{u=c} = (\omega + c)\, e_{\mathcal{V}} \left[\, \frac{u-c}{u} \prod_{a=1}^{m-1} \frac{(u-c_a)^2}{(u-c_a)^2 - 1}\, \right]_{u=c},$$

где $c_a = j - i$ обозначает содержание клетки (i,j) таблицы $\mathcal{U}$, занятой числом a, и $c = c_m$. В этой формуле значение рациональной функции от u корректно определено и зависит только от формы μ стандартной таблицы $\mathcal{V}$, но не зависит от $\mathcal{V}$. Это значение можно вычислить, взяв, например, строчную таблицу, как в доказательстве предложения 1.2.3. В результате получаем

$$\operatorname{tr}_m e_{\mathcal{U}} = (\omega + c)\, \frac{h(\mu)}{h(\lambda)}\, e_{\mathcal{V}},$$

и формула (1.56) теперь легко проверяется по индукции. $\square$

§ 1.4. Тензорные обозначения

Эндоморфизмы векторного пространства $\mathbb{C}^N$ (т.е. линейные отображения $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$) образуют ассоциативную алгебру, которую мы будем обозначать $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$. Векторы канонического базиса в $\mathbb{C}^N$ будут обозначаться $e_1, \dots, e_N$. Каждый эндоморфизм в этом базисе записывается в виде матрицы, что позволяет нам отождествить алгебру $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$ с алгеброй матриц размера $N \times N$ над $\mathbb{C}$. Матричные единицы e_{ij} при $i, j \in \{1, \dots, N\}$ образуют базис в $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$. Соответствующие эндоморфизмы действуют на базисные векторы по правилу

$$e_{ij} : e_k \mapsto \delta_{jk}\, e_i,$$

где δ_{jk} — это символ Кронекера: $\delta_{jk} = 1$, если $j = k$, и $\delta_{jk} = 0$ в противном случае. Матричные единицы умножаются по формуле $e_{ij}\, e_{kl} = \delta_{jk}\, e_{il}$. Векторное пространство тензоров

$$(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} = \underbrace{\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^N}_{m} \tag{1.57}$$

имеет базис, образованный тензорными произведениями $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}$, где индексы $i_1, \dots, i_m$ пробегают множество $\{1, \dots, N\}$. Алгебра эндоморфизмов векторного пространства (1.57) будет отождествляться с тензорным произведением алгебр

$$\underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m} \tag{1.58}$$

посредством естественного изоморфизма, при котором элемент $A_1 \otimes \dots \otimes A_m$ алгебры (1.58) понимается как эндоморфизм пространства $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$, заданный формулой

$$(A_1 \otimes \dots \otimes A_m)(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) = A_1(v_1) \otimes \dots \otimes A_m(v_m), \qquad v_i \in \mathbb{C}^N.$$

Мы будем часто использовать матрицы

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{N1} & \dots & X_{NN} \end{bmatrix},$$

матричные элементы которых лежат в некоторой ассоциативной алгебре $\mathcal{A}$. Алгебра матриц размера $N \times N$ с элементами, лежащими в $\mathcal{A}$, изоморфна тензорному произведению алгебр $\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \mathcal{A}$, так что матрица X отождествляется с элементом

$$X = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes X_{ij} \in \operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \mathcal{A}. \tag{1.59}$$

Если u — константа или переменная со значениями в алгебре $\mathcal{A}$, то выражение $u+X$ будет интерпретироваться как сумма $u\,1+X$, где $u\,1$ — скалярная матрица такого же размера, как X.

Мы будем работать с тензорными произведениями алгебр вида

$$\operatorname{End}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} \otimes \mathcal{A} = \underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathcal{A}. \tag{1.60}$$

Для любого $a \in \{1, \ldots, m\}$ будем обозначать через X_a элемент (1.59), отвечающий a-й копии алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$, так что

$$X_a = \sum_{i,j=1}^{N} 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(m-a)} \otimes X_{ij} \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}, \tag{1.61}$$

где 1 — это тождественное отображение:

$$1 = \sum_{i=1}^{N} e_{ii} \in \operatorname{End}\mathbb{C}^N.$$

Для любого элемента

$$C = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} c_{ijkl}\, e_{ij} \otimes e_{kl} \in \operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N$$

и индексов $a, b \in \{1, \ldots, m\}$ с условием $a < b$ мы будем писать

$$C_{ab} = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} c_{ijkl}\, 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(b-a-1)} \otimes e_{kl} \otimes 1^{\otimes(m-b)} \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}. \tag{1.62}$$

То же самое обозначение C_{ab} будет использоваться для элемента $C_{ab} \otimes 1$ алгебры (1.60).

Обычный *след* матрицы можно понимать как линейное отображение

$$\operatorname{tr} : \operatorname{End}\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}, \qquad e_{ij} \mapsto \delta_{ij}.$$

Кроме того, при $a \in \{1, \dots, m\}$ частичный след tr_a — это линейное отображение

$$\mathrm{tr}_a : \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} \to \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes(m-1)}, \tag{1.63}$$

которое действует как след на a-й копии алгебры $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$ и как тождественное отображение на всех остальных копиях. Полный след $\mathrm{tr}_{1,\dots,m}$ — это композиция $\mathrm{tr}_1 \circ \dots \circ \mathrm{tr}_m$.

Хорошо известное *свойство цикличности следа* даётся следующей леммой; ср. (1.50).

Лемма 1.4.1. *Предположим, что два элемента*

$$X = \sum e_{i_1 j_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m j_m} \otimes X^{\,i_1 \dots i_m}_{\,j_1 \dots j_m} \qquad \textit{и}$$

$$Y = \sum e_{i_1 j_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m j_m} \otimes Y^{\,i_1 \dots i_m}_{\,j_1 \dots j_m}$$

алгебры (1.60) *обладают свойством*

$$X^{\,i_1 \dots i_m}_{\,j_1 \dots j_m}\, Y^{\,k_1 \dots k_m}_{\,l_1 \dots l_m} = Y^{\,k_1 \dots k_m}_{\,l_1 \dots l_m}\, X^{\,i_1 \dots i_m}_{\,j_1 \dots j_m}$$

для всех значений индексов. Тогда

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, XY = \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, YX.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, XY = \sum X^{\,i_1 \dots i_m}_{\,j_1 \dots j_m}\, Y^{\,j_1 \dots j_m}_{\,i_1 \dots i_m} = \sum Y^{\,j_1 \dots j_m}_{\,i_1 \dots i_m}\, X^{\,i_1 \dots i_m}_{\,j_1 \dots j_m} = \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, YX,$$

что и требовалось. □

§ 1.5. Действие симметрической группы и алгебры Брауэра

Симметрическая группа $\mathfrak{S}_m$ действует в пространстве (1.57) перестановками тензорных множителей. Чтобы дать более точное определение, введём элемент

$$P = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes e_{ji} \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N. \tag{1.64}$$

Он действует на векторном пространстве $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$, переставляя сомножители:

$$P(v \otimes w) = w \otimes v, \qquad v, w \in \mathbb{C}^N.$$

Используя теперь обозначение (1.62), для образов транспозиций относительно действия группы $\mathfrak{S}_m$ на пространстве (1.57) получаем

$$s_{a\,b} \mapsto P_{a\,b}, \qquad 1 \leqslant a < b \leqslant m, \tag{1.65}$$

где

$$P_{a\,b} = \sum_{i,j=1}^{N} 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(b-a-1)} \otimes e_{ji} \otimes 1^{\otimes(m-b)}. \tag{1.66}$$

Образ произвольного элемента $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ относительно отображения (1.65) будет обозначаться P_σ. Отметим соотношения

$$P_{a\,b} X_a = X_b P_{a\,b}, \qquad 1 \leqslant a < b \leqslant m, \tag{1.67}$$

которые выполняются в алгебре (1.60) для элементов вида (1.61). Кроме того,

$$\operatorname{tr}_b P_{a\,b} = \operatorname{tr}_a P_{a\,b} = 1. \tag{1.68}$$

Мы будем использовать действие алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ на пространстве тензоров (1.57) для специальных значений параметра ω. Эти значения $\omega = N$ и $\omega = -N$ (последнее при чётном $N = 2n$) возникают в контексте *двойственности Шура–Вейля*, в которой действие алгебры Брауэра коммутирует с соответствующим действием ортогональной или симплектической группы на пространстве (1.57). В ортогональном случае образующие алгебры $\mathcal{B}_m(N)$ действуют по правилу

$$s_{a\,b} \mapsto P_{a\,b}, \qquad \epsilon_{a\,b} \mapsto Q_{a\,b}, \qquad 1 \leqslant a < b \leqslant m, \tag{1.69}$$

где оператор $P_{a\,b}$ определён формулой (1.66), а

$$Q_{a\,b} = \sum_{i,j=1}^{N} 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(b-a-1)} \otimes e_{i'j'} \otimes 1^{\otimes(m-b)} \tag{1.70}$$

и мы используем инволюцию на множестве $\{1, \ldots, N\}$, заданную правилом $i \mapsto i' = N - i + 1$. Отметим простые соотношения:

$$P_{a\,b}\, Q_{a\,b} = Q_{a\,b}\, P_{a\,b} = Q_{a\,b} \qquad \text{и} \qquad Q_{a\,b}^2 = N\, Q_{a\,b}. \tag{1.71}$$

Наше обозначение для частичных следов на алгебре Брауэра, введённых в (1.49), соответствует обозначению (1.63) в том смысле, что имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_m(N) & \xrightarrow{\operatorname{tr}_a} & \mathcal{B}_{\{1,\ldots,\widehat{a},\ldots,m\}}(N) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \operatorname{End}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} & \xrightarrow{\operatorname{tr}_a} & \operatorname{End}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m-1}, \end{array} \tag{1.72}$$

в которой вертикальные стрелки обозначают гомоморфизмы (1.69).

В симплектическом случае действие алгебры $\mathcal{B}_m(-N)$ при $N = 2n$ в пространстве (1.57) определяется по правилу

$$s_{a\,b} \mapsto -P_{a\,b}, \qquad \epsilon_{a\,b} \mapsto -Q_{a\,b}, \qquad 1 \leqslant a < b \leqslant m, \tag{1.73}$$

где оператор $P_{a\,b}$ определён формулой (1.66), а

$$Q_{a\,b} = \sum_{i,j=1}^{2n} \varepsilon_i \varepsilon_j\, 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(b-a-1)} \otimes e_{i'j'} \otimes 1^{\otimes(m-b)} \tag{1.74}$$

и мы положили $\varepsilon_i = 1$ при $i = 1, \ldots, n$ и $\varepsilon_i = -1$ при $i = n+1, \ldots, 2n$. Симплектический вариант соотношений (1.71) принимает вид

$$P_{a\,b}\, Q_{a\,b} = Q_{a\,b}\, P_{a\,b} = -Q_{a\,b} \qquad \text{и} \qquad Q_{a\,b}^2 = 2n\, Q_{a\,b}. \tag{1.75}$$

И в ортогональном, и в симплектическом случаях справедливы следующие аналоги формул (1.68) для частичных следов:

$$\mathrm{tr}_b\, Q_{a\,b} = \mathrm{tr}_a\, Q_{a\,b} = 1. \tag{1.76}$$

Однако симплектический вариант коммутативной диаграммы (1.72) принимает другую форму:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_m(-N) \arrow[r, "-\mathrm{tr}_a"] \arrow[d] & \mathcal{B}_{\{1,\dots,\widehat{a},\dots,m\}}(-N) \arrow[d] \\ \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} \arrow[r, "\mathrm{tr}_a"] & \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes m-1}, \end{tikzcd} \tag{1.77}$$

где вертикальные стрелки обозначают гомоморфизмы (1.73), а верхняя горизонтальная стрелка — это композиция отображения (1.49) и умножения на константу -1.

§ 1.6. Библиографические замечания

Предложение 1.1.2 принадлежит Юцису [**85**] и Мёрфи [**121**]. Вариант процедуры слияния, приведённый в предложении 1.1.7, содержится в [**109**, §6.4], где также приведены более подробные библиографические комментарии. Эта процедура восходит к Юцису [**84**]; она была переоткрыта Чередником [**19**], а подробные доказательства даны Назаровым [**125**]. Алгебра $\mathcal{B}_m(\omega)$ была определена Брауэром [**14**]. По поводу её определения в терминах образующих (1.25) — см. [**10**, Section 5]. Элементы Юциса–Мёрфи (1.26) для алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ были введены в [**124**]. Их можно также получить из соответствующих элементов алгебры Бирмана–Мураками–Вензля, введённых в [**101**], при $q = 1$. Свойства (1.27) были установлены в этих статьях. Два варианта процедуры слияния для алгебры Брауэра даны в [**74**] и [**75**]. Выражение (1.43) для симметризатора в терминах диаграмм Брауэра было найдено в [**69**, Theorem 4.3]. Мультипликативная формула (1.46) содержится в [**74**, Remark 3.8]. Её вывод из процедуры слияния содержится в [**75**, Example 2.3].

Глава 2

Инварианты в симметрических алгебрах

Наша цель в этой главе — дать обзор конструкций $\mathfrak{g}$-инвариантов в симметрической алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ — это простая алгебра Ли классического типа. Эти инварианты возникают при использовании примитивных идемпотентов для симметрической группы и алгебры Брауэра, которые мы построили в гл. 1. Вспомним сначала хорошо известные общие факты, касающиеся инвариантов; см., например, книгу Диксмье [**29**, §7.3]. Присоединённое действие простой алгебры Ли продолжается на симметрическую алгебру $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ по правилу

$$Y \cdot X_1 \dots X_k = \sum_{i=1}^{k} X_1 \dots [Y, X_i] \dots X_k, \qquad Y, X_i \in \mathfrak{g}.$$

Поскольку каждый элемент $Y \in \mathfrak{g}$ действует как дифференцирование, подпространство $\mathfrak{g}$-инвариантов

$$\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \{P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \mid Y \cdot P = 0 \quad \text{для всех} \quad Y \in \mathfrak{g}\} \tag{2.1}$$

— это подалгебра в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Пусть n обозначает ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда

$$\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[P_1, \dots, P_n] \tag{2.2}$$

для некоторых алгебраически независимых инвариантов $P_1, \dots, P_n$, степени которых $d_1, \dots, d_n$ — это экспоненты алгебры Ли $\mathfrak{g}$, увеличенные на 1.

Зафиксируем подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ и треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$. Рассмотрим проекцию $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{S}(\mathfrak{h})$, определённую разложением $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) = \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \oplus \mathrm{J}$, где J — это идеал в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, порождённый подпространствами $\mathfrak{n}_-$ и $\mathfrak{n}_+$. Ограничивая эту проекцию на подалгебру инвариантов, получаем *изоморфизм Шевалле*

$$\varsigma : \mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to \mathrm{S}(\mathfrak{h})^{W}, \tag{2.3}$$

где W — это *группа Вейля* системы корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$ обозначает подалгебру W-инвариантных элементов в симметрической алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$.

§ 2.1. Инварианты для серии A

Векторное пространство $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ матриц размера $N \times N$ над $\mathbb{C}$ имеет структуру алгебры Ли, заданную коммутатором

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Это определяет *общую линейную алгебру Ли* $\mathfrak{gl}_N$ со стандартным базисом E_{ij} и коммутационными соотношениями

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{kj}\, E_{il} - \delta_{il}\, E_{kl}, \qquad i, j, k, l \in \{1, \dots, N\}. \tag{2.4}$$

Тем самым мы хотим различать E_{ij} и введённые выше базисные элементы e_{ij} алгебры эндоморфизмов $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$. *Специальная линейная алгебра Ли* $\mathfrak{sl}_N$ (простая алгебра Ли типа A_{N-1}) определяется как подалгебра в $\mathfrak{gl}_N$, состоящая из матриц с нулевым следом.

Мы будем рассматривать симметрическую алгебру $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$ как коммутативную ассоциативную алгебру со свободными образующими E_{ij}, так что её элементы — это полиномы от переменных E_{ij}. Введём матрицу

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & \dots & E_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{N1} & \dots & E_{NN} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

с элементами из $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$ и вычислим определитель

$$\det(u + E) = u^N + C_1\, u^{N-1} + \dots + C_N, \tag{2.6}$$

где u — это переменная. Здесь и ниже выражения вида $u + E$ интерпретируются как $u\,1 + E$, где 1 — это единичная матрица такого же размера, как E. Из хорошо известных свойств характеристического полинома следует, что все коэффициенты полинома (2.6) инвариантны относительно присоединённого действия общей линейной группы GL_N в пространстве $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$. А именно, GL_N действует в пространстве $\mathfrak{gl}_N$ по правилу

$$\operatorname{Ad}\mathbf{g} : X \mapsto \mathbf{g}X\mathbf{g}^{-1}, \qquad X \in \mathfrak{gl}_N, \quad \mathbf{g} \in \mathrm{GL}_N. \tag{2.7}$$

Это действие продолжается на симметрическую алгебру $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$ так, что элементы группы GL_N действуют в $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$ как автоморфизмы. При этом подалгебра $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{gl}_N}$ совпадает с подалгеброй GL_N-инвариантов в $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$. Вычисляя образы базисных элементов E_{ij} относительно операторов $\operatorname{Ad}\mathbf{g}$, получаем, что образ матрицы E находится по формуле

$$\operatorname{Ad}\mathbf{g} : E \mapsto \mathbf{g}^t\, E\, (\mathbf{g}^t)^{-1}, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{g}^t$ — это транспонированная матрица для матрицы $\mathbf{g}$. Отсюда следует GL_N-инвариантность полинома (2.6).

Справедливо соотношение

$$\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{gl}_N} = \mathbb{C}[C_1, \dots, C_N], \tag{2.9}$$

так что коэффициенты характеристического полинома — это алгебраически независимые образующие алгебры инвариантов. Это проверяется вычислением образов Шевалле элементов C_m. Зафиксируем стандартное треугольное разложение алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$, в котором подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ линейно порождается элементами $E_{11}, \dots, E_{NN}$, в то время как подалгебры $\mathfrak{n}_-$ и $\mathfrak{n}_+$ линейно порождаются элементами E_{ij} при $i > j$ и $i < j$ соответственно. Группа Вейля изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_N$, которая действует на алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ перестановками образующих E_{ii}. Поэтому образ изоморфизма Шевалле — это алгебра симметрических полиномов от переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, где $\lambda_i = E_{ii}$. Ясно, что

$$\varsigma : \det(u + E) \mapsto (u + \lambda_1) \dots (u + \lambda_N),$$

и, следовательно, образ Шевалле $\varsigma(C_m)$ — это элементарный симметрический полином

$$e_m(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \sum_{1 \leqslant p_1 < \dots < p_m \leqslant N} \lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_m}. \tag{2.10}$$

Полиномы $e_m(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ при $m = 1, \dots, N$ — это алгебраически независимые образующие алгебры симметрических полиномов, откуда и следует соотношение (2.9).

Из аналогичного рассуждения вытекает, что следы всех степеней матрицы E тоже инварианты:

$$T_m = \operatorname{tr} E^m \in \mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{gl}_N} \tag{2.11}$$

для всех $m \geqslant 0$. Из них можно выбрать другое семейство алгебраически независимых образующих:

$$\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{gl}_N} = \mathbb{C}[T_1, \dots, T_N], \tag{2.12}$$

и образы Шевалле вычисляются по формулам

$$\varsigma : T_m \mapsto \lambda_1^m + \dots + \lambda_N^m.$$

Чтобы построить более общее семейство инвариантов, вспомним действие симметрической группы $\mathfrak{S}_m$ на пространстве тензоров $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$, определённое в §1.5. Общая линейная группа GL_N действует на этом пространстве диагонально:

$$\mathbf{h} : v_1 \otimes \dots \otimes v_m \mapsto \mathbf{h}\, v_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{h}\, v_m, \qquad v_i \in \mathbb{C}^N, \qquad \mathbf{h} \in \mathrm{GL}_N, \tag{2.13}$$

что можно записать в виде $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_m$, где

$$\mathbf{h}_a = 1^{\otimes(a-1)} \otimes \mathbf{h} \otimes 1^{\otimes(m-a)}.$$

Действие любого элемента группы $\mathfrak{S}_m$ на векторном пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ коммутирует с действием любого элемента $\mathbf{h} \in \mathrm{GL}_N$. Это свойство достаточно проверить на образующих группы $\mathfrak{S}_m$, а это следует из соотношений (1.67):

$$P_{a\,a+1}\, \mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_m = \mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{a+1}\, \mathbf{h}_a \dots \mathbf{h}_m P_{a\,a+1} = \mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_m\, P_{a\,a+1} \tag{2.14}$$

поскольку $\mathbf{h}_{a+1}\, \mathbf{h}_a = \mathbf{h}_a\, \mathbf{h}_{a+1}$. Мы будем обсуждать коммутирующие действия групп $\mathfrak{S}_m$ и GL_N более подробно в §4.4 в контексте классической *двойственности Шура–Вейля.*

Обозначим через S образ элемента $s \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ относительно отображения (1.65). Мы будем рассматривать S как элемент алгебры

$$\underbrace{\operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes \operatorname{End} \mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N), \tag{2.15}$$

отождествляя его с $S \otimes 1$. Кроме того в соответствии с (1.59), мы будем отождествлять E с элементом

$$E = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes E_{ij} \in \operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N).$$

Предложение 2.1.1. *Для любого $s \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ элемент*

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S\, E_1 \dots E_m \tag{2.16}$$

лежит в алгебре инвариантов $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{gl}_N}$.

Доказательство. Так же как для характеристического полинома, мы проверим, что элемент (2.16) инвариантен относительно присоединённого действия группы GL_N. В силу (2.8) достаточно убедиться, что этот элемент не меняется при замене матрицы E на матрицу $\mathbf{h} E \mathbf{h}^{-1}$ для любого $\mathbf{h} \in \mathrm{GL}_N$. А это вытекает из соотношений

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S\, \mathbf{h}_1 E_1 \mathbf{h}_1^{-1} \dots \mathbf{h}_m E_m \mathbf{h}_m^{-1} = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S\, \mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_m E_1 \dots E_m \mathbf{h}_1^{-1} \dots \mathbf{h}_m^{-1}$$
$$= \operatorname{tr}_{1,\dots,m} \mathbf{h}_1^{-1} \dots \mathbf{h}_m^{-1} S\, \mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_m E_1 \dots E_m = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S\, E_1 \dots E_m,$$

в которых мы использовали циклическое свойство следа (лемма 1.4.1) и тот факт, что действия элементов S и $\mathbf{h}$ коммутируют. □

Предложение 2.1.1 следует также из теоремы 4.5.1, которая будет доказана ниже с помощью другого варианта рассуждения.

Замечание 2.1.2. Доказательство предложения 2.1.1 можно перенести на семейство инвариантов, кажущееся более общим:

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S\, E_1^{k_1} \dots E_m^{k_m} \tag{2.17}$$

для некоторых неотрицательных степеней k_a. Однако эти элементы можно записать в виде (2.16), применив процедуру «линеаризации», так что на первом шаге выражение (2.17) приобретает вид

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m,m+1} E_1^{k_1} \dots E_m^{k_m - 1} E_{m+1} P_{m\, m+1} S$$

в силу (1.67) и (1.68). В частности,

$$\operatorname{tr} E^m = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} E_1 \dots E_m P_{m-1\, m} \dots P_{1\, 2} = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} E_1 \dots E_m P_\sigma$$

для цикла $\sigma = (m, m-1, \dots, 1)$; см. также § 4.8. □

В обозначениях § 1.1 предположим, что $\mathcal{U}$ — это стандартная таблица формы $\mu \vdash m$, и пусть $e_{\mathcal{U}} \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ — это соответствующий примитивный идемпотент. Обозначим через $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ образ идемпотента $e_{\mathcal{U}}$ относительно действия симметрической группы $\mathfrak{S}_m$, заданного соотношением (1.65). Рассмотрим алгебру (2.15) и применим тензорные обозначения из § 1.4. Положим

$$\mathrm{I}_\mu = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} \mathcal{E}_{\mathcal{U}} E_1 \dots E_m. \tag{2.18}$$

Этот элемент лежит в алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{gl}_N}$ в силу предложения 2.1.1. Кроме того, он не зависит от выбора стандартной таблицы $\mathcal{U}$ формы μ. Это свойство следует из тождества (1.9) в групповой алгебре для группы $\mathfrak{S}_m$, поскольку из свойства цикличности следа вытекает, что

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_{1,\dots,m} \mathcal{E}_{\mathcal{U}} E_1 \dots E_m &= \frac{1}{m!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} P_s \, \mathcal{E}_{\mathcal{U}} E_1 \dots E_m P_s^{-1} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} P_s \, \mathcal{E}_{\mathcal{U}} P_s^{-1} E_1 \dots E_m = \frac{1}{m!} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} \mathcal{X}_\mu E_1 \dots E_m,\end{aligned}$$

где $\mathcal{X}_\mu$ — это образ неприводимого характера χ_μ относительно гомоморфизма (1.65). Для матрицы X с матричными элементами из $\mathbb{C}$ её *μ-имманант* определяется как

$$\operatorname{imm}_\mu(X) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_m} \chi_\mu(s) \, X_{s(1)\,1} \dots X_{s(m)\,m}.$$

Инвариант I_μ, определённый в (2.18), можно представить в виде линейной комбинации имманантов главных m-подматриц матрицы E с возможным повторением строк и столбцов. Кроме того, образ инварианта I_μ относительно изоморфизма Шевалле совпадает с полиномом Шура s_μ:

$$\varsigma : \mathrm{I}_\mu \mapsto s_\mu(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \tag{2.19}$$

где

$$s_\mu(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \sum_{\operatorname{sh}(\mathcal{T}) = \mu} \prod_{\alpha \in \mu} \lambda_{\mathcal{T}(\alpha)}$$

с суммированием по всем полустандартным таблицам $\mathcal{T}$ формы μ с элементами из множества $\{1, \dots, N\}$, а $\mathcal{T}(\alpha)$ обозначает элемент таблицы $\mathcal{T}$, занимающий клетку α; см. определения в §1.1. Свойство (2.19) можно проверить непосредственно (с помощью упрощённого варианта доказательства теоремы 10.1.2), и оно допускает естественное объяснение в контексте двойственности Шура–Вейля, которую мы будем обсуждать в §4.4. Так как полиномы Шура образуют базис в алгебре симметрических полиномов от переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, мы приходим к следующему результату.

Предложение 2.1.3. *Элементы I_μ, отвечающие всем диаграммам μ, содержащим не более N строк, образуют базис алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{gl}_N}$.* □

Замечание 2.1.4. С другой точки зрения, соответствие $\chi_\mu \mapsto \varsigma(\mathrm{I}_\mu)$ приводит к классическому *характеристическому отображению*, устанавливающему изоморфизм между алгеброй, порождённой неприводимыми характерами симметрических групп, и алгеброй симметрических функций; см. книгу Макдональда [**104**, §I.7]. □

Отметим два важных частных случая соответствия (2.19), отвечающие строчным и столбцовым диаграммам $\mu = (m)$ и $\mu = (1^m)$, для которых можно дать простые доказательства. Обозначим через $H^{(m)}$ и $A^{(m)}$ элементы алгебры (2.15) (с тождественной компонентой в множителе $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$), возникающие как образы симметризатора $h^{(m)}$ и антисимметризатора $a^{(m)}$ соответственно относительно отображения (1.65); см. (1.17) и (1.19).

Предложение 2.1.5. *Справедливы формулы для образов Шевалле*:

$$\varsigma : \operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)} E_1 \dots E_m \mapsto e_m(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \tag{2.20}$$

$$\varsigma : \operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)} E_1 \dots E_m \mapsto h_m(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \tag{2.21}$$

где элементарный симметрический полином $e_m(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ *определён соотношением* (2.10), *в то время как*

$$h_m(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \sum_{1 \leqslant p_1 \leqslant \dots \leqslant p_m \leqslant N} \lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_m} \tag{2.22}$$

— это m*-й полный симметрический полином.*

Доказательство. Мы будем рассматривать E как диагональную матрицу $E = \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_N]$ и вычислим следы. Применяя оператор, входящий в (2.20), к базисному вектору, получаем

$$A^{(m)} E_1 \dots E_m (e_{p_1} \otimes \dots \otimes e_{p_m}) = \frac{1}{m!} \lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_m} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn} \sigma \cdot e_{p_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{p_{\sigma(m)}}.$$

Из этой формулы ясно, что соответствующий диагональный матричный элемент оператора отличен от нуля, только если все индексы $p_1, \dots, p_m$ различны. Более того, все $m!$ перестановок m-набора $(p_1, \dots, p_m)$ дают одинаковый вклад в выражение для следа. Отсюда вытекает соотношение (2.20). Аналогично для оператора из формулы (2.21) имеем

$$H^{(m)} E_1 \dots E_m (e_{p_1} \otimes \dots \otimes e_{p_m}) = \frac{1}{m!} \lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_m} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} e_{p_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{p_{\sigma(m)}}.$$

Следовательно, если $(p_1, \dots, p_m)$ — это перестановка мультимножества, содержащего α_i элементов, равных i при $i = 1, \dots, N$, то соответствующий диагональный матричный элемент оператора равен

$$\frac{\alpha_1! \dots \alpha_N!}{m!} \lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_m}.$$

Принимая в расчёт число таких перестановок, приходим к (2.21). □

Следствие 2.1.6. *Каждое из семейств*

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)} E_1 \dots E_m \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)} E_1 \dots E_m$$

при $m = 1, \dots, N$ *алгебраически независимо и порождает алгебру* $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{gl}_N}$.

Доказательство. Это вытекает из предложения 2.1.5, так как соответствующие элементарные и полные симметрические полиномы — это алгебраически независимые образующие алгебры симметрических полиномов от N переменных. □

В качестве ещё одного следствия предложения 2.1.5 отметим формулу для коэффициентов характеристического полинома:

$$C_m = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)} E_1 \dots E_m, \qquad m = 1, \dots, N.$$

Она вытекает также из тождества

$$\det(u+E) = \operatorname{tr}_{1,\dots,N} A^{(N)}(u+E_1)\dots(u+E_N),$$

обобщение которого (3.29) будет получено ниже.

§ 2.2. Инварианты для серий B, C и D

Определим теперь *ортогональные алгебры Ли* $\mathfrak{o}_N$ при $N = 2n+1$ и $N = 2n$ (простые алгебры Ли типов B_n при $n \geqslant 1$ и D_n при $n \geqslant 3$ соответственно) и *симплектическую алгебру Ли* $\mathfrak{sp}_N$ при $N = 2n$ (простую алгебру Ли типа C_n). Это подалгебры в $\mathfrak{gl}_N$, линейно порождённые элементами F_{ij}, где

$$F_{ij} = E_{ij} - E_{j'i'} \qquad \text{и} \qquad F_{ij} = E_{ij} - \varepsilon_i\,\varepsilon_j\,E_{j'i'} \tag{2.23}$$

соответственно для $\mathfrak{o}_N$ и $\mathfrak{sp}_N$. Мы используем обозначение $i' = N - i + 1$ и в симплектическом случае полагаем $\varepsilon_i = 1$ при $i = 1, \dots, n$ и $\varepsilon_i = -1$ при $i = n+1, \dots, 2n$. Если это специально не оговаривается, то все три случая B, C и D будут рассматриваться одновременно. Мы будем обозначать через $\mathfrak{g}_N$ любую из алгебр Ли $\mathfrak{o}_N$ и $\mathfrak{sp}_N$. Таким образом,

$$\mathfrak{g}_N = \{X \in \operatorname{Mat}_N(\mathbb{C}) \mid X + X' = 0\},$$

где мы используем транспозицию, определённую на матрицах $X = [X_{ij}]$ размера $N \times N$ с элементами из произвольной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ по правилу

$$(X')_{ij} = \begin{cases} X_{j'i'} & \text{в ортогональном случае,} \\ \varepsilon_i\,\varepsilon_j\,X_{j'i'} & \text{в симплектическом случае.} \end{cases} \tag{2.24}$$

Эта транспозиция связана с симметрической или кососимметрической билинейной формой на пространстве $\mathbb{C}^N$, определённой на базисных векторах соотношением

$$\langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}. \tag{2.25}$$

Соответствующие матрицы $G = [g_{ij}]$ антидиагональные и имеют вид

$$g_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij'} & \text{в симметрическом случае,} \\ \varepsilon_i\,\delta_{ij'} & \text{в кососимметрическом случае,} \end{cases} \tag{2.26}$$

и во втором случае $N = 2n$. Формулу (2.24) можно записать в виде

$$X' = GX^tG^{-1},$$

где $X \to X^t$ — это обычное матричное транспонирование, $(X^t)_{ij} = X_{ji}$.

Когда X рассматривается как элемент (1.59), специальное транспонирование (2.24) можно понимать как антиавтоморфизм алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$, определённый на матричных единицах по правилу

$$e_{ij} \mapsto \begin{cases} e_{j'i'} & \text{в ортогональном случае,} \\ \varepsilon_i\,\varepsilon_j\,e_{j'i'} & \text{в симплектическом случае.} \end{cases} \tag{2.27}$$

При $a \in \{1, \dots, m\}$ соответствующее a-е транспонирование на алгебре (1.60) действует как отображение (2.27) на a-й копии алгебры $\operatorname{End} \mathbb{C}^N$ и как тождественное отображение на всех остальных тензорных множителях.

Лемма 2.2.1. *Предположим, что два элемента*

$$X = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes X_{ij} \qquad \textit{и} \qquad Y = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes Y_{ij}$$

алгебры $\operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \mathcal{A}$ *обладают свойством*

$$X_{ij}\, Y_{kl} = Y_{kl}\, X_{ij} \qquad \textit{для всех} \quad i, j, k, l.$$

Тогда

$$(XY)' = Y'X'.$$

Доказательство. В ортогональном случае имеем

$$Y'X' = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} e_{l'k'}\, e_{j'i'} \otimes Y_{kl}\, X_{ij} = \sum_{i,j,l=1}^{N} e_{l'i'} \otimes Y_{jl}\, X_{ij}.$$

С другой стороны,

$$XY = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} e_{ij}\, e_{kl} \otimes X_{ij}\, Y_{kl} = \sum_{i,j,l=1}^{N} e_{il} \otimes Y_{jl}\, X_{ij},$$

так что применяя транспозицию, получаем $Y'X'$. В симплектическом случае применимо то же самое рассуждение вместе с соотношением $\varepsilon_i^2 = 1$. $\square$

Применяя транспозицию (2.27) к a-й или к b-й копиям алгебры $\operatorname{End} \mathbb{C}^N$ в (1.60) и используя лемму 2.2.1, мы выводим из (1.67), что для произвольного элемента (1.59) справедливы соотношения

$$X_a'\, Q_{ab} = X_b\, Q_{ab} \qquad \text{и} \qquad Q_{ab}\, X_a = Q_{ab}\, X_b' \tag{2.28}$$

для всех $1 \leqslant a < b \leqslant m$.

Введём матрицу $F = [F_{ij}]$ размера $N \times N$ и заметим, что соотношения (2.23) имеют вид $F = E - E'$, где E — это матрица (2.5). Следовательно, F обладает свойством симметрии $F + F' = 0$. Рассматривая F как матрицу с элементами в симметрической алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)$, для её характеристического полинома получаем

$$\det(u + F) = \det(u - F') = (-1)^N \det(-u + GF^tG^{-1}) = (-1)^N \det(-u + F).$$

Поэтому

$$\det(u + F) = \begin{cases} u^{2n} + C_1\, u^{2n-2} + \dots + C_n, & \text{если} \quad N = 2n, \\ u^{2n+1} + C_1\, u^{2n-1} + \dots + C_n\, u, & \text{если} \quad N = 2n+1, \end{cases}$$

для некоторых коэффициентов $C_i \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)$.

Ортогональная группа O_N и симплектическая группа Sp_N определяются как группы комплексных матриц, сохраняющих соответствующую симметрическую или кососимметрическую форму (2.25). Мы будем обозначать через G_N любую из этих групп, так что

$$\mathrm{G}_N = \{\mathbf{g} \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \mid \mathbf{g}^t G\, \mathbf{g} = G\}.$$

Заметим, что матрица G обладает свойством $G^{-1} = \pm G$, поэтому определение группы G_N можно переписать в виде

$$\mathrm{G}_N = \{\mathbf{g} \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \mid \mathbf{g}'\mathbf{g} = 1\}. \tag{2.29}$$

Группа G_N действует на алгебре Ли $\mathfrak{g}_N$ по правилу

$$\mathrm{Ad}\, \mathbf{g} : X \mapsto \mathbf{g} X \mathbf{g}^{-1}, \qquad X \in \mathfrak{g}_N, \quad \mathbf{g} \in \mathrm{G}_N. \tag{2.30}$$

Образ матрицы F вычисляется с помощью формулы (2.8) и имеет вид

$$\mathrm{Ad}\, \mathbf{g} : F \mapsto \mathbf{g}^t F\, (\mathbf{g}^t)^{-1}. \tag{2.31}$$

Легко видеть, что элемент $\mathbf{h} = \mathbf{g}^t$ тоже лежит в группе G_N. Поэтому такое же рассуждение, как для типа A в § 2.1, показывает, что все коэффициенты полинома $\det\,(u + F)$ принадлежат подалгебре инвариантов $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)^{\mathrm{G}_N}$. Кроме того, эту подалгебру можно явно описать:

$$\mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)^{\mathrm{G}_N} = \mathbb{C}[C_1, \dots, C_n]. \tag{2.32}$$

Это следует из вычисления образов коэффициентов C_m относительно изоморфизма Шевалле. Чтобы провести это вычисление, выберем стандартное треугольное разложение для алгебры Ли $\mathfrak{g}_N$, в котором подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ линейно порождается элементами $F_{11}, \dots, F_{nn}$, в то время как подалгебры $\mathfrak{n}_-$ и $\mathfrak{n}_+$ линейно порождаются элементами F_{ij} при $i > j$ и $i < j$ соответственно. Полагая $\lambda_i = F_{ii}$ при $i = 1, \dots, n$, получаем

$$\varsigma : \det\,(u + F) \mapsto \begin{cases} (u - \lambda_1^2) \dots (u - \lambda_n^2), & \text{если} \quad N = 2n, \\ u\,(u - \lambda_1^2) \dots (u - \lambda_n^2), & \text{если} \quad N = 2n + 1. \end{cases}$$

Как и для серии A, следы всех степеней $\mathrm{tr}\, F^m$ матрицы F — это тоже G_N-инварианты. Они равны нулю для нечётных значений m из-за кососимметричности матрицы F. Положим

$$T_k = \mathrm{tr}\, F^{2k} \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)^{\mathrm{G}_N}.$$

Это даёт ещё одно семейство образующих

$$\mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)^{\mathrm{G}_N} = \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n].$$

При этом

$$\varsigma : T_k \mapsto 2\,(\lambda_1^{2k} + \dots + \lambda_n^{2k}).$$

Алгебра инвариантов (2.32) совпадает с алгеброй $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{g}_N}$ для типов B и C, но является собственной подалгеброй в $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{g}_N}$ для типа D. Если $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}$, то справедлива формула

$$C_n = \det F = (-1)^n \left(\mathrm{Pf}\, F\right)^2,$$

где $\operatorname{Pf} F$ — это *пфаффиан*, который определяется формулой[1]

$$\operatorname{Pf} F = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot F_{\sigma(1)\,\sigma(2)'} \ldots F_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)'}. \tag{2.33}$$

Эта формула вытекает из хорошо известного соотношения $\det FG = \big(\operatorname{Pf} F\big)^2$ для определителя кососимметрической матрицы чётного размера $[F_{i\,j'}] = FG$, если принять во внимание равенство $\det G = (-1)^n$. Пфаффиан $\operatorname{Pf} F$ возникает в разложении

$$\frac{\Phi^n}{n!} = \big(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n}\big) \otimes \operatorname{Pf} F \tag{2.34}$$

для n-й степени элемента

$$\Phi = \sum_{i<j} (e_i \wedge e_j) \otimes F_{i\,j'} \in \Lambda(\mathbb{C}^{2n}) \otimes \mathrm{S}(\mathfrak{o}_{2n}),$$

где $\Lambda(\mathbb{C}^{2n})$ — это внешняя алгебра векторного пространства $\mathbb{C}^{2n}$. Отображение (2.31) действует как $FG \mapsto \mathbf{h} FG \mathbf{h}^t$, где $\mathbf{h} = \mathbf{g}^t$. Поэтому, применяя (2.34), мы заключаем, что образ пфаффиана $\operatorname{Pf} F$ относительно этого отображения находится по правилу

$$\operatorname{Pf} F \mapsto \det \mathbf{h} \cdot \operatorname{Pf} F.$$

Это означает, что пфаффиан $\operatorname{Pf} F$ инвариантен относительно присоединённого действия специальной ортогональной группы SO_{2n} и, следовательно, относительно действия алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$. Однако $\operatorname{Pf} F$ не содержится в алгебре (2.32) при $\mathrm{G}_N = \mathrm{O}_{2n}$. Для образа Шевалле имеем

$$\varsigma : \operatorname{Pf} F \mapsto \lambda_1 \ldots \lambda_n.$$

Таким образом, алгебру $\mathfrak{g}_N$-инвариантов можно описать как

$$\mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{g}_N} = \begin{cases} \mathbb{C}[C_1, \ldots, C_n] & \text{для} \quad \mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n+1}, \quad \mathfrak{sp}_{2n}, \\ \mathbb{C}[C_1, \ldots, C_{n-1}, \operatorname{Pf} F\,] & \text{для} \quad \mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}, \end{cases} \tag{2.35}$$

поскольку образы Шевалле соответствующих элементов — это алгебраически независимые образующие алгебры W-инвариантов в $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$.

Чтобы доказать ортогональные и симплектические аналоги предложения 2.1.1, рассмотрим действие алгебры Брауэра на пространстве тензоров $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$, определённое в §1.5. Взяв ограничение действия (2.13) на подгруппу G_N, получим её действие на этом пространстве

$$\mathbf{h} : v_1 \otimes \ldots \otimes v_m \mapsto \mathbf{h} v_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{h} v_m, \qquad v_i \in \mathbb{C}^N, \qquad \mathbf{h} \in \mathrm{G}_N,$$

которое мы будем записывать как $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_m$. Действие произвольного элемента $s \in \mathcal{B}_m(\omega)$ для соответствующих значений $\omega = N$ или $\omega = -N$ на векторном пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ коммутирует с действием любого элемента

[1]Строго говоря, это пфаффиан кососимметрической матрицы $[F_{i\,j'}]$. Мы допускаем некоторую вольность речи, вводя пфаффиан матрицы F, которая кососимметрична относительно *побочной* диагонали.

$\mathbf{h} \in \mathrm{G}_N$. В самом деле, это уже было проверено для образующих $s_{a\,a+1}$ в формуле (2.14), а для действия образующих $\epsilon_{a\,a+1}$ имеем

$$Q_{a\,a+1}\mathbf{h}_a\,\mathbf{h}_{a+1} = Q_{a\,a+1}\mathbf{h}'_{a+1}\mathbf{h}_{a+1} = Q_{a\,a+1} = \mathbf{h}_a\,\mathbf{h}'_a Q_{a\,a+1} = \mathbf{h}_a\,\mathbf{h}_{a+1}Q_{a\,a+1},$$

где мы использовали определение (2.29) и свойства

$$Q_{a\,a+1}\mathbf{h}_a = Q_{a\,a+1}\mathbf{h}'_{a+1} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{h}'_a Q_{a\,a+1} = \mathbf{h}_{a+1}Q_{a\,a+1},$$

вытекающие из (2.28). Поэтому

$$Q_{a\,a+1}\,\mathbf{h}_1\ldots\mathbf{h}_m = \mathbf{h}_1\ldots\mathbf{h}_m\,Q_{a\,a+1}.$$

Мы вернёмся к коммутирующим действиям алгебры Брауэра и группы G_N в §5.2 в контексте *двойственности Брауэра–Шура–Вейля.*

Пусть S обозначает образ элемента $s \in \mathcal{B}_m(\omega)$ относительно соответствующего отображения (1.69) или (1.73). Мы будем рассматривать S как элемент алгебры

$$\underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{S}(\mathfrak{g}_N), \tag{2.36}$$

отождествляя его с $S \otimes 1$. Матрицу F будем рассматривать как элемент

$$F = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes F_{ij} \in \operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{S}(\mathfrak{g}_N).$$

Предложение 2.2.2. *Для любого $s \in \mathcal{B}_m(\omega)$ при $\omega = N$ или $\omega = -N$ соответственно элемент*

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} S\,F_1\ldots F_m \tag{2.37}$$

принадлежит алгебре инвариантов $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)^{\mathrm{G}_N}$. *При этом если m нечётно, то этот элемент равен нулю.*

Доказательство. Применим то же самое рассуждение, что и в доказательстве предложения 2.1.1. Оно основывается на проверенном выше свойстве, что оператор S коммутирует с произведением $\mathbf{h}_1\ldots\mathbf{h}_m$ для любого $\mathbf{h} \in \mathrm{G}_N$. Все образующие C_k в алгебре (2.32) — это однородные полиномы чётной степени от переменных F_{ij}. Если m нечётно, то инвариант (2.37) — это однородный полином нечётной степени, и поэтому он равен нулю. □

Теперь мы применим предложение 2.2.2 к некоторым конкретным элементам s. Пусть $S^{(m)}$ и $A^{(m)}$ обозначают соответствующие образы симметризатора $s^{(m)}$ и антисимметризатора $a^{(m)}$ в алгебре Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ (эти элементы были определены в §1.2 несколькими эквивалентными формулами) относительно действия (1.69) (при $\omega = N$) или (1.73) (при $\omega = -N$). Рассмотрим алгебру (2.36) и применим тензорные обозначения из §1.4. Имеет место аналог предложения 2.1.5.

Предложение 2.2.3. *Для образов относительно изоморфизма Шевалле в случае $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_N$ справедлива формула*

$$\varsigma : \operatorname{tr}_{1,\ldots,2k} A^{(2k)}F_1\ldots F_{2k} \mapsto (-1)^k\,e_k(\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2),$$

в то время как для $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_{2n}$ имеет место соотношение

$$\varsigma : \operatorname{tr}_{1,\dots,2k} A^{(2k)} F_1 \dots F_{2k} \mapsto h_k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2). \tag{2.38}$$

Доказательство. Для вычисления следов будем рассматривать F как диагональную матрицу

$$F = \begin{cases} \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_n, \dots, -\lambda_1], & \text{если} \quad N = 2n, \\ \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, -\lambda_n, \dots, -\lambda_1], & \text{если} \quad N = 2n+1. \end{cases} \tag{2.39}$$

В силу (2.20) в ортогональном случае достаточно проверить соотношение

$$e_{2k}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, -\lambda_2, -\lambda_1) = (-1)^k e_k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2).$$

Оно непосредственно вытекает из тождества

$$\sum_{m=0}^{N} u^{N-m} e_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, -\lambda_2, -\lambda_1) = (u+\lambda_1)(u+\lambda_2)\dots(u-\lambda_2)(u-\lambda_1).$$

В симплектическом случае оператор $A^{(m)}$ на пространстве тензоров совпадает с действием симметризатора $h^{(m)}$, определённым в (1.65), из-за знаков в формулах (1.73). Поэтому требуемое свойство следует из (2.21) в силу тождества для производящих функций

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m h_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, -\lambda_2, -\lambda_1) = \frac{1}{(1-t\lambda_1)(1-t\lambda_2)\dots(1+t\lambda_2)(1+t\lambda_1)}$$
$$= \frac{1}{(1-t^2\lambda_1^2)\dots(1-t^2\lambda_n^2)},$$

что и завершает доказательство. □

Вычисление образов Шевалле инвариантов, связанных с симметризатором $S^{(m)}$, потребует дополнительной работы. Положим

$$\gamma_m(\omega) = \frac{\omega + m - 2}{\omega + 2m - 2} \tag{2.40}$$

и рассмотрим сначала ортогональный случай.

Предложение 2.2.4. *В случае $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_N$ образы Шевалле находятся по формуле*

$$\varsigma : \gamma_{2k}(N) \operatorname{tr}_{1,\dots,2k} S^{(2k)} F_1 \dots F_{2k} \mapsto h_k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2). \tag{2.41}$$

Доказательство. Считая, что $F = \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_N]$ — это диагональная матрица вида (2.39), а m — это положительное целое число, мы будем вычислять след

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)} F_1 \dots F_m, \tag{2.42}$$

применяя соответствующий оператор к базисному вектору $e_{p_1} \otimes \dots \otimes e_{p_m}$. Используя выражение (1.41) для симметризатора, мы можем записать

$$S^{(m)} = H^{(m)} \sum_{r=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^r}{2^r\, r!} \binom{N/2+m-2}{r}^{-1} \sum_{a_i<b_i} Q_{a_1b_1} Q_{a_2b_2} \dots Q_{a_rb_r}, \tag{2.43}$$

где вторая сумма берётся по всем неупорядоченным наборам непересекающихся пар индексов $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r)\}$ из множества $\{1, \ldots, m\}$. Так как оператор $H^{(m)}$ коммутирует с суммой

$$\sum_{a_i<b_i} Q_{a_1b_1} Q_{a_2b_2} \ldots Q_{a_rb_r} \tag{2.44}$$

для каждого значения r, все перестановки m-набора $(p_1, \ldots, p_m)$ дают один и тот же вклад в выражение для следа. Кроме того, поскольку $\lambda_{n+1} = 0$ в случае $N = 2n + 1$, достаточно рассматривать базисные векторы вида

$$\underbrace{e_1 \otimes \ldots \otimes e_1}_{q_1} \otimes \underbrace{e_{1'} \otimes \ldots \otimes e_{1'}}_{q_{1'}} \otimes \ldots \otimes \underbrace{e_n \otimes \ldots \otimes e_n}_{q_n} \otimes \underbrace{e_{n'} \otimes \ldots \otimes e_{n'}}_{q_{n'}} \tag{2.45}$$

при $q_1 + \cdots + q_{n'} = m$. Произведение $Q_{a_1b_1} Q_{a_2b_2} \ldots Q_{a_rb_r}$, входящее в сумму (2.44), аннулирует этот вектор, за исключением тех случаев, когда для каждой пары (a_i, b_i) тензорные множители с номерами a_i и b_i равны соответственно e_l and $e_{l'}$ для некоторого значения l. В таком случае

$$Q_{a_ib_i}\big(\ldots \otimes e_l \otimes \ldots \otimes e_{l'} \otimes \ldots\big) = \sum_{l_i=1}^{N} \big(\ldots \otimes e_{l_i} \otimes \ldots \otimes e_{l_i'} \otimes \ldots\big).$$

Пусть $s_1, \ldots, s_n$ — это такие неотрицательные целые числа, что $s_1 + \cdots + s_n = r$. Предположим, что для каждого $l = 1, \ldots, n$ число пар (a_i, b_i), соответствующих значению l, равно s_l. Тогда число произведений $Q_{a_1b_1} Q_{a_2b_2} \ldots Q_{a_rb_r}$ с этим свойством даётся формулой

$$\prod_{l=1}^{n} \binom{q_l}{s_l} \binom{q_{l'}}{s_l} s_l!.$$

Заметим, что в соответствии с формулой (2.43) из-за последующего применения оператора $H^{(m)}$ все перестановки множителей в тензорных произведениях базисных векторов пространства $\mathbb{C}^N$ дают один и тот же вклад в диагональный матричный элемент. Такое же наблюдение относится и ко всем 2^r перестановкам тензорных множителей $e_{l_i} \otimes e_{l_i'} \mapsto e_{l_i'} \otimes e_{l_i}$ для значений $l_i' = 1, \ldots, n$. Ясно, что в случае $N = 2n + 1$ мы можем игнорировать значения $l_i = n + 1$. Таким образом, принимая в расчёт число перестановок

$$\frac{r!}{s_1! \ldots s_n!}$$

данного r-мультимножества с кратностями $s_1, \ldots, s_n$, мы находим, что диагональный матричный элемент оператора

$$H^{(m)} \sum_{a_i<b_i} Q_{a_1b_1} Q_{a_2b_2} \ldots Q_{a_rb_r} F_1 \ldots F_m,$$

соответствующий вектору (2.45), равен

$$\frac{q_1!\,q_{1'}!\dots q_n!\,q_{n'}!}{m!} \times 2^r\,r! \sum \binom{q_1}{s_1}\binom{q_{1'}}{s_1}\dots\binom{q_n}{s_n}\binom{q_{n'}}{s_n}\lambda_1^{q_1}(-\lambda_1)^{q_{1'}}\dots\lambda_n^{q_n}(-\lambda_n)^{q_{n'}},$$

где суммирование проводится по всем n-наборам неотрицательных целых чисел s_l, удовлетворяющих условию $s_1+\dots+s_n=r$. Число различных базисных векторов, которые получаются перестановками тензорных множителей в (2.45), равно

$$\frac{m!}{q_1!\,q_{1'}!\dots q_n!\,q_{n'}!}.$$

След в (2.42) получается как сумма диагональных матричных элементов, соответствующих всем базисным векторам, с учётом суммирования по параметру r, входящему в формулу (2.43). Посмотрим теперь на коэффициент при мономе вида $\lambda_1^{m_1}\dots\lambda_n^{m_n}$ в окончательном выражении для следа. Сумму

$$\sum_{q_i+q_{i'}=m_i}(-1)^{q_{i'}}\binom{q_i}{s_i}\binom{q_{i'}}{s_i} \tag{2.46}$$

при фиксированном значении параметра s_i можно вычислить следующим образом. Из формулы для производящей функции

$$\sum_{q=0}^{\infty}\binom{q}{s}z^q=\frac{z^s}{(1-z)^{s+1}}$$

следует, что производящая функция для коэффициентов (2.46) имеет вид

$$\frac{z^{s_i}}{(1-z)^{s_i+1}}\,\frac{(-z)^{s_i}}{(1+z)^{s_i+1}}=\frac{(-1)^{s_i}\,z^{2s_i}}{(1-z^2)^{s_i+1}}.$$

Этот формальный степенной ряд чётный, так что сумма (2.46) равна нулю при нечётных значениях m_i. Отсюда следует, что если m нечётно, то след (2.42) равен нулю (что согласуется с предложением 2.2.2), поскольку по крайней мере одна из степеней m_i нечётная. Если же $m=2k$ чётно, то все степени m_i монома $\lambda_1^{m_1}\dots\lambda_n^{m_n}$ можно считать чётными, скажем, $m_i=2k_i$. Тогда сумма (2.46) вычисляется и равна $(-1)^{s_i}\binom{k_i}{s_i}$. Следовательно, коэффициент при $\lambda_1^{2k_1}\dots\lambda_n^{2k_n}$ в выражении для следа (2.42) при $m=2k$ вычисляется по формуле

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{N/2+2k-2}{r}^{-1}\sum_{s_1+\dots+s_n=r}(-1)^{s_1}\binom{k_1}{s_1}\dots(-1)^{s_n}\binom{k_n}{s_n},$$

а это выражение равно

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{N/2+2k-2}{r}^{-1}\binom{k}{r}. \tag{2.47}$$

Из рекуррентной формулы для биномиальных коэффициентов следует тождество

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{x-r}{k-r} = \binom{x+1}{k},$$

в котором x — это переменная. Умножая обе части на обратное выражение к биномиальному коэффициенту $\binom{x}{k}$, получаем

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{x}{r}^{-1} \binom{k}{r} = \frac{x+1}{x-k+1}. \tag{2.48}$$

Таким образом, сумма (2.47) равна

$$\frac{N+4k-2}{N+2k-2} = \gamma_{2k}(N)^{-1},$$

как и требовалось. □

Следствие 2.2.5. (i) *Семейство элементов*

$$\gamma_{2k}(N)\, \mathrm{tr}_{1,\ldots,2k}\, S^{(2k)} F_1 \ldots F_{2k} \tag{2.49}$$

при $k = 1, \ldots, n$ *алгебраически независимо и порождает алгебру* $\mathrm{S}(\mathfrak{o}_N)^{\mathfrak{o}_N}$ *при* $N = 2n+1$.

(ii) *Семейство элементов* (2.49) *при* $k = 1, \ldots, n-1$ *вместе с пфаффианом* $\mathrm{Pf}\, F$ *алгебраически независимо и порождает алгебру* $\mathrm{S}(\mathfrak{o}_N)^{\mathfrak{o}_N}$ *при* $N = 2n$.

Доказательство. Оба утверждения вытекают из предложения 2.2.4, так как образы Шевалле обоих семейств — это алгебраически независимые образующие алгебры W-инвариантов $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$. □

В симплектическом случае симметризатор $S^{(m)}$ корректно определён для таких значений m, что $m \leqslant n+1$, в то время как $S^{(m)}$ *не определён* при $m \geqslant n+2$, так как некоторые знаменатели в формулах для $s^{(m)}$ обращаются в нуль при $\omega = -2n$. При этом $S^{(n+1)} = 0$, что можно увидеть из интерпретации симметризатора с точки зрения двойственности Хау (см. ниже предложение 2.3.2) или из двойственности Брауэра–Шура–Вейля (см. разложение (5.13) в §5.2). Тем не менее, инварианты (2.37) при $S = S^{(m)}$ можно определить для всех таких значений m, что $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$, с помощью некоторого варианта «аналитического продолжения», как будет показано ниже в предложении 2.2.8. Мы будем использовать обозначение (2.40).

Предложение 2.2.6. *Если* $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_{2n}$ *и* $2k \leqslant n$, *то для образа относительно изоморфизма Шевалле справедлива формула*

$$\varsigma : \gamma_{2k}(-2n)\, \mathrm{tr}_{1,\ldots,2k}\, S^{(2k)} F_1 \ldots F_{2k} \mapsto (-1)^k\, e_k(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2). \tag{2.50}$$

Доказательство. Будем считать, что $F = \mathrm{diag}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}]$ — это диагональная матрица вида (2.39), и для положительного $m \leqslant n$ вычислим след

$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S^{(m)} F_1 \ldots F_m, \tag{2.51}$$

применяя оператор к базисным векторам пространства тензоров. Пусть $H^{(m)}$ — это образ элемента $h^{(m)}$ алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(-2n)$ при действии (1.73). Заметим, что $H^{(m)}$ действует как оператор антисимметризации на пространстве тензоров. Используя выражение (1.41) для симметризатора, мы можем записать

$$S^{(m)} = H^{(m)} \sum_{r=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{1}{2^r r!} \binom{-n+m-2}{r}^{-1} \sum_{a_i<b_i} Q_{a_1b_1} Q_{a_2b_2} \dots Q_{a_rb_r}, \tag{2.52}$$

где вторая сумма берётся по всем неупорядоченным наборам непересекающихся пар индексов $\{(a_1, b_1), \dots, (a_r, b_r)\}$ из множества $\{1, \dots, m\}$. Так как оператор $H^{(m)}$ коммутирует с суммой

$$\sum_{a_i<b_i} Q_{a_1b_1} Q_{a_2b_2} \dots Q_{a_rb_r} \tag{2.53}$$

для каждого значения r, будет достаточно вычислить диагональные матричные элементы оператора на тензорных произведениях различных базисных векторов вида

$$e_{c_1} \otimes e_{c_1'} \otimes \dots \otimes e_{c_p} \otimes e_{c_p'} \otimes e_{d_1} \otimes \dots \otimes e_{d_{m-2p}}, \qquad p = 0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor, \tag{2.54}$$

где $1 \leqslant c_1 < \dots < c_p \leqslant n$ и $1 \leqslant d_1 < \dots < d_{m-2p} \leqslant 2n$ при условии, что $d_i + d_j \neq 2n+1$ для всех i и j. При $i = 1, \dots, p$ имеем

$$Q_{2i-1\,2i}(e_{c_i} \otimes e_{c_i'}) = \sum_{l=1}^{n} (e_l \otimes e_{l'} - e_{l'} \otimes e_l).$$

Применяя произведение операторов $H^{(m)}$ и (2.53) к базисному вектору вида (2.54), мы находим, что коэффициент при этом векторе в разложении по базисным векторам равен $2^r \dfrac{r!}{m!} \dbinom{p}{r}$. Так как $\lambda_{i'} = -\lambda_i$, суммарный вклад базисных векторов, удовлетворяющих условию $m - 2p > 0$, в выражение для следа в (2.51) равен нулю. В частности, отсюда следует, что если m нечётно, то след в (2.51) равен нулю, что согласуется с предложением 2.2.2. Предположим теперь, что $m = 2k$ чётно. Можно считать, что $p = k$ для вектора в (2.54), так что коэффициент при мономе $\lambda_{c_1}^2 \dots \lambda_{c_k}^2$ в выражении для следа равен

$$(-1)^k \sum_{r=0}^{k} \binom{-n+2k-2}{r}^{-1} \binom{k}{r} = (-1)^k \, \frac{-n+2k-1}{-n+k-1} = (-1)^k \, \gamma_{2k}(-2n)^{-1}$$

в силу тождества (2.48). □

Теперь мы хотим придать смысл инвариантам в симметрической алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n})$, связанным с симметризатором $S^{(m)}$, для всех таких значений m, что $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$.

Лемма 2.2.7. *Если $m \leqslant n$, то для m-го частичного следа справедлива формула*

$$\operatorname{tr}_m S^{(m)} F_m = -\frac{n-m+1}{m(n-m+2)} \sum_{a=1}^{m-1} F_a\, S^{(m-1)}.$$

Доказательство. Левая часть равна $\operatorname{tr}_m F_m S^{(m)}$ в силу свойства цикличности следа. Взяв образы обеих частей рекуррентного соотношения (1.53) относительно гомоморфизма (1.73), получим

$$S^{(m)} = \frac{1}{m(-2n+2m-4)} \Big(-1 + \sum_{a=1}^{m-1} \big(P_{a\,m} - Q_{a\,m}\big)\Big) \\ \times \Big(2n-m+3 + \sum_{a=1}^{m-1} \big(P_{a\,m} - Q_{a\,m}\big)\Big) S^{(m-1)}.$$

Теперь будем использовать соотношения (1.75), чтобы вычислить частичный след

$$\operatorname{tr}_m F_m \Big(-1 + \sum_{a=1}^{m-1} \big(P_{a\,m} - Q_{a\,m}\big)\Big) \\ \times \Big(2n-m+3 + \sum_{a=1}^{m-1} \big(P_{a\,m} - Q_{a\,m}\big)\Big) S^{(m-1)}. \tag{2.55}$$

Имеем $\operatorname{tr}_m F_m = 0$ и, применяя (1.67), (1.68), (1.76) и (2.28), получаем

$$\operatorname{tr}_m F_m P_{a\,m} = \operatorname{tr}_m P_{a\,m} F_a = F_a \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tr}_m F_m Q_{a\,m} = \operatorname{tr}_m F'_a Q_{a\,m} = -F_a.$$

Далее, если индексы $a, b \in \{1, \dots, m-1\}$ различны, то

$$\operatorname{tr}_m F_m \big(P_{a\,m} - Q_{a\,m}\big) P_{b\,m} = \operatorname{tr}_m P_{b\,m} F_b \big(P_{a\,b} - Q_{a\,b}\big) = F_b \big(P_{a\,b} - Q_{a\,b}\big),$$

где мы полагаем $P_{a\,b} = P_{b\,a}$ и $Q_{a\,b} = Q_{b\,a}$ при $a > b$. Аналогично

$$\operatorname{tr}_m F_m \big(P_{a\,m} - Q_{a\,m}\big) Q_{b\,m} = \operatorname{tr}_m F_m \big(Q_{a\,b} - P_{a\,b}\big) Q_{b\,m} \\ = \operatorname{tr}_m \big(Q_{a\,b} - P_{a\,b}\big) F_m Q_{b\,m} = \big(P_{a\,b} - Q_{a\,b}\big) F_b.$$

В силу свойств симметризатора (1.31) выполняются соотношения

$$F_b \big(P_{a\,b} - Q_{a\,b}\big) S^{(m-1)} = -F_b\, S^{(m-1)},$$

в то время как

$$\big(P_{a\,b} - Q_{a\,b}\big) F_b\, S^{(m-1)} = \big(F_a P_{a\,b} - Q_{a\,b} F_b\big) S^{(m-1)} = -F_a\, S^{(m-1)}.$$

Последнее равенство выполнено, поскольку

$$Q_{a\,b} F_b\, S^{(m-1)} = -Q_{a\,b} P_{a\,b} F_b\, S^{(m-1)} = Q_{a\,b} F_a\, S^{(m-1)} = -Q_{a\,b} F_b\, S^{(m-1)},$$

так что $Q_{a\,b}\,F_b\,S^{(m-1)} = 0$. Собирая вместе все слагаемые, мы можем заключить, что частичный след в (2.55) равен

$$2\,(n-m+1)\,\sum_{a=1}^{m-1} F_a\,S^{(m-1)},$$

что и завершает доказательство. □

Предложение 2.2.8. *Выражение*

$$\gamma_m(-2n)\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)} F_1 \dots F_m \tag{2.56}$$

допускает эквивалентную форму, которая представляет собой корректно определённый элемент алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n})^{\mathfrak{sp}_{2n}}$ *для всех значений* $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$.

Доказательство. Предположим, что $m \leqslant n$. Вычисляя m-й частичный след с использованием леммы 2.2.7 и применяя циклическое свойство следа, мы можем записать элемент (2.56) в виде линейной комбинации выражений вида

$$\gamma_{m-1}(-2n)\operatorname{tr}_{1,\dots,m-1} S^{(m-1)} F_1 \dots F_a^2 \dots F_{m-1}, \qquad a = 1,\dots,m-1.$$

Все коэффициенты этой линейной комбинации корректно определены для всех $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$. В силу (1.31) и (1.73) имеем равенство

$$S^{(m-1)} = (-1)^{a-1}\, S^{(m-1)}\, P_\sigma,$$

которое выполняется для любого цикла $\sigma = (1,\,2,\dots,a)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}_{1,\dots,m-1} & S^{(m-1)} F_1 \dots F_a^2 \dots F_{m-1} \\
&= (-1)^{a-1}\operatorname{tr}_{1,\dots,m-1} S^{(m-1)}\, P_\sigma\, F_a^2\, F_1 \dots F_{a-1}\, F_{a+1} \dots F_{m-1} \\
&= (-1)^{a-1}\operatorname{tr}_{1,\dots,m-1} S^{(m-1)}\, F_1^2\, F_2 \dots F_a\, F_{a+1} \dots F_{m-1}\, P_\sigma,
\end{aligned}$$

а это выражение равно

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m-1} S^{(m-1)}\, F_1^2\, F_2 \dots F_{m-1}$$

в силу циклического свойства следа. Поэтому (2.56) пропорционально выражению

$$\gamma_{m-1}(-2n)\operatorname{tr}_{1,\dots,m-1} S^{(m-1)} F_1^2\, F_2 \dots F_{m-1}. \tag{2.57}$$

Применим снова лемму 2.2.7 для $(m-1)$-го частичного следа. Повторяя предыдущее вычисление, мы сможем представить элемент (2.57) в виде линейной комбинации двух выражений

$$\gamma_{m-2}(-2n)\operatorname{tr}_{1,\dots,m-2} S^{(m-2)} F_1^3\, F_2 \dots F_{m-2}$$

и

$$\gamma_{m-2}(-2n)\operatorname{tr}_{1,\dots,m-2} S^{(m-2)} F_1^2\, F_2^2\, F_3 \dots F_{m-2},$$

причём её коэффициенты корректно определены при $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$. Продолжая в том же духе с $(m-2)$-м частичным следом и т. д., мы сможем сделать в общей сложности l шагов для любого l, удовлетворяющего условию $2l \leqslant m+1$, чтобы записать элемент (2.56) в виде линейной комбинации выражений вида

$$\gamma_{m-l}(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m-l}\, S^{(m-l)} F_1^{k_1} \dots F_{m-l}^{k_{m-l}}. \tag{2.58}$$

Заметим теперь, что выражение (2.58) корректно определено при $m-l \leqslant n$. Следовательно, если $n+1 \leqslant m \leqslant 2n+1$, то взяв $l = m-n$, мы получим желаемое выражение, определённое для всех этих значений m. Кроме того, каждый элемент (2.58) лежит в подалгебре инвариантов $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n})^{\mathfrak{sp}_{2n}}$; ср. замечание 2.1.2.

Чтобы завершить доказательство, нам необходимо убедиться, что все возможные линейные комбинации, представляющие элемент (2.56) при условии $n+1 \leqslant m \leqslant 2n+1$, полученные описанной выше процедурой, совпадают как элементы симметрической алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n})$. Если условие $m \leqslant n$ выполнено, то в силу (2.32) инвариант (2.56) однозначно записывается как полином от образующих $C_1, \dots, C_n$,

$$\gamma_m(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} F_1 \dots F_m = \sum a^{(m)}_{k_1,\dots,k_n} C_1^{k_1} \dots C_n^{k_n},$$

с суммированием по неотрицательным целым числам k_a, удовлетворяющим условию на степени $2k_1 + 4k_2 + \dots + 2nk_n = m$. В частности, инвариант равен нулю, если m нечётно. Кроме того, k_a может быть отлично от нуля, только если $2a \leqslant m$. Поэтому мы можем записать коэффициенты как $a^{(m)}_{k_1,\dots,k_n} = a^{(m)}_{k_1,\dots,k_p}$ при $p = \lfloor m/2 \rfloor$. Предположим теперь, что значение m фиксировано, а n меняется. Коэффициенты $a^{(m)}_{k_1,\dots,k_p}$ — это рациональные функции от n, а следовательно, они полностью определяются своими значениями в бесконечном числе точек — значений аргумента n при $n \geqslant m$. Первая часть доказательства показывает, что рациональные функции $a^{(m)}_{k_1,\dots,k_p}$ определены для всех значений $n \geqslant (m-1)/2$, т.е. при $n \geqslant p$. Таким образом, мы можем заключить, что все эквивалентные выражения для элемента (2.56), полученные в первой части доказательства, совпадают как элементы алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n})^{\mathfrak{sp}_{2n}}$ для бесконечного числа значений n, а поэтому они должны совпадать для всех значений $n \geqslant (m-1)/2$, для которых они определены. □

Мы будем использовать выражение (2.56) для всех значений параметров при $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$, подразумевая, что оно представляет собой корректно определённый элемент алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n})^{\mathfrak{sp}_{2n}}$, полученный в доказательстве предложения 2.2.8.

Пример 2.2.9. При $m = 2$ и $n \geqslant 2$ выражение (2.56) принимает вид

$$\gamma_2(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,2}\, S^{(2)} F_1 F_2 = \frac{n}{n-1}\,\mathrm{tr}_{1,2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{P_{12}}{2} - \frac{Q_{12}}{2n}\Big) F_1 F_2.$$

Так как $\mathrm{tr}\, F = 0$, из свойств (1.68) и (1.76) вместе с (1.67) и (2.28) следует, что это выражение совпадает с $-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, F^2$. Это корректно определённый элемент алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n})^{\mathfrak{sp}_{2n}}$ при всех $n \geqslant 1$. □

Следствие 2.2.10. *Предложение 2.2.6 справедливо для всех значений параметров при* $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$. *Кроме того, семейство элементов*

$$\gamma_{2k}(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,2k}\,S^{(2k)}F_1\dots F_{2k} \tag{2.59}$$

при $k=1,\dots,n$ *алгебраически независимо и порождает алгебру* $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n})^{\mathfrak{sp}_{2n}}$.

Доказательство. Как видно из доказательства предложения 2.2.8, при фиксированном значении m полином от $C_1,\dots,C_p$, представляющий элемент (2.56), определяется значениями $n \geqslant m$. Поэтому первое утверждение следует из предложения 2.2.6. Справедливость второй части следствия вытекает из того, что образы Шевалле элементов (2.59) — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$. □

§ 2.3. Симметризатор и экстремальный проектор

Пусть сначала $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_N$. Мы рассматриваем оператор $H^{(m)}$ на тензорном пространстве

$$\underbrace{\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^N}_{m} \tag{2.60}$$

как образ элемента $h^{(m)} \in \mathcal{B}_m(N)$ относительно действия (1.65). Обозначим через $\mathcal{P}_N$ пространство полиномов от переменных $z_1,\dots,z_N$ и отождествим образ векторного пространства (2.60) относительно оператора $H^{(m)}$ с подпространством $\mathcal{P}_N^m$ однородных полиномов степени m,

$$H^{(m)}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} \cong \mathcal{P}_N^m, \tag{2.61}$$

с помощью изоморфизма

$$H^{(m)}(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}) \mapsto z_{i_1}\dots z_{i_m}. \tag{2.62}$$

В силу (2.43) мы можем считать $S^{(m)}$ оператором на пространстве $\mathcal{P}_N^m$. Этот оператор коммутирует с действием ортогональной группы O_N на этом пространстве. Поэтому его можно выразить в терминах действия образующих алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, которое возникает в контексте частного случая *двойственности Хау* [**67**, Section 3.4]. Чтобы получить явное выражение, возьмём стандартный базис $\{e,f,h\}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ с коммутационными соотношениями

$$[e,f]=h, \qquad [h,e]=2e, \qquad [h,f]=-2f.$$

Действие базисных элементов в пространстве $\mathcal{P}_N$ даётся формулами

$$e \mapsto -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \partial_i\,\partial_{i'}, \qquad f \mapsto \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N z_i\,z_{i'}, \qquad h \mapsto -\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^N z_i\,\partial_i, \tag{2.63}$$

где ∂_i обозначает частную производную по z_i. Вспомним, что *экстремальный проектор* p для $\mathfrak{sl}_2$ определяется по формуле

$$p = 1 + \sum_{r=1}^\infty \frac{(-1)^r}{r!\,(h+2)\dots(h+r+1)}\,f^r e^r. \tag{2.64}$$

Проектор p — это элемент некоторого расширения универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$. Он обладает свойствами

$$ep = pf = 0.$$

Центр универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$ порождается элементом Казимира

$$C = fe + \frac{h(h+2)}{4}.$$

Следующее тождество в $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$ легко проверить по индукции:

$$f^r e^r = \Big(C - \frac{h(h+2)}{4}\Big)\Big(C - \frac{(h+2)(h+4)}{4}\Big)\ldots\Big(C - \frac{(h+2r-2)(h+2r)}{4}\Big)$$

при $r \geqslant 1$. Поэтому экстремальный проектор (2.64) можно записать в виде

$$p = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,(h+2)\ldots(h+r+1)} \times fe\big(fe-(h+2)\big)\ldots\big(fe-(r-1)(h+r)\big), \tag{2.65}$$

что эквивалентно разложению в бесконечное произведение

$$p = \prod_{r=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{fe}{r(h+r+1)}\Big). \tag{2.66}$$

Базисный элемент h алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ действует на пространстве $\mathcal{P}_N^m$ как умножение на константу $-N/2-m$. Кроме того, это пространство аннулируется действием элемента e^r при $r > m/2$. Следовательно, используя формулу (2.64), мы можем рассматривать p как оператор в пространстве $\mathcal{P}_N$. Образ этого оператора совпадает с подпространством $\mathfrak{sl}_2$-особых векторов.

Предложение 2.3.1. *Оператор $S^{(m)}$ в пространстве $\mathcal{P}_N^m$ совпадает с ограничением действия экстремального проектора p на это пространство.*

Доказательство. Будем рассматривать оператор $S^{(m)}$ как образ симметризатора $s^{(m)}$, заданного формулой (1.44), относительно действия (1.69) алгебры Брауэра при $\omega = N$. Для операторов в пространстве $\mathcal{P}_N^m$ справедливо тождество

$$\sum_{a<b} Q_{ab} = -2fe.$$

Остаётся сравнить формулу для $S^{(m)}$ с формулой (2.65). □

Пусть теперь $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_{2n}$. Вспомним, что оператор $H^{(m)}$, введённый в предыдущем параграфе, действует как антисимметризатор в пространстве тензоров (2.60). Внешняя алгебра $\Lambda_{2n} = \Lambda(\mathbb{C}^{2n})$ будет рассматриваться как пространство полиномов от антикоммутирующих переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2n}$. Обозначим через Λ_{2n}^m подпространство однородных полиномов степени m. Отождествим векторные пространства

$$H^{(m)}(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes m} \cong \Lambda_{2n}^m \tag{2.67}$$

с помощью изоморфизма

$$H^{(m)}(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}) \mapsto \zeta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \zeta_{i_m}. \tag{2.68}$$

Если выполнено условие $m \leqslant n+1$, то $S^{(m)}$ — это корректно определённый оператор в пространстве Λ^m_{2n}. Мы будем рассматривать его как образ симметризатора $s^{(m)}$, заданного формулой (1.44), относительно действия (1.73) алгебры Брауэра при $\omega = -2n$. Оператор $S^{(m)}$ коммутирует с диагональным действием симплектической группы Sp_{2n} в пространстве (2.60). Поэтому его можно выразить в терминах действия образующих алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ в контексте *косой двойственности Хау* [**67**, Section 3.8]. Действие базисных элементов $\mathfrak{sl}_2$ в пространстве Λ_{2n} даётся формулами

$$e \mapsto \sum_{i=1}^{n} \partial_i \wedge \partial_{i'}, \quad f \mapsto -\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \wedge \zeta_{i'}, \quad h \mapsto n - \sum_{i=1}^{n} \big(\zeta_i \wedge \partial_i + \zeta_{i'} \wedge \partial_{i'}\big), \tag{2.69}$$

где ∂_i обозначает (левую) частную производную по ζ_i, а $i' = 2n - i + 1$. Заметим, что базисный элемент h действует в пространстве Λ^m_{2n} как умножение на константу $n - m$.

Предложение 2.3.2. *Если $m \leqslant n+1$, то оператор $S^{(m)}$ в пространстве Λ^m_{2n} совпадает с ограничением действия экстремального проектора p на это подпространство. В частности, $S^{(n+1)} = 0$.*

Доказательство. Для операторов в пространстве Λ^m_{2n} справедливо тождество

$$\sum_{a<b} Q_{ab} = 2fe.$$

Поэтому, чтобы доказать первое утверждение, достаточно сравнить формулу для $S^{(m)}$, вытекающую из (1.44), с формулой (2.65). В силу свойства $ep = 0$ экстремального проектора образ $p(\Lambda^m_{2n})$ — это подпространство $\mathfrak{sl}_2$-особых векторов веса $n - m$. Так как Λ_{2n} — это конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, вес любого ненулевого особого вектора должен быть целым неотрицательным числом. Отсюда следует, что $p(\Lambda^m_{2n}) = 0$ при $m = n+1$ и поэтому $S^{(n+1)} = 0$. □

§ 2.4. Библиографические замечания

В §2.2 и §2.3 мы следовали статье [**110**]. Некоторые обобщения соотношений (2.41) и (2.50), где роль симметризатора $S^{(2k)}$ играют идемпотенты алгебры Брауэра, связанные со стандартными таблицами, были доказаны в работе [**117**] другим способом. Формула (2.64) для экстремального проектора была перенесена на все простые алгебры Ли Р. М. Ашеровой, Ю. Ф. Смирновым и В. Н. Толстым [**8**]. Его свойства были подробно исследованы Д. П. Желобенко [**158**], [**160**]. В частности, интерпретацию формулы в терминах бесконечного произведения в (2.66) и её обобщения на алгебры Каца–Муди можно найти в его статье [**159**].

Глава 3

Матрицы Манина

Эта глава посвящена специальному классу матриц, происхождение которого восходит к работам Ю. И. Манина [**106**], [**107**]. Этому классу принадлежат матрицы, составленные из образующих алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$, аффинной алгебры Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{gl}}_N$ и янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$. Соответственно, общие свойства матриц Манина будут полезны в этих частных случаях. Мы обсудим ортогональные и симплектические аналоги матриц Манина ниже в §5.6.

§ 3.1. Определение и основные свойства

Определение 3.1.1. Квадратная матрица

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{N1} & \dots & M_{NN} \end{bmatrix}$$

с элементами в ассоциативной алгебре $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{C}$ называется *матрицей Манина*, если выполнены соотношения

$$M_{ij}\, M_{kl} - M_{kl}\, M_{ij} = M_{kj}\, M_{il} - M_{il}\, M_{kj} \tag{3.1}$$

для всех значений индексов $i, j, k, l \in \{1, \dots, N\}$. □

Если алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна, то любая матрица M удовлетворяет условиям (3.1). Поэтому свойства матриц Манина, которые мы здесь будем обсуждать, обобщают свойства обычных числовых матриц. Отметим также, что из соотношений (3.1) вытекает, что элементы каждого столбца матрицы Манина попарно коммутируют.

Рассмотрим тензорное произведение алгебр

$$\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \mathcal{A}, \tag{3.2}$$

для которого мы будем использовать обозначения, введённые в §1.4.

Лемма 3.1.2. *Каждое из следующих соотношений — это эквивалентное определение матриц Манина*:

$$(1 - P)\, M_1\, M_2\, (1 + P) = 0, \tag{3.3}$$

$$(1 - P)\, (M_1\, M_2 - M_2\, M_1) = 0, \tag{3.4}$$

$$(M_1\, M_2 - M_2\, M_1)\, (1 + P) = 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Заметим, что все три соотношения эквивалентны друг другу в силу свойств (1.67). Запишем разложение по базисным матричным единицам:

$$M_1 M_2 = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} e_{ij} \otimes e_{kl} \otimes M_{ij} M_{kl}.$$

Используя формулу (1.64) для элемента P, получаем

$$P M_1 M_2 = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} e_{kj} \otimes e_{il} \otimes M_{ij} M_{kl},$$

$$M_1 M_2 P = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} e_{il} \otimes e_{kj} \otimes M_{ij} M_{kl}$$

и

$$P M_1 M_2 P = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} e_{kl} \otimes e_{ij} \otimes M_{ij} M_{kl}.$$

Соотношение (3.1) возникает, если взять коэффициент при базисном векторе $e_{ij} \otimes e_{kl}$ в левой части (3.3). □

При $m \geqslant 1$ рассмотрим тензорную алгебру

$$\underbrace{\operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End} \mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathcal{A}. \tag{3.6}$$

Мы сохраним обозначения $H^{(m)}$ и $A^{(m)}$ для элементов алгебры (3.6), которые представляют собой соответствующие образы симметризатора $h^{(m)}$ и антисимметризатора $a^{(m)}$, определённых в (1.17) и (1.19), относительно отображения (1.65).

Лемма 3.1.3. *Для матрицы Манина M справедливы следующие соотношения в алгебре* (3.6):

$$A^{(m)} M_1 \ldots M_m A^{(m)} = A^{(m)} M_1 \ldots M_m \tag{3.7}$$

и

$$H^{(m)} M_1 \ldots M_m H^{(m)} = M_1 \ldots M_m H^{(m)}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Чтобы доказать (3.7), достаточно показать, что для любого элемента $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ выполняется тождество

$$A^{(m)} M_1 \ldots M_m P_\sigma = \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^{(m)} M_1 \ldots M_m, \tag{3.9}$$

где P_σ обозначает образ элемента σ относительно отображения (1.65). Поскольку группа $\mathfrak{S}_m$ порождается соседними транспозициями, достаточно проверить (3.9) для элементов $\sigma = s_a$ при $a = 1, \ldots, m-1$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $m = 2$. Однако тождество (3.9) при $\sigma = s_1$ имеет вид

$$\frac{1-P}{2} M_1 M_2 P = -\frac{1-P}{2} M_1 M_2,$$

что представляет собой эквивалентную форму соотношения (3.3). Аналогично доказательство соотношения (3.8) сводится к проверке того, что для любого $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ выполняется тождество

$$P_\sigma M_1 \dots M_m H^{(m)} = M_1 \dots M_m H^{(m)}. \tag{3.10}$$

Это снова следует из соотношения (3.3), записанного в виде

$$P\, M_1\, M_2\, \frac{1+P}{2} = M_1\, M_2\, \frac{1+P}{2}.$$

□

§ 3.2. Тождества и обратимость

Отметим некоторые полезные рекуррентные формулы для симметризатора и антисимметризатора. Из формулы (1.20) вытекает, что

$$A^{(m)} = \frac{1}{m}\, A^{(m-1)}\, (1 - P_{1\,m} - \dots - P_{m-1\,m}).$$

Умножая обе части справа на $A^{(m-1)}$ и используя соотношения

$$A^{(m)} A^{(m-1)} = A^{(m)} \qquad \text{и} \qquad A^{(m-1)}\, P_{a\,m}\, A^{(m-1)} = A^{(m-1)}\, P_{m-1\,m}\, A^{(m-1)}$$

при $1 \leqslant a < m$, получаем формулу

$$A^{(m)} = \frac{1}{m}\, A^{(m-1)} - \frac{m-1}{m}\, A^{(m-1)} P_{m-1\,m}\, A^{(m-1)}. \tag{3.11}$$

Аналогично из (1.18) следует, что

$$H^{(m)} = \frac{1}{m}\, H^{(m-1)} + \frac{m-1}{m}\, H^{(m-1)} P_{m-1\,m}\, H^{(m-1)}. \tag{3.12}$$

С этого момента мы будем предполагать, что $\mathcal{A}$ — это ассоциативная алгебра с единицей. Для данной матрицы Манина M с элементами в алгебре $\mathcal{A}$ введём суммы элементов этой алгебры по правилу

$$\mathrm{Bos} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, H^{(m)} M_1 \dots M_m, \tag{3.13}$$

$$\mathrm{Ferm} = 1 + \sum_{m=1}^{N} (-1)^m\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, A^{(m)} M_1 \dots M_m. \tag{3.14}$$

Докажем теперь версию (*мастер-*)*теоремы Макмагона* для матриц Манина.

Теорема 3.2.1. *Выполняется тождество*

$$\mathrm{Bos} \times \mathrm{Ferm} = 1.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что для каждого такого целого числа m, что $1 \leqslant m \leqslant N$, справедливо следующее тождество в алгебре (3.6):

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} \mathrm{tr}_{1,\dots,\,r} H^{(r)} M_1 \dots M_r \times \mathrm{tr}_{r+1,\dots,\,m} A^{\{r+1,\dots,\,m\}} M_{r+1} \dots M_m = 0,$$

где $A^{\{r+1,\dots,m\}}$ обозначает антисимметризатор в алгебре (3.6), отвечающий копиям алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$, занумерованным индексами $r+1,\dots,m$ (с единичными компонентами в первых r копиях). Это тождество можно записать в виде

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r \operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(r)} A^{\{r+1,\dots,m\}} M_1 \dots M_m = 0. \tag{3.15}$$

В качестве следующего шага покажем, что левая часть в (3.15) не изменится, если произвести замену произведения симметризатора и антисимметризатора по правилу

$$\begin{aligned}(3.16)\quad & H^{(r)} A^{\{r+1,\dots,m\}}\\ &\mapsto \frac{r(m-r+1)}{m}\, H^{(r)} A^{\{r,\dots,m\}} + \frac{(r+1)(m-r)}{m}\, H^{(r+1)} A^{\{r+1,\dots,m\}}.\end{aligned}$$

В самом деле, в силу (3.11) и (3.12), правая часть в (3.16) равна

$$\begin{aligned}&\frac{r(m-r+1)}{m}\, H^{(r)}\Big(\frac{1}{m-r+1}\, A^{\{r+1,\dots,m\}}\\ &\qquad\qquad - \frac{m-r}{m-r+1}\, A^{\{r+1,\dots,m\}} P_{r\,r+1} A^{\{r+1,\dots,m\}}\Big)\\ &+ \frac{(r+1)(m-r)}{m}\Big(\frac{1}{r+1}\, H^{(r)} + \frac{r}{r+1}\, H^{(r)} P_{r\,r+1} H^{(r)}\Big) A^{\{r+1,\dots,m\}}.\end{aligned}$$

Чтобы упростить выражение (3.15) после проведённой замены, заметим, что, переставляя $H^{(r)}$ с $A^{\{r+1,\dots,m\}}$ и используя циклическое свойство следа, мы получим соотношение

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(r)} A^{\{r+1,\dots,m\}} P_{r\,r+1} A^{\{r+1,\dots,m\}} M_1 \dots M_m\\ &\qquad = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(r)} P_{r\,r+1} A^{\{r+1,\dots,m\}} M_1 \dots M_m A^{\{r+1,\dots,m\}}.\end{aligned}$$

Теперь применим соотношение (3.7), чтобы записать этот элемент как

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(r)} P_{r\,r+1} A^{\{r+1,\dots,m\}} M_1 \dots M_m.$$

Аналогично по циклическому свойству следа получаем

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(r)} P_{r\,r+1} H^{(r)} A^{\{r+1,\dots,m\}} M_1 \dots M_m\\ &\qquad = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} P_{r\,r+1} A^{\{r+1,\dots,m\}} H^{(r)} M_1 \dots M_m H^{(r)}.\end{aligned}$$

Следовательно, в силу соотношения (3.8), это выражение равно

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}_{1,\dots,m} P_{r\,r+1} A^{\{r+1,\dots,m\}} M_1 \dots M_m H^{(r)}\\ &\qquad = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(r)} P_{r\,r+1} A^{\{r+1,\dots,m\}} M_1 \dots M_m.\end{aligned}$$

Тем самым, упрощая числовые коэффициенты, мы видим, что замена (3.16) не изменяет левую часть в (3.15). С другой стороны, после этой замены выражение (3.15) приобретает вид знакочередующейся суммы, в которой все слагаемые попарно сокращаются. □

Слагаемые в (3.13) и (3.14) можно выразить явно в терминах матричных элементов матрицы M.

Предложение 3.2.2. *Для всех m, $1 \leqslant m \leqslant N$, справедлива формула*

$$\text{(3.17)}\quad \operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)} M_1 \dots M_m = \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant N} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}\sigma \cdot M_{i_{\sigma(1)}\, i_1} \dots M_{i_{\sigma(m)}\, i_m}.$$

Кроме того, при $m \geqslant 1$ выполнено равенство

$$\text{(3.18)}\quad \operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)} M_1 \dots M_m = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_m\leqslant N} \frac{1}{\alpha_1!\dots\alpha_N!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} M_{i_m\, i_{\sigma(m)}} \dots M_{i_1\, i_{\sigma(1)}},$$

где α_i обозначает кратность индекса $i \in \{1,\dots,N\}$ в мультимножестве $\{i_1,\dots,i_m\}$.

Доказательство. Запишем разложение

$$\text{(3.19)}\qquad A^{(m)} M_1 \dots M_m = \sum_{I,J} e_{i_1 j_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m j_m} \otimes M^{\,i_1\dots i_m}_{\,j_1\dots j_m},$$

где суммирование производится по m-наборам индексов $I = (i_1,\dots,i_m)$ и $J = (j_1,\dots,j_m)$ из множества $\{1,\dots,N\}$, а $M^{\,i_1\dots i_m}_{\,j_1\dots j_m} \in \mathcal{A}$. Для каждого индекса $a = 1,\dots,m-1$ имеем

$$P_{a\,a+1} A^{(m)} M_1 \dots M_m = -A^{(m)} M_1 \dots M_m = A^{(m)} M_1 \dots M_m P_{a\,a+1},$$

где второе соотношение выполняется в силу (3.9). Отсюда следует, что матричные элементы $M^{\,i_1\dots i_m}_{\,j_1\dots j_m}$ кососимметричны относительно перестановок верхних или нижних индексов. Поэтому

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)} M_1 \dots M_m = \sum_I M^{\,i_1\dots i_m}_{\,i_1\dots i_m} = m! \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant N} M^{\,i_1\dots i_m}_{\,i_1\dots i_m}.$$

Вычисляя теперь матричный элемент $M^{\,i_1\dots i_m}_{\,i_1\dots i_m}$ из разложения (3.19), приходим к (3.17).

Для доказательства (3.18) по аналогии с (3.19) запишем разложение

$$\text{(3.20)}\qquad M_1 \dots M_m H^{(m)} = \sum_{I,J} e_{i_1 j_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m j_m} \otimes \tilde{M}^{\,i_1\dots i_m}_{\,j_1\dots j_m}$$

для некоторых элементов $\tilde{M}^{\,i_1\dots i_m}_{\,j_1\dots j_m} \in \mathcal{A}$, инвариантных относительно перестановок верхних или нижних индексов. Применяя циклическое свойство следа, получим

$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} M_1 \ldots M_m = \mathrm{tr}_{1,\ldots,m} M_1 \ldots M_m H^{(m)} = \sum_I \tilde{M}^{\,i_1 \ldots i_m}_{\,i_1 \ldots i_m},$$

что совпадает с выражением

$$\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant N} \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_N!} \tilde{M}^{\,i_m \ldots i_1}_{\,i_m \ldots i_1},$$

где α_i — это кратность индекса $i \in \{1, \ldots, N\}$ в мультимножестве $\{i_1, \ldots, i_m\}$. Вычисляя $\tilde{M}^{\,i_m \ldots i_1}_{\,i_m \ldots i_1}$ из разложения (3.20), приходим к формуле (3.18). $\square$

Замечание 3.2.3. Из доказательства предложения 3.2.2 видно, что в качестве условий суммирования в формуле (3.17) можно взять неравенства $N \geqslant i_1 > \cdots > i_m \geqslant 1$, а в формуле (3.18) — $N \geqslant i_1 \geqslant \cdots \geqslant i_m \geqslant 1$, так что они обе будут по-прежнему справедливы. $\square$

Рассмотрим теперь частный случай $m = N$ в соотношении (3.7). Антисимметризатор $A^{(N)}$ проектирует пространство $(\mathbb{C}^N)^{\otimes N}$ на одномерное подпространство с базисным вектором

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}\, \sigma \cdot e_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes e_{\sigma(N)}. \tag{3.21}$$

Отсюда следует, что

$$A^{(N)} M_1 \ldots M_N A^{(N)} = A^{(N)} \mathrm{cdet}\, M$$

для некоторого однозначно определённого элемента $\mathrm{cdet}\, M \in \mathcal{A}$, называемого *столбцовым определителем* матрицы M. В силу (3.7) справедливо соотношение

$$A^{(N)} M_1 \ldots M_N = A^{(N)} \mathrm{cdet}\, M. \tag{3.22}$$

Применяя операторы в обеих частях к вектору $e_1 \otimes \ldots \otimes e_N$ и сравнивая коэффициенты при векторе (3.21), получим формулу

$$\mathrm{cdet}\, M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}\, \sigma \cdot M_{\sigma(1)\, 1} \ldots M_{\sigma(N)\, N}. \tag{3.23}$$

Из соотношений (1.67) следует, что для любого элемента $s \in \mathfrak{S}_N$ справедливо тождество

$$A^{(N)} M_{s(1)} \ldots M_{s(N)} = A^{(N)} \mathrm{cdet}\, M, \tag{3.24}$$

которое получается умножением обеих частей в (3.22) справа на элемент P_s. Это приводит к обобщению формулы (3.23):

$$\mathrm{cdet}\, M = \mathrm{sgn}\, s \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}\, \sigma \cdot M_{\sigma(1)\, s(1)} \ldots M_{\sigma(N)\, s(N)}.$$

Таким образом, столбцовый определитель матрицы Манина обладает обычными свойствами определителя: он поменяет знак, если переставить две строки или два столбца.

Замечание 3.2.4. Столбцовый определитель произвольной квадратной матрицы A над кольцом, заданный формулой (3.23), совпадает со *строчным определителем*

$$\operatorname{rdet} B = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}\sigma \cdot B_{1\,\sigma(1)} \dots B_{N\,\sigma(N)} \tag{3.25}$$

транспонированной матрицы $B = A^t$. □

Взяв $\omega = N$ в лемме 1.3.3 и применяя (1.72), получим

$$\operatorname{tr}_m A^{(m)} = \frac{N-m+1}{m}\, A^{(m-1)}. \tag{3.26}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,N} A^{(N)} = 1, \tag{3.27}$$

и таким способом мы ещё раз получаем частный случай $m = N$ формулы (3.17), вычисляя полный след в (3.22):

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,N} A^{(N)} M_1 \dots M_N = \operatorname{cdet} M. \tag{3.28}$$

Пусть u обозначает формальную переменную.

Следствие 3.2.5. *Справедливы тождества*

$$\operatorname{cdet}(1 + u M) = \sum_{m=0}^{N} u^m \operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)} M_1 \dots M_m, \tag{3.29}$$

$$\big[\operatorname{cdet}(1 - u M)\big]^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} u^m \operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)} M_1 \dots M_m. \tag{3.30}$$

Доказательство. По теореме Макмагона (теорема 3.2.1) эти тождества эквивалентны. Тождество (3.29) выполнено, поскольку коэффициент при u^m в левой части равен сумме столбцовых определителей всех главных подматриц матрицы M размера $m \times m$, которая совпадает с соответствующим коэффициентом в правой части (3.17). □

Определим *коматрицу* для матрицы Манина M как матрицу $\widehat{M}$ с матричными элементами в алгебре $\mathcal{A}$, заданными формулами

$$\widehat{M}_{ij} = (-1)^{i+j} \operatorname{cdet} M^{ji}, \tag{3.31}$$

где M^{ji} — это матрица, полученная из M удалением строки j и столбца i.

Лемма 3.2.6. *Выполнено тождество*

$$\widehat{M}\, M = \big(\operatorname{cdet} M\big)\, 1, \tag{3.32}$$

где 1 *— это единичная матрица.*

Доказательство. Заметим сначала, что определение коматрицы (3.31) допускает эквивалентную матричную форму

$$A^{(N)} M_1 \dots M_{N-1} = A^{(N)} \widehat{M}_N. \tag{3.33}$$

В самом деле, из соотношения (3.7) вытекает равенство

$$A^{(N)} M_1 \dots M_{N-1} = A^{(N)} M_1 \dots M_{N-1} A^{(N-1)},$$

так что матричное соотношение (3.33) равносильно равенству матричных коэффициентов при действии на базисные векторы вида

$$e_1 \otimes \dots \otimes \widehat{e_i} \otimes \dots \otimes e_N \otimes e_j, \qquad i, j \in \{1, \dots, N\}, \tag{3.34}$$

где шляпка означает, что соответствующий тензорный множитель должен быть пропущен. Применим обе части (3.33) к такому вектору и сравним коэффициенты при векторе (3.21). Используя обозначение (3.19), приходим к соотношению

$$(-1)^{N-j} M^{1\dots\widehat{j}\dots N}_{1\dots\widehat{i}\dots N} = (-1)^{N-i} \widehat{M}_{ij},$$

которое равносильно (3.31). Теперь из (3.22) и (3.33) находим

$$A^{(N)} \mathrm{cdet}\, M = A^{(N)} M_1 \dots M_N = A^{(N)} \widehat{M}_N M_N.$$

Применяя обе части к векторам (3.34), получаем (3.32). □

В том случае, когда $\mathcal{A}$ — это некоммутативная алгебра, необходимо различать левые и правые обратные для элементов алгебры $\mathcal{A}$, так же как левые и правые обратные для матриц над $\mathcal{A}$. Из леммы 3.2.6 вытекает, что если $\mathrm{cdet}\, M$ имеет левый обратный элемент $l(M) \in \mathcal{A}$, то M — обратимая слева матрица с левым обратным элементом $l(M)\, \widehat{M}$. С другой стороны, если матрица M имеет правую обратную $M^{\vee}$, то элемент $\mathrm{cdet}\, M$ обратим справа. Действительно, рассмотрим тождество (3.24) для такой перестановки s, что $s(i) = N - i + 1$ при $i = 1, \dots, N$,

$$A^{(N)} M_N \dots M_1 = A^{(N)} \mathrm{cdet}\, M. \tag{3.35}$$

Из него следует, что

$$A^{(N)} = \mathrm{cdet}\, M\, A^{(N)} M_1^{\vee} \dots M_N^{\vee}.$$

Умножим обе части справа на $A^{(N)}$ и заметим, что

$$A^{(N)} M_1^{\vee} \dots M_N^{\vee} A^{(N)} = A^{(N)}\, r(M) \tag{3.36}$$

для некоторого элемента $r(M) \in \mathcal{A}$. Отсюда получаем $\mathrm{cdet}\, M \cdot r(M) = 1$; т. е. $\mathrm{cdet}\, M$ обратим справа.

Отметим, что из ассоциативности матричного умножения следует, что если матрица M имеет левый и правый обратный, то эти элементы совпадают. В этом случае они равны однозначно определённой (двусторонней) обратной матрице M^{-1}.

Предложение 3.2.7. *Если матрица Манина M обратима справа, а элемент* $\mathrm{cdet}\, M$ *обратим слева, то матрица M обратима и M^{-1} — это матрица Манина.*

Доказательство. Из предыдущих соображений вытекает, что M — это обратимая матрица, а $\operatorname{cdet} M$ — обратимый элемент алгебры $\mathcal{A}$. Из соотношения (3.35) следует, что (для $N \geqslant 2$)

$$(\operatorname{cdet} M)^{-1} A^{(N)} M_N \dots M_3 = A^{(N)} M_1^{-1} M_2^{-1},$$

так что правая часть не изменится после умножения справа на $-P_{12}$. Поэтому, используя (1.67), приходим к соотношению

$$A^{(N)}(M_1^{-1}M_2^{-1} - M_2^{-1}M_1^{-1}) = 0. \tag{3.37}$$

Принимая во внимание (3.26) и взяв частичный след $\operatorname{tr}_{3,\dots,N}$ в (3.37), получим

$$A^{(2)}(M_1^{-1}M_2^{-1} - M_2^{-1}M_1^{-1}) = 0,$$

так что M^{-1} — это матрица Манина в силу (3.4). □

Следствие 3.2.8. *В предположениях предложения 3.2.7 справедливо соотношение*:

$$\operatorname{cdet}(M^{-1}) = \big(\operatorname{cdet} M\big)^{-1}.$$

Доказательство. Правый обратный элемент $r(M)$, определённый формулой (3.36), совпадает со столбцовым определителем $\operatorname{cdet}(M^{-1})$, так как $M^{\vee} = M^{-1}$. □

Следствие 3.2.9. *Если M — это матрица Манина, то для любого неотрицательного целого числа r справедливо тождество*:

$$(1 - P) \sum_{k+l=r} [M_1^k, M_2^l] = 0, \tag{3.38}$$

где k и l пробегают множество неотрицательных целых чисел.

Доказательство. Очевидно, что матрица $1 - tM$ с элементами в алгебре $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}[[t]]$ формальных степенных рядов от переменной t — это тоже матрица Манина. Из предложения 3.2.7 следует, что и обратная к ней — матрица Манина. Поэтому в силу (3.4) справедливо соотношение

$$(1 - P)\big[(1 - tM_1)^{-1}, (1 - tM_2)^{-1}\big] = 0.$$

Взяв коэффициент при t^r, приходим к требуемому тождеству (3.38). □

Следующая теорема — это *тождество Ньютона* для матриц Манина. Через M мы по-прежнему обозначаем произвольную матрицу Манина с элементами в ассоциативной алгебре $\mathcal{A}$ с единицей.

Теорема 3.2.10. *Справедливо тождество*

$$\partial_t \operatorname{cdet}(1 + tM) = \operatorname{cdet}(1 + tM) \sum_{m=0}^{\infty} (-t)^m \operatorname{tr} M^{m+1}. \tag{3.39}$$

Доказательство. В силу соотношения (3.22) имеем

$$A^{(N)}(1+tM_1)\dots(1+tM_N) = A^{(N)}\mathrm{cdet}\,(1+tM).$$

Вычислим производную по t в обеих частях:

$$\sum_{a=1}^{N} A^{(N)}(1+tM_1)\dots M_a\dots(1+tM_N) = A^{(N)}\partial_t\,\mathrm{cdet}(1+tM).$$

Заменим множитель M_a, полагая

$$M_a = t^{-1}(1+tM_a) - t^{-1},$$

затем возьмём след в обеих частях по всем N копиям алгебры $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$ и применим (3.27). Получаем тождество

$$N t^{-1}\,\mathrm{cdet}(1+tM) - t^{-1}\sum_{a=1}^{N}\mathrm{tr}_{1,\dots,N}\,A^{(N)}(1+tM_1)\dots(\widehat{1+tM_a})\dots(1+tM_N) \\ = \partial_t\,\mathrm{cdet}(1+tM),$$

где шляпка означает, что соответствующий множитель пропущен. Заметим, что слагаемое в сумме, отвечающее любому значению индекса a, совпадает со слагаемым для $a=N$, равным

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,N}\,A^{(N)}(1+tM_1)\dots(1+tM_{N-1}). \tag{3.40}$$

В самом деле, взяв циклическую перестановку $s=(a,a+1,\dots,N)$, для следа в (3.40) получаем соотношение

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}\,s\cdot\mathrm{tr}_{1,\dots,N}\,&A^{(N)}\,P_s\,(1+tM_1)\dots(1+tM_{N-1})\\
&= \mathrm{sgn}\,s\cdot\mathrm{tr}_{1,\dots,N}\,A^{(N)}(1+tM_1)\dots(\widehat{1+tM_a})\dots(1+tM_N)\,P_s\\
&= \mathrm{sgn}\,s\cdot\mathrm{tr}_{1,\dots,N}\,P_s\,A^{(N)}(1+tM_1)\dots(\widehat{1+tM_a})\dots(1+tM_N)\\
&= \mathrm{tr}_{1,\dots,N}\,A^{(N)}(1+tM_1)\dots(\widehat{1+tM_a})\dots(1+tM_N),
\end{aligned}$$

где мы применили соотношения (1.67) и циклическое свойство следа. Далее, используя формулы (3.26) и (3.33), получаем, что след в (3.40) совпадает со следом коматрицы, соответствующей матрице Манина $1+tM$. По лемме 3.2.6 он равен $\mathrm{cdet}(1+tM)\,\mathrm{tr}(1+tM)^{-1}$, и мы приходим к тождеству

$$\mathrm{cdet}(1+tM)\big(Nt^{-1} - t^{-1}\,\mathrm{tr}(1+tM)^{-1}\big) = \partial_t\,\mathrm{cdet}(1+tM).$$

Его можно переписать в виде

$$\mathrm{cdet}(1+tM)\sum_{m=0}^{\infty}(-t)^m\,\mathrm{tr}\,M^{m+1} = \partial_t\,\mathrm{cdet}(1+tM),$$

как и требовалось. □

Тождество Ньютона допускает следующую эквивалентную форму.

Следствие 3.2.11. *Справедливо тождество*

$$-\partial_t\big[\operatorname{cdet}(1+tM)\big]^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}(-t)^m\operatorname{tr}M^{m+1}\cdot\big[\operatorname{cdet}(1+tM)\big]^{-1}.$$

Доказательство. По правилу Лейбница

$$\begin{aligned}0&=\partial_t\big[\operatorname{cdet}(1+tM)\operatorname{cdet}(1+tM)^{-1}\big]\\&=\big[\partial_t\operatorname{cdet}(1+tM)\big]\operatorname{cdet}(1+tM)^{-1}+\operatorname{cdet}(1+tM)\,\partial_t\big[\operatorname{cdet}(1+tM)^{-1}\big],\end{aligned}$$

поэтому требуемое тождество вытекает из теоремы 3.2.10. □

§ 3.3. Библиографические замечания

Определение 3.1.1 восходит к работам Ю. И. Манина [**106**], [**107**]. В литературе матрицы Манина также известны как *правые квантовые матрицы* (при $q=1$); см. [**54**]. Подробное изложение их алгебраических свойств с приложениями и широким списком литературы дано в работах [**20**] и [**21**]. Теорема Макмагона для матриц Манина (теорема 3.2.1) впервые доказана в работе [**54**]. Её другие версии и доказательства можно найти в работах [**43**], [**44**], [**64**], [**92**] и [**114**]. Наше доказательство следует [**114**], где также получена супер-версия этой теоремы. Все остальные результаты, включая лемму 3.1.3, предложение 3.2.7 и теорему 3.2.10, содержатся в работах [**20**] и [**21**]; см. также работу [**22**], в которой даны их q-аналоги. Некоторые рассуждения удалось упростить благодаря матричной форме определения матриц Манина, содержащейся в лемме 3.1.2. Предположение, касающееся $\operatorname{cdet} M$ в предложении 3.2.7, было опущено в [**21**, Theorem 1, Section 4.3] по ошибке; ср. [**22**, Theorem 4.7].

Глава 4

Элементы Казимира для $\mathfrak{gl}_N$

В следующих двух главах мы построим «квантовые аналоги» инвариантов в симметрических алгебрах, которые мы рассматривали в гл. 2. Эти инварианты можно «поднять» в универсальную обёртывающую алгебру $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ и получить её центральные элементы. Как и в гл. 2, нас больше всего будут интересовать такие элементы, связанные с идемпотентами для симметрической группы и алгебры Брауэра. Однако, принимая во внимание аффинные аналоги этих конструкций, которые появятся в гл. 7 и 8, вместо присоединённого действия соответствующих групп мы будем опираться на матричную технику, где отправной точкой будут коммутационные соотношения для алгебр Ли, записанные в матричном виде.

Стандартные факты, касающиеся простых алгебр Ли и их представлений, будут считаться известными. Их можно найти в книгах Диксмье [**29**], Гудмана и Уоллаха [**59**] и Хамфриса [**70**]. Мы начнём с матричных реализаций алгебр Ли.

§ 4.1. Матричные реализации простых алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — это конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$, на которой задана невырожденная симметрическая инвариантная билинейная форма $\langle\ ,\ \rangle$. Выберем базис $J^1, \ldots, J^d$ в $\mathfrak{g}$, и пусть $J_1, \ldots, J_d$ — это двойственный базис относительно формы, так что $\langle J_i, J^k\rangle = \delta_{ik}$. Пусть π — это точное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в конечномерном векторном пространстве V,

$$\pi : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V.$$

Введём элементы

$$G = \sum_{i=1}^{d} \pi(J^i) \otimes J_i \in \operatorname{End} V \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})$$

и

$$\Omega = \sum_{i=1}^{d} \pi(J^i) \otimes \pi(J_i) \in \operatorname{End} V \otimes \operatorname{End} V.$$

Легко проверить, что элементы G и Ω не зависят от выбора базиса J^i. В частности,

$$\Omega = \sum_{i=1}^{d} \pi(J_i) \otimes \pi(J^i). \tag{4.1}$$

Рассмотрим тензорное произведение алгебр $\operatorname{End} V \otimes \operatorname{End} V \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ и отождествим Ω с элементом $\Omega \otimes 1$. Введём элементы этой алгебры по правилу

$$G_1 = \sum_{i=1}^{d} \pi(J^i) \otimes 1 \otimes J_i \qquad \text{и} \qquad G_2 = \sum_{i=1}^{d} 1 \otimes \pi(J^i) \otimes J_i.$$

Коммутационные соотношения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеют вид

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^{d} c_{ij}^{k}\, J_k, \tag{4.2}$$

где c_{ij}^k — это структурные константы. Универсальную обёртывающую алгебру $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ можно рассматривать как ассоциативную алгебру с образующими J_i и определяющими соотношениями (4.2), в которых левая часть понимается как коммутатор $J_i J_j - J_j J_i$.

Предложение 4.1.1. *Определяющие соотношения в* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *эквивалентны матричному соотношению*

$$G_1 G_2 - G_2 G_1 = -\Omega\, G_2 + G_2\, \Omega. \tag{4.3}$$

Доказательство. Левую часть формулы (4.3) можно записать в виде

$$\sum_{i,j=1}^{d} \pi(J^i) \otimes \pi(J^j) \otimes (J_i J_j - J_j J_i).$$

Для правой части получаем

$$-\sum_{i,k=1}^{d} \pi(J^i) \otimes \pi\big([J_i, J^k]\big) \otimes J_k. \tag{4.4}$$

В силу инвариантности билинейной формы имеем

$$\langle [J_i, J^k], J_j \rangle = -\langle J^k, [J_i, J_j] \rangle = -c_{ij}^k.$$

Следовательно, выражение в (4.4) равно

$$\sum_{i,j,k=1}^{d} c_{ij}^k\, \pi(J^i) \otimes \pi(J^j) \otimes J_k.$$

Так как представление π точное, мы можем заключить, что соотношение (4.3) эквивалентно определяющим соотношениям (4.2) для $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. $\square$

Соотношения (4.3) можно переписать в эквивалентной форме:

$$G_1 G_2 - G_2 G_1 = \Omega\, G_1 - G_1\, \Omega, \tag{4.5}$$

что легко проверяется с использованием формулы (4.1). Элемент G можно считать матрицей размера $n \times n$ ($n = \dim V$) с матричными элементами в $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Тем самым предложение 4.1.1 даёт *матричную реализацию* алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Как мы увидим ниже в предложении 4.2.1, для построения центральных элементов в алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ оказывается удобным иметь возможность закодировать все коммутационные соотношения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ одним матричным соотношением (4.3) или (4.5).

§ 4.2. Изоморфизм Хариш-Чандры

Центр $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ определяется по формуле

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \{z \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \mid zu = uz \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})\}.$$

Любой элемент центра называется *элементом Казимира* для алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Поскольку алгебра $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ порождается базисными элементами $\mathfrak{g}$, для любого $z \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ имеем

$$z \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad zx = xz \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Это условие можно ограничить ещё дальше до подмножества элементов $x \in \mathfrak{g}$, которое порождает $\mathfrak{g}$ как алгебру Ли. Семейство элементов Казимира (часто называемых *инвариантами Гельфанда*; см. [**55**]) можно построить с использованием матричных реализаций, введённых в §4.1.

Предложение 4.2.1. *Все элементы* $\operatorname{tr} G^k$ *при* $k \geqslant 1$ *лежат в центре алгебры* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Из соотношения (4.3) следует, что

$$G_1 G_2^k - G_2^k G_1 = \sum_{r=1}^{k} G_2^{r-1}(-\Omega\, G_2 + G_2\,\Omega)G_2^{k-r} = -\Omega\, G_2^k + G_2^k\,\Omega.$$

Взяв след относительно второй копии алгебры $\operatorname{End} V$ и применяя его циклическое свойство (лемму 1.4.1), получим $[G_1, \operatorname{tr}_2 G_2^k] = 0$, как и требовалось. □

Элементы Казимира $\operatorname{tr} G^k$ широко используются в теории представлений, особенно в случае алгебр Ли $\mathfrak{g}$ классических типов. В этом случае в качестве V обычно берётся первое фундаментальное (или векторное) представление; см. ниже §4.8 и пример 5.3.3.

Предположим теперь, что $\mathfrak{g}$ — это простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Выберем подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ и треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, как в гл. 2. Вспомним, что *гомоморфизм Хариш-Чандры*

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \to \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \tag{4.6}$$

— это проекция $\mathfrak{h}$-централизатора $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ в универсальной обёртывающей алгебре на подалгебру $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$. Ядро этого гомоморфизма — это двусторонний идеал $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \cap \mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$. Этот идеал совпадает с пересечением $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{n}_-\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Ограничение гомоморфизма (4.6) на центр $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ — это изоморфизм

$$\chi : \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{h})^W, \tag{4.7}$$

называемый *изоморфизмом Хариш-Чандры*, где $\mathrm{U}(\mathfrak{h})^W$ обозначает подалгебру инвариантов в $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$ относительно «сдвинутого» действия группы Вейля W на $\mathfrak{h}$. Это приводит к описанию центра $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ как алгебры полиномов,

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[P_1^\circ, \dots, P_n^\circ]$$

для некоторого алгебраически независимого семейства центральных элементов $P_1^\circ, \dots, P_n^\circ$, где n — это ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}$. На универсальной обёртывающей алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ задана каноническая фильтрация. Соответствующая присоединённая градуированная алгебра $\mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ изоморфна симметрической алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. При этом присоединённая градуированная алгебра $\mathrm{gr}\,\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ изоморфна подалгебре $\mathfrak{g}$-инвариантов в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$; см. определение (2.1). Для каждого i обозначим через P_i *символ* элемента P_i°, т.е. образ P_i° в соответствующей однородной компоненте алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Тогда будет выполнено соотношение (2.2), а степени $d_1, \dots, d_n$ элементов $P_1^\circ, \dots, P_n^\circ$ совпадут с экспонентами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, увеличенными на 1.

Вспомним теперь, что общая линейная алгебра Ли $\mathfrak{gl}_N$ определяется коммутационными соотношениями (2.4). Мы будем отождествлять базисные элементы E_{ij} алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ с образующими универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$. Другими словами, мы будем считать $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$ ассоциативной алгеброй с этими образующими и определяющими соотношениями

$$E_{ij}\,E_{kl} - E_{kl}\,E_{ij} = \delta_{kj}\,E_{il} - \delta_{il}\,E_{kj}, \qquad i,j,k,l \in \{1,\dots,N\}. \tag{4.8}$$

Полагая $\mathcal{A} = \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$ в формуле (1.59), соберём элементы E_{ij} в матрицу E:

$$E = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes E_{ij} \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N).$$

Рассмотрим тензорное произведение

$$\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N) \tag{4.9}$$

и будем использовать обозначения из §1.4. Как обычно, оператор перестановки (1.64) будет отождествляться с элементом $P \otimes 1$ алгебры (4.9).

Предложение 4.2.2. *Определяющие соотношения алгебры* $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$ *допускают матричную форму*

$$E_1\,E_2 - E_2\,E_1 = (E_1 - E_2)\,P. \tag{4.10}$$

Доказательство. Это можно вывести из предложения 4.1.1 или проверить непосредственно. А именно, сравним коэффициенты при базисных векторах $e_{ij} \otimes e_{kl} \otimes 1$ в обеих частях соотношения (4.10). Это равносильно применению операторов в обеих частях к базисному вектору $e_j \otimes e_l$ в $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$ и сравнению коэффициентов при векторе $e_i \otimes e_k$ в разложении по базису. В левой части получаем

$$\sum_{i,k=1}^{N} e_i \otimes e_k \otimes \big(E_{ij}\,E_{kl} - E_{kl}\,E_{ij}\big),$$

а в правой части —

$$(E_1 - E_2)\,P(e_j \otimes e_l) = (E_1 - E_2)(e_l \otimes e_j) = \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes e_j \otimes E_{il} - \sum_{k=1}^{N} e_l \otimes e_k \otimes E_{kj}.$$

Сравнивая коэффициенты при векторе $e_i \otimes e_k$, приходим к определяющим соотношениям (4.8). $\square$

Преимущества единственного соотношения (4.10) для матрицы E, «кодирующего» все определяющие соотношения для $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$, проявятся ниже в теореме 4.5.1, где мы построим элементы Казимира для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$.

Замечание 4.2.3. Матричная форма определяющих соотношений в предложении 4.2.2 приводит к определению *вырожденной аффинной алгебры Гекке* $\mathcal{H}_m$ следующим образом; см. [**31**]. Отметим соотношения

$$P_{a\,b}\,E_c = E_c\,P_{a\,b} \qquad \text{и} \qquad P_{a\,b}\,E_a = E_b\,P_{a\,b}, \tag{4.11}$$

выполняющиеся в алгебре (1.60) для $\mathcal{A} = \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$ при $1 \leqslant a < b \leqslant m$ и $c \neq a, b$. Кроме того, в силу (4.10) при $a < b$ имеем

$$E_a\,E_b - E_b\,E_a = E_a\,P_{a\,b} - P_{a\,b}\,E_a. \tag{4.12}$$

В работе [**3**] было замечено, что алгебра $\mathcal{H}_m$ изоморфна алгебре, порождённой (абстрактными) элементами $E_1, \dots, E_m$ и групповой алгеброй $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ с определяющими соотношениями (4.11) и (4.12), где $P_{a\,b}$ понимается как транспозиция $s_{a\,b} \in \mathfrak{S}_m$. Чтобы связать эту реализацию с определением из работы [**31**], положим $u_a = E_a - x_a$ при $a = 1, \dots, m$, где x_a — это элемент Юциса–Мёрфи, определённый в (1.10). Элементы u_a попарно коммутируют: $u_a\,u_b = u_b\,u_a$, в то время как

$$s_a\,u_a = u_{a+1}\,s_a + 1 \qquad \text{и} \qquad s_b\,u_a = u_a\,s_b \quad \text{если} \quad b \neq a-1, a.$$

Отображение, переводящее E_a в элемент $u_a + x_a$ и тождественное на групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$, задаёт изоморфизм между этими двумя реализациями алгебры $\mathcal{H}_m$. □

Замечание 4.2.4. *Присоединённое действие* группы GL_N всех обратимых матриц над $\mathbb{C}$ размера $N \times N$ на алгебре Ли $\mathfrak{gl}_N$ определяется формулой (2.7). Оно продолжается до однозначно определённого действия группы GL_N на алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$, при котором каждый элемент группы действует как автоморфизм. Центр алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$ совпадает с подалгеброй инвариантов относительно этого действия: $\mathrm{Z}(\mathfrak{gl}_N) = \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathrm{GL}_N}$. □

Пример 4.2.5. Прямое вычисление показывает, что

$$\sum_{i=1}^{N} E_{ii} \qquad \text{и} \qquad \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij}\,E_{ji}$$

— это элементы Казимира для $\mathfrak{gl}_N$. Его можно провести и другим способом, с использованием замечания 4.2.4. □

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ — это упорядоченный набор N комплексных чисел. Соответствующее *представление старшего веса* $L(\lambda)$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ порождается таким ненулевым вектором $\xi \in L(\lambda)$ (*старшим вектором*), что

$$E_{ij}\,\xi = 0 \qquad \text{при} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant N \qquad \text{и} \tag{4.13}$$

$$E_{ii}\,\xi = \lambda_i\,\xi \qquad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{4.14}$$

Любой элемент $z \in \mathrm{Z}(\mathfrak{gl}_N)$ действует в $L(\lambda)$, умножая каждый вектор на константу $\chi(z)$. Если рассматривать $\chi(z)$ как функцию от старшего веса λ, она представляет собой симметрический полином от переменных $l_1, \ldots, l_N$, где $l_i = \lambda_i - i + 1$. Это приводит к эквивалентной интерпретации изоморфизма Хариш-Чандры (4.7): отображение $z \mapsto \chi(z)$ задаёт изоморфизм

$$\chi : \mathrm{Z}(\mathfrak{gl}_N) \to \mathbb{C}[l_1, \ldots, l_N]^{\mathfrak{S}_N}, \tag{4.15}$$

где $\mathbb{C}[l_1, \ldots, l_N]^{\mathfrak{S}_N}$ обозначает алгебру $\mathfrak{S}_N$-инвариантных (симметрических) полиномов от $l_1, \ldots, l_N$ и l_i отождествляется с элементом $E_{ii} - i + 1 \in \mathrm{U}(\mathfrak{h})$. Таким образом, коммутативную алгебру $\mathrm{Z}(\mathfrak{gl}_N)$ можно рассматривать как алгебру полиномов от N переменных. Прообразы любого семейства алгебраически независимых образующих алгебры симметрических полиномов — это алгебраически независимые образующие центра $\mathrm{Z}(\mathfrak{gl}_N)$.

Замечание 4.2.6. Сдвиги в определении переменных l_i определяются полусуммой положительных корней простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_N$. Для любой константы $a \in \mathbb{C}$ можно положить $l_i = \lambda_i - i + a$ при $i = 1, \ldots, N$. Это даст альтернативное определение изоморфизма (4.15). Эта дополнительная свобода объясняется тем фактом, что редуктивная алгебра Ли $\mathfrak{gl}_N$ изоморфна прямой сумме $\mathfrak{sl}_N$ и одномерного центра, состоящего из скалярных матриц. Кроме значения $a = 1$, которое мы использовали в (4.15), в литературе можно часто встретить значения a, равные $(N+1)/2$ или N. □

Пример 4.2.7. Образы Хариш-Чандры элементов Казимира из примера 4.2.5 находятся по формулам

$$\chi : \sum_{i=1}^{N} E_{ii} \mapsto \sum_{i=1}^{N} l_i + \binom{N}{2},$$

$$\chi : \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} E_{ji} \mapsto \sum_{i=1}^{N} l_i^2 + (N-1) \sum_{i=1}^{N} l_i + \binom{N}{3}.$$

Для их проверки достаточно применить элементы Казимира к старшему вектору ξ в представлении $L(\lambda)$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$. □

§ 4.3. Факториальные полиномы Шура

Некоторые специальные семейства симметрических полиномов будут возникать как образы Хариш-Чандры центральных элементов для простых алгебр Ли всех классических типов. Чтобы их описать, рассмотрим алгебру симметрических полиномов от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ над $\mathbb{C}$ и зафиксируем последовательность комплексных чисел $a = (a_1, a_2, \ldots)$. *Факториальный элементарный* и *факториальный полный симметрические полиномы* определяются соответствующими формулами

$$e_k(x_1, \ldots, x_n \,|\, a) = \sum_{1 \leqslant p_1 < \cdots < p_k \leqslant n} (x_{p_1} - a_{p_1})(x_{p_2} - a_{p_2 - 1}) \ldots (x_{p_k} - a_{p_k - k + 1}) \tag{4.16}$$

и

$$h_k(x_1,\dots,x_n\,|\,a) = \sum_{1\leqslant p_1\leqslant\dots\leqslant p_k\leqslant n}(x_{p_1}-a_{p_1})(x_{p_2}-a_{p_2+1})\dots(x_{p_k}-a_{p_k+k-1}), \tag{4.17}$$

причём $e_k(x_1,\dots,x_n\,|\,a)=0$ при $k>n$. Эти полиномы — частные случаи *факториальных* (или *двойных*) *полиномов Шура* $s_\mu(x_1,\dots,x_n\,|\,a)$, которые определяются следующим образом. Пусть μ — это диаграмма, содержащая не более n строк; см. §1.1. Тогда

$$s_\mu(x_1,\dots,x_n\,|\,a) = \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{T})=\mu}\prod_{\alpha\in\mu}\big(x_{\mathcal{T}(\alpha)}-a_{\mathcal{T}(\alpha)+c(\alpha)}\big). \tag{4.18}$$

Суммирование здесь производится по полустандартным таблицам $\mathcal{T}$ формы μ с элементами из множества $\{1,\dots,n\}$, где $\mathcal{T}(\alpha)$ обозначает элемент таблицы $\mathcal{T}$, занимающий клетку $\alpha=(i,j)$ диаграммы μ, а $c(\alpha)=j-i$ — это содержание этой клетки. В частных случаях $\mu=(1^k)$ и $\mu=(k)$ полином (4.18) совпадает соответственно с полиномами в (4.16) и (4.17).

В том случае, когда a — это последовательность нулей, полиномы (4.16) и (4.17) соответственно превращаются в элементарный и полный симметрические полиномы $e_k(x_1,\dots,x_n)$ и $h_k(x_1,\dots,x_n)$, в то время как $s_\mu(x_1,\dots,x_n\,|\,a)$ становится полиномом Шура $s_\mu(x_1,\dots,x_n)$. Кроме того, эти однородные полиномы совпадают с компонентами старшей степени соответствующих факториальных аналогов. Отсюда вытекает, что факториальные полиномы Шура при μ, пробегающем множество всех диаграмм, содержащих не более n строк, образуют базис алгебры симметрических полиномов $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$. Другие эквивалентные определения факториальных полиномов Шура (4.18) и их основные свойства обсуждаются в книге Макдональда [**104**, Section I.3]. Мы ограничимся выводом свойств обращения в нуль и характеризации, которые понадобятся ниже.

Мы будем предполагать, что последовательность a не содержит кратностей, т.е. $a_k\neq a_l$ для всех $k\neq l$. Положим $x=(x_1,\dots,x_n)$ и для любого такого разбиения $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, что $\ell(\lambda)\leqslant n$, введём n-набор элементов последовательности a по правилу

$$a_\lambda=(a_{\lambda_1+n},\dots,a_{\lambda_n+1}). \tag{4.19}$$

Через λ'_j мы по-прежнему обозначаем число клеток в столбце j диаграммы λ.

Предложение 4.3.1. *Если $\mu\not\subset\lambda$, то $s_\mu(a_\lambda\,|\,a)=0$. Кроме того,*

$$s_\mu(a_\mu\,|\,a)=\prod_{(i,j)\in\mu}\big(a_{\mu_i+n-i+1}-a_{n-\mu'_j+j}\big). \tag{4.20}$$

Доказательство. Полиномы $s_\mu(x\,|\,a)$ симметричны по x, поэтому, заменяя x на $(x_n,\dots,x_1)$, мы можем переписать формулу (4.18) в виде

$$s_\mu(x\,|\,a)=\sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{T})=\mu}\prod_{\alpha\in\mu}\big(x_{n-\mathcal{T}(\alpha)+1}-a_{\mathcal{T}(\alpha)+c(\alpha)}\big), \tag{4.21}$$

где суммирование производится по всем полустандартным μ-таблицам $\mathcal{T}$ с элементами из множества $\{1, \ldots, n\}$. Предположим, что $s_\mu(a_\lambda \,|\, a) \neq 0$. Тогда хотя бы одно слагаемое в (4.21) отлично от нуля при $x = a_\lambda$:

$$\prod_{\alpha \in \mu} \left(a_{\lambda_{n-\mathcal{T}(\alpha)+1}+\mathcal{T}(\alpha)} - a_{\mathcal{T}(\alpha)+c(\alpha)} \right) \neq 0. \tag{4.22}$$

Так как последовательность a не содержит кратностей, отсюда следует, что

$$\lambda_{n-\mathcal{T}(\alpha)+1} \neq c(\alpha) \tag{4.23}$$

для всех $\alpha \in \mu$. Для элементов первой строки таблицы $\mathcal{T}$ справедливы неравенства

$$\mathcal{T}(1,1) \leqslant \cdots \leqslant \mathcal{T}(1, \mu_1).$$

Заметим, что $c(1,1) = 0$, так что из условия (4.23) при $\alpha = (1,1)$ получаем $\lambda_{n-\mathcal{T}(1,1)+1} \geqslant 1$. Далее, $c(1,2) = 1$ и, поскольку

$$\lambda_{n-\mathcal{T}(1,2)+1} \geqslant \lambda_{n-\mathcal{T}(1,1)+1} \geqslant 1,$$

применяя теперь условие (4.23) при $\alpha = (1,2)$, получаем $\lambda_{n-\mathcal{T}(1,2)+1} \geqslant 2$. Продолжая в том же духе, мы приходим к неравенствам $\lambda_{n-\mathcal{T}(1,i)+1} \geqslant i$ для всех $i = 1, \ldots, \mu_1$. С другой стороны, для элементов i-го столбца таблицы $\mathcal{T}$ справедливы неравенства

$$\mathcal{T}(1,i) < \cdots < \mathcal{T}(\mu'_i, i).$$

Следовательно,

$$\lambda_{n-\mathcal{T}(\mu'_i,i)+1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n-\mathcal{T}(1,i)+1} \geqslant i. \tag{4.24}$$

Это означает, что в диаграмме λ есть по крайней мере μ'_i строк, длина которых не меньше i. Отсюда следует, что $\lambda'_i \geqslant \mu'_i$ и тем самым $\mu \subset \lambda$, что доказывает первую часть предложения.

Возьмём теперь $\lambda = \mu$ и предположим, что условие (4.22) выполнено для некоторой таблицы $\mathcal{T}$. Из предыдущего рассуждения следует, что неравенства (4.24) выполнены при $\lambda = \mu$, а это однозначно определяет таблицу $\mathcal{T}$, элементы которой находятся по правилу $\mathcal{T}(k,i) = n - \mu'_i + k$ при $k = 1, \ldots, \mu'_i$. Таким образом, в формуле (4.21) может быть не более одного слагаемого, которое не обращается в нуль при $x = a_\mu$. Отсюда следует формула (4.20). □

Отметим, что предложение 4.3.1 справедливо и для последовательностей a без дополнительных условий на кратности.

Свойства обращения в нуль факториальных полиномов Шура, установленные в предложении 4.3.1, можно использовать для их характеризации в смысле следующего утверждения. Будем предполагать, что μ — это диаграмма, в которой не более n строк.

Предложение 4.3.2. *Пусть $f(x)$ — это симметрический полином степени не выше $|\mu|$. Если компонента старшей степени полинома $f(x)$ совпадает с $s_\mu(x)$ и $f(a_\lambda) = 0$ для всех таких λ, что $|\lambda| < |\mu|$, то $f(x) = s_\mu(x \,|\, a)$.*

Доказательство. Запишем разность $f(x) - s_\mu(x\,|\,a)$ в виде линейной комбинации базисных полиномов:

$$f(x) - s_\mu(x\,|\,a) = \sum_{\nu \in S} c_\nu\, s_\nu(x\,|\,a), \tag{4.25}$$

где $c_\nu \in \mathbb{C}$, а сумма берётся по множеству S диаграмм ν, удовлетворяющих условию $|\nu| < |\mu|$. Пусть диаграмма λ пробегает множество S. Тогда $\mu \not\subset \lambda$ и $s_\mu(a_\lambda\,|\,a) = 0$ в силу предложения 4.3.1. Следовательно, полагая $x = a_\lambda$ в формуле (4.25) для всех таких диаграмм λ, мы приходим к системе линейных уравнений на коэффициенты c_ν следующего вида:

$$\sum_{\nu \in S} c_\nu\, s_\nu(a_\lambda\,|\,a) = 0.$$

Введём на множестве S произвольное линейное упорядочение $\prec$ с таким свойством, что из условия $|\lambda| < |\nu|$ следует, что $\lambda \prec \nu$. Запишем систему уравнений в соответствии с упорядочением $\prec$. Соответствующая матрица примет треугольный вид благодаря свойствам обращения в нуль из предложения 4.3.1. Её диагональные элементы — это значения $s_\nu(a_\nu\,|\,a)$. Среди всех чисел $\nu_i + n - i + 1$ и $n - \nu'_j + j$ нет равных друг другу, а следовательно, произведение в формуле (4.20) отлично от нуля, так как последовательность a не содержит кратностей. Таким образом, $s_\nu(a_\nu\,|\,a) \neq 0$ и система имеет только тривиальное решение $c_\nu = 0$, а значит, $f(x) = s_\mu(x\,|\,a)$. □

§ 4.4. Двойственность Шура–Вейля

В §1.5 мы описали естественное действие симметрической группы $\mathfrak{S}_m$ в пространстве тензоров $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$. Общая линейная группа GL_N действует в этом пространстве диагонально; см. (2.13). Соответствующее действие алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ задаётся формулой

$$X : v_1 \otimes \ldots \otimes v_m \mapsto \sum_{a=1}^{m} v_1 \otimes \ldots \otimes X\, v_a \otimes \ldots \otimes v_m, \qquad v_i \in \mathbb{C}^N, \quad X \in \mathfrak{gl}_N.$$

В соответствии с тензорными обозначениями эти действия можно записать в виде

$$\mathbf{h} \mapsto \mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_m \qquad \text{и} \qquad X \mapsto X_1 + \dots + X_m,$$

где

$$\mathbf{h}_a = 1^{\otimes(a-1)} \otimes \mathbf{h} \otimes 1^{\otimes(m-a)} \qquad \text{и} \qquad X_a = 1^{\otimes(a-1)} \otimes X \otimes 1^{\otimes(m-a)}.$$

Как мы проверили в §2.1, действие любого элемента $s \in \mathfrak{S}_m$ в векторном пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ коммутирует с действием любого элемента $\mathbf{h} \in \mathrm{GL}_N$ (и, следовательно, с действием любого элемента $X \in \mathfrak{gl}_N$). По классической *двойственности Шура–Вейля* эти действия групп $\mathfrak{S}_m$ и GL_N являются централизаторами друг друга в алгебре эндоморфизмов пространства тензоров.

Это приводит к свободному от кратностей разложению представления группы $\mathfrak{S}_m \times \mathrm{GL}_N$:

$$(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash m,\ \ell(\lambda) \leqslant N} V_\lambda \otimes L(\lambda). \tag{4.26}$$

Здесь V_λ и $L(\lambda)$ — это соответствующие неприводимые представления групп $\mathfrak{S}_m$ и GL_N, отвечающие диаграмме Юнга λ, содержащей $|\lambda| = m$ клеток, с количеством строк $\ell(\lambda)$, не превосходящим N. Как $\mathfrak{gl}_N$-модуль, $L(\lambda)$ — это представление старшего веса $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, где предполагается, что $\lambda_i = 0$ при $i = \ell(\lambda) + 1, \ldots, N$.

Пусть $\mathcal{U}$ — это стандартная таблица формы $\lambda \vdash m$, и пусть $e_{\mathcal{U}} \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ — соответствующий примитивный идемпотент; см. §1.1. Обозначим через $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ образ идемпотента $e_{\mathcal{U}}$ относительно действия симметрической группы $\mathfrak{S}_m$, заданного в (1.65). Пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ — это неприводимое представление группы GL_N, изоморфное $L(\lambda)$. Поэтому след $\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, \mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_m$ совпадает с характером представления $L(\lambda)$, вычисленным на элементе $\mathbf{h}$. Это значение задаётся формулой Вейля для характеров, так что след равен значению полинома Шура s_μ на собственных числах $h_1, \ldots, h_N$ матрицы $\mathbf{h}$:

$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, \mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_m = s_\mu(h_1, \ldots, h_N); \tag{4.27}$$

см. также формулу (2.19). В частности, размерность $\dim L(\lambda)$ равна следу

$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}} = s_\mu(1, \ldots, 1).$$

Принимая во внимание коммутативную диаграмму (1.72), мы можем заключить, что из формулы для следов идемпотентов, приведённой в предложении 1.3.5, вытекает *формула крюков Робинсона*

$$\dim L(\lambda) = \frac{1}{h(\lambda)} \prod_{(i,j)\in\lambda} (N + j - i). \tag{4.28}$$

§ 4.5. Общая конструкция центральных элементов

Пусть $s \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ — это произвольный элемент, и пусть S — его образ относительно отображения (1.65). Мы будем рассматривать S как элемент алгебры

$$\underbrace{\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N), \tag{4.29}$$

отождествляя его с $S \otimes 1$.

Теорема 4.5.1. *Для любого $s \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ и произвольных значений параметров $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{C}$ элемент*

$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S\, (u_1 + E_1) \ldots (u_m + E_m) \tag{4.30}$$

лежит в центре $\mathrm{Z}(\mathfrak{gl}_N)$ алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$.

Доказательство. Рассмотрим тензорное произведение

$$\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N) \tag{4.31}$$

с дополнительной копией алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$. Занумеруем эти копии числами $0, 1, \ldots, m$. Будет достаточно проверить, что коммутатор в алгебре (4.31) равен нулю:

$$\big[E_0, \mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S\,(u_1 + E_1) \ldots (u_m + E_m)\big] = 0. \tag{4.32}$$

В силу соотношений (1.67) и предложения 4.2.2 имеем

$$[E_0, u_a + E_a] = P_{0\,a}(u_a + E_a) - (u_a + E_a)P_{0\,a},$$

поэтому

$$\begin{aligned}
&\big[E_0, S\,(u_1 + E_1) \ldots (u_m + E_m)\big] \\
&\quad = \sum_{a=1}^{m} S\,(u_1 + E_1) \ldots \big(P_{0\,a}(u_a + E_a) - (u_a + E_a)P_{0\,a}\big) \ldots (u_m + E_m) \\
&\quad = S \sum_{a=1}^{m} P_{0\,a}\,(u_1 + E_1) \ldots (u_m + E_m) - S\,(u_1 + E_1) \ldots (u_m + E_m) \sum_{a=1}^{m} P_{0\,a},
\end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством $E_0\,S = S\,E_0$ и тем, что $P_{0\,a}$ коммутирует с элементом E_b при $b \neq a$. Сумма операторов перестановки $P_{0\,a}$ коммутирует с образом любого элемента группы $\mathfrak{S}_m$ при отображении (1.65), так что

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S \sum_{a=1}^{m} P_{0\,a}\,(u_1 + E_1) \ldots (u_m + E_m) \\
&\qquad = \mathrm{tr}_{1,\ldots,m} \sum_{a=1}^{m} P_{0\,a}\, S\,(u_1 + E_1) \ldots (u_m + E_m) \\
&\qquad = \mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S\,(u_1 + E_1) \ldots (u_m + E_m) \sum_{a=1}^{m} P_{0\,a},
\end{aligned}$$

где последнее равенство выполняется по свойству цикличности следа; см. лемму 1.4.1. Её применение возможно в силу того, что два элемента алгебры (4.31) вида

$$X \otimes 1^{\otimes m} \otimes 1 \qquad \text{и} \qquad 1 \otimes 1^{\otimes m} \otimes y$$

коммутируют для любых $X \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$ и $y \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$. Это завершает доказательство формулы (4.32). □

Замечание 4.5.2. Небольшая модификация доказательства показывает, что все элементы вида

$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S\, E_{a_1} \ldots E_{a_k}$$

с произвольными параметрами $a_i \in \{1, \ldots, m\}$ тоже лежат в $\mathrm{Z}(\mathfrak{gl}_N)$. □

Ниже мы рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 4.5.1 с конкретными параметрами $u_1, \ldots, u_m$ и элементом $s \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$. Следующая лемма позволит нам опираться на свойства матриц Манина, которые мы обсуждали в гл. 3.

Лемма 4.5.3. *Предположим, что α и β — это элементы некоторой ассоциативной алгебры $\mathcal{D}$ с единицей, для которых справедливо соотношение*

$$\alpha\beta - \beta\alpha = \beta^2. \tag{4.33}$$

Тогда матрица $\alpha + E\beta$ с элементами в алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)\otimes\mathcal{D}$ — это матрица Манина.

Доказательство. Положим $M = \alpha + E\beta$ (мы опускаем знак тензорного произведения для краткости, и, как обычно, в этом контексте α понимается как скалярная матрица). Из предложения 4.2.2 следует, что

$$M_1 M_2 - M_2 M_1 = \big(\alpha + E_1\beta\big)\big(\alpha + E_2\beta\big) - \big(\alpha + E_2\beta\big)\big(\alpha + E_1\beta\big)$$
$$= (E_1E_2 - E_2E_1)\beta^2 - (E_1 - E_2)(\alpha\beta - \beta\alpha) = (E_1 - E_2)(P-1)\beta^2.$$

Отсюда видно, что, умножая этот элемент справа на $1+P$, мы получим 0, так что лемма следует из эквивалентного определения (3.5) матриц Манина. □

В качестве примеров элементов α и β, удовлетворяющих соотношению (4.33), можно взять

$$\alpha = -\partial_t, \quad \beta = t^{-1} \qquad \text{и} \qquad \alpha = u\,e^{-\partial_u}, \quad \beta = e^{-\partial_u}.$$

В первом случае $\mathcal{D}$ — это алгебра полиномиальных дифференциальных операторов вида

$$a_0 + a_1\,\partial_t + \dots + a_k\,\partial_t^k, \qquad k \geqslant 0,$$

где каждый коэффициент a_i — это полином Лорана от t. Во втором примере алгебра $\mathcal{D}$ порождается всеми полиномами от u и дополнительным элементом $e^{-\partial_u}$ с соотношениями

$$e^{-\partial_u} f(u) = f(u-1)\,e^{-\partial_u} \tag{4.34}$$

для любых полиномов $f(u)$.

Лемма 4.5.4. *Пусть $u_1,\dots,u_m$ — это комплексные параметры, а S — это образ некоторого элемента s центра групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ относительно гомоморфизма* (1.65). *Тогда для любых перестановок $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_m$ справедливо тождество*

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S\,(E_{\sigma(1)} + u_{\tau(1)})\dots(E_{\sigma(m)} + u_{\tau(m)}) = \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S\,(E_1 + u_1)\dots(E_m + u_m).$$

Доказательство. По свойству цикличности следа правая часть равна

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, P_\sigma S\,(E_1 + u_1)\dots(E_m + u_m)P_\sigma^{-1}$$
$$= \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S\,P_\sigma\,(E_1 + u_1)\dots(E_m + u_m)P_\sigma^{-1}$$
$$= \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S\,(E_{\sigma(1)} + u_1)\dots(E_{\sigma(m)} + u_m),$$

где мы также применили свойства (1.67). Отсюда следует, что тождество достаточно доказать в том случае, когда σ — это тождественная перестановка. При этом можно считать, что τ — это соседняя транспозиция $s_a = (a\ a+1)$. По предложению 4.2.2

$$(E_a + u_{a+1})(E_{a+1} + u_a) - (E_{a+1} + u_a)(E_a + u_{a+1}) = P_{a\,a+1}E_{a+1} - E_{a+1}P_{a\,a+1}.$$

Поскольку $SP_{a\,a+1} = P_{a\,a+1}S$, требуемое свойство вытекает из свойства цикличности следа и первой части доказательства. □

В частности, лемма 4.5.4 применима к симметризатору $S = H^{(m)}$ и антисимметризатору $S = A^{(m)}$.

§ 4.6. Определитель Капелли

В теореме 4.5.1 возьмём $S = A^{(m)}$ при $1 \leqslant m \leqslant N$ и выберем параметры по правилу

$$u_a = u - a + 1, \qquad a = 1, \ldots, m,$$

для некоторой переменной u. Тогда элемент (4.30) становится полиномом от u степени m:

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)}\,(u + E_1)\ldots(u + E_m - m + 1). \tag{4.35}$$

Его коэффициенты — это элементы Казимира для $\mathfrak{gl}_N$.

Предложение 4.6.1. *Образы Хариш-Чандры коэффициентов полинома* (4.35) *находятся по формуле*

$$\chi : \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)}\,(u + E_1)\ldots(u + E_m - m + 1) \\ \mapsto \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant N} (u + \lambda_{i_1}) \cdots (u + \lambda_{i_m} - m + 1).$$

Доказательство. В силу леммы 4.5.3 мы можем применить предложение 3.2.2 к матрице Манина $M = (u+E)\,e^{-\partial_u}$. По свойству (4.34) левую часть в (3.17) можно записать в виде

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)}\big(u + E_1\big)\,e^{-\partial_u}\ldots\big(u + E_m\big)\,e^{-\partial_u} \\ = \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)}\big(u + E_1\big)\ldots\big(u + E_m - m + 1\big)\,e^{-m\,\partial_u}.$$

Рассмотрим теперь слагаемое $M_{i_{\sigma(1)}\,i_1}\ldots M_{i_{\sigma(m)}\,i_m}$, входящее в разложение в правой части формулы (3.17). Из условий (4.13) ясно, что результатом его применения к старшему вектору ξ представления старшего веса $L(\lambda)$ будет нуль, кроме того случая, когда σ — это тождественная перестановка. В этом случае в силу соотношений (4.14) имеем

$$M_{i_1\,i_1}\ldots M_{i_m\,i_m}\,\xi = \big(u + E_{i_1 i_1}\big)\,e^{-\partial_u}\ldots\big(u + E_{i_m i_m}\big)\,e^{-\partial_u}\,\xi \\ = \big(u + \lambda_{i_1}\big)\ldots\big(u + \lambda_{i_m} - m + 1\big)\,e^{-m\,\partial_u}\,\xi.$$

Взяв сумму по всем наборам индексов $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant N$, приходим к требуемой формуле для образа Хариш-Чандры полинома (4.35). □

Из предложения 4.6.1 следует, что все коэффициенты полинома от u, заданного формулой

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant N} (u + \lambda_{i_1}) \cdots (u + \lambda_{i_m} - m + 1), \tag{4.36}$$

— это симметрические полиномы от переменных $l_i = \lambda_i - i + 1$ при $i = 1, \ldots, N$. В частности, полагая $u = 0$, получим факториальный элементарный симметрический полином

$$e_m(l_1, \ldots, l_N \,|\, a) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant N} \big(l_{i_1} + i_1 - 1\big) \cdots \big(l_{i_m} + i_m - m\big),$$

соответствующий последовательности $a = (a_i)$, $a_i = -i + 1$; см. (4.16).

Определитель Капелли — это столбцовый определитель (см. (3.23)):

$$C(u) = \operatorname{cdet} \begin{bmatrix} u + E_{11} & E_{12} & \ldots & E_{1N} \\ E_{21} & u + E_{22} - 1 & \ldots & E_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_{N1} & E_{N2} & \ldots & u + E_{NN} - N + 1 \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

Это полином от u вида

$$C(u) = u^N + C_1^\circ u^{N-1} + \cdots + C_N^\circ, \qquad C_k^\circ \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N). \tag{4.38}$$

Заметим, что символы $C_k \in \mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$ элементов C_k° совпадают с коэффициентами характеристического полинома $\det(u+E)$; см. формулу (2.6). Из соотношения (3.28) и доказательства предложения 4.6.1 вытекают свойства полинома $C(u)$, описанные в следующем утверждении.

Следствие 4.6.2. *Определитель Капелли совпадает с полиномом от* u, *определённым в* (4.35), *при* $m = N$:

$$C(u) = \operatorname{tr}_{1,\ldots,N} A^{(N)} (u + E_1) \ldots (u + E_N - N + 1),$$

так что все коэффициенты C_k° *— это элементы Казимира для* $\mathfrak{gl}_N$. *Кроме того, для образа относительно изоморфизма Хариш-Чандры* (4.15) *справедлива формула*

$$\chi : C(u) \mapsto (u + l_1) \ldots (u + l_N).$$

В частности, элементы $C_1^\circ, \ldots, C_N^\circ$ *— это алгебраически независимые образующие центра* $\mathrm{Z}(\mathfrak{gl}_N)$ *универсальной обёртывающей алгебры* $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$. □

Последнее свойство выполнено, поскольку элементарные симметрические полиномы — это алгебраически независимые образующие алгебры инвариантов $\mathbb{C}[l_1, \ldots, l_N]^{\mathfrak{S}_N}$.

§ 4.7. Некоммутативные перманенты

В теореме 4.5.1 возьмём теперь $S = H^{(m)}$ при $m \geqslant 1$ и выберем параметры по правилу

$$u_a = u + a - 1, \qquad a = 1, \ldots, m,$$

для некоторой переменной u. Элемент (4.30) — это полином от u степени m:

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} (u + E_1) \ldots (u + E_m + m - 1). \tag{4.39}$$

Его коэффициенты — это элементы Казимира для $\mathfrak{gl}_N$; ср. (2.18), где случай диаграммы-строки соответствует инвариантам, обобщающим перманент матрицы.

Предложение 4.7.1. *Образы Хариш-Чандры коэффициентов полинома* (4.39) *находятся по правилу*

$$\chi : \operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)}\,(u+E_1)\dots(u+E_m+m-1) \\ \mapsto \sum_{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_m\leqslant N} (u+\lambda_{i_1})\cdots(u+\lambda_{i_m}+m-1).$$

Доказательство. Применим снова предложение 3.2.2 и лемму 4.5.3. Левую часть в (3.18) для матрицы Манина $M=(u+E+m-1)\,e^{-\partial_u}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)}\big(u+E_1+m-1\big)\,e^{-\partial_u}\dots\big(u+E_m+m-1\big)\,e^{-\partial_u} \\ &\qquad= \operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)}\big(u+E_1+m-1\big)\dots\big(u+E_m\big)\,e^{-m\,\partial_u} \\ &\qquad= \operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)}\big(u+E_1\big)\dots\big(u+E_m+m-1\big)\,e^{-m\,\partial_u}, \end{aligned}$$

где второе равенство выполнено по лемме 4.5.4. Для $\sigma\in\mathfrak{S}_m$ рассмотрим слагаемое $M_{i_m\,i_{\sigma(m)}}\dots M_{i_1\,i_{\sigma(1)}}$, входящее в правую часть равенства (3.18). В силу свойств (4.13) его применение к старшему вектору ξ представления старшего веса $L(\lambda)$ даст нуль, кроме случая, когда σ лежит в стабилизаторе мультимножества $\{i_1,\dots,i_m\}$. В этом случае, применяя формулы (4.14), находим, что

$$\begin{aligned} M_{i_m\,i_m}\dots M_{i_1\,i_1}\,\xi &= \big(u+E_{i_m i_m}+m-1\big)\,e^{-\partial_u}\dots\big(u+E_{i_1 i_1}+m-1\big)\,e^{-\partial_u}\,\xi \\ &= \big(u+\lambda_{i_m}+m-1\big)\dots\big(u+\lambda_{i_1}\big)\,e^{-m\,\partial_u}\,\xi. \end{aligned}$$

Принимая во внимание число $\alpha_1!\dots\alpha_N!$ перестановок, которые стабилизируют мультимножество $\{i_1,\dots,i_m\}$, получаем требуемую формулу. □

Из предложения 4.7.1 следует, что все коэффициенты полинома от u, заданного формулой

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_m\leqslant N} (u+\lambda_{i_1})\cdots(u+\lambda_{i_m}+m-1),$$

— это симметрические полиномы от переменных $l_i=\lambda_i-i+1$ при $i=1,\dots,N$. В частности, при $u=0$ получаем факториальный полный симметрический полином

$$h_m(l_1,\dots,l_N\,|\,a) = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_m\leqslant N} \big(l_{i_1}+i_1-1\big)\cdots\big(l_{i_m}+i_m+m-2\big),$$

отвечающий последовательности параметров $a=(a_i)$, $a_i=-i+1$; см. (4.17).

§ 4.8. Инварианты Гельфанда

В теореме 4.5.1 положим $S=P_\sigma$, где $\sigma=(m,m-1,\dots,1)$ — это длинный цикл в симметрической группе $\mathfrak{S}_m$. Отметим разложение

$$P_\sigma = P_{m-1\,m}\dots P_{2\,3}\,P_{1\,2}. \tag{4.40}$$

Положим также $u_a=0$ при $a=1,\dots,m$. Из формул (1.68) и свойства цикличности следа вытекает, что элементы Казимира (4.30) принимают вид $\operatorname{tr} E^m$.

Они известны как *инварианты Гельфанда*. В самом деле, применяя свойства (1.67), получим

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_{1,\dots,m} E_1 \dots E_m \, P_{m-1\, m} \dots P_{2\,3} P_{1\,2}\\ = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} E_1 \dots E_{m-1} P_{m-1\, m} E_{m-1} P_{m-2\, m-1} \dots P_{2\,3} P_{1\,2}.\end{aligned}$$

Так как $\operatorname{tr}_m P_{m-1\, m} = 1$, то, вычисляя частичный след tr_m, мы можем привести это выражение к виду

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m-1} E_1 \dots E_{m-1}^2 P_{m-2\, m-1} \dots P_{2\,3} P_{1\,2}$$

и, рассуждая далее по-индукции, получить соотношение

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} P_\sigma \, E_1 \dots E_m = \operatorname{tr} E^m. \tag{4.41}$$

Тем самым его обе части — это элементы Казимира для $\mathfrak{gl}_N$ при всех $m \geqslant 1$.

Более прямой способ прийти к этому выводу состоит в использовании следующей формулы, вытекающей из предложения 4.2.2:

$$E_1 E_2^m - E_2^m E_1 = P_{12} E_2^m - E_2^m P_{12}.$$

В ней достаточно вычислить частичный след tr_2 и применить лемму 1.4.1; ср. предложение 4.2.1.

Докажем теперь *тождество Ньютона* для инвариантов Гельфанда. Рассуждение будет похоже на доказательство теоремы 3.2.10, но теперь вместо производной нам нужно использовать разностный оператор. Вспомним, что определитель Капелли $C(u)$ — это полином от u, определённый в (4.37).

Теорема 4.8.1. *Справедливо тождество*

$$1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \operatorname{tr} E^m}{(u-N+1)^{m+1}} = \frac{C(u+1)}{C(u)}.$$

Доказательство. По следствию 4.6.2 имеем

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,N} A^{(N)} \, (u+E_1) \dots (u+E_N-N+1) = C(u).$$

Применяя лемму 4.5.4, получим также

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,N} A^{(N)} \, (u+E_1) \dots (u+E_{N-1}-N+2)(u+E_N+1) = C(u+1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}C(u+1) - C(u) &= N \operatorname{tr}_{1,\dots,N} A^{(N)} \, (u+E_1) \dots (u+E_{N-1}-N+2)\\ &= N \operatorname{tr}_{1,\dots,N} A^{(N)} \, C(u) \, (u+E_N-N+1)^{-1}.\end{aligned}$$

Сопрягая оператором P_{1N}, правую часть можно записать в виде

$$N \operatorname{tr}_{1,\dots,N} A^{(N)} \, C(u) \, (u+E_1-N+1)^{-1}.$$

Наконец, вычисляя частичный след $\operatorname{tr}_{2,\dots,N}$ с использованием формулы (3.26), получим

$$C(u+1) - C(u) = C(u) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \operatorname{tr} E^m}{(u-N+1)^{m+1}},$$

как и требовалось. □

Следствие 4.8.2. *Образы Хариш-Чандры инвариантов Гельфанда находятся из формулы*

$$1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,\chi(\operatorname{tr}E^m)}{(u-N+1)^{m+1}}=\prod_{i=1}^{N}\frac{u+l_i+1}{u+l_i}. \tag{4.42}$$

Справедлива также эквивалентная формула:

$$\chi(\operatorname{tr}E^m)=\sum_{k=1}^{N}\bar l_k^{\,m}\,\frac{(\bar l_1-\bar l_k+1)\dots(\bar l_N-\bar l_k+1)}{(\bar l_1-\bar l_k)\dots\wedge\dots(\bar l_N-\bar l_k)}, \tag{4.43}$$

где $\bar l_i=\lambda_i-i+N$, а символ $\wedge$ означает, что нулевой множитель должен быть пропущен.

Доказательство. Соотношение (4.42) вытекает из следствия 4.6.2 и теоремы 4.8.1. Полагая $v=u-N+1$, мы можем записать его в виде

$$1+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\,\chi(\operatorname{tr}E^m)\,v^{-m-1}=\prod_{i=1}^{N}\frac{v+\bar l_i+1}{v+\bar l_i}.$$

Разложим правую часть в сумму простейших дробей:

$$\prod_{i=1}^{N}\frac{v+\bar l_i+1}{v+\bar l_i}=1+\frac{a_1}{v+\bar l_1}+\dots+\frac{a_N}{v+\bar l_N}.$$

Чтобы вычислить коэффициенты a_k, умножим обе части на $v+\bar l_k$ и положим $v=-\bar l_k$. Разлагая рациональные функции в степенной ряд по v^{-1}, приходим к формуле (4.43). □

В следствии 13.4.3 мы вычислим образы Хариш-Чандры некоторых модифицированных инвариантов Гельфанда.

§ 4.9. Квантовые иммананты

Сохраняя обозначения § 1.1, предположим, что $\mathcal{U}$ — это стандартная таблица формы $\mu\vdash m$, и пусть $e_{\mathcal{U}}\in\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ — это соответствующий примитивный идемпотент. Как и прежде, через $c_a=c_a(\mathcal{U})$ мы будем обозначать содержание $c(\alpha)=j-i$ клетки $\alpha=(i,j)$ в таблице $\mathcal{U}$, занятой числом $a\in\{1,\dots,m\}$. Через $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ мы обозначаем образ идемпотента $e_{\mathcal{U}}$ относительно действия симметрической группы $\mathfrak{S}_m$, определённого в (1.65). Оператор $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ равен нулю, если длина $\ell(\mu)$ диаграммы μ превосходит N. Мы будем предполагать, что $\ell(\mu)\leqslant N$. Выберем параметры в теореме 4.5.1 по правилу

$$u_a=u+c_a,\quad a=1,\dots,m,$$

для некоторой переменной u и положим $S=\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$. Введём обозначение для соответствующего элемента Казимира:

$$\mathbb{S}_\mu(u)=\operatorname{tr}_{1,\dots,m}\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,(u+E_1+c_1)\dots(u+E_m+c_m). \tag{4.44}$$

Предложение 4.9.1. *Полином $\mathbb{S}_\mu(u)$ не зависит от выбора стандартной таблицы $\mathcal{U}$ формы μ. Кроме того, образы Хариш-Чандры его коэффициентов находятся по формуле*

$$\chi : \mathbb{S}_\mu(u) \mapsto \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{T})=\mu} \prod_{\alpha\in\mu} \big(u + \lambda_{\mathcal{T}(\alpha)} + c(\alpha)\big),$$

где суммирование производится по всем полустандартным таблицам $\mathcal{T}$ формы μ с элементами из множества $\{1,\dots,N\}$.

Мы отложим доказательство до гл. 10, поскольку предложение 4.9.1 является простым следствием более общего результата, касающегося янгианных характеров; см. замечание 10.1.5(i). В частных случаях, когда μ — это один столбец или одна строка, утверждение сводится к предложениям 4.6.1 и 4.7.1, так как $\mathbb{S}_\mu(u)$ совпадает с полиномами (4.35) и (4.39) соответственно.

Образ Хариш-Чандры полинома $\mathbb{S}_\mu(u)$ — это симметрический полином от переменных $l_i = \lambda_i - i + 1$ при $i = 1,\dots,N$. Элементы Казимира $\mathbb{S}_\mu = \mathbb{S}_\mu(0)$, заданные формулой

$$\mathbb{S}_\mu = \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, (E_1 + c_1)\dots(E_m + c_m), \tag{4.45}$$

называются *квантовыми имманантами*. Их образы — это факториальные полиномы Шура

$$s_\mu(l_1,\dots,l_N\,|\,a) = \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{T})=\mu} \prod_{\alpha\in\mu} \big(l_{\mathcal{T}(\alpha)} + \mathcal{T}(\alpha) + c(\alpha) - 1\big),$$

соответствующие последовательности параметров $a = (a_i)$, $a_i = -i + 1$; см. (4.18). Следующее утверждение — это квантовая версия предложения 2.1.3.

Следствие 4.9.2. *Квантовые иммананты $\mathbb{S}_\mu$, отвечающие всем диаграммам μ, содержащим не более N строк, образуют базис центра $\mathrm{Z}(\mathfrak{gl}_N)$.*

Доказательство. Факториальный полином Шура $s_\mu(l_1,\dots,l_N\,|\,a)$ — это неоднородный симметрический полином от переменных $l_1,\dots,l_N$, старшая компонента которого совпадает с полиномом Шура $s_\mu(l_1,\dots,l_N)$. Поскольку полиномы Шура образуют базис в алгебре симметрических полиномов, то этим свойством обладают и их факториальные аналоги. Остаётся применить изоморфизм Хариш-Чандры (4.15). □

Замечание 4.9.3. Наше определение квантовых имманантов (4.45) отличается от первоначального определения Окунькова [**129**], согласно которому они задаются формулой

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, (E_1 - c_1)\dots(E_m - c_m). \tag{4.46}$$

Эти элементы обладают свойствами стабильности, что и послужило мотивировкой такого определения. Чтобы установить связь между этими двумя семействами, рассмотрим автоморфизм алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$, заданный по формуле

$$\phi : E_{ij} \mapsto -E_{ji}, \tag{4.47}$$

так что ϕ переводит E в противоположную транспонированную матрицу $-E^t$. Тогда

$$\phi : \mathbb{S}_\mu \mapsto \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, (-E_1^t + c_1) \dots (-E_m^t + c_m).$$

Рассуждение по индукции с использованием формулы (1.14) показывает, что элемент $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ неподвижен относительно транспозиции, применённой одновременно ко всем m копиям алгебры $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$ в (4.29). Поскольку эта операция не изменяет значение следа, мы получаем

$$\phi : \mathbb{S}_\mu \mapsto (-1)^m\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, (E_1 - c_1) \dots (E_m - c_m).$$

С другой стороны, подкручивая действие алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ на конечномерном неприводимом представлении $L(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ на автоморфизм (4.47), мы получим представление, изоморфное $L(-\lambda_N, \dots, -\lambda_1)$. Следовательно, сдвинутые переменные $l_i = \lambda_i - i + 1$ преобразуются по правилу

$$l_i \mapsto -l_{N-i+1} - N + 1, \qquad i = 1, \dots, N.$$

Таким образом, образ Хариш-Чандры элемента Казимира (4.46) совпадает с полиномом $s_\mu(l_1 + N - 1, \dots, l_N + N - 1\,|\,a)$; см. также [**109**, теорема 7.4.6]. $\square$

§ 4.10. Библиографические замечания

Матричные реализации простых алгебр Ли использовались М. Гулдом [**60**] в связи с характеристическими тождествами. Другим способом эти реализации возникают из работ В. Г. Дринфельда [**32**] в контексте квантовых групп, и их можно получить с помощью ограничения R-матричных реализаций янгианов $\mathrm{Y}(\mathfrak{g})$ на подалгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Подробное изложение свойств факториальных функций Шура можно найти, например, в статье И. Макдональда [**103**]. Предложения 4.3.1 и 4.3.2 принадлежат А. Окунькову [**129**]. Дополнительные подробности о применении идемпотентов к выводу формулы Робинсона (4.28) содержатся в статье [**117**]; см. также [**34**] и [**104**, Section I.3, Example 4], где даны другие доказательства. Первое прямое доказательство того, что коэффициенты определителя Капелли $C(u)$ в (4.38) — это элементы Казимира, было дано Р. Хау и Т. Умеда [**68**]. Образы инвариантов Гельфанда относительно изоморфизма Хариш-Чандры (следствие 4.8.2) впервые были найдены А. М. Переломовым и В. С. Поповым [**134**]. Из этого следствия вытекает тождество Ньютона (теорема 4.8.1). Прямые доказательства этой теоремы были даны Т. Умеда [**149**] и М. Ито [**76**]; см. также [**109**, гл. 7], где дан её вывод с применением янгианов и дополнительные ссылки на литературу. Матрицы вида $\alpha + E\,\beta$ из леммы 4.5.3 содержатся среди основных примеров матриц Манина; см. [**21**]. Квантовые иммананты и связанные с ними высшие тождества Капелли были открыты А. Окуньковым [**129**]; см. также работы М. Назарова [**125**] и А. Окунькова и Г. Ольшанского [**130**].

Глава 5

Элементы Казимира для $\mathfrak{o}_N$ и $\mathfrak{sp}_N$

Взяв за основу рассуждения, использованные в гл. 4, мы поместим их в контекст двойственности Брауэра–Шура–Вейля, в которой роль симметрической группы теперь играет алгебра Брауэра, а роль общей линейной группы — классические группы типов B, C и D. Наша цель — построение семейств элементов Казимира для ортогональной и симплектической алгебр Ли. Как и для типа A, наш подход будет основан на матричных реализациях этих алгебр Ли, описанных в предложении 4.1.1.

§ 5.1. Изоморфизм Хариш-Чандры

Как мы определили в §2.2, подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}_N$, линейно порождённая элементами

$$F_{ij} = E_{ij} - E_{j'i'}, \qquad i, j = 1, \ldots, N, \tag{5.1}$$

— это ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{o}_N$. Здесь, как и раньше, используется обозначение $i' = N - i + 1$. Если $N = 2n + 1$ при натуральном $n \geqslant 1$, то $\mathfrak{o}_N$ — это простая алгебра Ли типа B_n, а если $N = 2n$ при $n \geqslant 3$, то $\mathfrak{o}_N$ — это простая алгебра Ли типа D_n. Алгебра Ли $\mathfrak{o}_4$ полупростая; она изоморфна прямой сумме $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$. И в чётном, и в нечётном случаях из соотношений (4.8) вытекают коммутационные соотношения

$$F_{ij}\, F_{kl} - F_{kl}\, F_{ij} = \delta_{kj}\, F_{il} - \delta_{il}\, F_{kl} - \delta_{ki'}\, F_{j'l} + \delta_{j'l}\, F_{ki'} \tag{5.2}$$

для всех значений индексов $i, j, k, l \in \{1, \ldots, N\}$. Отметим также соотношения симметрии

$$F_{ij} + F_{j'i'} = 0, \qquad i, j \in \{1, \ldots, N\}.$$

Аналогично если $N = 2n$, то подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}_{2n}$, линейно порождённая элементами

$$F_{ij} = E_{ij} - \varepsilon_i \varepsilon_j\, E_{j'i'}, \qquad i, j = 1, \ldots, 2n, \tag{5.3}$$

— это симплектическая алгебра Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$. Это простая алгебра Ли типа C_n. Мы полагаем $\varepsilon_i = 1$ при $i = 1, \ldots, n$ и $\varepsilon_i = -1$ при $i = n + 1, \ldots, 2n$. Справедливы коммутационные соотношения

$$F_{ij}\, F_{kl} - F_{kl}\, F_{ij} = \delta_{kj}\, F_{il} - \delta_{il}\, F_{kl} - \varepsilon_i \varepsilon_j \big(\delta_{ki'}\, F_{j'l} - \delta_{j'l}\, F_{ki'}\big) \tag{5.4}$$

для всех $i, j, k, l \in \{1, \ldots, 2n\}$. Соотношения симметрии имеют вид

$$F_{ij} + \varepsilon_i \varepsilon_j\, F_{j'i'} = 0, \qquad i, j \in \{1, \ldots, 2n\}.$$

Мы будем использовать единообразное обозначение $\mathfrak{g}_N$ для алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ (при $N = 2n$ или $N = 2n + 1$) или $\mathfrak{sp}_N$ (при $N = 2n$). Соберём элементы F_{ij} в матрицу $F = [F_{ij}]$ и отождествим её с элементом

$$F = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes F_{ij} \in \operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g}_N). \tag{5.5}$$

Рассмотрим тензорное произведение алгебр

$$\operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)$$

и вспомним операторы $P = P_{12}$ и $Q = Q_{12}$, определённые в (1.64), (1.70) и (1.74) для соответствующих случаев. Заметим, что применение транспозиции (2.27) к оператору P относительно любой копии алгебры эндоморфизмов даёт оператор Q.

Предложение 5.1.1. *Определяющие соотношения в алгебре* $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)$ *допускают эквивалентную матричную форму*

$$F_1 F_2 - F_2 F_1 = (P - Q) F_2 - F_2 (P - Q) \tag{5.6}$$

вместе с соотношением $F + F' = 0$.

Доказательство. Ясно, что соотношения симметрии записываются в виде $F + F' = 0$. Что касается формул (5.6), утверждение можно вывести из предложения 4.1.1. Мы применим другой способ, основанный на лемме 2.2.1. Запишем формулу (4.10) в виде

$$E_1 E_2 - E_2 E_1 = P E_2 - E_2 P.$$

Применение транспозиции (2.27) к первой копии алгебры $\operatorname{End} \mathbb{C}^N$ в (4.9) приводит к соотношению

$$E_1' E_2 - E_2 E_1' = Q E_2 - E_2 Q,$$

в то время как её применение ко второй копии с использованием леммы 2.2.1 приводит к равенству

$$E_1 E_2' - E_2' E_1 = E_2' Q - Q E_2'.$$

Применяя теперь транспозицию к первой копии алгебры $\operatorname{End} \mathbb{C}^N$ в этом соотношении, получим

$$E_1' E_2' - E_2' E_1' = E_2' P - P E_2'.$$

Из этих четырёх соотношений вытекает, что

$$\begin{aligned} F_1 F_2 - F_2 F_1 &= (E_1 - E_1')(E_2 - E_2') - (E_2 - E_2')(E_1 - E_1') \\ &= P E_2 - E_2 P - Q E_2 + E_2 Q - E_2' Q + Q E_2' + E_2' P - P E_2' \\ &= (P - Q) F_2 - F_2 (P - Q), \end{aligned}$$

как и требовалось. □

В силу (2.28) для матрицы F справедливы тождества

$$QF_1 + QF_2 = 0 \qquad \text{и} \qquad F_1Q + F_2Q = 0. \tag{5.7}$$

Вместе со свойствами (1.67) это приводит к эквивалентной форме соотношений (5.6):

$$F_1\,F_2 - F_2\,F_1 = F_1\,(P - Q) - (P - Q)\,F_1.$$

Замечание 5.1.2. Матричная форма определяющих соотношений для алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)$ из предложения 5.1.1 приводит к определению аффинной версии алгебры Брауэра по аналогии с вырожденной аффинной алгеброй Гекке; ср. замечание 4.2.3. Рассмотрим алгебру $\mathcal{F}_m(\omega)$, порождённую алгеброй Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ и (абстрактными) элементами $F_1, \dots, F_m$, удовлетворяющими соотношениям

$$P_{a\,b}\,F_c = F_c\,P_{a\,b}, \qquad Q_{a\,b}\,F_c = F_c\,Q_{a\,b},$$

где $1 \leqslant a < b \leqslant m$ и $c \neq a, b$,

$$P_{a\,b}\,F_a = F_b\,P_{a\,b}, \qquad Q_{a\,b}\,F_a + Q_{a\,b}\,F_b = 0 \qquad \text{и} \qquad F_a\,Q_{a\,b} + F_b\,Q_{a\,b} = 0$$

и соотношениям

$$F_a\,F_b - F_b\,F_a = F_a\,(P_{a\,b} - Q_{a\,b}) - (P_{a\,b} - Q_{a\,b})\,F_a,$$

где $P_{a\,b}$ и $Q_{a\,b}$ понимаются как соответствующие элементы $s_{a\,b}$ и $\epsilon_{a\,b}$ алгебры $\mathcal{B}_m(\omega)$. Фактор алгебры $\mathcal{F}_m(\omega)$ по некоторым дополнительным соотношениям — это *алгебра Назарова–Вензля*, впервые введённая в работе [**124**]. □

Для упорядоченного набора комплексных чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ соответствующее неприводимое *представление старшего веса* $L(\lambda)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_N$ порождается таким ненулевым вектором $\xi \in L(\lambda)$ (*старшим вектором*), что

$$\begin{aligned} &F_{ij}\,\xi = 0 \qquad && \text{для} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant N \qquad \text{и} \\ &F_{ii}\,\xi = \lambda_i\,\xi \qquad && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$

Через $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}_N)$ мы обозначаем центр универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)$. Любой элемент $z \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g}_N)$ действует в $L(\lambda)$ умножением каждого вектора на константу $\chi(z)$. Как функция старшего веса λ, константа $\chi(z)$ — это полином от $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ с некоторыми свойствами симметрии, возникающими из действия соответствующей группы Вейля W. Введём сдвинутые переменные $l_1, \dots, l_n$ по правилу $l_i = \lambda_i + \rho_i$, где числа ρ_i — это координаты полусуммы положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{g}_N$, так что $\rho_i = n - i + \varepsilon$ при

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}, \\ \frac{1}{2} & \text{для} \quad \mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n+1}, \\ 1 & \text{для} \quad \mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_{2n}. \end{cases} \tag{5.8}$$

В случаях B_n и C_n полином $\chi(z)$ от $l_1, \dots, l_n$ инвариантен относительно всех перестановок переменных, а также относительно замен знаков $l_i \mapsto -l_i$ у любого подмножества переменных. В случае D_n полином $\chi(z)$ от $l_1, \dots, l_n$ инвариантен относительно всех перестановок переменных, а также относительно замен знаков $l_i \mapsto -l_i$ у любого подмножества, состоящего из чётного числа переменных. Во всех трёх случаях отображение $z \mapsto \chi(z)$ задаёт изоморфизм алгебр

$$\chi : \mathrm{Z}(\mathfrak{g}_N) \to \mathbb{C}[l_1, \dots, l_n]^W \tag{5.9}$$

между центром и алгеброй инвариантных полиномов. Это даёт эквивалентную интерпретацию изоморфизма Хариш-Чандры, определённого в (4.7), так что l_i отождествляется с элементом $F_{ii} + \rho_i \in \mathrm{U}(\mathfrak{h})$. Отметим, что для типов B_n и C_n образ изоморфизма совпадает с алгеброй симметрических полиномов от переменных $l_1^2, \dots, l_n^2$:

$$\mathbb{C}[l_1, \dots, l_n]^W = \mathbb{C}[l_1^2, \dots, l_n^2]^{\mathfrak{S}_n}.$$

Для типа D_n образ изоморфизма порождается алгеброй симметрических полиномов от переменных $l_1^2, \dots, l_n^2$ и полиномом $l_1 \dots l_n$; ср. (2.35).

Как мы определили в §2.2, классические группы $\mathrm{G}_N = \mathrm{O}_N$ и $\mathrm{G}_N = \mathrm{Sp}_N$ — это группы комплексных матриц, сохраняющих соответствующую форму (2.25). *Присоединённое действие* группы G_N на алгебре Ли $\mathfrak{g}_N$ определяется по правилу (2.30). Оно продолжается до однозначно определённого действия группы G_N на алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)$, при котором каждый элемент группы действует как автоморфизм. Подалгебра инвариантов $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)^{\mathrm{G}_N}$ относительно этого действия совпадает с центром $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}_N)$ в случаях B_n и C_n и является собственной подалгеброй центра в случае D_n. Во всех трёх случаях отображение (5.9) индуцирует изоморфизм

$$\chi : \mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)^{\mathrm{G}_N} \to \mathbb{C}[l_1^2, \dots, l_n^2]^{\mathfrak{S}_n}. \tag{5.10}$$

Теперь нам понадобятся факториальные элементарные и полные симметрические полиномы, определённые в (4.16) и (4.17), для конкретных последовательностей a, заданных формулой

$$a = (\varepsilon^2, (\varepsilon+1)^2, (\varepsilon+2)^2, \dots), \tag{5.11}$$

где число ε было определено в (5.8), так что $a_i = (\varepsilon + i - 1)^2$.

Заметим, что произвольный элемент $z \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)^{\mathrm{G}_N}$ однозначно определяется собственными значениями $\chi(z)$ в неприводимых представлениях $L(\lambda)$, где старший вес $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ пробегает множество разбиений с условием $\ell(\lambda) \leqslant n$. Это приводит к следующим характеристическим свойствам элементов Казимира.

Предложение 5.1.3. *Предположим, что k — это целое неотрицательное число, а $z \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)^{\mathrm{G}_N}$ — это элемент степени не выше $2k$ относительно канонической фильтрации, который действует как нулевой оператор во всех представлениях $L(\lambda)$ с условием $|\lambda| < k$. Если однородная компонента степени $2k$ полинома $\chi(z)$ равна $e_k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$ или $h_k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$, то $\chi(z)$ совпадает с $e_k(l_1^2, \dots, l_n^2 \,|\, a)$ или $h_k(l_1^2, \dots, l_n^2 \,|\, a)$ соответственно.*

Доказательство. Применим предложение 4.3.2 в двух частных случаях, где разбиение μ есть либо столбец $\mu = (1^k)$, либо строка $\mu = (k)$. В силу (5.10) образ $\chi(z)$ — это симметрический полином от набора переменных $x = (l_1^2, \dots, l_n^2)$. Мы выбрали последовательность a в (5.11) таким образом, что для любого разбиения λ отвечающий ему n-набор (4.19) имеет вид $a_\lambda = (l_1^2, \ldots, l_n^2)$. Отсюда следует, что симметрический полином $\chi(z)$ удовлетворяет соответствующим предположениям предложения 4.3.2. $\square$

§ 5.2. Двойственность Брауэра–Шура–Вейля

Конечномерные неприводимые представления ортогональной группы O_N параметризуются всеми такими диаграммами Юнга λ, что $\lambda'_1 + \lambda'_2 \leqslant N$, где λ'_j — это число клеток в j-м столбце диаграммы. Соответствующее представление будет обозначаться через $\overline{L}(\lambda)$. Пусть λ^* — это диаграмма, полученная из λ заменой первого столбца на столбец, содержащий $N - \lambda'_1$ клеток. Если $N = 2n + 1$ и $\lambda'_1 \leqslant n$, то представление алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ в пространстве $\overline{L}(\lambda)$ неприводимо и изоморфно представлению старшего веса $L(\lambda)$ при $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, а если $\lambda'_1 > n$, то соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ изоморфно представлению старшего веса $L(\lambda^*)$.

Если $N = 2n$ и $\lambda'_1 < n$, то представление алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ в пространстве $\overline{L}(\lambda)$ неприводимо и изоморфно $L(\lambda)$, в то время как при $\lambda'_1 > n$ представление алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ изоморфно $L(\lambda^*)$. Если $N = 2n$ и $\lambda'_1 = n$, то представление алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ в пространстве $\overline{L}(\lambda)$ изоморфно прямой сумме двух неприводимых представлений $L(\lambda)$ и $L(\lambda^\circ)$, где $\lambda^\circ = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, -\lambda_n)$.

Конечномерные неприводимые представления симплектической группы Sp_N при $N = 2n$ параметризуются разбиениями λ, длина которых не превосходит n. Соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{sp}_N$ неприводимо и изоморфно представлению старшего веса $L(\lambda)$.

Ограничим диагональное действие группы GL_N на пространстве тензоров $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$, определённое в (2.13), на подгруппу $\mathrm{G}_N \subset \mathrm{GL}_N$. Централизатор этого действия группы G_N в алгебре эндоморфизмов $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ совпадает с образом алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ при её действии, описанном в §1.5, где параметр ω принимает значения N и $-N$ в ортогональном и симплектическом случае соответственно. Отсюда получаем разложение пространства тензоров, аналогичное (4.26): для $\mathrm{G}_N = \mathrm{O}_N$ оно имеет вид

$$(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} \cong \bigoplus_{f=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash m-2f \\ \lambda'_1 + \lambda'_2 \leqslant N}} V_\lambda \otimes \overline{L}(\lambda), \tag{5.12}$$

где V_λ и $\overline{L}(\lambda)$ — это неприводимые представления алгебры $\mathcal{B}_m(N)$ и группы O_N соответственно, отвечающие диаграмме λ.

Аналогично в симплектическом случае при $N = 2n$ имеем

$$(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} \cong \bigoplus_{f=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash m-2f \\ \lambda_1 \leqslant n}} V_\lambda \otimes L(\lambda'), \tag{5.13}$$

где V_λ и $L(\lambda')$ — это неприводимые представления алгебры $\mathcal{B}_m(-N)$ и группы Sp_N соответственно, отвечающие диаграммам λ и λ'.

Предположим теперь, что λ — это разбиение числа m, причём $\lambda'_1 \leqslant n$ в ортогональном случае и $\lambda_1 \leqslant n$ в симплектическом случае. Пусть $\mathcal{U}$ — это стандартная таблица формы λ, которую мы будем также рассматривать как ud-таблицу. Рассмотрим примитивный идемпотент $e_{\mathcal{U}}$ алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(N)$ или $\mathcal{B}_m(-N)$; см. §1.2. Обозначим через $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ образ идемпотента $e_{\mathcal{U}}$ относительно действия алгебры Брауэра, определённого в §1.5. Пусть $\mathcal{V}$ — это стандартная таблица, полученная из $\mathcal{U}$ удалением клетки, занятой числом m, и пусть μ — это форма таблицы $\mathcal{V}$. Из разложений (5.12) и (5.13) следует, что пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ — это неприводимое представление группы G_N, изоморфное представлению $\overline{L}(\lambda)$ в ортогональном случае и представлению $L(\lambda')$ в симплектическом случае. Поэтому след $\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ равен размерности соответствующего представления $\overline{L}(\lambda)$ или $L(\lambda')$. Таким образом, вычисляя этот след, мы можем получить хорошо известные формулы крюков для размерностей эти представлений; ср. доказательство формулы (4.28). Мы их приведём без вычислений. В случае $\mathrm{G}_N = \mathrm{O}_N$ положим

$$D(\lambda) = \frac{1}{h(\lambda)} \prod_{(i,j)\in\lambda} \big(N - 1 + d(i,j)\big),$$

где

$$d(i,j) = \begin{cases} \lambda_i + \lambda_j - i - j + 1, & \text{если} \quad i \leqslant j, \\ -\lambda'_i - \lambda'_j + i + j - 1, & \text{если} \quad i > j. \end{cases}$$

Справедливо соотношение

$$\mathrm{tr}_m\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}} = \mathcal{E}_{\mathcal{V}}\,\frac{D(\lambda)}{D(\mu)},$$

из которого следует, что

$$\dim \overline{L}(\lambda) = D(\lambda). \tag{5.14}$$

Аналогично если $\mathrm{G}_N = \mathrm{Sp}_N$, то для любой диаграммы ρ, содержащей не более n строк, положим

$$D(\rho) = \frac{1}{h(\rho)} \prod_{(i,j)\in\rho} \big(N + 1 + d(i,j)\big),$$

где параметры $d(i,j)$ теперь определяются по правилу

$$d(i,j) = \begin{cases} \rho_i + \rho_j - i - j + 1, & \text{если} \quad i > j, \\ -\rho'_i - \rho'_j + i + j - 1, & \text{если} \quad i \leqslant j. \end{cases}$$

Для частичного следа справедлива формула

$$\mathrm{tr}_m\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}} = \mathcal{E}_{\mathcal{V}}\,\frac{D(\lambda')}{D(\mu')},$$

так что

$$\dim L(\rho) = D(\rho). \tag{5.15}$$

§ 5.3. Общая конструкция элементов Казимира

Пусть $s \in \mathcal{B}_m(\omega)$ — это произвольный элемент, а параметр ω алгебры Брауэра выбирается по правилу

$$\omega = \begin{cases} N & \text{для} \quad \mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_N, \\ -N & \text{для} \quad \mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_N. \end{cases} \tag{5.16}$$

Обозначим через S соответствующий образ элемента s относительно отображения (1.69) или (1.73), который будет отождествляться с элементом $S \otimes 1$ алгебры

$$\underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g}_N). \tag{5.17}$$

Докажем теперь аналог теоремы 4.5.1 для ортогональной и симплектической алгебр Ли.

Теорема 5.3.1. *Для любого элемента $s \in \mathcal{B}_m(\omega)$ и произвольных параметров $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{C}$ элемент*

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} S\,(u_1 + F_1) \ldots (u_m + F_m) \tag{5.18}$$

лежит в центре $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}_N)$.

Доказательство. Рассмотрим тензорное произведение

$$\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \operatorname{End}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g}_N), \tag{5.19}$$

где копии алгебры эндоморфизмов $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$ занумерованы числами $0, 1, \ldots, m$. Достаточно проверить, что соотношение

$$\big[F_0, \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} S\,(u_1 + F_1) \ldots (u_m + F_m)\big] = 0 \tag{5.20}$$

выполнено в алгебре (5.19). В силу предложения 5.1.1 можно записать

$$[F_0, u_a + F_a] = (P_{0\,a} - Q_{0\,a})(u_a + F_a) - (u_a + F_a)(P_{0\,a} - Q_{0\,a}),$$

так что

$$\begin{aligned} \big[F_0,\, S\,(u_1 + F_1) \ldots (u_m + F_m)\big] = S \sum_{a=1}^{m} (P_{0\,a} - Q_{0\,a})\,(u_1 + F_1) \ldots (u_m + F_m) \\ - S\,(u_1 + F_1) \ldots (u_m + F_m) \sum_{a=1}^{m} (P_{0\,a} - Q_{0\,a}). \end{aligned}$$

Из свойств элементов Юциса–Мёрфи (1.26) вытекает, что сумма

$$\sum_{a=1}^{m} (P_{0\,a} - Q_{0\,a})$$

коммутирует с элементом S, и поэтому след $\operatorname{tr}_{1,\ldots,m}$ коммутатора равен нулю по свойству цикличности следа. $\square$

Замечание 5.3.2. Можно построить и более общее семейство элементов Казимира для $\mathfrak{g}_N$. Используя предположения теоремы 5.3.1, рассмотрим элемент

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S\,(u_1+F_1)R_1(u_2+F_2)\dots R_{m-1}(u_m+F_m), \tag{5.21}$$

где

$$R_a = r_a + r_{a\,a+1}Q_{a\,a+1}+\dots+r_{a\,m}Q_{a\,m}, \qquad a=1,\dots,m-1,$$

для некоторых комплексных чисел r_a и $r_{a\,b}$. Рассуждая, как в доказательстве теоремы 5.3.1, нетрудно убедиться, что элемент (5.21) лежит в центре $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}_N)$. Дополнительный шаг в рассуждении состоит в использовании соотношений

$$Q_{c\,a}(P_{0\,a}-Q_{0\,a}) = -Q_{c\,a}(P_{0\,c}-Q_{0\,c}) \qquad \text{и}$$
$$(P_{0\,a}-Q_{0\,a})Q_{a\,b} = -(P_{0\,b}-Q_{0\,b})Q_{a\,b},$$

которые выполняются при $c<a<b$.

Небольшая модификация доказательства теоремы в другом направлении позволяет проверить, что все элементы вида

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S\,F_{a_1}\dots F_{a_k} \tag{5.22}$$

с произвольными параметрами $a_i\in\{1,\dots,m\}$ тоже лежат в $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}_N)$. □

Пример 5.3.3. Как в §4.8, в теореме 5.3.1 возьмём $S=P_\sigma$, где перестановка $\sigma=(m,m-1,\dots,1)$ — это длинный цикл (см. (4.40)), и положим $u_a=0$ при $a=1,\dots,m$. Повторяя рассуждение из §4.8, получим

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} P_\sigma\,F_1\dots F_m = \operatorname{tr} F^m,$$

а следовательно, это элемент Казимира для $\mathfrak{g}_N$ при всех $m\geqslant 1$. Он является *инвариантом Гельфанда* для алгебры Ли $\mathfrak{g}_N$ и содержится в алгебре инвариантов $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)^{\mathrm{G}_N}$. Образ Хариш-Чандры $\chi(\operatorname{tr} F^m)$ — это симметрический полином от переменных $l_1^2,\dots,l_n^2$; см. (5.10). В случае чётного значения $m=2k$ компонента старшей степени полинома $\chi(\operatorname{tr}F^{2k})$ равна $2\,(l_1^{2k}+\dots+l_n^{2k})$. Поэтому инварианты Гельфанда

$$\operatorname{tr}F^2,\ \operatorname{tr}F^4,\dots,\operatorname{tr}F^{2n}$$

— это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)^{\mathrm{G}_N}$.

Имеются аналоги тождеств Ньютона (ср. теорему 4.8.1), связывающие инварианты Гельфанда и определители типа Капелли. Однако известные доказательства этих тождеств выходят за рамки методов, применённых в доказательстве теореме 4.8.1; см. ссылки в §5.7. □

Установим теперь аналог леммы 4.5.4 для ортогональной и симплектической алгебр Ли.

Лемма 5.3.4. *Пусть $u_1,\dots,u_m$ — это комплексные параметры, и пусть S — это образ элемента s, лежащего в центре алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ (где*

ω выбирается в соответствии с формулой (5.16)), *относительно соответствующего гомоморфизма* (1.69) *или* (1.73). *Тогда для любых $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_m$ справедливо тождество*

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S\,(F_{\sigma(1)} + u_{\tau(1)}) \dots (F_{\sigma(m)} + u_{\tau(m)}) = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S\,(F_1 + u_1) \dots (F_m + u_m).$$

Доказательство. Мы можем применить то же самое рассуждение, что и в доказательстве леммы 4.5.4, с учётом того, что определяющие соотношения даются теперь предложением 5.1.1, так что

$$(F_a + u_{a+1})(F_{a+1} + u_a) - (F_{a+1} + u_a)(F_a + u_{a+1}) \\ = (P_{a\,a+1} - Q_{a\,a+1})\,F_{a+1} - F_{a+1}\,(P_{a\,a+1} - Q_{a\,a+1}).$$

Это приводит к требуемому тождеству. □

§ 5.4. Симметризатор и антисимметризатор для $\mathfrak{o}_N$

Здесь мы получим аналоги предложений 4.6.1 и 4.7.1 для ортогональных алгебр Ли $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_N$ при $N = 2n+1$ или $N = 2n$ (симплектический случай будет рассмотрен в следующем параграфе). В отличие от $\mathfrak{gl}_N$, доказательства этих аналогов оказываются более трудоёмкими из-за отсутствия соответствующей техники матриц Манина. Вариант определения матриц Манина для типов B, C и D приведён ниже в § 5.6, однако их общие свойства не приводят к простым вычислениям образов Хариш-Чандры. Вместо этого мы будем опираться на свойства факториальных симметрических полиномов; см. предложение 5.1.3.

Вспомним, что симметризатор $s^{(m)}$ и антисимметризатор $a^{(m)}$ в алгебре Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ определены в § 1.2, а $S^{(m)}$ и $A^{(m)}$ — это их образы соответственно относительно действия алгебры Брауэра для $\omega = N$ в пространстве тензоров; см. (1.69). Мы будем использовать функцию $\gamma_m(\omega)$ от параметра ω, заданную формулой (2.40).

Факториальные элементарные и полные симметрические полиномы, определённые в (4.16) и (4.17), будут связаны с последовательностью параметров a, заданной в (5.11). Возьмём чётные значения $m = 2k$ и в теореме 5.3.1 положим $S = S^{(2k)}$ при $k \geqslant 1$. По свойству цикличности следа мы можем переместить элемент $S^{(2k)}$ в формуле (5.18), записав его последним множителем. Кроме этого, выберем некоторые специальные значения параметров $u_1, \dots, u_{2k}$.

Предложение 5.4.1. *Для любого $k \geqslant 1$ образ элемента Казимира*

$$\gamma_{2k}(N)\operatorname{tr}_{1,\dots,2k}(F_1 + k - 1) \dots (F_{2k} - k)\, S^{(2k)} \in \mathrm{Z}(\mathfrak{o}_N) \tag{5.23}$$

относительно изоморфизма Хариш-Чандры — это полином $h_k(l_1^2, \dots, l_n^2\,|\,a)$.

Доказательство. Здесь нам будет удобнее слегка видоизменить тензорные обозначения. А именно, мы будем записывать тензорное произведение в (5.17) в другом порядке, помещая алгебру $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)$ на первое место:

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N) \otimes \underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m}. \tag{5.24}$$

Соответственно, множители в (5.5) тоже поменяются местами, так что теперь

$$F_a = \sum_{i,j=1}^{N} F_{ij} \otimes 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(m-a)}. \tag{5.25}$$

Эти изменения не затрагивают действие алгебры Брауэра. В частности, теорема 5.3.1 остаётся справедливой в том же виде.

Обозначим элемент Казимира (5.23) через D_k. Мы будем опираться на предложение 5.1.3 и в качестве первого шага покажем, что элемент D_k аннулируется во всех таких представлениях $L(\lambda)$ алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$, что разбиение λ удовлетворяет условию $|\lambda| < k$. Для этого применим реализацию представления $L(\lambda)$ в пространстве тензоров. Положим $r = |\lambda|$. Рассмотрим действие алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ в пространстве $\mathbb{C}^N$, определённое по правилу

$$F_{ij} \mapsto -e_{ji} + e_{i'j'}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant N,$$

так что это представление изоморфно $L(1, 0, \dots, 0)$. Пространство тензоров $(\mathbb{C}^N)^{\otimes r}$ тоже становится представлением алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$. В обозначениях (5.25) относительно соответствующего гомоморфизма

$$\varphi : \mathrm{U}(\mathfrak{o}_N) \otimes \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes 2k} \to \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes r} \otimes \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes 2k}$$

получаем

$$\varphi(F_a) = \sum_{b=1}^{r} \big(-P_{b\, r+a} + Q_{b\, r+a}\big), \qquad a = 1, \dots, 2k. \tag{5.26}$$

В силу (5.12) разложение пространства $(\mathbb{C}^N)^{\otimes r}$ в прямую сумму неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ содержит $L(\lambda)$ с ненулевой кратностью. Поэтому желаемое условие обращения в нуль в предложении 5.1.3 будет выполнено, если мы убедимся, что

$$\big(\varphi(F_1) + k - 1\big) \dots \big(\varphi(F_{2k}) - k\big)\, S'^{(2k)} = 0, \tag{5.27}$$

где $S'^{(2k)}$ обозначает образ симметризатора в алгебре Брауэра $\mathcal{B}_{2k}(N)$ при её действии на тензорном произведении последних $2k$ копий пространства $\mathbb{C}^N$ в произведении $(\mathbb{C}^N)^{\otimes(r+2k)}$. В силу (5.26) и соотношений (1.31) требуемое тождество (5.27) можно записать в виде

$$\big(-Y_{r+1} + k - 1\big) \dots \big(-Y_{r+2k} + k - 1\big)\, S'^{(2k)} = 0, \tag{5.28}$$

где Y_{r+b} при $b = 1, \dots, 2k$ — это образы соответствующих элементов Юциса–Мёрфи $y_{r+b} - (\omega - 1)/2$, определённых в (1.26), относительно действия алгебры Брауэра $\mathcal{B}_{r+2k}(N)$ в пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes(r+2k)}$. Чтобы доказать тождество (5.28), заметим, что операторы $(-Y_{r+1} + k - 1) \dots (-Y_{r+2k} + k - 1)$ и $S'^{(2k)}$ в пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes(r+2k)}$ коммутируют с действием группы O_N. Мы покажем, что образы этих двух операторов имеют нулевое пересечение. Для описания образа первого оператора представим векторное пространство как прямую сумму неприводимых представлений группы O_N:

$$(\mathbb{C}^N)^{\otimes(r+2k)} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor+k} \sum_{\nu\vdash r+2k-2l} \sum_{\mathcal{U}} \mathcal{E}_{\mathcal{U}} (\mathbb{C}^N)^{\otimes(r+2k)},$$

где последняя сумма берётся по всем ud-таблицам $\mathcal{U} = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{r+2k})$ формы ν, отвечающим алгебре Брауэра $\mathcal{B}_{r+2k}(N)$. Проверим теперь утверждение, что если $\mathcal{U}$ — это ud-таблица формы $\nu = \Lambda_{r+2k}$ при $\nu_1 \geqslant k$, то

$$\big(-Y_{r+1} + k - 1\big) \ldots \big(-Y_{r+2k} + k - 1\big)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}} = 0. \tag{5.29}$$

В самом деле, так как $r < k$, существует такая пара диаграмм $(\Lambda_{r+a}, \Lambda_{r+a+1})$ при $a \in \{0, 1, \ldots, 2k-1\}$, что вторая диаграмма получается из первой добавлением клетки $\alpha = (1, k)$. Содержание этой клетки — это $c(\alpha) = (\omega-1)/2+k-1$, поэтому формула (5.29) вытекает из соотношений (1.27). Таким образом, как представление группы O_N, образ

$$\big(-Y_{r+1} + k - 1\big) \ldots \big(-Y_{r+2k} + k - 1\big)\, (\mathbb{C}^N)^{\otimes(r+2k)}$$

содержится в прямой сумме представлений $\overline{L}(\nu)$ при $\nu_1 < k$.

С другой стороны, оператор $S'^{(2k)}$ проектирует пространство $(\mathbb{C}^N)^{\otimes(r+2k)}$ на тензорное произведение $(\mathbb{C}^N)^{\otimes r} \otimes \overline{L}(2k, 0, \ldots, 0)$ представлений группы O_N. Разложение на неприводимые компоненты тензорного произведения представлений группы O_N имеет вид

$$\mathbb{C}^N \otimes \overline{L}(\mu) \cong \bigoplus_{\mu^*} \overline{L}(\mu^*), \tag{5.30}$$

где диаграмма μ^* получается из μ добавлением или удалением одной клетки. Это свойство эквивалентно правилу ветвления для представлений алгебры Брауэра. Следовательно, после последовательного применения формулы (5.30) к соответствующим тензорным сомножителям в произведении $(\mathbb{C}^N)^{\otimes r} \otimes \overline{L}(2k, 0, \ldots, 0)$ мы находим, что, как представление группы O_N, образ $S'^{(2k)}(\mathbb{C}^N)^{\otimes(r+2k)}$ содержится в прямой сумме представлений $\overline{L}(\nu)$ при $\nu_1 \geqslant k+1$. Это следует из того, что максимальное количество удалений клетки из диаграммы $(2k)$ равно $r < k$. Это завершает доказательство соотношения (5.28), а следовательно, и (5.27).

Старшая компонента симметрического полинома $\chi(D_k)$ была вычислена в предложении 2.2.4. Она совпадает с полиномом $h_k(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$ в силу (2.41), так что остаётся применить предложение 5.1.3. □

Другое доказательство предложения 5.4.1 будет получено в § 13.4.

Снова применим теорему 5.3.1 и рассмотрим более широкое семейство элементов Казимира. Для переменной u положим

$$D_m(u) = \gamma_m(N)\, \mathrm{tr}_{1,\ldots,m} \Big(F_1 + u + \frac{m-1}{2}\Big)\Big(F_2 + u + \frac{m-3}{2}\Big) \\ \times \cdots \times \Big(F_m + u - \frac{m-1}{2}\Big)\, S^{(m)},$$

так что $D_m(u)$ — это полином от u, коэффициенты которого — это элементы Казимира для алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$. Альтернативная формула для коэффициентов получится с помощью расширенной алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{o}_N)\otimes\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — это алгебра дифференциальных операторов от переменной z, коэффициенты которых — это полиномы Лорана от z.

Следствие 5.4.2. *Справедливы следующие формулы для образов относительно изоморфизма Хариш-Чандры*:

$$\chi : D_m(u) \mapsto \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor} \binom{N+m-2}{m-2r} h_r(l_1^2,\dots,l_n^2\,|\,a) \prod_{i=0}^{m-2r-1}\Big(u-\frac{m-1}{2}+r+i\Big)$$

и

$$\chi : \gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\big(-\partial_z+F_1\,z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z+F_m\,z^{-1}\big)\,S^{(m)}$$
$$\mapsto \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor} \binom{N+m-2}{m-2r} h_r(l_1^2,\dots,l_n^2\,|\,a)\,z^{-2r}\,\big(-\partial_z+r\,z^{-1}\big)^{m-2r}.$$

Доказательство. Из определения следа вытекает, что полином $D_m(u)$ не изменится после применения транспозиции (2.24) одновременно к каждой из m копий алгебры $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$. Эта одновременная транспозиция является антиавтоморфизмом алгебры $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$, который оставляет неподвижными все элементы P_{ab} и Q_{ab}. Отсюда следует, что и симметризатор $S^{(m)}$ тоже неподвижен, что вытекает из формул §1.2, например (1.46). С другой стороны, поскольку $F'=-F$, применяя лемму 5.3.4 и вычисляя образ полинома $D_m(u)$ относительно этого антиавтоморфизма, получаем

$$\begin{aligned} D_m(u) &= \gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\Big(-F_1+u+\frac{m-1}{2}\Big)\dots\Big(-F_m+u-\frac{m-1}{2}\Big)\,S^{(m)} \\ &= (-1)^m\,\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\Big(F_1-u-\frac{m-1}{2}\Big)\dots\Big(F_m-u+\frac{m-1}{2}\Big)\,S^{(m)} \\ &= (-1)^m\,\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\Big(F_1-u+\frac{m-1}{2}\Big)\dots\Big(F_m-u-\frac{m-1}{2}\Big)\,S^{(m)}, \end{aligned}$$

что совпадает с $(-1)^m\,D_m(-u)$. Это означает, что полиномы $D_{2k}(u)$ чётные, а полиномы $D_{2k-1}(u)$ нечётные. В частности, $D_{2k-1}(0)=0$. Заметим, что значение $\chi\big(D_{2k}(1/2)\big)=\chi\big(D_{2k}(-1/2)\big)$ даётся предложением 5.4.1. Ясно, что эти частные случаи согласуются с формулами для образов Хариш-Чандры в формулировке следствия. Поэтому для завершения доказательства будет достаточно проверить, что полиномы $D_m(u)$ и их предполагаемые образы Хариш-Чандры удовлетворяют одним и тем же рекуррентным соотношениям. Покажем сначала, что

$$D_m(u+1/2)-D_m(u-1/2)=(N+m-2)\,D_{m-1}(u) \tag{5.31}$$

при всех $m \geqslant 1$, где мы положили $D_0(u) = 1$. По лемме 5.3.4 мы можем записать

$$D_m(u+1/2) = \gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\Big(F_1+u+\frac{m}{2}-1\Big) \\ \times\dots\times\Big(F_{m-1}+u-\frac{m}{2}-1\Big)\Big(F_m+u+\frac{m}{2}\Big)\,S^{(m)},$$

так что

$$D_m(u+1/2)-D_m(u-1/2) \\ = m\,\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\Big(F_1+u+\frac{m}{2}-1\Big)\dots\Big(F_{m-1}+u-\frac{m}{2}-1\Big)\,S^{(m)}.$$

По лемме 1.3.2 частичный след симметризатора равен

$$\mathrm{tr}_m\,S^{(m)} = \frac{(N+m-3)(N+2m-2)}{m\,(N+2m-4)}\,S^{(m-1)}, \tag{5.32}$$

что доказывает соотношение (5.31). Простое вычисление показывает, что и предполагаемые образы $\chi\big(D_m(u)\big)$ в формулировке следствия тоже удовлетворяют этому соотношению.

Для проверки второй части следствия заметим, что в силу тождества

$$z^m\,\big(-\partial_z+F_1\,z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z+F_m\,z^{-1}\big) = \big(-z\,\partial_z+F_1+m-1\big)\dots\big(-z\,\partial_z+F_m\big)$$

полином $D_m(u)$ можно записать в виде

$$z^m\,\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\big(-\partial_z+F_1\,z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z+F_m\,z^{-1}\big)\,S^{(m)}$$

при замене $-z\,\partial_z$ на $u-(m-1)/2$. Аналогично при всех $k \geqslant 0$ имеем

$$z^k\,\big(-\partial_z+r\,z^{-1}\big)^k = \big(-z\,\partial_z+r+k-1\big)\dots\big(-z\,\partial_z+r\big),$$

так что второе соотношение следует из первого. □

Докажем теперь аналоги предложения 5.4.1 и следствия 5.4.2, в которых роль симметризатора $S^{(m)}$ будет играть антисимметризатор $A^{(m)}$. Положим $S = A^{(2k)}$ в теореме 5.3.1.

Предложение 5.4.3. *Для всех $1 \leqslant k \leqslant n$ образ элемента Казимира*

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,2k}\,(F_1-k+1)\dots(F_{2k}+k)\,A^{(2k)} \in \mathrm{Z}(\mathfrak{o}_N) \tag{5.33}$$

при изоморфизме Хариш-Чандры — это полином $(-1)^k\,e_k(l_1^2,\dots,l_n^2\,|\,a)$.

Доказательство. Обзначим элемент Казимира (5.33) через C_k. Применим предложение 5.1.3 и покажем, что C_k аннулируется во всех представлениях $L(\lambda)$ алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$, в которых разбиения λ удовлетворяют условию $|\lambda| < k$. Используя ту же реализацию представления $L(\lambda)$, что и в доказательстве предложения 5.4.1, мы приходим к проверке следующего аналога соотношения (5.27):

$$\big(\varphi(F_1)-k+1\big)\dots\big(\varphi(F_{2k})+k\big)\,A'^{(2k)} = 0. \tag{5.34}$$

Гомоморфизм φ определён в (5.26), а $A'^{(2k)}$ обозначает образ антисимметризатора в алгебре Брауэра $\mathcal{B}_{2k}(N)$ при её действии на тензорное произведение последних $2k$ копий пространства $\mathbb{C}^N$ в произведении $(\mathbb{C}^N)^{\otimes(r+2k)}$ при $r=|\lambda|$. В силу (1.48) тождество (5.34) можно переписать в виде

$$\big(-Y_{r+1}-k+1\big)\dots\big(-Y_{r+2k}-k+1\big)\,A'^{(2k)}=0.$$

Чтобы проверить это соотношение, мы показываем, как в доказательстве предложения 5.4.1, что образ оператора $\big(-Y_{r+1}-k+1\big)\dots\big(-Y_{r+2k}-k+1\big)$, действующего в векторном пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes(r+2k)}$, содержится в прямой сумме представлений $\overline{L}(\nu)$ группы O_N при условии $\ell(\nu)<k$, в то время как образ оператора $A'^{(2k)}$ содержится в прямой сумме представлений $\overline{L}(\nu)$ при $\ell(\nu)\geqslant k+1$.

Наконец, по предложению 2.2.3 старшая компонента симметрического полинома $\chi(C_k)$ совпадает с полиномом $(-1)^k\,e_k(\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2)$. □

Для $m=1,\dots,N$ рассмотрим полиномы от переменной u, коэффициенты которых — это элементы Казимира для алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$:

$$C_m(u)=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\Big(F_1+u+\frac{m-1}{2}\Big)\Big(F_2+u+\frac{m-3}{2}\Big)\dots\Big(F_m+u-\frac{m-1}{2}\Big)\,A^{(m)}.$$

Следствие 5.4.4. *Справедливы следующие формулы для образов относительно изо- морфизма Хариш-Чандры*:

$$\chi: C_m(u)\mapsto\sum_{r=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}(-1)^r\binom{N-2r}{m-2r}\,e_r(l_1^2,\dots,l_n^2\,|\,a)\prod_{i=0}^{m-2r-1}\Big(u-\frac{m-1}{2}+r+i\Big)$$

и

$$\chi:\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\big(-\partial_z+F_1\,z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z+F_m\,z^{-1}\big)\,A^{(m)}$$
$$\mapsto\sum_{r=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}(-1)^r\binom{N-2r}{m-2r}\,e_r(l_1^2,\dots,l_n^2\,|\,a)\,z^{-2r}\,\big(-\partial_z+r\,z^{-1}\big)^{m-2r}.$$

Доказательство. Мы будем рассуждать точно так же, как в доказательстве следствия 5.4.2. Применяя лемму 5.3.4, проверяем сначала соотношение $C_m(u)=(-1)^m\,C_m(-u)$, так что $C_{2k-1}(0)=0$. Кроме того, значение $\chi\big(C_{2k}(1/2)\big)=\chi\big(C_{2k}(-1/2)\big)$ находится из предложения 5.4.3. В качестве следующего шага доказываем соотношение

$$C_m(u+1/2)-C_m(u-1/2)=(N-m+1)\,C_{m-1}(u),\qquad m\geqslant 1,\tag{5.35}$$

где $C_0(u)=1$. Оно вытекает из леммы 5.3.4 и формулы (3.26) для частичного следа антисимметризатора. То же самое соотношение выполнено для предполагаемых образов $\chi\big(C_m(u)\big)$ из формулировки следствия. Вторая часть вытекает из первой, как в доказательстве следствия 5.4.2. □

В случае $\mathfrak{g}_N=\mathfrak{o}_{2n}$ определим (некоммутативный) *пфаффиан* $\mathrm{Pf}\,F$ как элемент универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{o}_{2n})$ формулой

$$\mathrm{Pf}\,F=\frac{1}{2^n n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}}\mathrm{sgn}\,\sigma\cdot F_{\sigma(1)\,\sigma(2)'}\dots F_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)'}.\tag{5.36}$$

Пфаффиан лежит в центре $\mathrm{Z}(\mathfrak{o}_{2n})$, а его образ относительно изоморфизма Хариш-Чандры находится по формуле

$$\chi : \operatorname{Pf} F \mapsto l_1 \dots l_n.$$

Пример 5.4.5. Так как $F_{ij} + F_{j'i'} = 0$, при $n = 1$ получаем[1]

$$\operatorname{Pf} F = F_{11}, \qquad \chi : \operatorname{Pf} F \mapsto l_1.$$

При $n = 2$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Pf} F &= \frac{1}{2}\left(F_{13} F_{31} - F_{12} F_{21} + F_{11} F_{22} + F_{31} F_{13} - F_{21} F_{12} + F_{22} F_{11}\right) \\ &= F_{11} F_{22} - F_{21} F_{12} + F_{31} F_{13} + F_{22}\end{aligned}$$

и $\chi : \operatorname{Pf} F \mapsto \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2$, так что образ совпадает с $l_1 l_2$. □

Следствие 5.4.6. *В случае $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n+1}$ элементы каждого из семейств* (5.23) *и* (5.33) *при $k = 1, \dots, n$ — это алгебраически независимые образующие центра $\mathrm{Z}(\mathfrak{o}_{2n+1})$.*

В случае $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}$ пфаффиан $\operatorname{Pf} F$ вместе с элементами каждого из семейств (5.23) *или* (5.33) *при $k = 1, \dots, n-1$ — это алгебраически независимые образующие центра $\mathrm{Z}(\mathfrak{o}_{2n})$.*

Доказательство. В силу предложений 5.4.1 и 5.4.3 образы элементов каждого семейства относительно изоморфизма (5.9) — это алгебраически независимые образующие алгебры инвариантных полиномов $\mathbb{C}[l_1, \dots, l_n]^W$. □

§ 5.5. Симметризатор и антисимметризатор для $\mathfrak{sp}_N$

Пусть теперь $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_N$ при $N = 2n$. Заметим, что образ симметризатора $h^{(m)} \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ относительно действия (1.73) совпадает с *оператором антисимметризации* в тензорном пространстве $(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes m}$. В частности, образ $h^{(m)}$ — это нулевой оператор при всех $m > 2n$. С другой стороны, как мы отметили в §2.2, образ $S^{(m)}$ симметризатора $s^{(m)} \in \mathcal{B}_m(\omega)$ относительно действия (1.73) при $\omega = -2n$ — это корректно определённый оператор при условии $m \leqslant n+1$, и $S^{(n+1)} = 0$; см. предложение 2.3.2. Оператор $S^{(m)}$ *не определён* при $m \geqslant n+2$, так как некоторые знаменатели в формулах для $s^{(m)}$ обращаются в нуль при $\omega = -2n$. Рассмотрим выражение

$$\gamma_m(-2n) \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)} (u_1 + F_1) \dots (u_m + F_m), \tag{5.37}$$

которое получается из (5.18) при $S = S^{(m)}$ после его умножения на коэффициент (2.40) при $\omega = -2n$. При фиксированном значении m рассмотрим выражение (5.37) как функцию от n, которая определена при всех целых значениях $n \geqslant m$. Наша следующая цель — показать, что функция (5.37) корректно определена при всех целых значениях $n \geqslant (m-1)/2$ (т.е. она имеет «устранимые особенности» при дополнительных значениях n). Другими словами, для данного значения n выражению (5.37) можно придать смысл для всех таких m, что $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$; ср. предложение 2.2.8.

---

[1] Тем самым мы применяем очевидную версию изоморфизма Хариш-Чандры для абелевой алгебры Ли $\mathfrak{o}_2$.

Лемма 5.5.1. *Предположим, что $n \geqslant m$. Тогда при всех $1 \leqslant a < b \leqslant m$ в алгебре* (5.17) *справедливы соотношения*

$$S^{(m)}\big(F_a\, F_b - F_b\, F_a\big) = S^{(m)}\big(F_a - F_b\big) \tag{5.38}$$

и

$$\big(F_a\, F_b - F_b\, F_a\big)S^{(m)} = -\big(F_a - F_b\big)S^{(m)}. \tag{5.39}$$

Доказательство. По предложению 5.1.1 имеем

$$F_a\, F_b - F_b\, F_a = F_a\,(P_{a\,b} - Q_{a\,b}) - (P_{a\,b} - Q_{a\,b})\,F_a.$$

Поэтому оба соотношения вытекают из (1.31), (1.67) и (1.73) с учётом тождеств

$$S^{(m)} F_a\, Q_{a\,b} = 0 \qquad \text{и} \qquad Q_{a\,b} F_a\, S^{(m)} = 0. \tag{5.40}$$

Они выполняются в силу (1.75) и (5.7); ср. доказательство леммы 2.2.7:

$$S^{(m)} F_a\, Q_{a\,b} = -S^{(m)} F_b\, Q_{a\,b} = S^{(m)} F_b\, P_{a\,b} Q_{a\,b} = S^{(m)} P_{a\,b}\, F_a\, Q_{a\,b} = -S^{(m)} F_a\, Q_{a\,b},$$

и такое же вычисление применимо к второму из тождеств (5.40). □

Лемма 5.5.2. *Предположим, что $n \geqslant m$. Тогда для m-го частичного следа в алгебре* (5.17) *справедлива формула*

$$\mathrm{tr}_m\, S^{(m)} F_m = -\frac{n-m+1}{m\,(n-m+2)} \sum_{a=1}^{m-1} F_a\, S^{(m-1)}.$$

Доказательство. Формула проверяется с помощью такого же рассуждения, что и в случае симметрической алгебры; см. лемму 2.2.7. □

Предложение 5.5.3. *Выражение* (5.37) *допускает эквивалентную форму, задающую корректно определённый элемент центра* $\mathrm{Z}(\mathfrak{sp}_{2n})$ *при всех значениях $n \geqslant (m-1)/2$.*

Доказательство. Перемножая сомножители и записывая произведение $\big(u_1 + F_1\big) \dots \big(u_m + F_m\big)$ в виде суммы, мы приходим к проверке утверждения для выражений вида

$$\frac{1}{n-m+1}\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} F_{a_1} \dots F_{a_k}, \tag{5.41}$$

где $1 \leqslant a_1 < \dots < a_k \leqslant m$. Для всех $l = 0, 1, \dots, \lceil m/2 \rceil$ рассмотрим более общие выражения

$$\frac{1}{n-m+l+1}\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m-l}\, S^{(m-l)} F_{b_1} \dots F_{b_p} F_{a_1} \dots F_{a_k}, \tag{5.42}$$

в которых все индексы $b_1, \dots, b_p$ лежат в множестве $\{1, 2, \dots, \min(l, m-l)\}$ и

$$l + 1 \leqslant a_1 < \dots < a_k \leqslant m - l.$$

Заметим, что выражение (5.41) — это частный случай (5.42) при $l = 0$. Мы будем доказывать (обратной) индукцией по l, что каждое выражение (5.42) допускает эквивалентную форму, которая корректно определена при всех значениях $n \geqslant (m-1)/2$. База индукции — это случай $l = \lceil m/2 \rceil$, в котором утверждение выполнено. В самом деле, здесь либо $m = 2l$, либо $m = 2l - 1$, и из условия $n \geqslant (m-1)/2$ следует, что $n \geqslant l$ или $n \geqslant l - 1$ соответственно. В обоих случаях выполнено условие $n \geqslant m - l$, так что выражение (5.42) корректно определено (пустое произведение при $k = 0$ интерпретируется как равное 1).

Рассмотрим теперь выражение вида (5.42) при $l < \lceil m/2 \rceil$. Предположим сначала, что $a_k < m - l$. Имеет место формула, вытекающая из леммы 1.3.2 с учётом диаграммы (1.77):

$$\operatorname{tr}_m S^{(m)} = \frac{(n-m+1)(2n-m+3)}{m(n-m+2)}\, S^{(m-1)}. \tag{5.43}$$

Применяя эту формулу для вычисления частичного следа tr_{m-l}, мы можем переписать (5.42) в виде

$$\frac{2n-m+l+3}{(m-l)(n-m+l+2)} \operatorname{tr}_{1,\ldots,m-l-1} S^{(m-l-1)} F_{b_1} \ldots F_{b_p} F_{a_1} \ldots F_{a_k}.$$

С точностью до скалярного множителя это выражение имеет тот же вид (5.42), но с параметром $l+1$ вместо l. Поэтому мы можем применить предположение индукции и получим требуемое утверждение.

Предположим теперь, что $a_k = m - l$. Применяя лемму 5.5.2 и свойство цикличности следа, мы можем записать выражение (5.42) в виде

$$-\frac{1}{(m-l)(n-m+l+2)} \operatorname{tr}_{1,\ldots,m-l-1} S^{(m-l-1)} F_{b_1} \ldots F_{b_p} \\ \times F_{a_1} \ldots F_{a_{k-1}} \sum_{a=1}^{m-l-1} F_a.$$

Будем использовать лемму 5.5.1, чтобы убедиться, что это выражение равно линейной комбинации выражений вида (5.42), в которых значение параметра l заменилось на $l+1$, что позволит применить предположение индукции. Для слагаемых при $a = 1, \ldots, l$ будем рассуждать следующим образом. Сначала применим свойство цикличности следа, чтобы переместить сомножитель $S^{(m-l-1)}$ в крайнее положение справа. Затем преобразуем произведение

$$F_{a_1} \ldots F_{a_{k-1}} F_a\, S^{(m-l-1)}$$

повторным применением формулы (5.39), чтобы передвинуть F_a в крайнее левое положение и то же самое сделать со всеми сомножителями вида F_a, возникающими в результате применения формулы (5.39). Применимость этой формулы для перестановки сомножителей F_{a_i} и F_a основывается на том, что симметризатор может быть записан в виде произведения $S^{(m-l-1)} = S^{(h)} S^{(m-l-1)}$ для подходящего значения $h < m - l - 1$.

Далее, в случае $a \in \{l+1, \ldots, m-l-1\}$ в произведении может быть не более двух сомножителей вида F_a. Можно предполагать, что $a_i = a$ для некоторого индекса $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ (иначе рассуждение очевидным образом упрощается). Сначала применим сопряжение подходящим оператором перестановки P_σ

(с учётом свойств (1.31)), затем свойство цикличности следа, чтобы привести соответствующее произведение под знаком следа к виду

$$S^{(m-l-1)} F_{b_1} \ldots F_{b_p} F_{a_2} \ldots F_{a_i} F_{l+1} F_{a_{i+1}} \ldots F_{a_{k-1}} F_{l+1}.$$

А именно, следует взять цикл $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_i, l{+}1)$, если $a_1 > l{+}1$, или цикл $\sigma = (a_2, \ldots, a_i, l{+}1)$, если $a_1 = l{+}1$. Затем, как в предыдущем рассуждении, будем повторно применять формулу (5.38), чтобы передвинуть левый элемент F_{l+1} влево в положение сразу после сомножителя F_{b_p} и сделать то же самое с возникающими при этом сомножителями вида F_{l+1}. Наконец, ещё раз применим свойство цикличности следа и преобразуем получившиеся выражения вида

$$F_{b_1} \ldots F_{b_p} \ldots F_{a_{k-1}} F_{l+1}\, S^{(m-l-1)}$$

повторным использованием формулы (5.39), чтобы передвинуть элемент F_{l+1} (и все сомножители вида F_{l+1}, возникающие в процессе использования этой формулы) в положение сразу после первого сомножителя F_{l+1} или сразу после F_{b_p}, если сомножитель вида F_{l+1} отсутствует.

Чтобы убедиться, что все возможные выражения, представляющие элемент (5.37) в результате описанной выше процедуры, корректно определены при $n+1 \leqslant m \leqslant 2n+1$, необходимо проверить, что они совпадают как элементы алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{sp}_{2n})$. Однако все эти выражения лежат в центре $\mathrm{Z}(\mathfrak{sp}_{2n})$; см. (5.22) в замечании 5.3.2. Если выполнено условие $m \leqslant n$, то центральный элемент (5.37) — это однозначно определённый полином от инвариантов Гельфанда $T_1, \ldots, T_n$, где $T_k = \operatorname{tr} F^{2k}$ (см. пример 5.3.3). Значит, он имеет вид

$$\sum a^{(m)}_{k_1,\ldots,k_n}\, T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n},$$

где суммирование производится по неотрицательным целым числам k_a, удовлетворяющим условию $2k_1 + 4k_2 + \cdots + 2nk_n \leqslant m$, а коэффициенты $a^{(m)}_{k_1,\ldots,k_n}$ — это полиномы от $u_1, \ldots, u_m$. В частности, $k_a = 0$, если нарушено условие $2a \leqslant m$. Поэтому коэффициенты можно записать как $a^{(m)}_{k_1,\ldots,k_n} = a^{(m)}_{k_1,\ldots,k_p}$ при $p = \lfloor m/2 \rfloor$. Предположим теперь, что m фиксировано, а n меняется. По определению симметризатора $S^{(m)}$ каждый коэффициент $a^{(m)}_{k_1,\ldots,k_p}$ — это рациональная функция от n. Следовательно, она полностью определяется своими значениями в бесконечном числе значений аргумента n при $n \geqslant m$. Как показано в первой части доказательства, рациональные функции $a^{(m)}_{k_1,\ldots,k_p}$ определены для всех значений $n \geqslant p$. Поскольку все эквивалентные выражения для (5.37), полученные в первой части доказательства, совпадают для бесконечного числа значений аргумента n, они обязаны совпадать для всех значений $n \geqslant (m-1)/2$, для которых они определены. $\square$

Предложение 5.5.3 позволяет нам придать смысл выражению (5.37) для всех пар чисел m и n, удовлетворяющих условию $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$. Ниже мы будем считать, что оно задаёт корректно определённый элемент центра $\mathrm{Z}(\mathfrak{sp}_{2n})$ для всех этих значений.

Рассмотрим факториальные симметрические полиномы (4.16) и (4.17), соответствующие последовательностям $a = (a_i)$, определённым в (5.11), так что в симплектическом случае $a_i = i^2$ при $i \geqslant 1$. Факториальные элементарные симметрические полиномы $e_k(l_1^2, \dots, l_n^2 \,|\, a)$ при $k = 1, \dots, n$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathbb{C}[l_1^2, \dots, l_n^2]^{\mathfrak{S}_n}$. Поэтому образ Хариш-Чандры элемента Казимира (5.37) можно единственным способом записать в виде линейной комбинации

$$\sum c^{(m)}_{k_1,\dots,k_p} \prod_{r=1}^{p} e_r(l_1^2, \dots, l_n^2 \,|\, a)^{k_p},$$

с суммированием по всем неотрицательным целым числам k_a, удовлетворяющим условию $2k_1 + 4k_2 + \dots + 2pk_p \leqslant m$, где $p = \lfloor m/2 \rfloor$, а коэффициенты $c^{(m)}_{k_1,\dots,k_p}$ — это полиномы от $u_1, \dots, u_m$. Коэффициенты этих полиномов — это рациональные функции от n. Поскольку рациональная функция однозначно определяется своими значениями в бесконечном числе точек, образ Хариш-Чандры элемента Казимира (5.37) определяется своими значениями при $n \geqslant m$.

Положим $m = 2k$ и $S = S^{(2k)}$ при $k \geqslant 1$ в теореме 5.3.1 и возьмём конкретные значения параметров $u_1, \dots, u_{2k}$.

Предложение 5.5.4. *Для любого значения k, $1 \leqslant k \leqslant n$, образ элемента Казимира*

$$\gamma_{2k}(-2n)\, \mathrm{tr}_{1,\dots,2k}\, (F_1 - k + 1) \dots (F_{2k} + k)\, S^{(2k)} \in \mathrm{Z}(\mathfrak{sp}_{2n}) \tag{5.44}$$

при изоморфизме Хариш-Чандры — это полином $(-1)^k\, e_k(l_1^2, \dots, l_n^2 \,|\, a)$.

Доказательство. Как мы отметили выше, достаточно проверить утверждение в предположении, что $n \geqslant 2k$. Мы будем рассуждать как в доказательстве предложения 5.4.1. Обозначим через D_k элемент Казимира (5.44). Опираясь на предложение 5.1.3, мы покажем, что D_k аннулируется во всех представлениях $L(\lambda)$ группы Sp_{2n}, для которых разбиение λ удовлетворяет условию $|\lambda| < k$. Положим $r = |\lambda|$ и рассмотрим действие алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$ в пространстве $\mathbb{C}^{2n}$, заданное по правилу

$$F_{ij} \mapsto -e_{ji} + \varepsilon_i \varepsilon_j\, e_{i'j'}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant 2n.$$

Для соответствующего представления в тензорном пространстве

$$\varphi : \mathrm{U}(\mathfrak{sp}_{2n}) \otimes \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes 2k} \to \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes r} \otimes \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes 2k}$$

получаем

$$\varphi(F_a) = \sum_{b=1}^{r} \big(-P_{b\, r+a} + Q_{b\, r+a}\big), \qquad a = 1, \dots, 2k. \tag{5.45}$$

Условие аннулирования в предложении 5.1.3 будет следовать из того, что при $|\lambda| < k$ справедливо соотношение

$$\big(\varphi(F_1) - k + 1\big) \dots \big(\varphi(F_{2k}) + k\big)\, S'^{(2k)} = 0, \tag{5.46}$$

где $S'^{(2k)}$ обозначает образ симметризатора в алгебре Брауэра $\mathcal{B}_{2k}(-2n)$ при её действии на тензорном произведении последних $2k$ копий пространства $\mathbb{C}^{2n}$, входящих в произведение $(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes(r+2k)}$. В силу формул (5.45) и соотношений (1.31) требуемое тождество (5.46) можно записать в виде

$$\big(Y_{r+1}-k+1\big)\dots\big(Y_{r+2k}-k+1\big)\,S'^{(2k)}=0, \tag{5.47}$$

где Y_{r+b} при $b=1,\dots,2k$ — это образы соответствующих элементов Юциса–Мёрфи $y_{r+b}-(\omega-1)/2$, определённых в (1.26), при действии (1.73) алгебры Брауэра $\mathcal{B}_{r+2k}(-2n)$ в пространстве $(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes(r+2k)}$. Тождество (5.47) проверяется точно таким же рассуждением, как в доказательстве предложения 5.4.1. Старшая компонента полинома $\chi(D_k)$ совпадает с $(-1)^k e_k(\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2)$, как было показано в предложении 2.2.6; см. (2.50). $\square$

Другое доказательство предложения 5.5.4 будет получено в §13.4.

При $1\leqslant m\leqslant 2n+1$ рассмотрим полиномы от переменной u, коэффициенты которых — это элементы Казимира для алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$:

$$D_m(u)=\gamma_m(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\Big(F_1+u+\frac{m-1}{2}\Big)\Big(F_2+u+\frac{m-3}{2}\Big)\\ \times\dots\times\Big(F_m+u-\frac{m-1}{2}\Big)\,S^{(m)}.$$

Следствие 5.5.5. *Справедливы следующие формулы для образов относительно изоморфизма Хариш-Чандры*:

$$\chi: D_m(u)\mapsto\sum_{r=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}(-1)^r\binom{2n-2r+1}{m-2r}e_r(l_1^2,\dots,l_n^2\,|\,a)\prod_{i=0}^{m-2r-1}\Big(u-\frac{m-1}{2}+r+i\Big)$$

и

$$\chi:\gamma_m(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\big(-\partial_z+F_1\,z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z+F_m\,z^{-1}\big)\,S^{(m)}\\ \mapsto\sum_{r=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}(-1)^r\binom{2n-2r+1}{m-2r}e_r(l_1^2,\dots,l_n^2\,|\,a)\,z^{-2r}\big(-\partial_z+r\,z^{-1}\big)^{m-2r}.$$

Доказательство. Точно так же, как в доказательстве следствия 5.4.2, применяем лемму 5.3.4 для проверки соотношений $D_m(u)=(-1)^m\,D_m(-u)$ и

$$D_m(u+1/2)-D_m(u-1/2)=(2n-m+2)\,D_{m-1}(u),\qquad m\geqslant 1,$$

при $D_0(u)=1$. Поскольку тем же самым соотношениям удовлетворяют предполагаемые образы $\chi\big(D_m(u)\big)$, утверждение следует из предложения 5.5.4. $\square$

В теореме 5.3.1 положим теперь $S=A^{(2k)}$ при $k\geqslant 1$.

Предложение 5.5.6. *При всех $k\geqslant 1$ образ элемента Казимира*

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,2k}\,(F_1+k-1)\dots(F_{2k}-k)\,A^{(2k)}\in\mathrm{Z}(\mathfrak{sp}_{2n}) \tag{5.48}$$

относительно изоморфизма Хариш-Чандры — это полином $h_k(l_1^2,\dots,l_n^2\,|\,a)$.

Доказательство. Обозначим элемент Казимира (5.48) через C_k. Применим предложение 5.1.3 и покажем, что элемент C_k аннулируется во всех таких представлениях $L(\lambda)$ группы Sp_{2n}, что разбиения λ удовлетворяют условию $|\lambda| < k$. Используя ту же реализацию представления $L(\lambda)$, что в доказательстве предложения 5.5.4, мы приходим к аналогичной проверке следующего соотношения вместо (5.46):

$$\big(\varphi(F_1) + k - 1\big) \ldots \big(\varphi(F_{2k}) - k\big)\, A'^{(2k)} = 0.$$

Мы показываем, что образ оператора $\big(-Y_{r+1} + k - 1\big) \ldots \big(-Y_{r+2k} + k - 1\big)$ в векторном пространстве $(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes(r+2k)}$ содержится в прямой сумме представлений $L(\nu)$ группы Sp_{2n}, удовлетворяющих условию $\nu_1 < k$, в то время как образ оператора $A'^{(2k)}$ содержится в прямой сумме представлений $L(\nu)$ таких, что $\nu_1 \geqslant k+1$. Принимая во внимание предложение 2.2.3, чтобы завершить рассуждение, заметим, что в силу (2.38) старшая компонента образа $\chi(C_k)$ — это полином $h_k(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$. □

Рассмотрим теперь полиномы от u, заданные формулой

$$C_m(u) = \mathrm{tr}_{1,\ldots,m} \Big(F_1 + u + \frac{m-1}{2}\Big)\Big(F_2 + u + \frac{m-3}{2}\Big) \ldots \Big(F_m + u - \frac{m-1}{2}\Big)\, A^{(m)}.$$

Их коэффициенты — это элементы Казимира для алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$.

Следствие 5.5.7. *Справедливы следующие формулы для образов относительно изоморфизма Хариш-Чандры*:

$$\chi : C_m(u) \mapsto \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{2n+m-1}{m-2r} h_r(l_1^2, \ldots, l_n^2 \,|\, a) \prod_{i=0}^{m-2r-1} \Big(u - \frac{m-1}{2} + r + i\Big)$$

и

$$\chi : \mathrm{tr}_{1,\ldots,m} \big(-\partial_z + F_1 z^{-1}\big) \ldots \big(-\partial_z + F_m z^{-1}\big)\, A^{(m)}$$
$$\mapsto \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{2n+m-1}{m-2r} h_r(l_1^2, \ldots, l_n^2 \,|\, a)\, z^{-2r} \big(-\partial_z + r z^{-1}\big)^{m-2r}.$$

Доказательство. Из леммы 5.3.4 следует, что $C_m(u) = (-1)^m\, C_m(-u)$. Поэтому для нечётных значений $m = 2k-1$ получаем $C_{2k-1}(0) = 0$. Значения $\chi\big(C_{2k}(1/2)\big) = \chi\big(C_{2k}(-1/2)\big)$ вычислены в предложении 5.5.6. Далее проверяем, что

$$C_m(u + 1/2) - C_m(u - 1/2) = (2n + m - 1)\, C_{m-1}(u), \qquad m \geqslant 1, \tag{5.49}$$

при $C_0(u) = 1$. Это следует из леммы 5.3.4 и соотношения для частичного следа оператора $A^{(m)}$, вытекающего из (1.54) и (1.77):

$$\mathrm{tr}_m\, A^{(m)} = \frac{2n+m-1}{m}\, A^{(m-1)}.$$

Тому же самому соотношению удовлетворяют предполагаемые образы Хариш-Чандры $\chi\big(C_m(u)\big)$ в формулировке следствия. Вторая часть следует из первой, как в доказательстве следствия 5.4.2. □

Следствие 5.5.8. *Элементы каждого из семейств* (5.44) *и* (5.48) *при* $k = 1, \ldots, n$ *— это алгебраически независимые образующие центра* $\mathrm{Z}(\mathfrak{sp}_{2n})$.

Доказательство. Образы элементов каждого семейства относительно изоморфизма Хариш-Чандры (5.9) — это алгебраически независимые образующие алгебры симметрических полиномов $\mathbb{C}[l_1^2, \ldots, l_n^2]^{\mathfrak{S}_n}$. □

§ 5.6. Матрицы Манина для типов B, C и D

Вычисления образов Хариш-Чандры в предложениях 4.6.1 и 4.7.1 опирались на свойства матриц Манина, описанные в предложении 3.2.2. Однако ортогональные и симплектические аналоги этих результатов в §5.4 и §5.5 были получены другим способом, с использованием двойственности Брауэра–Шура–Вейля. Тем не менее, можно определить естественные аналоги матриц Манина для типов B, C и D и связать их с матрицами F, составленными из образующих алгебр Ли, по аналогии с леммой 4.5.3.

Проводя аналогию с леммой 3.1.2, рассмотрим тензорное произведение алгебр (3.2) и предположим, что M — это матрица размера $N \times N$ с элементами в ассоциативной алгебре $\mathcal{A}$. Как и прежде, чётные значения $N = 2n$ соответствуют типам C_n или D_n, а нечётные значения $N = 2n+1$ — типу B_n.

Определение 5.6.1. Матрица M называется *матрицей Манина типа B или D*, если она удовлетворяет условию

$$(1 - P)\, M_1\, M_2 \Big(\frac{1+P}{2} - \frac{Q}{N}\Big) = 0. \tag{5.50}$$

Матрица M называется *матрицей Манина типа C*, если она удовлетворяет условию

$$\Big(\frac{1-P}{2} - \frac{Q}{2n}\Big) M_1\, M_2\, (1 + P) = 0. \tag{5.51}$$

Заметим, что при $n = 1$ в симплектическом случае справедлива формула $P + Q = 1$, так что условие (5.51) выполнено для любой матрицы M.

Отметим следующий аналог леммы 3.1.3, который проверяется таким же рассуждением. Как и раньше, через $H^{(m)}$ и $S^{(m)}$ мы обозначаем соответствующие образы элемента $h^{(m)}$, определённого в (1.17), и элемента $s^{(m)}$, заданного эквивалентными формулами в §1.2, относительно гомоморфизма (1.69) в ортогональном случае и гомоморфизма (1.73) в симплектическом случае. Тождества рассматриваются в алгебре (3.6).

Лемма 5.6.2. *Если M — это матрица Манина типа B или D, то*

$$H^{(m)} M_1 \ldots M_m\, S^{(m)} = M_1 \ldots M_m\, S^{(m)}. \tag{5.52}$$

Кроме того, для любой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ выполняется тождество

$$M_{\sigma(1)} \ldots M_{\sigma(m)}\, S^{(m)} = M_1 \ldots M_m\, S^{(m)}. \tag{5.53}$$

Если M — это матрица Манина типа C, то

$$S^{(m)} M_1 \ldots M_m\, H^{(m)} = S^{(m)} M_1 \ldots M_m. \tag{5.54}$$

Кроме того, для любой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ выполняется тождество

$$S^{(m)} M_{\sigma(1)} \dots M_{\sigma(m)} = S^{(m)} M_1 \dots M_m. \tag{5.55}$$

Доказательство. Доказательства тождеств (5.52) и (5.53) сводятся к проверке, что для любого $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ справедливо соотношение

$$P_\sigma M_1 \dots M_m S^{(m)} = M_1 \dots M_m S^{(m)}. \tag{5.56}$$

Его достаточно проверить для транспозиций $\sigma = s_a$ при $a = 1, \dots, m-1$, так что оно следует из своего частного случая при $m = 2$. А в этом случае соотношение (5.56) следует из определения (5.50), которое можно переписать в виде $P\, M_1 M_2 S^{(2)} = M_1 M_2 S^{(2)}$.

Аналогично для доказательства тождеств (5.54) и (5.55) достаточно проверить, что

$$S^{(m)} M_1 \dots M_m P_\sigma = \operatorname{sgn}\sigma \cdot S^{(m)} M_1 \dots M_m$$

для всех $\sigma \in \mathfrak{S}_m$. Как и для типов B и D, проверка сводится к частному случаю $m = 2$. В этом случае соотношение эквивалентно определению (5.51), записанному в виде $S^{(2)} M_1 M_2 P = -S^{(2)} M_1 M_2$. □

Предположим теперь, что α и β — это элементы ассоциативной алгебры $\mathcal{D}$ с единицей, которые удовлетворяют соотношению (4.33). Вспомним также, что F — это матрица, отвечающая алгебре Ли $\mathfrak{g}_N$ типа B, C или D и определённая соотношением (5.5).

Лемма 5.6.3. *Матрица $\alpha + F\beta$ с элементами в алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N) \otimes \mathcal{D}$ — это матрица Манина типа B, C или D соответственно.*

Доказательство. Положим $M = \alpha + F\beta$. Применяя предложение 5.1.1 и свойства (1.67), получаем

$$\begin{aligned} M_1 M_2 - M_2 M_1 &= \big(\alpha + F_1\beta\big)\big(\alpha + F_2\beta\big) - \big(\alpha + F_2\beta\big)\big(\alpha + F_1\beta\big) \\ &= (F_1 F_2 - F_2 F_1)\beta^2 - (F_1 - F_2)(\alpha\beta - \beta\alpha) \\ &= \big(F_1(P-1) + F_2(Q - P + 1) - Q F_2\big)\beta^2. \end{aligned}$$

В случаях B и D нужно проверить, что $(M_1 M_2 - M_2 M_1) S^{(2)} = 0$. Это следует из (1.31) и соотношения $Q F_2 S^{(2)} = 0$. Оно выполнено, так как

$$Q F_2 S^{(2)} = Q P F_2 S^{(2)} = Q F_1 S^{(2)} = Q F_2' S^{(2)} = -Q F_2 S^{(2)},$$

где мы применили свойства (2.28). Аналогично в случае C запишем

$$M_1 M_2 - M_2 M_1 = \big(F_2 Q + (P - Q + 1) F_2 - (P+1) F_1\big)\beta^2$$

и проверим, что $S^{(2)}(M_1 M_2 - M_2 M_1) = 0$. □

Как мы увидим в гл. 8, некоторые матрицы, составленные из образующих аффинных алгебр Каца–Муди типов B, C и D, оказываются матрицами Манина соответствующих типов. Было бы интересно распространить общие алгебраические свойства, описанные в гл. 3, на матрицы Манина этих типов.

§ 5.7. Библиографические замечания

По поводу общих результатов, изложенных в §5.1 и §5.2, см. [**29**], [**59**], [**70**] и [**154**]. Формулы крюков для размерностей представлений групп O_N и Sp_N были получены в [**34**]; другое доказательство можно найти в статье [**117**] вместе с версией характеристического отображения для алгебры Брауэра. Изложение в §5.4 и §5.5 следует статье [**73**]. Предложения 5.4.1 и 5.5.4 доказаны также в работе [**111**] другим способом. Определитель типа Капелли для алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ был предложен Вачи [**151**]; см. также статью Ито [**77**], в которой обсуждается связь этого определителя с элементами Казимира (5.33), и статью Ито [**78**], касающуюся элементов Казимира типа перманентов (5.48) в симплектическом случае. Определитель другого типа был получен как приложение скрученных янгианов Ольшанского; см. подробное изложение в книге [**109**, гл. 7], где также приведены дополнительные конструкции элементов Казимира, аналоги тождеств Ньютона из теоремы 4.8.1 и обсуждается их эквивалентность формулам Переломова–Попова для образов Хариш-Чандры инвариантов Гельфанда. Эти формулы были доказаны в недавней работе [**25**] с использованием двойственности Шура–Вейля.

Глава 6

Центр Фейгина–Френкеля

Мы введём теперь основной объект книги — *центр аффинной вертексной алгебры на критическом уровне.* Его структура описывается теоремой Фейгина и Френкеля [**39**], и поэтому его также называют *центром Фейгина–Френкеля.* Мы начнём с обзора основных определений теории вертексных алгебр и установим наиболее важные свойства центра, следуя книгам Френкеля [**46**], Френкеля и Бен-Зви [**47**] и Каца [**87**]. Наша цель — применить R-матричную технику, развитую в гл. 4 и 5, к аффинным алгебрам Каца–Муди и с её помощью построить в явном виде образующие центра для всех классических типов. Это позволит получить прямое доказательство теоремы Фейгина–Френкеля в этих случаях. Затем мы будем использовать структуру вертексной алгебры, чтобы построить *операторы Сугавары* для аффинных алгебр Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{g}}$. Эти операторы — аффинные аналоги элементов Казимира. Они порождают центр пополненной универсальной обёртывающей алгебры для $\widehat{\mathfrak{g}}$ на критическом уровне.

§ 6.1. Центр вертексной алгебры

Пусть V — это векторное пространство над $\mathbb{C}$. Рассмотрим формальные ряды Лорана от переменной z с коэффициентами в алгебре эндоморфизмов $\operatorname{End} V$. Такой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^{-n-1} \in \operatorname{End} V[[z, z^{-1}]]$$

называется *полем*, если для любого $v \in V$ существует такое целое число $N \geqslant 0$, что $c_n v = 0$ при всех $n \geqslant N$.

Определение 6.1.1. *Вертексная алгебра* — это векторное пространство V (*пространство состояний*) с дополнительными данными $(Y, T, \mathbf{1})$, где $\mathbf{1}$ — это *вакуумный вектор* $\mathbf{1} \in V$, *трансляционный оператор* T — это линейный оператор $T : V \to V$ и *соответствие между состояниями и полями* Y — это такое линейное отображение

$$Y : V \to \operatorname{End} V[[z, z^{-1}]],$$

что образ любого элемента $a \in V$ является полем, $Y : a \mapsto a(z)$,

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}, \qquad a_{(n)} \in \operatorname{End} V.$$

Эти данные должны удовлетворять следующим аксиомам:

(1) $\mathbf{1}(z) = \mathrm{id}_V$,
(2) $a(z)\mathbf{1}$ — это степенной ряд по z, и $a(z)\mathbf{1}\big|_{z=0} = a$ для любого $a \in V$,
(3) $T\mathbf{1} = 0$,
(4) $\big[T, a(z)\big] = \partial_z a(z)$ для любого $a \in V$,
(5) для любых $a, b \in V$ существует такое целое неотрицательное число N, что $(z-w)^N [a(z), b(w)] = 0$. □

Поле $a(z)$ часто записывается в виде $a(z) = Y(a, z)$, а эндоморфизмы $a_{(n)}$ называются *коэффициентами Фурье* поля $a(z)$. Линейная оболочка в $\operatorname{End} V$ всех коэффициентов Фурье $a_{(n)}$ всех полей $a(z)$ — это подалгебра Ли в алгебре $\operatorname{End} V$. Коммутатор задаётся формулой

$$\big[a_{(m)}, b_{(k)}\big] = \sum_{n \geqslant 0} \binom{m}{n} \big(a_{(n)}\, b\big)_{(m+k-n)}. \tag{6.1}$$

Из аксиом следует, что оператор T действует по правилу $T(a) = a_{(-2)}\mathbf{1}$, так что он полностью определяется отображением Y. Отсюда следует более общая формула

$$T^n(a) = n!\, a_{(-n-1)}\mathbf{1}, \qquad n \geqslant 0. \tag{6.2}$$

Для любого целого числа n соответствующее *n-е произведение* $(a, b) \mapsto a_{(n)}b$ превращает V в алгебру, которая, вообще говоря, не является ни ассоциативной, ни коммутативной.

Подалгебра вертексной алгебры V — это такое подпространство U в V, содержащее вакуумный вектор $\mathbf{1}$, что $a_{(n)}U \subset U$ для всех $a \in U$ и всех значений $n \in \mathbb{Z}$. В частности, подпространство U инвариантно относительно оператора T, т. е. $T(U) \subset U$. Подалгебра U сама является вертексной алгеброй; соответствие между состояниями и полями получается ограничением эндоморфизмов, так что

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)}\big|_U\, z^{-n-1} \qquad \text{для любого} \quad a \in U.$$

Вертексная алгебра V называется *коммутативной* (или *голоморфной*), если $a_{(n)} = 0$ для всех $n \geqslant 0$ и всех $a \in V$, т. е. каждое поле $a(z)$ — это степенной ряд по z. Эквивалентное условие: вертексная алгебра V коммутативна тогда и только тогда, когда $[a(z), b(w)] = 0$ для всех $a, b \in V$.

Предложение 6.1.2. *Предположим, что V — это коммутативная вертексная алгебра. Тогда (-1)-е произведение превращает V в коммутативную ассоциативную алгебру с единицей.*

Доказательство. Для $a, b \in V$ положим $ab = a_{(-1)}b$. Из аксиом следует, что $\mathbf{1}a = a\mathbf{1} = a$ для любого $a \in V$. Кроме того, поскольку $[a(z), b(w)] = 0$, имеем

$$a(z)b(w)c = b(w)a(z)c \qquad \text{для любых} \quad a, b, c \in V.$$

Полагая $z = w = 0$, приходим к соотношению $a(bc) = b(ac)$. Взяв $c = \mathbf{1}$, мы можем заключить, что произведение коммутативно. Тогда $a(cb) = (ac)b$, так что произведение также ассоциативно. □

Определение 6.1.3. *Центром* вертексной алгебры V называется подпространство

$$\mathfrak{z}(V) = \{b \in V \mid a_{(n)} b = 0 \quad \text{для всех} \;\; a \in V \;\; \text{и всех} \;\; n \geqslant 0\}.$$

Эквивалентное условие: элемент b лежит в центре $\mathfrak{z}(V)$ тогда и только тогда, когда $[Y(a, z), Y(b, w)] = 0$ для всех $a \in V$. □

Эквивалентность определений вытекает из формулы (6.1).

Предложение 6.1.4. *Центр $\mathfrak{z}(V)$ вертексной алгебры V — это коммутативная вертексная алгебра.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\mathfrak{z}(V)$ — это подалгебра в V. Ясно, что $\mathbf{1} \in \mathfrak{z}(V)$. Предположим, что $b, c \in \mathfrak{z}(V)$ и $a \in V$. Тогда при $n \geqslant 0$ для произвольного $m \in \mathbb{Z}$ имеем

$$a_{(n)} b_{(m)} c = b_{(m)} a_{(n)} c + [a_{(n)}, b_{(m)}] c = 0.$$

Поэтому $b_{(m)} c \in \mathfrak{z}(V)$, так что $\mathfrak{z}(V)$ — это подалгебра в V. Наконец, если a лежит в $\mathfrak{z}(V)$, то $a_{(n)} = 0$ для всех $n \geqslant 0$, как элемент алгебры $\operatorname{End} \mathfrak{z}(V)$. Следовательно, вертексная алгебра $\mathfrak{z}(V)$ коммутативна. □

В частности, центр $\mathfrak{z}(V)$ инвариантен относительно оператора T, что можно также легко проверить непосредственно. В силу предложения 6.1.2 центр любой вертексной алгебры — это коммутативная ассоциативная алгебра с единицей.

Определение 6.1.5. *Конформная алгебра Ли* — это $\mathbb{C}[\partial]$-модуль R с заданным на нём $\mathbb{C}$-линейным отображением

$$R \otimes R \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes R, \qquad a \otimes b \mapsto [a_\lambda b],$$

называемым λ-*скобкой*, для которого выполнены следующие аксиомы:

(1) $[\partial a_\lambda b] = -\lambda [a_\lambda b], \qquad [a_\lambda \partial b] = (\lambda + \partial)[a_\lambda b]$ (*полуторалинейность*),

(2) $[b_\lambda a] = -[a_{-\lambda-\partial} b]$ (*кососимметричность*),

(3) $\big[a_\lambda [b_\mu c]\big] = \big[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c\big] + \big[b_\mu [a_\lambda c]\big]$ (*тождество Якоби*). □

Из аксиом, перечисленных в определении 6.1.1, можно вывести, что вертексная алгебра V — это конформная алгебра Ли, в которой $\partial = T$, а λ-скобка задана формулой

$$[a_\lambda b] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} a_{(n)} b, \qquad a, b \in V. \tag{6.3}$$

В терминах λ-скобки на V определение 6.1.3 можно переписать в виде

$$\mathfrak{z}(V) = \{b \in V \mid [a_\lambda b] = 0 \quad \text{для всех} \;\; a \in V\}.$$

§ 6.2. Аффинные вертексные алгебры

Пусть $\mathfrak{g}$ — это простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, на которой задана стандартная симметрическая инвариантная билинейная форма $\langle\ ,\ \rangle$, определённая как *нормализованная форма Киллинга*

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2\,h^\vee}\,\mathrm{tr}\,\bigl(\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y\bigr), \tag{6.4}$$

где $h^\vee$ — это *дуальное число Кокстера* для $\mathfrak{g}$. Нормировка соответствует условию, что квадрат длины самого длинного корня равен 2. Соответствующая *аффинная алгебра Каца–Муди* $\widehat{\mathfrak{g}}$ определяется как центральное расширение

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\,[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K, \tag{6.5}$$

где $\mathfrak{g}[t, t^{-1}]$ — это алгебра Ли полиномов Лорана от t с коэффициентами в $\mathfrak{g}$. Для любых $r \in \mathbb{Z}$ и $X \in \mathfrak{g}$ мы будем писать $X[r] = X\,t^r$. Коммутационные соотношения в алгебре Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ имеют вид

$$\bigl[X[r], Y[s]\bigr] = [X,Y][r+s] + r\,\delta_{r,-s}\langle X, Y\rangle\,K, \qquad X, Y \in \mathfrak{g},$$

и элемент K лежит в центре алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Для любого числа $\kappa \in \mathbb{C}$ введём *универсальную обёртывающую алгебру* $\mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$ *на уровне* κ как фактор алгебры $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$ по идеалу, порождённому элементом $K - \kappa$. Аналогично будем говорить, что V — это $\widehat{\mathfrak{g}}$-модуль *на уровне* κ, если K действует в V как умножение на константу κ. *Вакуумный модуль на уровне* κ над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ — это фактормодуль

$$V_\kappa(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})/\mathrm{I}, \tag{6.6}$$

где I — это левый идеал алгебры $\mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$, порождённый пространством $\mathfrak{g}[t]$. По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта вакуумный модуль изоморфен универсальной обёртывающей алгебре $\mathrm{U}\bigl(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\bigr)$ как векторное пространство. Это пространство наделяется структурой вертексной алгебры, опирающейся на структуру $\widehat{\mathfrak{g}}$-модуля; см. определение 6.1.1. Введём данные $(Y, T, \mathbf{1})$ следующим образом. Вакуумный вектор — это $1 \in V_\kappa(\mathfrak{g})$, а трансляционный оператор

$$T : V_\kappa(\mathfrak{g}) \to V_\kappa(\mathfrak{g}), \tag{6.7}$$

однозначно определяется свойствами

$$T : 1 \mapsto 0 \qquad \text{и} \qquad \bigl[T, X[r]\bigr] = -r\,X[r-1], \quad X \in \mathfrak{g}, \quad r < 0,$$

где $X[r]$ следует считать оператором умножения слева на $X[r]$. Чтобы определить соответствие Y между состояниями и полями, положим $Y(1, z) = \mathrm{id}$,

$$Y(J^a[-1], z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} J^a[r]\,z^{-r-1}, \tag{6.8}$$

где $J^1, \ldots, J^d$ — это базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $J^a[r]$ рассматривается как элемент алгебры $\mathrm{End}\,V_\kappa(\mathfrak{g})$, возникающий из действия алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ на $V_\kappa(\mathfrak{g})$. Отображение Y продолжается на всё пространство $V_\kappa(\mathfrak{g})$ с помощью *нормального* *упорядочения*. Нормально упорядоченное произведение полей

$$a(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} a_{(r)} z^{-r-1} \qquad \text{и} \qquad b(w) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} b_{(r)} w^{-r-1}$$

— это формальный ряд Лорана

$$:a(z)\,b(w):\, = a(z)_+\,b(w) + b(w)\,a(z)_-, \tag{6.9}$$

где

$$a(z)_+ = \sum_{r<0} a_{(r)} z^{-r-1} \qquad \text{и} \qquad a(z)_- = \sum_{r\geqslant 0} a_{(r)} z^{-r-1}.$$

Это определение распространяется на произвольное число полей с условием, что нормальное упорядочение применяется справа налево. Например,

$$:a(z)\,b(w)\,c(v):\, = \;:a(z)\big(:b(w)\,c(v):\big):.$$

Обозначая поле в (6.8) через $J^a(z)$, полагаем

$$Y(J^{a_1}[-r_1-1]\ldots J^{a_m}[-r_m-1], z) = \frac{1}{r_1!\,\ldots r_m!} :\partial_z^{r_1} J^{a_1}(z)\ldots\partial_z^{r_m} J^{a_m}(z): \tag{6.10}$$

для любых $r_1,\ldots,r_m \geqslant 0$. Проверка показывает, что отображение Y корректно определено и все аксиомы из определения 6.1.1 выполнены. Таким образом, $V_\kappa(\mathfrak{g})$ — это вертексная алгебра, называемая (*универсальной*) *аффинной вертексной алгеброй*. Структура конформной алгебры Ли на ней задаётся λ-скобкой (6.3). В частности,

$$\big[X[-1]_\lambda Y[-1]\big] = [X,Y][-1] + \lambda\,\langle X,Y\rangle\,\kappa, \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Из результатов §6.1 следует, что центр $\mathfrak{z}\big(V_\kappa(\mathfrak{g})\big)$ — это коммутативная ассоциативная алгебра с единицей. Можно проверить, что эта алгебра тривиальна (совпадает с $\mathbb{C}\,1$), за исключением случая, когда уровень *критический*, $\kappa = -h^\vee$. Нас будет интересовать структура центра на критическом уровне.

Определение 6.2.1. *Центр Фейгина–Френкеля* $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это центр вертексной алгебры $V_{-h^\vee}(\mathfrak{g})$. Любой элемент центра $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ называется *вектором Сигала–Сугавары*. □

Из определения соответствия между состояниями и полями вытекает, что $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ совпадает с подпространством $\mathfrak{g}[t]$-инвариантов вакуумного модуля,

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \{v \in V_{-h^\vee}(\mathfrak{g}) \mid \mathfrak{g}[t]\,v = 0\}.$$

Отождествляя векторное пространство $V_{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ с алгеброй $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$, получаем вложение векторных пространств

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \hookrightarrow \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big),$$

так что векторы Сигала–Сугавары могут рассматриваться как элементы алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$. Из аксиом вертексной алгебры вытекает, что (-1)-е произведение на пространстве $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ совпадает с произведением в универсальной обёртывающей алгебре. Другими словами, $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ может рассматриваться как подалгебра в $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$. Кроме того, в силу предложений 6.1.2 и 6.1.4 эта подалгебра коммутативна.

Ту же самую структуру алгебры на пространстве $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ можно определить следующим образом. Пусть, как и прежде, I — это левый идеал в алгебре $\mathrm{U}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$, порождённый пространством $\mathfrak{g}[t]$, и пусть $\operatorname{Norm}\mathrm{I}$ — это его нормализатор,

$$\operatorname{Norm}\mathrm{I} = \{v \in \mathrm{U}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}}) \mid \mathrm{I}v \subset \mathrm{I}\}.$$

Нормализатор является подалгеброй в $\mathrm{U}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$, а I — это двусторонний идеал в нормализаторе $\operatorname{Norm}\mathrm{I}$. Центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ совпадает с ассоциативной алгеброй, определённой как факторалгебра

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \operatorname{Norm}\mathrm{I}/\mathrm{I}.$$

Ещё один способ интерпретировать структуру алгебры на пространстве $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ возникает из изоморфизма

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \cong \operatorname{End}_{\widehat{\mathfrak{g}}} V_{-h^\vee}(\mathfrak{g}).$$

Любой элемент $a \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ задаёт $\widehat{\mathfrak{g}}$-эндоморфизм вакуумного модуля $V_{-h^\vee}(\mathfrak{g})$, который однозначно определяется условием $1 \mapsto a\,1$.

Пример 6.2.2. *Канонический вектор Сигала–Сугавары* $S \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ *задаётся формулой*

$$S = \sum_{a=1}^{d} J_a[-1]J^a[-1], \tag{6.11}$$

где $J_1, \ldots, J_d$ — это базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, двойственный базису $J^1, \ldots, J^d$ относительно формы (6.4). Элемент S не зависит от выбора базиса. Поскольку $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, чтобы убедиться, что S — это вектор Сигала–Сугавары, достаточно проверить, что $J_i[0]\,S = 0$ и $J_i[1]\,S = 0$ для всех i. Первое условие фактически эквивалентно тому, что

$$C = \sum_{a=1}^{d} J_a\,J^a$$

— это элемент Казимира для алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Второе условие вытекает из того факта, что собственное значение оператора C в присоединённом представлении равно $2\,h^\vee$, т.е.

$$\sum_{a=1}^{d} \big[J_a, [J^a, X]\big] = 2\,h^\vee X$$

для любого $X \in \mathfrak{g}$. □

Пример 6.2.3. Возьмём алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ с её стандартным базисом e, f, h и коммутационными соотношениями

$$[e,f] = h, \qquad [h,e] = 2\,e, \qquad [h,f] = -2\,f. \tag{6.12}$$

Ненулевые значения формы (6.4) на базисных векторах имеют вид

$$\langle e, f\rangle = 1 \qquad \text{и} \qquad \langle h, h\rangle = 2.$$

Следовательно, двойственный базис — это $f, e, h/2$, так что вектор Сигала–Сугавары (6.11) записывается в виде

$$S = e[-1]\,f[-1] + f[-1]\,e[-1] + \frac{1}{2}\,h[-1]^2.$$

Все сдвиги $T^r S$ при $r \geqslant 0$ оказываются алгебраически независимыми, и каждый элемент центра Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ — это полином от векторов Сигала–Сугавары $T^r S$. Это частный случай общего результата (6.15); ср. пример 7.1.6 в следующей главе. □

Замечание 6.2.4. По теореме Рыбникова [**141**] коммутативная подалгебра $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ в $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$ совпадает с централизатором канонического вектора Сигала–Сугавары (6.11). В частности, эта подалгебра максимальная коммутативная. □

§ 6.3. Теорема Фейгина–Френкеля

Мы будем рассматривать трансляционный оператор T на аффинной вертексной алгебре как дифференцирование алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$, действие которого на образующих задаётся формулой

$$T : X[r] \mapsto -r\,X[r-1], \qquad X \in \mathfrak{g}, \quad r < 0. \tag{6.13}$$

На алгебре $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$ имеется градуировка, однородные компоненты относительно которой — это собственные пространства другого дифференцирования D, определённого на образующих по правилу

$$D : X[r] \mapsto -r\,X[r], \qquad X \in \mathfrak{g}, \quad r < 0. \tag{6.14}$$

Подалгебра $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$ инвариантна относительно каждого из дифференцирований T и D. В частности, все однородные компоненты любого вектора Сигала–Сугавары тоже лежат в $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$.

Пусть n — это ранг простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Набор однородных элементов $S_1, \dots, S_n \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ называется *полным набором векторов Сигала–Сугавары*, если все элементы $T^{\,r} S_l$ алгебраически независимы и каждый вектор Сигала–Сугавары — это полином от этих элементов. Другими словами, $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это алгебра полиномов

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \mathbb{C}[T^{\,r} S_l \mid l = 1, \dots, n, \quad r \geqslant 0]. \tag{6.15}$$

Мы можем теперь сформулировать теорему Фейгина–Френкеля в следующем виде.

Теорема 6.3.1. *Полный набор векторов Сигала–Сугавары существует для каждой простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Наша цель — построить полные наборы векторов Сигала–Сугавары для простых алгебр Ли $\mathfrak{g}$ классических типов A, B, C и D и тем самым получить прямое доказательство теоремы 6.3.1 в этих случаях. В качестве первого шага рассмотрим «классический предел» вакуумного модуля $V_{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ и его $\mathfrak{g}[t]$-инвариантов. Мы можем считать пространство $V_{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ модулем над алгеброй Ли $\mathfrak{g}[t]$, структура которого получается ограничением действия алгебры Ли

$\widehat{\mathfrak g}$ на подалгебру $\mathfrak g[t]$. Благодаря канонической фильтрации на универсальной обёртывающей алгебре $\mathrm U\big(t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]\big)$ векторное пространство $V_{-h^\vee}(\mathfrak g)$ приобретает возрастающую фильтрацию $\mathrm U_0 \subset \mathrm U_1 \subset \ldots$ Подпространство $\mathrm U_p$ линейно порождается всеми мономами вида

$$X_{i_1}[-r_1]\ldots X_{i_s}[-r_s], \qquad r_1,\ldots,r_s \geqslant 1, \qquad s \leqslant p, \tag{6.16}$$

при $X_{i_1},\ldots,X_{i_s} \in \mathfrak g$. Ясно, что $\mathfrak g[t]\,\mathrm U_p \subset \mathrm U_p$, т.е. действие алгебры Ли $\mathfrak g[t]$ сохраняет фильтрацию. Поэтому соответствующее градуированное пространство

$$\operatorname{gr} V_{-h^\vee}(\mathfrak g) = \bigoplus_{p\geqslant 0} \mathrm U_p/\mathrm U_{p-1}, \qquad \mathrm U_{-1} = \{0\}, \tag{6.17}$$

имеет структуру $\mathfrak g[t]$-модуля. Мы будем отождествлять векторное пространство $\operatorname{gr} V_{-h^\vee}(\mathfrak g)$ с симметрической алгеброй $\mathrm S\big(t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]\big)$. Действие алгебры Ли $\mathfrak g[t]$ на $\mathrm S\big(t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]\big)$ получается продолжением присоединённого представления $\mathfrak g[t]$ на фактормодуле $\mathfrak g[t,t^{-1}]/\mathfrak g[t] \cong t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]$ на симметрическую алгебру. Чтобы записать это действие в более явном виде, возьмём моном (6.16), считая его элементом симметрической алгебры, и пусть $Y[r] \in \mathfrak g[t]$, так что $r \geqslant 0$. Тогда

$$\begin{aligned} Y[r]\cdot X_{i_1}[-r_1]\ldots X_{i_s}[-r_s] \\ = \sum_{a=1,\ r_a>r}^{s} X_{i_1}[-r_1]\ldots\big[Y, X_{i_a}\big][r-r_a]\ldots X_{i_s}[-r_s]. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Эта формула показывает, что элемент $Y[r]$ действует как дифференцирование алгебры $\mathrm S\big(t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]\big)$. Отсюда следует, что подпространство $\mathfrak g[t]$-инвариантов

$$\mathrm S\big(t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]\big)^{\mathfrak g[t]} = \big\{v \in \mathrm S\big(t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]\big) \mid \mathfrak g[t]\,v = 0\big\}$$

замкнуто относительно умножения. Такие инварианты можно построить с помощью следующей процедуры. Выберем базис $J_1,\ldots,J_d$ в алгебре Ли $\mathfrak g$ и предположим, что

$$P = P(J_1,\ldots,J_d) \tag{6.19}$$

— это элемент симметрической алгебры $\mathrm S(\mathfrak g)$. Введём формальные степенные ряды от переменной z с коэффициентами в алгебре Ли $t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]$ по формуле

$$J_i(z) = \sum_{r=0}^{\infty} J_i[-r-1]\,z^r, \qquad i = 1,\ldots,d.$$

Сделаем теперь подстановку в полиноме (6.19) и разложим в степенной ряд по z:

$$P\big(J_1(z),\ldots,J_d(z)\big) = \sum_{r=0}^{\infty} P_{(-r-1)}\,z^r.$$

Коэффициенты $P_{(-r-1)}$ лежат в симметрической алгебре $\mathrm S\big(t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]\big)$, и их можно получить другим способом. Рассмотрим дифференцирование

$$T : \mathrm S\big(t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]\big) \to \mathrm S\big(t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]\big), \tag{6.20}$$

определённое как в (6.13), так что оно действует на образующие по правилу $T : Y[-r] \mapsto rY[-r-1]$ при $r \geqslant 1$ и $Y \in \mathfrak{g}$. Тогда

$$P_{(-r-1)} = \frac{T^r}{r!} P\big(J_1[-1], \ldots, J_d[-1]\big). \tag{6.21}$$

Это соотношение можно записать в эквивалентной форме

$$P\big(J_1(z), \ldots, J_d(z)\big) = e^{zT} P\big(J_1[-1], \ldots, J_d[-1]\big),$$

которая отражает тот факт, что коммутативная алгебра $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$ с дифференцированием T — это коммутативная вертексная алгебра; ср. (6.2).

Лемма 6.3.2. *Если элемент $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ — это $\mathfrak{g}$-инвариант, то все элементы $P_{(-r-1)}$ при $r \geqslant 0$ — это $\mathfrak{g}[t]$-инварианты в алгебре $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$.*

Доказательство. Как алгебра Ли, $\mathfrak{g}[t]$ порождается элементами вида $Y[0]$ и $Y[1]$ при $Y \in \mathfrak{g}$. Следовательно, достаточно убедиться, что операторы $Y[0]$ и $Y[1]$ аннулируют элемент $P_{(-r-1)}$. Справедливы соотношения для дифференцирований алгебры $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$, которые легко проверяются на образующих:

$$Y[0]T = TY[0] \qquad \text{и} \qquad Y[1]T = TY[1] + Y[0].$$

Утверждение теперь выводится из формулы (6.21) с использованием индукции по r. □

Подалгебра инвариантов описывается следующей теоремой.

Теорема 6.3.3. *Если $P_1, \ldots, P_n$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathfrak{g}$-инвариантов $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, то элементы $P_{1\,(-r-1)}, \ldots, P_{n\,(-r-1)}$ при $r = 0, 1, \ldots$ — это алгебраически независимые образующие подалгебры $\mathfrak{g}[t]$-инвариантов в алгебре $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$.*

Доказательство. Присоединённый $\mathfrak{g}$-модуль $\mathfrak{g}$ изоморфен коприсоединённому модулю $\mathfrak{g}^*$. Изоморфизм задаётся линейным отображением, переводящим элемент $X \in \mathfrak{g}$ в такой функционал $f_X \in \mathfrak{g}^*$, что $f_X(Y) = \langle X, Y\rangle$ при $Y \in \mathfrak{g}$, где инвариантная билинейная форма определена в (6.4). Поэтому $\mathfrak{g}[t]$-модуль $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$ можно отождествить с модулем $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}^*[t^{-1}]\big)$, и именно с ним нам будем удобнее работать. Кроме того, $\mathfrak{g}[t]$-модуль

$$t^{-1}\mathfrak{g}^*[t^{-1}] \cong \mathfrak{g}^*[t, t^{-1}]/\mathfrak{g}^*[t]$$

изоморфен (ограниченному) двойственному модулю $\mathfrak{g}[t]^*$ для присоединённого модуля $\mathfrak{g}[t]$. Чтобы проверить это утверждение, возьмём базис $J_1, \ldots, J_d$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $J_1^*, \ldots, J_d^*$ — это двойственный базис пространства $\mathfrak{g}^*$. Любой элемент пространства $\mathfrak{g}[t]^*$ можно представить как конечную линейную комбинацию таких векторов двойственного базиса $J_i[r]^*$ при $i = 1, \ldots, d$ и $r \geqslant 0$, что $J_i[r]^*\big(J_j[s]\big) = \delta_{ij}\,\delta_{rs}$. Для любого значения $s \geqslant 0$ искомый изоморфизм переводит базисный вектор $J_j[s]^* \in \mathfrak{g}[t]^*$ в вектор $J_j^*[-s-1] \in t^{-1}\mathfrak{g}^*[t^{-1}]$. В самом деле, для действия алгебры Ли $\mathfrak{g}[t]$ справедлива формула

$$J_i[r]\,J_j[s]^* = -\sum_{k=1}^{d} c_{ik}^{j}\,J_k[-r+s]^*, \qquad \text{если} \quad r \leqslant s,$$

и $J_i[r]\,J_j[s]^* = 0$ в противном случае, где c_{ij}^k — это структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно базиса $J_1, \dots, J_d$. Это согласуется с действием элемента $J_i[r]$ на базисный вектор $J_j^*[-s-1]$ пространства $t^{-1}\mathfrak{g}^*[t^{-1}]$, и тем самым утверждение проверено.

Таким образом, $\mathfrak{g}[t]$-модуль $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}^*[t^{-1}]\big)$ изоморфен модулю $\mathrm{S}\big(\mathfrak{g}[t]^*\big)$, который, как $\mathfrak{g}[t]$-модуль, естественно отождествляется с алгеброй полиномиальных функций $\operatorname{Fun}\mathfrak{g}[t]$ на пространстве $\mathfrak{g}[t]$. Используя это отождествление, мы будем доказывать теорему в следующей эквивалентной форме. Предположим, что $Q_1, \dots, Q_n$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathfrak{g}$-инвариантов $(\operatorname{Fun}\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ в $\operatorname{Fun}\mathfrak{g}$. Запишем произвольный элемент $X \in \mathfrak{g}$ в координатах $X = x_1 J_1 + \dots + x_d J_d$ при $x_i \in \mathbb{C}$, так что каждый образующий Q_i можно рассматривать как полином от переменных $x_1, \dots, x_d$. Введём степенные ряды

$$x_i(z) = \sum_{r=0}^{\infty} x_{ir}\, z^r, \qquad i = 1, \dots, d,$$

коэффициенты которых — это независимые переменные x_{ir}. Определим полиномы $Q_{i\,(r)}$ с помощью разложений

$$Q_i\big(x_1(z), \dots, x_d(z)\big) = \sum_{r=0}^{\infty} Q_{i\,(r)}\, z^r. \tag{6.22}$$

Каждый коэффициент $Q_{i\,(r)}$ — это полиномиальная функция на алгебре Ли $\mathfrak{g}[t]$, элементы которой рассматриваются как конечные линейные комбинации

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{r \geqslant 0} x_{i\,r}\, J_i[r].$$

Из леммы 6.3.2 следует, и в этом можно также убедиться прямой проверкой, что все полиномы $Q_{i\,(r)}$ при $i = 1, \dots, n$ и $r \geqslant 0$ лежат в алгебре $\mathfrak{g}[t]$-инвариантов $\big(\operatorname{Fun}\mathfrak{g}[t]\big)^{\mathfrak{g}[t]}$. Мы докажем, что эти полиномы — алгебраически независимые образующие алгебры $\big(\operatorname{Fun}\mathfrak{g}[t]\big)^{\mathfrak{g}[t]}$.

Заметим, что полином $Q_{i\,(r)}$ не зависит от переменных $x_{j\,s}$ при $s > r$. Если имеется алгебраическая зависимость между полиномами $Q_{i\,(r)}$, то в неё может входить только их конечное число. Кроме того, любой данный $\mathfrak{g}[t]$-инвариант в алгебре $\operatorname{Fun}\mathfrak{g}[t]$ не зависит от переменных $x_{i\,s}$ при достаточно больших значениях s. Поэтому будет достаточно доказать, что для любого неотрицательного целого числа m, полиномы $Q_{i\,(r)}$ при $i = 1, \dots, n$ и $r = 0, \dots, m$ — это алгебраически независимые образующие алгебры инвариантов $(\operatorname{Fun}\mathfrak{g}_m)^{\mathfrak{g}_m}$, где $\mathfrak{g}_m$ обозначает фактор алгебры Ли $\mathfrak{g}[t]$ по идеалу $t^{m+1}\mathfrak{g}[t]$. При этом из определения полиномов $Q_{i\,(r)}$ ясно, что указанные свойства достаточно установить для одного семейства образующих $Q_1, \dots, Q_n$ алгебры $(\operatorname{Fun}\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Возьмём регулярный нильпотентный элемент $e \in \mathfrak{g}$. По теореме Морозова–Джекобсона его можно дополнить до $\mathfrak{sl}_2$-подалгебры в $\mathfrak{g}$ со стандартными базисными элементами e, f, h и коммутационными соотношениями (6.12). Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с подалгеброй в $\mathfrak{g}_m$, состоящей из полиномов нулевой степени по переменной t, и рассмотрим аффинное подпространство

$$\mathfrak{k}_m = e + \mathfrak{g}^f + \mathfrak{g}^f\, t + \dots + \mathfrak{g}^f\, t^m$$

в алгебре Ли $\mathfrak{g}_m$, где $\mathfrak{g}^f$ обозначает централизатор элемента f в $\mathfrak{g}$. Пусть

$$\rho : (\operatorname{Fun}\mathfrak{g}_m)^{\mathfrak{g}_m} \to \operatorname{Fun}\mathfrak{k}_m \tag{6.23}$$

— это гомоморфизм, полученный ограничением полиномиальных функций на $\mathfrak{g}_m$ на аффинное подпространство $\mathfrak{k}_m$. Из классической работы Костанта [**94**] известно, что существуют такие алгебраически независимые образующие $Q_1, \dots, Q_n$ алгебры $(\operatorname{Fun}\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ и такой базис $U_1, \dots, U_n$ централизатора $\mathfrak{g}^f$, что для всех $j = 1, \dots, n$ и для всех n-наборов $(c_1, \dots, c_n)$ комплексных чисел выполняются соотношения

$$Q_j(e + c_1 U_1 + \dots + c_n U_n) = c_j. \tag{6.24}$$

Коммутативная алгебра $\operatorname{Fun}\mathfrak{k}_m$ свободно порождается координатными функциями $p_{ir} : u \mapsto a_{ir}$ при $i = 1, \dots, n$ и $r = 0, \dots, m$, где

$$u = e + \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=0}^{m} a_{ir}\, U_i\, t^r \in \mathfrak{k}_m. \tag{6.25}$$

Из соотношений (6.24) следует, что для любого значения t в $\mathbb{C}$ справедлива формула

$$Q_j(u) = a_{j0} + a_{j1}\, t + \dots + a_{jm}\, t^m.$$

С другой стороны, из определения (6.22) получаем соотношение

$$Q_j(u) = Q_{j\,(0)} + Q_{j\,(1)}\, t + \dots + Q_{j\,(m)}\, t^m,$$

в котором значения полиномов $Q_{j\,(r)}$ вычислены в соответствующих коэффициентах при степенях t в разложении (6.25). Отсюда мы можем заключить, что все координатные функции p_{ir} содержатся в образе гомоморфизма ρ, определённого в (6.23), так что этот гомоморфизм сюръективен.

Чтобы завершить доказательство, проверим, что гомоморфизм ρ инъективен. Рассмотрим присоединённую группу G_m, соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{g}_m$. Алгебра $(\operatorname{Fun}\mathfrak{g}_m)^{\mathfrak{g}_m}$ совпадает с алгеброй G_m-инвариантов $(\operatorname{Fun}\mathfrak{g}_m)^{\mathrm{G}_m}$. Инъективность гомоморфизма $\rho : (\operatorname{Fun}\mathfrak{g}_m)^{\mathrm{G}_m} \to \operatorname{Fun}\mathfrak{k}_m$ будет установлена, если мы покажем, что образ $(\operatorname{Ad}\mathrm{G}_m)(\mathfrak{k}_m)$ плотен в $\mathfrak{g}_m$, т. е. отображение

$$\phi : \mathrm{G}_m \times \mathfrak{k}_m \to \mathfrak{g}_m, \qquad (g, x) \mapsto (\operatorname{Ad} g)(x),$$

доминантно. В силу [**144**, Theorem 4.3.6(i)] достаточно проверить, что дифференциал $d\phi_{(\mathrm{id},e)}$ в точке (id, e) сюръективен. Отождествляя касательные пространства к $\mathfrak{g}_m$ и $\mathfrak{k}_m$ в точке e с $\mathfrak{g}_m$ и $\mathfrak{g}^f + \mathfrak{g}^f\, t + \dots + \mathfrak{g}^f\, t^m$ соответственно, мы можем записать дифференциал в виде

$$d\phi_{(\mathrm{id},e)} : \mathfrak{g}_m \oplus \left(\mathfrak{g}^f + \mathfrak{g}^f\, t + \dots + \mathfrak{g}^f\, t^m\right) \to \mathfrak{g}_m, \qquad (x, v) \mapsto [x, e] + v.$$

Однако благодаря Костанту [**94**] хорошо известно разложение $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, e] \oplus \mathfrak{g}^f$. Отсюда следует, что

$$\mathfrak{g}_m = [\mathfrak{g}_m, e] + \mathfrak{g}^f\, t + \dots + \mathfrak{g}^f\, t^m,$$

так что дифференциал сюръективен. Таким образом, отображение (6.23) — это изоморфизм, что и завершает доказательство. □

В гл. 7 и 8 мы построим семейства элементов $S_1, \dots, S_n$ алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ для случая алгебр Ли $\mathfrak{g}$ классического типа. Мы будем доказывать, что эти семейства — полные наборы векторов Сигала–Сугавары, с помощью одинакового рассуждения, основанного на теореме 6.3.3, следующим образом. Рассмотрим символы $\overline{S}_1, \dots, \overline{S}_n$ в соответствующем градуированном пространстве; см. (6.17). При этом окажется возможным рассматривать эти символы как элементы алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ с помощью такого вложения $\mathfrak{g} \hookrightarrow t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$, что $X \mapsto X[-1]$. Проверим затем, что они являются алгебраически независимыми образующими алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, и применим теорему 6.3.3. Наконец, стандартное рассуждение позволяет сделать вывод, что все элементы $T^r S_l$ при $l = 1, \dots, n$ и $r \geqslant 0$ алгебраически независимы и порождают алгебру $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$. В самом деле, если бы была алгебраическая зависимость между элементами $T^r S_l$, то и их символы $T^r \overline{S}_l$ тоже были бы алгебраически зависимы. Далее, предположим, что некоторый ненулевой элемент $S \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ минимальной возможной степени не выражается как полином от элементов $T^r S_l$. Рассмотрим его символ $\overline{S} \in \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{g}[t]}$ и запишем его как полином $P(T^r \overline{S}_l)$ от образующих $T^r \overline{S}_l$. Разность $S - P(T^r S_l)$ — это ненулевой элемент алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, степень которого меньше, чем степень элемента S, и эта разность не выражается как полином от элементов $T^r S_l$. Это противоречит выбору элемента S.

Замечание 6.3.4. Для произвольной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ элементы $S_1, \dots, S_n$ любого полного набора векторов Сигала–Сугавары являются «поднятиями» некоторых алгебраически независимых образующих алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ в алгебру $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$ в точном смысле, описанном выше. В частности, соответствующие степени элементов $S_1, \dots, S_n$ должны совпадать со степенями $d_1, \dots, d_n$, определёнными как в (2.2); см. [**46**, Proposition 4.3.3]. Для классических типов это будет следовать из наших конструкций векторов Сигала–Сугавары. □

Пример 6.3.5. Ясно, что теорема 6.3.3 справедлива и для редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$. Вспомним образующие алгебры $\mathfrak{gl}_N$-инвариантов в $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$, введённые в §2.1. Рассмотрим матрицу $E(z) = [E_{ij}(z)]$ с элементами

$$E_{ij}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} E_{ij}[-r-1]\, z^r$$

и разложим определитель:

$$\det\big(u + E(z)\big) = u^N + \sum_{m=1}^{N} u^{N-m} \sum_{r=0}^{\infty} C_{m\,(-r-1)}\, z^r, \tag{6.26}$$

где $u + E(z)$ понимается как матрица $u1 + E(z)$, а 1 — это единичная матрица размера $N \times N$. Тогда элементы $C_{m\,(-r-1)}$ при $m = 1, \dots, N$ и $r \geqslant 0$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{gl}_N[t]}$.

Аналогично, записывая разложение

$$\operatorname{tr} E(z)^m = \sum_{r=0}^{\infty} T_{m\,(-r-1)}\, z^r, \tag{6.27}$$

мы получим ещё одно алгебраически независимое семейство образующих алгебры инвариантов $T_{m\,(-r-1)}$ при $m = 1, \ldots, N$ и $r \geqslant 0$. $\square$

Пример 6.3.6. Для алгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_N$ и $\mathfrak{sp}_N$ образующие подалгебры $\mathfrak{g}$-инвариантов в симметрической алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ были построены в §2.2. Рассмотрим матрицу $F(z) = [F_{ij}(z)]$, где

$$F_{ij}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} F_{ij}[-r-1]\, z^r,$$

и разложим определитель:

$$\det\big(u + F(z)\big) = u^N + \sum_{m=1}^{n} u^{N-2m} \sum_{r=0}^{\infty} C_{m\,(-r-1)}\, z^r.$$

Кроме того, в случае $\mathfrak{o}_{2n}$ рассмотрим пфаффиан $\operatorname{Pf} F(z)$, определённый по формуле (2.33), в которой элементы F_{ij} следует соответственно заменить на ряды $F_{ij}(z)$, и разложим его в степенной ряд по z:

$$\operatorname{Pf} F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \operatorname{Pf}_{(-r-1)}\, z^r.$$

По теореме 6.3.3 элементы $C_{m\,(-r-1)}$ при $m = 1, \ldots, n$ и $r \geqslant 0$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{g}[t]}$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n+1}$, в то время как элементы $C_{m\,(-r-1)}$ при $m = 1, \ldots, n-1$ вместе с $\operatorname{Pf}_{(-r-1)}$ при $r \geqslant 0$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{o}_{2n}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{o}_{2n}[t]}$.

Аналогично из разложения

$$\operatorname{tr} F(z)^{2m} = \sum_{r=0}^{\infty} T_{m\,(-r-1)}\, z^r$$

получаем другое алгебраически независимое семейство образующих $T_{m\,(-r-1)}$ при $m = 1, \ldots, n$ и $r \geqslant 0$ в случаях $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n+1}$. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$ такое семейство состоит из элементов $T_{m\,(-r-1)}$ при $m = 1, \ldots, n-1$ и $\operatorname{Pf}_{(-r-1)}$ при $r \geqslant 0$. $\square$

§ 6.4. Аффинные симметрические функции

Естественный класс аффинных аналогов симметрических полиномов возникает в результате применения проекции типа Шевалле к элементам алгебры $\mathfrak{g}[t]$-инвариантов в $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$. Так же как для проекции Шевалле (2.3), применённой к $\mathfrak{g}$-инвариантам в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, образы для классических типов в аффинном случае оказываются связанными с этими аффинными симметрическими полиномами, как вытекает из примеров 6.3.5 и 6.3.6.

Для данного симметрического полинома $P(\lambda)$ от семейства переменных $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ заменим каждую переменную λ_i на соответствующий формальный степенной ряд

$$\lambda_i(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_i[-r-1]\, z^r,$$

в котором $\lambda_i[-r-1]$ — это независимые переменные, и запишем

$$P\big(\lambda_1(z), \dots, \lambda_N(z)\big) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r\, z^r,$$

где коэффициенты P_r — это полиномы от переменных $\lambda_i[-r-1]$. Эти полиномы можно также получить как производные

$$P_r = \frac{T^r P}{r!},$$

где $P = P(\lambda)$ рассматривается как полином от переменных $\lambda_i[-1] = \lambda_i$, а дифференцирование T действует на переменные по правилу

$$T : \lambda_i[-r] \mapsto r\,\lambda_i[-r-1], \qquad i = 1, \dots, N, \quad r \geqslant 1.$$

Определение 6.4.1. Обозначим через $\Lambda^{\mathrm{aff}}(N)$ подалгебру алгебры полиномов от переменных $\lambda_i[-r-1]$, порождённую всеми коэффициентами P_r, соответствующими всем симметрическим полиномам P. Любой элемент подалгебры $\Lambda^{\mathrm{aff}}(N)$ называется *аффинным симметрическим полиномом.* □

Ясно, что алгебра $\Lambda^{\mathrm{aff}}(N)$ порождается коэффициентами P_r, отвечающими любому семейству $\{P\}$ образующих алгебры симметрических полиномов $\mathbb{C}[\lambda]^{\mathfrak{S}_N}$. Возвращаясь к примеру 6.3.5, рассмотрим образ определителя (6.26) относительно аффинной версии проекции Шевалле:

$$\varsigma : E_{ij}[-r-1] \mapsto \delta_{ij}\,\lambda_i[-r-1].$$

Получаем

$$\varsigma : \det\, \big(u + E(z)\big) \mapsto \big(u + \lambda_1(z)\big) \dots \big(u + \lambda_N(z)\big),$$

так что

$$\varsigma : C_{m\,(-r-1)} \mapsto \frac{T^r}{r!} \sum_{1 \leqslant p_1 < \dots < p_m \leqslant N} \lambda_{p_1}[-1] \dots \lambda_{p_m}[-1].$$

Нетрудно проверить, что все эти образы при $r \geqslant 0$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\Lambda^{\mathrm{aff}}(N)$ (это можно вывести из леммы 12.3.2 в гл. 12). Другое семейство можно получить, используя инварианты из разложения (6.27). А именно, эти образующие связаны со степенными суммами $\lambda_1^m + \dots + \lambda_N^m$ и задаются формулой

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{r_1 + \dots + r_m = r} \lambda_i[-r_1-1] \dots \lambda_i[-r_m-1], \qquad m \geqslant 1, \quad r \geqslant 0, \tag{6.28}$$

где вторая сумма берётся по m-наборам $(r_1, \dots, r_m)$ целых неотрицательных чисел. Алгебраически независимое семейство образующих алгебры $\Lambda^{\mathrm{aff}}(N)$

получится, если ограничить значения m числами $1,\ldots,N$. Таким образом, для типа A справедлива следующая аффинная версия изоморфизма Шевалле (2.3):

$$\varsigma : \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{gl}_N[t]} \to \Lambda^{\mathrm{aff}}(N).$$

В таком виде её нетрудно продолжить на другие классические типы, хотя было бы интересно получить независимое описание образа проекции ς в алгебре всех полиномов, возможно, как «классический предел» аффинного изоморфизма Хариш-Чандры; см. гл. 13.

Зададим градуировку на алгебре полиномов от переменных $\lambda_i[-r]$ по формуле

$$\deg \lambda_i[-r] = r, \qquad r \geqslant 1.$$

Подалгебра $\Lambda^{\mathrm{aff}}(N)$ наследует эту градуировку, так что имеет место разложение в прямую сумму

$$\Lambda^{\mathrm{aff}}(N) = \bigoplus_{k\geqslant 0} \Lambda^{\mathrm{aff}}(N)^k,$$

где $\Lambda^{\mathrm{aff}}(N)^k$ — это подпространство в $\Lambda^{\mathrm{aff}}(N)$, линейно порождённое элементами степени k, и $\Lambda^{\mathrm{aff}}(N)^0 := \mathbb{C}$. Пусть $H_N(q)$ — это соответствующий ряд Гильберта–Пуанкаре:

$$H_N(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim \Lambda^{\mathrm{aff}}(N)^k\, q^k.$$

Плоское разбиение над N-полосой — это такая конечная последовательность диаграмм Юнга (или разбиений) $\lambda^{(1)} \supset \cdots \supset \lambda^{(r)}$, что $\lambda^{(1)}$ содержит не более N строк. На такое плоское разбиение можно смотреть как на пирамиду, составленную из единичных кубов, i-й уровень которой имеет форму $\lambda^{(i)}$.

Предложение 6.4.2. *Ряд Гильберта–Пуанкаре $H_N(q)$ имеет вид*

$$\prod_{m=1}^{N} \prod_{r\geqslant m} (1-q^r)^{-1} = \prod_{r=1}^{\infty} (1-q^r)^{-\min(r,N)}. \tag{6.29}$$

Следовательно, размерность $\dim \Lambda^{\mathrm{aff}}(N)^k$ совпадает с числом плоских разбиений над N-полосой, содержащих ровно k единичных кубов.

Доказательство. Рассмотрим алгебраически независимые образующие алгебры $\Lambda^{\mathrm{aff}}(N)$, заданные формулой (6.28). Для каждого $m = 1,\ldots,N$ это семейство содержит образующие степеней $m, m+1, \ldots$, откуда вытекает формула для ряда Гильберта–Пуанкаре $H_N(q)$. Хорошо известно, что производящая функция плоских разбиений над N-полосой имеет вид (6.29); см., например, [**104**, §I.5]. □

§ 6.5. От векторов Сигала–Сугавары к элементам Казимира

Здесь мы обсудим связь между центром Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ и центром $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Для переменной z, рассмотрим точечный гомоморфизм

$$\varrho : \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[z^{-1}], \qquad X[r] \mapsto X\,z^r, \tag{6.30}$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$ и $r < 0$, где мы опускаем знак тензорного произведения. Мы будем использовать дифференцирование T алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$, определённое в (6.13). Следующее свойство гомоморфизма ϱ легко проверить на мономах от образующих $X[r]$:

$$\varrho(TS) = -\partial_z\,\varrho(S). \tag{6.31}$$

Оно выполняется для всех элементов $S \in \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$.

Предложение 6.5.1. *Образ центра Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ относительно гомоморфизма ϱ содержится в тензорном произведении $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[z^{-1}]$.*

Доказательство. В алгебре $\mathrm{U}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$ справедливо соотношение

$$X[0]\,S = \big[X[0], S\big] + S\,X[0]$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$ и $S \in \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$. Рассматривая это соотношение по модулю левого идеала I, порождённого пространством $\mathfrak{g}[t]$, мы видим, что из условия $S \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ следует равенство $\big[X[0], S\big] = 0$. Поэтому $\big[X, \varrho(S)\big] = 0$ в алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[z^{-1}]$. Это означает, что $\varrho(S)$ содержится в алгебре $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[z^{-1}]$. □

Если переменная z принимает ненулевое числовое значение в $\mathbb{C}$, то та же самая формула (6.30) задаёт гомоморфизм

$$\varrho_z : \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}), \qquad X[r] \mapsto X\,z^r, \tag{6.32}$$

в обозначении которого мы отметили зависимость от $z \in \mathbb{C}$.

Предложение 6.5.2. *Пусть z — это ненулевое комплексное число. Тогда образ центра Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ относительно гомоморфизма ϱ_z совпадает с центром $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$. Кроме того, если $S_1, \dots, S_n$ — это полный набор векторов Сигала–Сугавары, то $\varrho_z(S_1), \dots, \varrho_z(S_n)$ — это алгебраически независимые образующие центра $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$.*

Доказательство. В силу замечания 6.3.4 элементы $S_1, \dots, S_n$ любого полного набора векторов Сигала–Сугавары отвечают некоторым алгебраически независимым образующим алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ соответствующих степеней $d_1, \dots, d_n$. Более точно, по предложению 6.5.1 для образов $\varrho_z(S_1), \dots, \varrho_z(S_n)$ должны выполняться соотношения

$$\varrho_z(S_i) = S_i^\circ\, z^{-d_i}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

где $S_1^\circ, \dots, S_n^\circ$ — некоторые элементы алгебры $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$. При этом символы этих элементов в алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ — это её алгебраически независимые образующие. Отсюда следует, что $S_1^\circ, \dots, S_n^\circ$ — это алгебраически независимые образующие центра $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$. Это доказывает обе части предложения. □

В частности, образ гомоморфизма ϱ_z не зависит от z, что можно также вывести из свойства (6.31) с использованием T-инвариантности подалгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ независимо от предложения 6.5.2.

§ 6.6. Центр пополненной универсальной обёртывающей алгебры

Обсудим теперь элементы Казимира для аффинных алгебр Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{g}}$, соответствующих простым алгебрам Ли $\mathfrak{g}$; см. определение (6.5). Универсальную обёртывающую алгебру $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$ необходимо пополнить, чтобы вместить такие элементы. Как в §6.2, зафиксируем собственное значение $\kappa \in \mathbb{C}$ центрального элемента $K \in \widehat{\mathfrak{g}}$ и рассмотрим универсальную обёртывающую алгебру $\mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$ на уровне κ. Мы хотим, чтобы действие пополненной алгебры было корректно определено на естественной категории гладких модулей. Модуль V на уровне κ над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ называется *гладким*, если для любого $v \in V$ существует такое неотрицательное целое число p, что $t^p\mathfrak{g}[t]v = 0$, где $t^p\mathfrak{g}[t]$ — это подалгебра в $\widehat{\mathfrak{g}}$, линейно порождённая всеми элементами $X[r]$ при $X \in \mathfrak{g}$ и $r \geqslant p$.

Введём линейную топологию на алгебре $\mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$, используя в качестве базиса окрестностей нуля левые идеалы I_p в $\mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$ при $p \geqslant 0$, порождённые соответствующими пространствами $t^p\mathfrak{g}[t]$. *Пополненная универсальная обёртывающая алгебра* $\widetilde{\mathrm{U}}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это пополнение алгебры $\mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$ относительно этой топологии. Можно дать эквивалентное определение алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$, как обратного предела

$$\widetilde{\mathrm{U}}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}}) = \varprojlim \mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})/I_p. \tag{6.33}$$

Описание центра пополненной алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это одна из основных тем книги Френкеля [**46**]. Отправной точкой для этого описания служит основополагающая работа Фейгина и Френкеля [**39**]. Как и центр аффинной вертексной алгебры $V_\kappa(\mathfrak{g})$, центр алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$ оказывается тривиальным, кроме единственного случая, когда значение κ критическое, $\kappa = -h^\vee$; см. §6.2. Центр $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$ на критическом уровне и его связь с геометрией *операм* подробно обсуждаются в книге [**46**]. Наше обсуждение ограничится алгебраической стороной теории. Центральные элементы пополненной алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$ получаются из элементов центра Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ с использованием структуры вертексной алгебры. Чтобы дать краткое описание этой конструкции [**46**, Sections 3.2 & 4.3], вспомним из §6.2, что результатом применения соответствия Y между состояниями и полями к элементу $S \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ является поле

$$Y(S,z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} S_{(r)}\, z^{-r-1}, \tag{6.34}$$

где все коэффициенты $S_{(r)}$ — это операторы в вакуумном модуле $V_{-h^\vee}(\mathfrak{g})$. Мы придадим другой смысл формуле (6.34), в которой вместо операторов $S_{(r)}$ возникнут соответствующие элементы $S_{[r]}$ центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, известные как *операторы*

Сугавары. Рассмотрим ряд Лорана $J^a(z) = Y(J^a[-1], z)$, определённый в (6.8):
$$J^a(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} J^a[r]\, z^{-r-1}.$$

Теперь мы будем считать $J^a(z)$ рядом Лорана с коэффициентами в универсальной обёртывающей алгебре $\mathrm{U}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$. Кроме того, конечные линейные комбинации коэффициентов ряда
$$:\partial_z^{r_1} J^{a_1}(z) \ldots \partial_z^{r_m} J^{a_m}(z):$$
можно рассматривать как элементы пополненной универсальной обёртывающей алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$, определённой в (6.33). Определение соответствия между состояниями и полями теперь интерпретируется таким образом, что для любого $a \in V_{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ коэффициенты $a_{[n]}$ ряда

$$Y[a, z] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{[n]} z^{-n-1}, \tag{6.35}$$

заданные тем же самым правилом (6.10), понимаются как элементы алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$. Формула для коммутатора (6.1) теперь приобретает вид
$$\bigl[a_{[m]}, b_{[k]}\bigr] = \sum_{n\geqslant 0} \binom{m}{n} \bigl(a_{(n)}\, b\bigr)_{[m+k-n]}.$$

Из этой формулы следует, что если элемент a лежит в центре Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, то все коэффициенты $a_{[n]}$ — это операторы Сугавары, т. е. они лежат в центре $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ пополненной алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$. При этом справедливо следующее утверждение.

Предложение 6.6.1. *Предположим, что $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это полный набор векторов Сигала–Сугавары. Тогда операторы Сугавары*
$$\{S_{1\,[r]}, \ldots, S_{n\,[r]} \mid r \in \mathbb{Z}\}$$
— это топологические образующие центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$. □

Таким образом, полные наборы векторов Сигала–Сугавары для классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$, которые мы построим ниже в теоремах 7.1.4, 8.1.9 и 8.3.8, позволят получить соответствующие топологические образующие центров пополненных универсальных обёртывающих алгебр; явные формулы будут приведены в гл. 7 и 8. Эти операторы Сугавары снова появятся в гл. 15, в которой мы вычислим их собственные значения в модулях Вакимото над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ на критическом уровне.

§ 6.7. Библиографические замечания

Наше доказательство ключевой теоремы 6.3.3 следует статье Раиса и Товеля [**135**] с некоторыми модификациями, как в работе Брауна и Брандана [**15**]. Другое доказательство принадлежит А. Бейлинсону и В. Дринфельду (подробное изложение дано в [**46**, Theorem 3.4.2]); см. также работу Айзенбада и Френкеля [**120**, Proposition A.1]. Обобщение этой теоремы, касающееся централизаторов нильпотентных элементов, было получено Панюшевым, Преметом и Якимовой [**132**]. Описанию алгебры инвариантов $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ вакуумного модуля $V_{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ для произвольной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в работе [**39**] предшествовали частные случаи теоремы Фейгина–Френкеля, полученные независимо Гудманом и Уоллахом [**58**] (для типа A) и Хаяши [**65**] (для типов A, B и C). Геометрическое доказательство этой теоремы для всех простых алгебр Ли $\mathfrak{g}$ было дано Раскином [**136**]. Теорему Фейгина–Френкеля обобщил Аракава [**5**]; он показал, что центр аффинной W-алгебры на критическом уровне, связанной с произвольным нильпотентным элементом $f \in \mathfrak{g}$, совпадает с алгеброй $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$. Супер-версия аффинных симметрических полиномов была введена в работе [**112**]. Доказательства и дополнительные свойства центра пополненной универсальной обёртывающей алгебры (см. §6.6) содержатся в книге Френкеля [**46**].

Глава 7

Образующие центра для типа A

В этой главе мы построим полные наборы векторов Сигала–Сугавары для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$. Тем самым будет получено прямое доказательство теоремы Фейгина–Френкеля (теорема 6.3.1) для типа A. Мы будем опираться на теорему 6.3.3 и использовать общие соображения, изложенные после доказательства этой теоремы в гл. 6. Мы также установим связь между векторами Сигала–Сугавары и элементами Казимира для $\mathfrak{gl}_N$ и воспроизведём некоторые конструкции гл. 4, применяя общий подход, объяснённый в § 6.5. Кроме того, мы воспользуемся предложением 6.6.1, чтобы получить явные формулы для образующих центра пополненной универсальной обёртывающей алгебры для алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{gl}}_N$ на критическом уровне.

§ 7.1. Векторы Сигала–Сугавары

В наших конструкциях векторов Сигала–Сугавары для всех классических типов мы будем использовать расширенную алгебру Ли $\widehat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}\tau$, в которой дополнительный элемент τ удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$\big[\tau, X[r]\big] = -r\,X[r-1], \qquad \big[\tau, K\big] = 0. \tag{7.1}$$

Вместо простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_N$ типа A нам будет удобнее работать с редуктивной алгеброй Ли $\mathfrak{gl}_N$. Продолжим форму (6.4) до инвариантной симметрической билинейной формы на $\mathfrak{gl}_N$, которую можно записать в виде

$$\langle X,\, Y\rangle = \operatorname{tr} XY - \frac{1}{N}\operatorname{tr} X \operatorname{tr} Y, \qquad X, Y \in \mathfrak{gl}_N. \tag{7.2}$$

Ядро этой формы линейно порождается элементом $E_{11} + \dots + E_{NN}$, а её ограничение на подалгебру $\mathfrak{sl}_N$ имеет вид

$$\langle X,\, Y\rangle = \operatorname{tr} XY, \qquad X, Y \in \mathfrak{sl}_N.$$

В аффинной алгебре Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{gl}}_N = \mathfrak{gl}_N[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ выполняются коммутационные соотношения

$$\big[E_{ij}[r], E_{kl}[s]\big] = \delta_{kj}\, E_{i\,l}[r+s] - \delta_{i\,l}\, E_{kj}[r+s] + r\,\delta_{r,-s}\, K\Big(\delta_{kj}\,\delta_{i\,l} - \frac{\delta_{ij}\,\delta_{kl}}{N}\Big), \tag{7.3}$$

и элемент K лежит в её центре. Критический уровень равен $-N$, так как дуальное число Коксетера для $\mathfrak{sl}_N$ равно N. В соответствии с нашим определением билинейной формы на $\mathfrak{gl}_N$ центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ совпадает и с алгеброй $\mathfrak{gl}_N[t]$-инвариантов, и с алгеброй $\mathfrak{sl}_N[t]$-инвариантов вакуумного модуля:

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N) = \{v \in V_{-N}(\mathfrak{gl}_N) \mid \mathfrak{gl}_N[t]\, v = 0\} = \{v \in V_{-N}(\mathfrak{gl}_N) \mid \mathfrak{sl}_N[t]\, v = 0\}.$$

Для любого $r \in \mathbb{Z}$ соберём элементы $E_{ij}[r]$ в матрицу $E[r]$, так что

$$E[r] = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes E_{ij}[r] \in \operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N).$$

При $a \in \{1, \dots, m\}$ введём элемент $E[r]_a$ алгебры

$$\underbrace{\operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End} \mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{U} \tag{7.4}$$

по формуле

$$E[r]_a = \sum_{i,j=1}^{N} 1^{\otimes (a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes (m-a)} \otimes E_{ij}[r], \tag{7.5}$$

где U обозначает универсальную обёртывающую алгебру для алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{gl}}_N \oplus \mathbb{C}\tau$.

Предложение 7.1.1. *Определяющие соотношения в алгебре* $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ *могут быть записаны в виде*

$$E[r]_1\, E[s]_2 - E[s]_2\, E[r]_1 = \big(E[r+s]_1 - E[r+s]_2\big)\, P + r\, \delta_{r,-s}\, K \Big(P - \frac{1}{N}\Big), \tag{7.6}$$

где обе части — это элементы алгебры (7.4) *при* $m = 2$.

Доказательство. Это непосредственно вытекает из соотношений (7.3). В них достаточно взять тензорное произведение обеих частей с элементом $e_{ij} \otimes e_{kl}$ и просуммировать по индексам i, j, k, l. □

Вспомним, что эквивалентные определения матриц Манина содержатся в лемме 3.1.2.

Лемма 7.1.2. *Матрица* $\mathcal{E} = \tau + E[-1] = \big[\delta_{ij}\tau + E_{ij}[-1]\big]$ *с элементами в универсальной обёртывающей алгебре для алгебры Ли* $\widehat{\mathfrak{gl}}_N \oplus \mathbb{C}\tau$ *— это матрица Манина.*

Доказательство. Применим такое же рассуждение, как в доказательстве леммы 4.5.3. По предложению 7.1.1 имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1\, \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2\, \mathcal{E}_1 &= \big(\tau + E[-1]_1\big)\big(\tau + E[-1]_2\big) - \big(\tau + E[-1]_2\big)\big(\tau + E[-1]_1\big) \\
&= E[-1]_1\, E[-1]_2 - E[-1]_2\, E[-1]_1 - E[-2]_1 + E[-2]_2 \\
&= \big(E[-2]_1 - E[-2]_2\big)(P - 1).
\end{aligned}$$

Умножая этот элемент справа на $1 + P$, получим 0, так что утверждение следует из эквивалентного определения матриц Манина (3.5). □

Сохраним обозначения $H^{(m)}$ и $A^{(m)}$ для элементов алгебры (7.4) (с единичной компонентой в U), которые являются соответствующими образами симметризатора $h^{(m)}$ и антисимметризатора $a^{(m)}$, определённых в (1.17) и (1.19), относительно отображения (1.65). Введём теперь элементы вакуумного модуля $\phi_{m\,a}, \psi_{m\,a}, \theta_{m\,a} \in V_{-N}(\mathfrak{gl}_N) \cong \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\big)$ с помощью разложений

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, A^{(m)}\mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_m = \phi_{m\,0}\,\tau^m + \phi_{m\,1}\,\tau^{m-1} + \dots + \phi_{m\,m}, \tag{7.7}$$

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, H^{(m)}\mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_m = \psi_{m\,0}\,\tau^m + \psi_{m\,1}\,\tau^{m-1} + \dots + \psi_{m\,m} \tag{7.8}$$

и

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^m = \theta_{m\,0}\,\tau^m + \theta_{m\,1}\,\tau^{m-1} + \dots + \theta_{m\,m}. \tag{7.9}$$

Заметим, что $A^{(m)} = 0$ при $m > N$, поэтому все элементы $\phi_{m\,a}$ в этом случае равны нулю. Из леммы 7.1.2 следует, что $\mathcal{E}$ — это матрица Манина, поэтому взяв $m = N$ в (7.7) и применяя формулу (3.28), получим

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,N}\, A^{(N)}\mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_N = \mathrm{cdet}\,\mathcal{E}, \tag{7.10}$$

где столбцовый определитель задаётся соотношением (3.23). Запишем его как полином от τ:

$$\mathrm{cdet}\,\mathcal{E} = \tau^N + \phi_1\,\tau^{N-1} + \dots + \phi_N, \tag{7.11}$$

так что $\phi_{N\,a} = \phi_a$ при $a = 1, \dots, N$. Из тождества (3.29) следует разложение для некоммутативного характеристического полинома:

$$\mathrm{cdet}\,(u + \mathcal{E}) = \sum_{m=0}^{N} u^{N-m}\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, A^{(m)}\mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_m,$$

где u — это переменная. Поэтому, заменяя τ на $u+\tau$ в формуле (7.11), получим более общие соотношения

$$\phi_{m\,a} = \binom{N-a}{m-a}\phi_a, \qquad 0 \leqslant a \leqslant m \leqslant N. \tag{7.12}$$

В частности, $\phi_{m\,m} = \phi_m$ при $m = 1, \dots, N$.

Теорема 7.1.3. *Все элементы $\phi_{m\,a}$, $\psi_{m\,a}$ и $\theta_{m\,a}$ принадлежат центру Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$.*

Доказательство. В силу леммы 7.1.2 достаточно проверить это утверждение только для одного из этих трёх семейств. Тогда соответствующие свойства двух оставшихся семейств будут следовать из теоремы Макмагона (теорема 3.2.1) и тождества Ньютона (теорема 3.2.10) с учётом тождеств следствия 3.2.5. Тем не менее, мы приведём прямые доказательства для двух семейств $\psi_{m\,a}$ и $\theta_{m\,a}$, поскольку они опираются на различные варианты матричных вычислений. Прямые доказательства для элементов $\phi_{m\,a}$ и $\psi_{m\,a}$ вполне аналогичны друг другу.

Доказательство для элементов $\psi_{m\,a}$. Будет достаточно проверить, что эти элементы аннулируются операторами $E_{ij}[0]$ и $E_{ij}[1]$ при $1 \leqslant i, j \leqslant N$ в вакуумном модуле $V_{-N}(\mathfrak{gl}_N)$. Рассмотрим тензорное произведение алгебр

$$\underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m+1} \otimes \mathrm{U},$$

содержащее $m+1$ копий алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$, занумерованных числами $0, 1, \ldots, m$. Желаемые свойства аннулирования можно записать в эквивалентной форме:

$$E[0]_0 \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} \mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_m = 0 \quad \text{и} \quad E[1]_0 \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} \mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_m = 0 \tag{7.13}$$

по модулю левого идеала алгебры U, порождённого пространством $\mathfrak{gl}_N[t]$ и элементом $K + N$. Чтобы проверить первое соотношение, заметим, что в силу (1.67) и (7.6) мы можем записать

$$[E[0]_0, \mathcal{E}_a] = P_{0\,a}\,\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_a\,P_{0\,a}. \tag{7.14}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E[0]_0 \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} \mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_m &= \sum_{a=1}^{m} \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} \mathcal{E}_1 \ldots \big(P_{0\,a}\,\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_a\,P_{0\,a}\big) \ldots \mathcal{E}_m \\ &= \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} \big(P_{0\,1} + \cdots + P_{0\,m}\big)\,\mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_m \\ &\quad - \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)}\,\mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_m\,\big(P_{0\,1} + \cdots + P_{0\,m}\big). \end{aligned}$$

Сумма $P_{0\,1} + \cdots + P_{0\,m}$ коммутирует с симметризатором $H^{(m)}$, так что всё выражение равно нулю по свойству цикличности следа.

Для проверки второго из соотношений (7.13) будем использовать следующую формулу, вытекающую из (7.6):

$$[E[1]_0, \mathcal{E}_a] = E[0]_0 + P_{0\,a}\,E[0]_a - E[0]_a\,P_{0\,a} + K\,(P_{0\,a} - 1/N). \tag{7.15}$$

Из неё получаем

$$\begin{aligned} E[1]_0 \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} \mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_m &= \sum_{a=1}^{m} \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} \mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_{a-1} \\ &\times \big(E[0]_0 + P_{0\,a}\,E[0]_a - E[0]_a\,P_{0\,a} + K\,(P_{0\,a} - 1/N)\big)\,\mathcal{E}_{a+1} \ldots \mathcal{E}_m. \end{aligned}$$

Применяя формулу (7.14), можем переписать это выражение в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leqslant a<b\leqslant m} \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} \mathcal{E}_1 \ldots \widehat{\mathcal{E}}_a \ldots \big(P_{0\,b}\,\mathcal{E}_b - \mathcal{E}_b\,P_{0\,b}\big) \ldots \mathcal{E}_m \\ &+ \sum_{1\leqslant a<b\leqslant m} \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)}\,P_{0\,a}\,\mathcal{E}_1 \ldots \widehat{\mathcal{E}}_a \ldots \big(P_{ab}\,\mathcal{E}_b - \mathcal{E}_b\,P_{ab}\big) \ldots \mathcal{E}_m \\ &- \sum_{1\leqslant a<b\leqslant m} \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} \mathcal{E}_1 \ldots \widehat{\mathcal{E}}_a \ldots \big(P_{ab}\,\mathcal{E}_b - \mathcal{E}_b\,P_{ab}\big) \ldots \mathcal{E}_m\,P_{0\,a} \\ &+ K \sum_{a=1}^{m} \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} (P_{0\,a} - 1/N)\,\mathcal{E}_1 \ldots \widehat{\mathcal{E}}_a \ldots \mathcal{E}_m, \end{aligned}$$

где шляпки указывают на символы, которые следует пропустить. Преобразуем это выражение дальше, применяя сопряжения с помощью элементов симметрической группы $\mathfrak{S}_m$ и используя свойства симметризатора $H^{(m)}$ и свойство цикличности следа. При $1 \leqslant a < b \leqslant m$ справедливы соотношения $P_{a\,b}\, H^{(m)} = H^{(m)}\, P_{a\,b} = H^{(m)}$ и их следствия

$$H^{(m)}\, P_{0\,a} P_{a\,b} = H^{(m)}\, P_{0\,b} \qquad \text{и} \qquad P_{a\,b} P_{0\,a}\, H^{(m)} = P_{0\,b}\, H^{(m)}.$$

Поэтому первая сумма в выражении равна

$$\sum_{1 \leqslant a < b \leqslant m} \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, H^{(m)} \mathcal{E}_1 \dots \widehat{\mathcal{E}}_a \dots \big(P_{0\,b}\, \mathcal{E}_b - \mathcal{E}_b\, P_{0\,b}\big) \dots \mathcal{E}_m$$
$$= \sum_{1 \leqslant a < b \leqslant m} \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, H^{(m)} P_{m-1\,m} \dots P_{a\,a+1}\, \mathcal{E}_1 \dots \widehat{\mathcal{E}}_a \dots \big(P_{0\,b}\, \mathcal{E}_b - \mathcal{E}_b\, P_{0\,b}\big) \dots \mathcal{E}_m,$$

что можно записать как

$$\sum_{1 \leqslant a < b \leqslant m} \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, H^{(m)}\, \mathcal{E}_1 \dots \big(P_{0\,b-1}\, \mathcal{E}_{b-1} - \mathcal{E}_{b-1}\, P_{0\,b-1}\big) \dots \mathcal{E}_{m-1}\, P_{m-1\,m} \dots P_{a\,a+1}$$
$$= \sum_{a=1}^{m-1} a\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, \big(H^{(m)} P_{0\,a} - P_{0\,a}\, H^{(m)}\big)\, \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1}.$$

Такие же преобразования остальных сумм приводят к формуле

$$\begin{aligned} E[1]_0\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, H^{(m)} \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_m = {} & \sum_{a=1}^{m-1} 2\,a\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, H^{(m)} P_{0\,a}\, \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1} \\ & - \binom{m}{2} \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, \big(H^{(m)}\, P_{0\,m} + P_{0\,m}\, H^{(m)}\big)\, \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1} \\ & + m K\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, H^{(m)} \big(P_{0\,m} - 1/N\big)\, \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1}. \end{aligned}$$

Полагая $\omega = N$ в лемме 1.3.4 и используя свойства (1.72), получаем

$$\mathrm{tr}_m\, H^{(m)} = \frac{N + m - 1}{m}\, H^{(m-1)}.$$

Далее, рассуждая как в доказательстве леммы 1.3.4, и учитывая формулы (1.68), находим, что

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_m\, H^{(m)} P_{0\,m} & = \frac{1}{m}\, \mathrm{tr}_m\, H^{(m-1)} \Big(1 + \sum_{a=1}^{m-1} P_{a\,m}\Big) P_{0\,m} \\ & = \frac{1}{m}\, \mathrm{tr}_m\, H^{(m-1)}\, P_{0\,m} \Big(1 + \sum_{a=1}^{m-1} P_{0\,a}\Big) = \frac{1}{m}\, H^{(m-1)} \Big(1 + \sum_{a=1}^{m-1} P_{0\,a}\Big). \end{aligned}$$

Из свойства цикличности следа (или аналогичного прямого вычисления) вытекает, что след $\mathrm{tr}_m P_{0\,m} H^{(m)}$ даётся той же самой формулой. Поэтому

$$\begin{aligned}
&E[1]_0 \,\mathrm{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)} \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_m \\
&\qquad = \frac{N+m-1}{m} \sum_{a=1}^{m-1} 2\,a\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m-1} H^{(m-1)} P_{0\,a}\, \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1} \\
&\qquad + (K-m+1)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m-1} H^{(m-1)} \Big(1 + \sum_{a=1}^{m-1} P_{0\,a}\Big) \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1} \\
&\qquad - \frac{K(N+m-1)}{N}\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m-1} H^{(m-1)}\, \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1}.
\end{aligned}$$

Наконец, применяя свойство (3.10) матриц Манина и лемму 7.1.2, мы выводим, что при $1 \leqslant a < b \leqslant m-1$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{1,\dots,m-1} H^{(m-1)} P_{0\,a}\, \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1} &= \mathrm{tr}_{1,\dots,m-1} P_{0\,a}\, \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1} H^{(m-1)} \\
&= \mathrm{tr}_{1,\dots,m-1} P_{0\,a}\, P_{a\,b}\, \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1} H^{(m-1)} \\
&= \mathrm{tr}_{1,\dots,m-1} P_{a\,b}\, P_{0\,b} \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1} H^{(m-1)} \\
&= \mathrm{tr}_{1,\dots,m-1} H^{(m-1)} P_{0\,b}\, \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&E[1]_0 \,\mathrm{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)} \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_m \\
&\qquad = (K+N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m-1} H^{(m-1)} \Big(\sum_{a=1}^{m-1} P_{0\,a} - \frac{m-1}{N}\Big) \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{m-1},
\end{aligned}$$

а это выражение равно нулю, так как $K+N=0$ на критическом уровне.

Доказательство для элементов $\theta_{m\,a}$. Достаточно проверить, что для всех i, j справедливы соотношения

$$E_{ij}[0]\,\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^m = E_{ij}[1]\,\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^m = 0 \tag{7.16}$$

в $\widehat{\mathfrak{gl}}_N$-модуле $V_{-N}(\mathfrak{gl}_N) \otimes \mathbb{C}[\tau]$ с тривиальным действием на $\mathbb{C}[\tau]$. Рассмотрим тензорное произведение алгебр

$$\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{U},$$

в котором копии $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$ занумерованы индексами $0, 1, 2$, а U обозначает универсальную обёртывающую алгебру для алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{gl}}_N \oplus \mathbb{C}\tau$. Соотношения (7.16) можно переписать в матричной форме как

$$E[0]_0 \,\mathrm{tr}_1 \mathcal{E}_1^m = 0 \qquad \text{и} \qquad E[1]_0 \,\mathrm{tr}_1 \mathcal{E}_1^m = 0 \tag{7.17}$$

по модулю левого идеала в алгебре U, порождённого пространством $\mathfrak{gl}_N[t]$ и элементом $K+N$. Отметим тождество

$$\big[E[0]_0, \mathcal{E}_1^m\big] = P_{01}\mathcal{E}_1^m - \mathcal{E}_1^m P_{01}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{7.18}$$

которое вытекает из (7.14):

$$\big[E[0]_0, \mathcal{E}_1^m\big] = \sum_{r=1}^m \mathcal{E}_1^{r-1} \big[E[0]_0, \mathcal{E}_1\big] \, \mathcal{E}_1^{m-r} = \sum_{r=1}^m \mathcal{E}_1^{r-1} [P_{01}, \mathcal{E}_1] \, \mathcal{E}_1^{m-r} = [P_{01}, \mathcal{E}_1^m].$$

Первое соотношение в (7.17) теперь получается, если взять след tr_1 в обеих частях тождества (7.18) и применить его свойство цикличности. Для доказательства второго соотношения в (7.17) используем формулу (7.15):

$$\big[E[1]_0, \mathcal{E}_1^m\big] = \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_1^{i-1} \Big(E[0]_0 + P_{01} E[0]_1 - E[0]_1 P_{01} + K P_{01} - \frac{K}{N} \Big) \, \mathcal{E}_1^{m-i}. \tag{7.19}$$

С помощью тождества (7.18) и соотношения $\mathcal{E}_1^{m-i} = \mathrm{tr}_2 \, \mathcal{E}_2^{m-i} P_{12}$ перепишем выражение (7.19) по модулю левого идеала в U, порождённого пространством $\mathfrak{gl}_N[t]$, в виде

$$\begin{aligned} \big[E[1]_0, \mathcal{E}_1^m\big] = \sum_{i=1}^m \Big(\mathcal{E}_1^{i-1} \big[P_{01}, \mathcal{E}_1^{m-i}\big] + K \mathcal{E}_1^{i-1} P_{01} \mathcal{E}_1^{m-i} \Big) - \frac{mK}{N} \, \mathcal{E}_1^{m-1} \\ + \mathrm{tr}_2 \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_1^{i-1} \big(P_{01} E[0]_1 - E[0]_1 P_{01} \big) \, \mathcal{E}_2^{m-i} P_{12}. \end{aligned}$$

Теперь ещё раз применим (7.18), чтобы преобразовать последнее слагаемое к виду

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_2 \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_1^{i-1} \big(P_{01} E[0]_1 - E[0]_1 P_{01} \big) \, \mathcal{E}_2^{m-i} P_{12} \\ = \mathrm{tr}_2 \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_1^{i-1} P_{01} \big[P_{12}, \mathcal{E}_2^{m-i}\big] P_{12} - \mathrm{tr}_2 \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_1^{i-1} \big[P_{12}, \mathcal{E}_2^{m-i}\big] P_{01} P_{12}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение $\mathrm{tr}_2 P_{02} = 1$, упростим это выражение и запишем его как

$$\sum_{i=1}^{m-1} \Big(N \, \mathcal{E}_1^{i-1} P_{01} \mathcal{E}_1^{m-i} - \mathcal{E}_1^{i-1} P_{01} \, \mathrm{tr} \, \mathcal{E}^{\, m-i} + \mathcal{E}_1^{i-1} \mathcal{E}_0^{m-i} \Big) - (m-1) \, \mathcal{E}_1^{m-1}.$$

Собирая теперь все слагаемые вместе и применяя след tr_1, получим

$$\begin{aligned} \big[E[1]_0, \mathrm{tr}_1 \, \mathcal{E}_1^m\big] = (K+N) \Big(\mathcal{E}_0^{m-1} - \frac{m}{N} \, \mathrm{tr} \, \mathcal{E}^{m-1} \Big) + (K+N-m+2) \, \mathcal{E}_0^{m-1} \\ + (K+N+1) \, \mathrm{tr}_1 \sum_{i=2}^{m-1} P_{01} \, \mathcal{E}_0^{i-1} \mathcal{E}_1^{m-i} - \mathrm{tr}_1 \sum_{i=2}^{m-1} \big[\mathcal{E}_0^{i-1}, \mathcal{E}_1^{m-i}\big]. \end{aligned}$$

Наконец, по лемме 7.1.2 и следствию 3.2.9 мы можем записать

$$\sum_{i=2}^{m-1} \big[\mathcal{E}_0^{i-1}, \mathcal{E}_1^{m-i}\big] = \sum_{i=2}^{m-1} P_{01} \big[\mathcal{E}_0^{i-1}, \mathcal{E}_1^{m-i}\big].$$

Вычисляя след tr_1 в обеих частях, получаем

$$\mathrm{tr}_1 \sum_{i=2}^{m-1} \big[\mathcal{E}_0^{i-1}, \mathcal{E}_1^{m-i}\big] = \mathrm{tr}_1 \sum_{i=2}^{m-1} P_{01}\, \mathcal{E}_0^{i-1} \mathcal{E}_1^{m-i} - (m-2)\, \mathcal{E}_0^{m-1}.$$

С учётом этой формулы, мы можем заключить, что

$$\big[E[1]_0, \mathrm{tr}_1\, \mathcal{E}_1^m\big] = (K+N)\Big(2\, \mathcal{E}_0^{m-1} - \frac{m}{N}\, \mathrm{tr}\, \mathcal{E}^{m-1} + \mathrm{tr}_1 \sum_{i=2}^{m-1} P_{01}\, \mathcal{E}_0^{i-1} \mathcal{E}_1^{m-i}\Big).$$

Однако это выражение аннулируется в вакуумном модуле $V_{-N}(\mathfrak{gl}_N)$, поскольку $K+N=0$. □

Ещё одно доказательство теоремы 7.1.3 будет получено в § 10.5. Теперь мы можем доказать теорему Фейгина–Френкеля (теорема 6.3.1) для типа A.

Теорема 7.1.4. *Каждое из семейств*

$$\phi_1, \ldots, \phi_N, \qquad \psi_{11}, \ldots, \psi_{NN} \qquad и \qquad \theta_{11}, \ldots, \theta_{NN}$$

— это полный набор векторов Сигала–Сугавары для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$.

Доказательство. Градуированное пространство $\mathrm{gr}\, V_{-N}(\mathfrak{gl}_N)$, введённое в (6.17), отождествляется с симметрической алгеброй $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\big)$. Символы элементов каждого семейства в симметрической алгебре совпадают с образами некоторых элементов алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$ относительно вложения $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N) \hookrightarrow \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\big)$, при котором $X \in \mathfrak{gl}_N$ переходит в $X[-1]$. В силу теорем 6.3.3 и 7.1.3 нам нужно только проверить, что соответствующие элементы в $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$ — это алгебраически независимые образующие алгебры инвариантов $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{gl}_N}$; см. рассуждения после доказательства теоремы 6.3.3. Однако это уже было проверено в § 2.1, где были построены эти инварианты и вычислены их образы Шевалле. Соответствующие семейства инвариантов, отвечающие векторам Сигала–Сугавары в формулировке теоремы, содержатся в (2.6), (2.20), (2.21) и (2.11). □

Пример 7.1.5. Справедливы формулы

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^{N} E_{ii}[-1],$$

$$\phi_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \big(E_{ii}[-1]\, E_{jj}[-1] - E_{ji}[-1]\, E_{ij}[-1]\big) + \sum_{i=1}^{N} (i-1)\, E_{ii}[-2].$$

Пример 7.1.6. Из определения (7.9) следует, что

$$\theta_{1\,1} = \operatorname{tr} E[-1],$$

$$\theta_{2\,2} = \operatorname{tr} E[-1]^2 + \operatorname{tr} E[-2],$$

$$\theta_{3\,3} = \operatorname{tr} E[-1]^3 + 2\operatorname{tr} E[-1]\,E[-2] + \operatorname{tr} E[-2]\,E[-1] + 2\operatorname{tr} E[-3],$$

$$\theta_{4\,4} = \operatorname{tr} E[-1]^4 + 3\operatorname{tr} E[-1]^2\,E[-2] + 2\operatorname{tr} E[-1]\,E[-2]\,E[-1] + \operatorname{tr} E[-2]\,E[-1]^2 \\ + 6\operatorname{tr} E[-1]\,E[-3] + 2\operatorname{tr} E[-3]\,E[-1] + 3\operatorname{tr} E[-2]^2 + 6\operatorname{tr} E[-4].$$

Эти выражения можно упростить, если применить соотношения

$$\operatorname{tr} E[r]\,E[s] = \operatorname{tr} E[s]\,E[r] \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tr} E[r]\,E[s]^2 = \operatorname{tr} E[s]^2 E[r], \tag{7.20}$$

в которых r и s — это произвольные отрицательные целые числа. Действительно, в силу (7.6)

$$E[r]_1\,E[s]_2 - E[s]_2\,E[r]_1 = \big(E[r+s]_1 - E[r+s]_2\big)\,P_{12}.$$

Умножив обе части справа на P_{12} и взяв след $\operatorname{tr}_{1,2}$, получим первое соотношение в (7.20). Аналогично

$$E[r]_1\,E[s]_2^2 - E[s]_2^2\,E[r]_1 = \big(E[r+s]_1 - E[r+s]_2\big)\,P_{12}\,E[s]_2 \\ + E[s]_2\,\big(E[r+s]_1 - E[r+s]_2\big)\,P_{12},$$

так что, умножая справа на P_{12} и применяя первое соотношение, мы находим, что

$$\operatorname{tr} E[r]\,E[s]^2 - \operatorname{tr} E[s]^2 E[r] = N\operatorname{tr} E[r+s]\,E[s] - \operatorname{tr} E[r+s]\operatorname{tr} E[s] \\ + \operatorname{tr} E[s]\operatorname{tr} E[r+s] - N\operatorname{tr} E[s]\,E[r+s] = 0,$$

откуда вытекает второе соотношение в (7.20). Вспомним, что центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ инвариантен относительно оператора T; см. (6.7). При $k \geqslant 1$ имеем

$$T^k\,\theta_{1\,1} = k!\operatorname{tr} E[-k-1].$$

Кроме того, в силу (7.20) получаем

$$T\operatorname{tr} E[-1]^2 = 2\operatorname{tr} E[-1]E[-2],$$

$$T^2\operatorname{tr} E[-1]^2 = 4\operatorname{tr} E[-1]E[-3] + 2\operatorname{tr} E[-2]^2$$

и

$$T\operatorname{tr} E[-1]^3 = 2\operatorname{tr} E[-1]^2E[-2] + \operatorname{tr} E[-1]E[-2]E[-1].$$

Учитывая эти соотношения, мы можем заключить, что все элементы

$$\operatorname{tr} E[-1], \qquad \operatorname{tr} E[-1]^2, \qquad \operatorname{tr} E[-1]^3, \qquad \operatorname{tr} E[-1]^4 - \operatorname{tr} E[-2]^2 \tag{7.21}$$

— это векторы Сигала–Сугавары для $\mathfrak{gl}_N$. В частности, полные наборы векторов Сигала–Сугавары имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\text{для}\quad \mathfrak{gl}_2: &&\operatorname{tr} E[-1], \quad \operatorname{tr} E[-1]^2,\\
&\text{для}\quad \mathfrak{gl}_3: &&\operatorname{tr} E[-1], \quad \operatorname{tr} E[-1]^2, \quad \operatorname{tr} E[-1]^3,\\
&\text{для}\quad \mathfrak{gl}_4: &&\operatorname{tr} E[-1], \quad \operatorname{tr} E[-1]^2, \quad \operatorname{tr} E[-1]^3, \quad \operatorname{tr} E[-1]^4 - \operatorname{tr} E[-2]^2.
\end{aligned}
$$
□

§ 7.2. Операторы Сугавары для типа A

Введём ряды Лорана от z с коэффициентами в алгебре $\mathrm{U}_{-N}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ по формуле

$$
E_{ij}(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} E_{ij}[r]\, z^{-r-1}, \qquad i,j = 1,\dots,N. \tag{7.22}
$$

Мы будем пользоваться матричными обозначениями, как в §7.1, и соберём ряды $E_{ij}(z)$ в матрицу $E(z)$, так что

$$
E(z) = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes E_{ij}(z).
$$

При $a \in \{1,\dots,m\}$ перенесём обозначение (7.5) на элементы $E(z)_a$ пространства (7.4), где U обозначает теперь пространство полиномиальных дифференциальных операторов от z с коэффициентами в $\widetilde{\mathrm{U}}_{-N}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)[[z,z^{-1}]]$.

В силу аргументов, изложенных в §6.6, применение соответствия (6.35) между состояниями и полями к коэффициентам полиномов в разложениях (7.7)–(7.9) приводит к определению рядов Лорана $\phi_{m\,a}(z), \psi_{m\,a}(z)$ и $\theta_{m\,a}(z)$, заданных следующими формулами, с обычной интерпретацией нормального упорядочения и его применением справа налево:

$$
\begin{aligned}
:\operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)}\big(\partial_z + E(z)_1\big)\dots\big(\partial_z + E(z)_m\big):&\\
= \phi_{m\,0}(z)\,\partial_z^m + \dots + \phi_{m\,m}(z)&,
\end{aligned} \tag{7.23}
$$

$$
\begin{aligned}
:\operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)}\big(\partial_z + E(z)_1\big)\dots\big(\partial_z + E(z)_m\big):&\\
= \psi_{m\,0}(z)\,\partial_z^m + \dots + \psi_{m\,m}(z)&
\end{aligned} \tag{7.24}
$$

и

$$
:\operatorname{tr}\big(\partial_z + E(z)\big)^m: \;= \theta_{m\,0}(z)\,\partial_z^m + \dots + \theta_{m\,m}(z). \tag{7.25}
$$

Кроме того, следуя (7.11), определим ряды $\phi_a(z)$ по правилу

$$
:\operatorname{cdet}\big(\partial_z + E(z)\big): \;= \partial_z^N + \phi_1(z)\,\partial_z^{N-1} + \dots + \phi_N(z). \tag{7.26}
$$

Из соотношений между векторами Сигала–Сугавары, отмеченных в §7.1, вытекают формулы

$$
\phi_{N\,a}(z) = \phi_a(z), \qquad a = 1,\dots,N,
$$

и

$$\phi_{m\,a}(z) = \binom{N-a}{m-a}\phi_a(z), \qquad 0 \leqslant a \leqslant m \leqslant N$$

см. (7.12). В частности, $\phi_{m\,m}(z) = \phi_m(z)$ при $m = 1, \ldots, N$. Применяя предложение 6.6.1 вместе с теоремами 7.1.3 и 7.1.4, приходим к следующему результату.

Теорема 7.2.1. *Все коэффициенты рядов Лорана $\phi_{m\,a}(z)$, $\psi_{m\,a}(z)$ и $\theta_{m\,a}(z)$ лежат в центре алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-N}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$. Кроме того, коэффициенты каждого семейства рядов Лорана*

$$\phi_1(z), \ldots, \phi_N(z), \qquad \psi_{1\,1}(z), \ldots, \psi_{N\,N}(z) \qquad \textit{и} \qquad \theta_{1\,1}(z), \ldots, \theta_{N\,N}(z)$$

— это топологические образующие центра алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-N}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$. □

Пример 7.2.2. Несколько первых векторов Сигала–Сугавары для $\mathfrak{gl}_N$ перечислены в (7.21). Соответствующие ряды Лорана приобретают вид

$$\operatorname{tr} E(z), \qquad :\operatorname{tr} E(z)^2:, \qquad :\operatorname{tr} E(z)^3:, \qquad :\operatorname{tr} E(z)^4: - :\operatorname{tr}\big(\partial_z E(z)\big)^2:.$$

Справедливо разложение

$$\operatorname{tr} E(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{N} E_{ii}[r]\, z^{-r-1},$$

так что все элементы $E_{11}[r] + \cdots + E_{NN}[r]$ лежат в центре алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-N}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ (в действительности эти элементы лежат в центре алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{\kappa}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ для любого уровня κ). Кроме того,

$$:\operatorname{tr} E(z)^2: \;=\; :\sum_{i,j=1}^{N} E_{ij}(z)E_{ji}(z) := \sum_{i,j=1}^{N}\Big(E_{ij}(z)_+E_{ji}(z) + E_{ji}(z)E_{ij}(z)_-\Big).$$

Следовательно, для любого $p \in \mathbb{Z}$ коэффициент при z^{-p-2} в этом ряде Лорана — это центральный элемент в алгебре $\widetilde{\mathrm{U}}_{-N}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$, заданный формулой

$$\sum_{i,j=1}^{N}\Big(\sum_{r<0} E_{ij}[r]E_{ji}[p-r] + \sum_{r\geqslant 0} E_{ji}[p-r]E_{ij}[r]\Big).$$

Аналогичные явные формулы для центральных элементов более высокой степени в алгебре $\widetilde{\mathrm{U}}_{-N}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ можно получить как коэффициенты при всех степенях переменной z, представив нормально упорядоченные следы в развёрнутом виде; например,

$$\begin{aligned}
:\operatorname{tr} E(z)^3: \;=\; :\sum_{i,j,k=1}^{N} E_{ij}(z)E_{jk}(z)E_{ki}(z): \\
= \sum_{i,j,k=1}^{N}\Big(E_{ij}(z)_+E_{jk}(z)_+E_{ki}(z) + E_{ij}(z)_+E_{ki}(z)E_{jk}(z)_- \\
+ E_{jk}(z)_+E_{ki}(z)E_{ij}(z)_- + E_{ki}(z)E_{jk}(z)_-E_{ij}(z)_-\Big).
\end{aligned}$$

В завершение этого параграфа мы обсудим, как можно воспроизвести элементы Казимира для $\mathfrak{gl}_N$, построенные в гл. 4, из элементов центра Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ (см. §6.5) или из операторов Сугавары.

Рассмотрим векторы Сигала–Сугавары для $\mathfrak{gl}_N$, возникающие в разложении (7.7); см. теорему 7.1.3. Образы коэффициентов полинома (7.7) относительно гомоморфизма ϱ, определённого в (6.30), можно записать в виде

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)}\big(-\partial_z + E_1\, z^{-1}\big) \dots \big(-\partial_z + E_m\, z^{-1}\big), \tag{7.27}$$

где дифференциальный оператор $-\partial_z$ понимается как образ элемента τ. Используя соотношение $\partial_z\, z = z\,\partial_z + 1$ и полагая $u = -\partial_z\, z$, мы можем записать

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)}\big(-\partial_z + E_1\, z^{-1}\big) \dots \big(-\partial_z + E_m\, z^{-1}\big)\, z^m$$
$$= \operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)}\big(u + E_1\big) \dots \big(u + E_m - m + 1\big),$$

тем самым получая элементы Казимира для $\mathfrak{gl}_N$, заданные формулой (4.35). В частности, определитель Капелли (4.37) воспроизводится как образ столбцового определителя (7.11) при гомоморфизме ϱ:

$$\operatorname{cdet}\big(-\partial_z + E\, z^{-1}\big)\, z^N = C(u).$$

Элементы Казимира в виде некоммутативных перманентов (4.39) и инварианты Гельфанда (4.41) возникают из соответствующих векторов Сигала–Сугавары в (7.8) и (7.9).

Применяя другой вариант того же самого рассуждения, возьмём образы операторов Сугавары в факторе пополненной универсальной обёртывающей алгебры по левому идеалу, порождённому пространством $\mathfrak{gl}_N[t]$. Эти образы можно рассматривать как элементы центра Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$. Например, для образа левой части в (7.23) получаем выражение

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)}\big(\partial_z + E(z)_{+\,1}\big) \dots \big(\partial_z + E(z)_{+\,m}\big), \tag{7.28}$$

в котором

$$E(z)_+ = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes E_{ij}(z)_+, \qquad E_{ij}(z)_+ = \sum_{r<0} E_{ij}[r]\, z^{-r-1}.$$

Коэффициенты дифференциального оператора (7.28) — это степенные ряды по z, все коэффициенты которых лежат в алгебре $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$. Возьмём ненулевой элемент $a \in \mathbb{C}$ и применим точечный гомоморфизм ϱ_a, определённый в (6.32), к этим коэффициентам. Относительно этого гомоморфизма имеем

$$\varrho_a : E_{ij}(z)_+ \mapsto -E_{ij}(z-a)^{-1}.$$

Сдвинем теперь переменную с помощью замены $z \mapsto z + a$, так что образ оператора (7.28) относительно ϱ_a совпадёт с (7.27) с точностью до знака. Такое же рассуждение, применённое к операторам Сугавары в (7.24)–(7.26), приводит к соответствующим элементам Казимира, построенным в гл. 4.

§ 7.3. Библиографические замечания

Явные формулы для образующих центра Фейгина–Френкеля для типа A впервые появились в препринте А. Червова и Д. Талалаева [**24**] в форме, близкой к (7.26). Их работа опиралась на конструкцию высших гамильтонианов Годена, полученную Талалаевым [**146**]. Прямое доказательство теоремы 7.1.4 для элементов ϕ_a было дано Червовым и автором [**23**]. В доказательстве теоремы 7.1.3 мы следовали матричному подходу, использованному в работе [**110**] и в статье Рагуси и автора [**114**]. В этой статье обсуждаются супералгебра Ли $\mathfrak{gl}_{m|n}$ и соответствующая суперверсия теоремы 7.1.3. Геометрическое описание векторов Сигала–Сугавары для типа A было дано в работе Камгарпура [**90**] в контексте локального геометрического соответствия Ленглендса.

Глава 8

Образующие центра для типов B, C и D

Теперь мы построим аналоги векторов Сигала–Сугавары из гл. 7 для ортогональной и симплектической алгебр Ли. Как и для типа A, это приведёт к прямому доказательству теоремы Фейгина–Френкеля (теорема 6.3.1). Затем мы применим предложение 6.6.1, чтобы получить явные формулы для образующих центра пополненной универсальной обёртывающей алгебры на критическом уровне.

§ 8.1. Векторы Сигала–Сугавары для типов B и D

Сохраним обозначения для образующих ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$, введённые в гл. 5, считая, что $N = 2n$ или $N = 2n+1$. В обоих случаях $\mathfrak{o}_N$ — это подалгебра в $\mathfrak{gl}_N$, линейно порождённая элементами F_{ij}, определёнными в (5.1).

В соответствии с определением (6.5) рассмотрим теперь аффинную алгебру Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{o}}_N = \mathfrak{o}_N\,[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ и положим $F_{ij}[r] = F_{ij}t^r$ для всех $r \in \mathbb{Z}$. Дуальное число Кокстера для алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ находится по формуле

$$h^\vee = N - 2, \tag{8.1}$$

так что нормализованную форму Киллинга (6.4) можно записать как

$$\langle X,\, Y\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr} XY, \qquad X, Y \in \mathfrak{o}_N.$$

Замечание 8.1.1. В действительности формула (8.1) даёт правильные значения дуального числа Кокстера для простой алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ только при $N \geqslant 5$; ср. [**86**, упражнение 7.10]. Алгебры Ли $\mathfrak{o}_3$ и $\mathfrak{sl}_2$ изоморфны, так что при $N = 3$ правильное значение должно быть $h^\vee = 2$. Кроме того, алгебра Ли $\mathfrak{o}_4$ не является простой, она изоморфна прямой сумме $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$. С другой стороны, инварианты вакуумных модулей, построенные ниже, имеют смысл для всех $N \geqslant 3$ при условии, что значения $h^\vee$ определены по формуле (8.1) для случаев $N = 3$ и $N = 4$. $\square$

В силу формул (5.2) аффинная алгебра Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{o}}_N = \mathfrak{o}_N[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ имеет коммутационные соотношения

$$\begin{aligned}\big[F_{ij}[r], F_{kl}[s]\big] &= \delta_{kj}\, F_{i\,l}[r+s] - \delta_{i\,l}\, F_{kj}[r+s] \\ &\quad - \delta_{k\,i'}\, F_{j'l}[r+s] + \delta_{j'l}\, F_{k\,i'}[r+s] + r\,\delta_{r,-s}\, K\big(\delta_{kj}\,\delta_{i\,l} - \delta_{k\,i'}\,\delta_{j'l}\big),\end{aligned} \tag{8.2}$$

в которых K — это центральный элемент, и выполняется свойство симметрии $F_{ij}[r]+F_{j'i'}[r]=0$. Для любого значения $r\in\mathbb{Z}$ будем рассматривать матрицу $F[r]=\big[F_{ij}[r]\big]$ размера $N\times N$ как элемент

$$F[r]=\sum_{i,j=1}^{N} e_{ij}\otimes F_{ij}[r]\in\operatorname{End}\mathbb{C}^N\otimes\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{o}}_N).$$

Она обладает свойством симметрии $F[r]+F[r]'=0$; см. определение транспозиции в (2.24). Для каждого $a\in\{1,\dots,m\}$ введём элемент $F[r]_a$ алгебры

$$\underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N\otimes\dots\otimes\operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m}\otimes\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{o}}_N) \tag{8.3}$$

по формуле

$$F[r]_a=\sum_{i,j=1}^{N} 1^{\otimes(a-1)}\otimes e_{ij}\otimes 1^{\otimes(m-a)}\otimes F_{ij}[r]. \tag{8.4}$$

По аналогии с (5.6) из формул (8.2) вытекает, что определяющие соотношения для алгебры $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{o}}_N)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} F[r]_1\,F[s]_2-F[s]_2\,F[r]_1&\\ &=(P-Q)\,F[r+s]_2-F[r+s]_2\,(P-Q)+r\,\delta_{r,-s}\,(P-Q)\,K,\end{aligned} \tag{8.5}$$

где обе части — это элементы алгебры (8.3) при $m=2$; ср. предложение 7.1.1.

В случае чётного значения $N=2n$ введём (некоммутативный) *пфаффиан* $\operatorname{Pf}F[-1]$ (ср. (5.36)) как элемент универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{o}_N[t^{-1}]\big)$ по формуле

$$\operatorname{Pf}F[-1]=\frac{1}{2^n n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}}\operatorname{sgn}\sigma\cdot F_{\sigma(1)\,\sigma(2)'}[-1]\dots F_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)'}[-1]. \tag{8.6}$$

Пример 8.1.2. При $n=2$ получаем формулу

$$\begin{aligned}\operatorname{Pf}F[-1]=\frac{1}{2}\Big(&F_{13}[-1]\,F_{31}[-1]-F_{12}[-1]\,F_{21}[-1]+F_{11}[-1]\,F_{22}[-1]\\ &+F_{31}[-1]\,F_{13}[-1]-F_{21}[-1]\,F_{12}[-1]+F_{22}[-1]\,F_{11}[-1]\Big),\end{aligned}$$

и её можно привести к более простому виду:

$$\begin{aligned}\operatorname{Pf}F[-1]&=F_{11}[-1]\,F_{22}[-1]-F_{21}[-1]\,F_{12}[-1]+F_{31}[-1]\,F_{13}[-1]+F_{22}[-2]\\ &=F_{11}[-1]\,F_{22}[-1]-F_{12}[-1]\,F_{21}[-1]+F_{13}[-1]\,F_{31}[-1]-F_{22}[-2].\end{aligned}$$

□

Определение пфаффиана (8.6) связано с реализацией ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$, отвечающей симметрической билинейной форме (2.25) с матрицей $G=[\delta_{ij'}]$; см. (2.26). Нам будет удобно воспользоваться эквивалентным выражением для пфаффиана в *канонической* реализации алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$ кососимметрическими матрицами. Зафиксируем такую квадратную матрицу A

размера $2n \times 2n$, что $AA^t = G$. Введём новые образующие F°_{ij} алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$ по формуле

$$F^\circ = A^{-1} F A, \qquad F^\circ = [F^\circ_{ij}], \tag{8.7}$$

где $F = [F_{ij}]$ — это матрица, составленная из образующих алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$. Мы также рассматриваем эту матрицу как элемент (5.5). По аналогии с предложением 5.1.1 имеют место определяющие соотношения для алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{o}_{2n})$ в терминах матрицы F°:

$$F^\circ_1 F^\circ_2 - F^\circ_2 F^\circ_1 = (P - P^{\,t})\, F^\circ_2 - F^\circ_2\, (P - P^{\,t}) \tag{8.8}$$

вместе с соотношением симметрии $F^\circ + F^{\circ\, t} = 0$, где

$$P^{\,t} := P^{\,t_1} = P^{\,t_2} = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes e_{ij} \in \operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \operatorname{End} \mathbb{C}^N.$$

В самом деле, отображение $E \mapsto A^{-1} E A$ задаёт автоморфизм алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_{2n})$, так что матрица $E^\circ = A^{-1} E A$ удовлетворяет соотношению (4.10). Это легко проверить с использованием свойств (1.67). С другой стороны, поскольку

$$F = E - E' = E - G E^t G^{-1},$$

определение (8.7) равносильно формуле $F^\circ = E^\circ - E^{\circ\, t}$. Следовательно, матрица F° кососимметрична относительно стандартного транспонирования t, и соотношение (8.8) проверяется с помощью такого же рассуждения, как в доказательстве предложения 5.1.1, в котором вместо транспозиции (2.24) следует использовать транспозицию t.

Переходя к аффинному случаю, получаем, что определяющие соотношения для универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n})$ приобретают вид

$$\begin{aligned} &F^\circ[r]_1\, F^\circ[s]_2 - F^\circ[s]_2\, F^\circ[r]_1 \\ &\quad = (P - P^{\,t})\, F^\circ[r+s]_2 - F^\circ[r+s]_2\, (P - P^{\,t}) + r\, \delta_{r,-s}\, (P - P^{\,t})\, K \end{aligned} \tag{8.9}$$

и выполнено свойство симметрии $F^\circ[r] + F^\circ[r]^t = 0$, где при всех $r \in \mathbb{Z}$ матрица, составленная из образующих, задаётся формулой

$$F^\circ[r] = A^{-1} F[r] A, \qquad F^\circ[r] = \big[F^\circ_{ij}[r]\big].$$

В терминах образующих аффинной алгебры Ли соотношения (8.9) записываются в виде

$$\begin{aligned} \big[F^\circ_{ij}[r], F^\circ_{kl}[s]\big] &= \delta_{kj}\, F^\circ_{il}[r+s] - \delta_{il}\, F^\circ_{kj}[r+s] \\ &\quad - \delta_{ki}\, F^\circ_{jl}[r+s] + \delta_{jl}\, F^\circ_{ki}[r+s] + r\, \delta_{r,-s}\, K \big(\delta_{kj}\, \delta_{il} - \delta_{ki}\, \delta_{jl}\big). \end{aligned} \tag{8.10}$$

В частности, элементы $F^\circ_{ij}[r]$ и $F^\circ_{kl}[s]$ коммутируют, если все индексы i, j, k, l различны. Поэтому пфаффиан матрицы $F^\circ[-1]$ можно определить обычной формулой

$$\operatorname{Pf} F^\circ[-1] = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \cdot F^\circ_{\sigma(1)\, \sigma(2)}[-1] \dots F^\circ_{\sigma(2n-1)\, \sigma(2n)}[-1], \tag{8.11}$$

где суммирование производится по всем элементам σ подмножества $\mathcal{A}_{2n}$ в группе $\mathfrak{S}_{2n}$, состоящего из перестановок, которые удовлетворяют условиям $\sigma(2k-1) < \sigma(2k)$ для всех значений $k = 1, \ldots, n$, и $\sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2n-1)$.

Лемма 8.1.3. *Справедливо соотношение*

$$\operatorname{Pf} F[-1] = \det A \cdot \operatorname{Pf} F^{\circ}[-1].$$

Доказательство. Пфаффиан $\operatorname{Pf} F[-1]$ находится из разложения

$$\frac{\Psi^{\,n}}{n!} = \big(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n}\big) \otimes \operatorname{Pf} F[-1], \tag{8.12}$$

в котором

$$\Psi = \sum_{i<j} (e_i \wedge e_j) \otimes F_{i\,j\,'}[-1] \in \Lambda(\mathbb{C}^{2n}) \otimes \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n}),$$

где $\Lambda(\mathbb{C}^{2n})$ — это внешняя алгебра векторного пространства $\mathbb{C}^{2n}$. Учитывая матричное соотношение $\big[F_{i\,j\,'}[-1]\big] = F[-1]G = AF^{\circ}[-1]A^t$ и вводя матричные элементы матрицы $A = [a_{ij}]$, получаем

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} (e_i \wedge e_j) \otimes \sum_{k,l=1}^{2n} a_{ik}\, a_{jl}\, F^{\circ}_{kl}[-1] = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{2n} (e^{\circ}_k \wedge e^{\circ}_l) \otimes F^{\circ}_{kl}[-1],$$

где мы положили

$$e^{\circ}_k = \sum_{i=1}^{2n} a_{ik}\, e_i.$$

Мы можем заключить, что

$$\frac{\Psi^{\,n}}{n!} = \big(e^{\circ}_1 \wedge \cdots \wedge e^{\circ}_{2n}\big) \otimes \operatorname{Pf} F^{\circ}[-1] = \big(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n}\big) \otimes \det A \cdot \operatorname{Pf} F^{\circ}[-1].$$

Остаётся сравнить это выражение с (8.12). $\square$

Предложение 8.1.4. *Пфаффиан* $\operatorname{Pf} F[-1]$ *лежит в центре Фейгина–Френкеля* $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n})$.

Доказательство. В силу леммы 8.1.3 достаточно доказать, что

$$F^{\circ}_{ij}[0] \operatorname{Pf} F^{\circ}[-1] = 0 \qquad \text{и} \qquad F^{\circ}_{ij}[1] \operatorname{Pf} F^{\circ}[-1] = 0 \tag{8.13}$$

для всех $i, j \in \{1, \ldots, 2n\}$ в вакуумном модуле $V_{-h^\vee}(\mathfrak{o}_{2n})$. Заметим, что для любой перестановки $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$ отображение

$$F^{\circ}_{ij}[r] \mapsto F^{\circ}_{\pi(i)\,\pi(j)}[r], \qquad K \mapsto K,$$

задаёт автоморфизм аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{o}}_{2n}$. Кроме того, образ пфаффиана $\operatorname{Pf} F^{\circ}[-1]$ относительно продолжения этого автоморфизма на алгебру $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n})$ равен $\operatorname{sgn} \pi \cdot \operatorname{Pf} F^{\circ}[-1]$. Следовательно, достаточно проверить свойства (8.13) при $i = 1$ и $j = 2$. Элемент $F^{\circ}_{12}[0]$ коммутирует со слагаемыми в (8.11), отвечающими таким перестановкам σ, что $\sigma(1) = 1$ и $\sigma(2) = 2$. Предположим теперь, что $\sigma \in \mathcal{A}_{2n}$ и $\sigma(2) > 2$. Тогда $\sigma(3) = 2$ и $\sigma(4) > 2$. В модуле $V_{-h^\vee}(\mathfrak{o}_{2n})$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} F^\circ_{12}[0]\, F^\circ_{1\,\sigma(2)}[-1]\, F^\circ_{2\,\sigma(4)}[-1] \dots F^\circ_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)}[-1] \\ = -F^\circ_{2\,\sigma(2)}[-1]\, F^\circ_{2\,\sigma(4)}[-1] \dots F^\circ_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)}[-1] \\ + F^\circ_{1\,\sigma(2)}[-1]\, F^\circ_{1\,\sigma(4)}[-1] \dots F^\circ_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)}[-1]. \end{aligned}$$

Положим $i = \sigma(2)$ и $j = \sigma(4)$. Перестановка $\sigma' = \sigma\,(2\,4)$ тоже лежит в подмножестве $\mathcal{A}_{2n}$, и $\operatorname{sgn}\sigma' = -\operatorname{sgn}\sigma$. Применяя соотношения (8.10), получим

$$-F^\circ_{2\,i}[-1]\, F^\circ_{2\,j}[-1] + F^\circ_{1\,i}[-1]\, F^\circ_{1\,j}[-1] + F^\circ_{2\,j}[-1]\, F^\circ_{2\,i}[-1] - F^\circ_{1\,j}[-1]\, F^\circ_{1\,i}[-1] = 0.$$

Отсюда следует, что все слагаемые в разложении элемента $F^\circ_{12}[0] \operatorname{Pf} F^\circ[-1]$, соответствующие парам вида (σ, σ'), попарно аннулируются, что доказывает первое соотношение в (8.13). Проверим теперь, что

$$F^\circ_{12}[1] \operatorname{Pf} F^\circ[-1] = 0. \tag{8.14}$$

Сначала рассмотрим слагаемые в (8.11), удовлетворяющие условиям $\sigma(1) = 1$ и $\sigma(2) = 2$. В вакуумном модуле $V_{-h^\vee}(\mathfrak{o}_{2n})$ имеем

$$\begin{aligned} F^\circ_{12}[1]\, F^\circ_{1\,2}[-1]\, F^\circ_{\sigma(3)\,\sigma(4)}[-1] \dots F^\circ_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)}[-1] \\ = -K\, F^\circ_{\sigma(3)\,\sigma(4)}[-1] \dots F^\circ_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)}[-1]. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\tau \in \mathcal{A}_{2n}$ и $\tau(2) > 2$. Тогда $\tau(3) = 2$ и $\tau(4) > 2$. Получаем

$$\begin{aligned} F^\circ_{12}[1]\, F^\circ_{1\,\tau(2)}[-1]\, F^\circ_{2\,\tau(4)}[-1] \dots F^\circ_{\tau(2n-1)\,\tau(2n)}[-1] \\ = -F^\circ_{2\,\tau(2)}[0]\, F^\circ_{2\,\tau(4)}[-1] \dots F^\circ_{\tau(2n-1)\,\tau(2n)}[-1] \\ = F^\circ_{\tau(2)\,\tau(4)}[-1] \dots F^\circ_{\tau(2n-1)\,\tau(2n)}[-1]. \end{aligned}$$

Зафиксируем такую перестановку $\sigma \in \mathcal{A}_{2n}$, что $\sigma(1) = 1$ и $\sigma(2) = 2$, и вычислим коэффициент при мономе

$$F^\circ_{\sigma(3)\,\sigma(4)}[-1] \dots F^\circ_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)}[-1]$$

в разложении элемента $F^\circ_{12}[1] \operatorname{Pf} F^\circ[-1]$. Вклад в этот коэффициент может возникнуть только из слагаемых в формуле для пфаффиана $\operatorname{Pf} F^\circ[-1]$, отвечающих перестановкам $\tau \in \mathcal{A}_{2n}$ вида

$$\tau = \big[1, \sigma(2k-1), 2, \sigma(2k), \sigma(3), \sigma(4), \dots, \widehat{\sigma}(2k-1), \widehat{\sigma}(2k), \dots, \sigma(2n-1), \sigma(2n)\big]$$

и

$$\tau = \big[1, \sigma(2k), 2, \sigma(2k-1), \sigma(3), \sigma(4), \dots, \widehat{\sigma}(2k-1), \widehat{\sigma}(2k), \dots, \sigma(2n-1), \sigma(2n)\big]$$

для $k = 2, 3, \dots, n$, где шляпки указывают на числа, которые следует пропустить. Эти перестановки можно представить как композиции $\tau = \sigma \circ \rho$ для соответствующих нечётных и чётных перестановок ρ, цикловое разложение которых имеет вид

$$\rho = (2k, 2k-2, \dots, 4)(2k-1, 2k-3, \dots, 3, 2)$$

и

$$\rho = (2k, 2k-2, \dots, 4, 2k-1, 2k-3, \dots, 3, 2).$$

Соответственно, $\operatorname{sgn}\tau = -\operatorname{sgn}\sigma$ и $\operatorname{sgn}\tau = \operatorname{sgn}\sigma$ в первом и втором случаях. Таким образом, принимая в расчёт кососимметричность матрицы $F^\circ[-1]$, получаем

$$F^\circ_{12}[1]\operatorname{Pf} F^\circ[-1] = \big(-K-2n+2\big)\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\cdot F^\circ_{\sigma(3)\,\sigma(4)}[-1]\dots F^\circ_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)}[-1],$$

где суммирование производится по перестановкам $\sigma\in\mathcal{A}_{2n}$, удовлетворяющим условиям $\sigma(1)=1$ и $\sigma(2)=2$. Так как $K+2n-2=0$ на критическом уровне, отсюда следует соотношение (8.14). □

Как и раньше, через $S^{(m)}$ мы будем обозначать образ симметризатора $s^{(m)}\in\mathcal{B}_m(\omega)$, определённого в §1.2, относительно действия алгебры Брауэра $\mathcal{B}_m(N)$ в пространстве тензоров; см. (1.69). Мы также рассматриваем $S^{(m)}$ как элемент алгебры (8.3), отождествляя его с $S^{(m)}\otimes 1$. Мы будем использовать константу $\gamma_m(N)$, определённую в (2.40), так что

$$\gamma_m(N) = \frac{N+m-2}{N+2m-2}.$$

Критический уровень вакуумного модуля $V_\kappa(\mathfrak{o}_N)$ соответствует значению $\kappa=-h^\vee$; см. замечание 8.1.1. Мы будем работать с расширенной алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{o}}_N\oplus\mathbb{C}\tau$ с коммутационными соотношениями (7.1) для элемента τ. Определим элементы $\phi_{m\,a}$ вакуумного модуля $V_{-h^\vee}(\mathfrak{o}_N)\cong \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{o}_N[t^{-1}]\big)$ с помощью разложения

$$\gamma_m(N)\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m = \phi_{m\,0}\,\tau^m+\phi_{m\,1}\,\tau^{m-1}+\dots+\phi_{m\,m}, \tag{8.15}$$

в котором $\mathcal{F}=\tau+F[-1]=\big[\delta_{ij}\tau+F_{ij}[-1]\big]$ — это матрица размера $N\times N$ с элементами в универсальной обёртывающей алгебре для алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{o}}_N\oplus\mathbb{C}\tau$.

Вспомним матрицы Манина типов B и D (нечётного и чётного размера соответственно), введённые в определении 5.6.1.

Лемма 8.1.5. *Матрица $\mathcal{F}$ — это матрица Манина типа B или D соответственно. Кроме того, для всех $1\leqslant a<b\leqslant m$ и всех $r,s<0$ выполняются соотношения в алгебре* (8.3):

$$S^{(m)}\big(F[r]_a\,F[s]_b - F[s]_b\,F[r]_a\big) = -S^{(m)}\big(F[r+s]_a - F[r+s]_b\big) \tag{8.16}$$

и

$$\big(F[r]_a\,F[s]_b - F[s]_b\,F[r]_a\big)S^{(m)} = \big(F[r+s]_a - F[r+s]_b\big)S^{(m)}. \tag{8.17}$$

Доказательство. Начнём с проверки соотношения (8.16). В силу (8.5) можно записать

$$F[r]_a\,F[s]_b - F[s]_b\,F[r]_a = (P_{ab}-Q_{ab})\,F[r+s]_b - F[r+s]_b\,(P_{ab}-Q_{ab}).$$

Из свойств (1.31) следует, что $S^{(m)}(P_{ab}-Q_{ab}) = S^{(m)}$, в то время как

$$S^{(m)}F[r+s]_b\,P_{ab} = S^{(m)}P_{ab}\,F[r+s]_a = S^{(m)}F[r+s]_a.$$

При всех $r \in \mathbb{Z}$ имеют место тождества

$$S^{(m)} F[r]_a Q_{a\,b} = 0 \qquad \text{и} \qquad Q_{a\,b} F[r]_a S^{(m)} = 0, \tag{8.18}$$

так что первое из них завершает проверку соотношения (8.16). В свою очередь, первое тождество в (8.18) вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned} S^{(m)} F[r]_a Q_{a\,b} &= S^{(m)} F[r]_a P_{a\,b} Q_{a\,b} = S^{(m)} P_{a\,b} F[r]_b Q_{a\,b} \\ &= S^{(m)} F[r]_b Q_{a\,b} = -S^{(m)} F[r]_a Q_{a\,b}, \end{aligned}$$

где мы снова применили свойства (1.31) и первое из тождеств

$$F[r]_a Q_{a\,b} + F[r]_b Q_{a\,b} = 0 \quad \text{и} \quad Q_{a\,b} F[r]_a + Q_{a\,b} F[r]_b = 0,$$

которые следуют из (2.28) и кососимметричности матрицы $F[r]$. Проверка соотношения (8.17) вполне аналогична. Наконец,

$$\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1 = F[-1]_1\, F[-1]_2 - F[-1]_2\, F[-1]_1 - F[-2]_1 + F[-2]_2.$$

Следовательно, применяя (8.17) при $m = 2$, получим

$$\big(\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1\big)\, S^{(2)} = 0,$$

так что матрица $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию (5.50), как и требовалось. □

Теорема 8.1.6. *Все элементы $\phi_{m\,a}$ лежат в центре Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{o}}_N)$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что при всех i, j

$$F_{ij}[0]\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} \mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_m = F_{ij}[1]\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} \mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_m = 0 \tag{8.19}$$

в $\widehat{\mathfrak{o}}_N$-модуле $V_{-h^\vee}(\mathfrak{o}_N) \otimes \mathbb{C}[\tau]$ с тривиальным действием на $\mathbb{C}[\tau]$. Рассмотрим тензорное произведение алгебр

$$\underbrace{\mathrm{End}\, \mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes \mathrm{End}\, \mathbb{C}^N}_{m+1} \otimes \mathrm{U}, \tag{8.20}$$

содержащее $m{+}1$ копий алгебры $\mathrm{End}\, \mathbb{C}^N$, занумерованных числами $0, 1, \dots, m$, где U обозначает универсальную обёртывающую алгебру для алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{o}}_N \oplus \mathbb{C}\tau$. Соотношения (8.19) допускают эквивалентную форму:

$$F[0]_0\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} \mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_m = 0 \quad \text{и} \quad F[1]_0\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} \mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_m = 0 \tag{8.21}$$

по модулю левого идеала в алгебре U, порождённого пространством $\mathfrak{o}_N[t]$ и элементом $K + h^\vee$. Чтобы проверить первое соотношение, заметим, что в силу (8.5) справедлива формула

$$[F[0]_0, \mathcal{F}_a] = \Phi_{0\,a}\, \mathcal{F}_a - \mathcal{F}_a\, \Phi_{0\,a}, \tag{8.22}$$

где мы положили $\Phi = P - Q$. Следовательно,

$$F[0]_0\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} \mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_m = \sum_{a=1}^{m} \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} \mathcal{F}_1 \dots \big(\Phi_{0\,a}\, \mathcal{F}_a - \mathcal{F}_a\, \Phi_{0\,a}\big) \dots \mathcal{F}_m,$$

а это выражение равно

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)} \sum_{a=1}^{m} \Phi_{0\,a}\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_m - \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\, \mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_m \sum_{a=1}^{m} \Phi_{0\,a}.$$

Сумма $\sum_{a=1}^{m} \Phi_{0\,a}$ коммутирует с действием симметризатора $S^{(m)}$, так что это выражение равно нулю по свойству цикличности следа.

Для проверки второго соотношения в (8.21) воспользуемся следствием формулы (8.5):

$$[F[1]_0, \mathcal{F}_a] = F[0]_0 + \Phi_{0\,a}\, F[0]_a - F[0]_a\, \Phi_{0\,a} + \Phi_{0\,a}\, K.$$

Мы можем записать

$$\begin{aligned} F[1]_0 \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_m = \sum_{a=1}^{m} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_{a-1} \\ \times \Big(F[0]_0 + \Phi_{0\,a}\, F[0]_a - F[0]_a\, \Phi_{0\,a} + \Phi_{0\,a}\, K\Big)\mathcal{F}_{a+1} \dots \mathcal{F}_m. \end{aligned}$$

Применяя формулу (8.22), приведём это выражение к виду

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leqslant a<b\leqslant m} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\mathcal{F}_1 \dots \widehat{\mathcal{F}}_a \dots \Big(\Phi_{0\,b}\, \mathcal{F}_b - \mathcal{F}_b\, \Phi_{0\,b}\Big) \dots \mathcal{F}_m \\ &+ \sum_{1\leqslant a<b\leqslant m} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\Phi_{0\,a}\, \mathcal{F}_1 \dots \widehat{\mathcal{F}}_a \dots \Big(\Phi_{a\,b}\, \mathcal{F}_b - \mathcal{F}_b\, \Phi_{a\,b}\Big) \dots \mathcal{F}_m \\ &- \sum_{1\leqslant a<b\leqslant m} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\mathcal{F}_1 \dots \widehat{\mathcal{F}}_a \dots \Big(\Phi_{a\,b}\, \mathcal{F}_b - \mathcal{F}_b\, \Phi_{a\,b}\Big) \dots \mathcal{F}_m\, \Phi_{0\,a} \\ &+ K \sum_{a=1}^{m} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\Phi_{0\,a}\, \mathcal{F}_1 \dots \widehat{\mathcal{F}}_a \dots \mathcal{F}_m, \end{aligned}$$

где шляпки означают, что соответствующие символы должны быть пропущены. Упростим теперь это выражение, применяя свойство цикличности следа, сопряжения операторами перестановок и соотношения (1.31). Для первой суммы получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leqslant a<b\leqslant m} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\mathcal{F}_1 \dots \widehat{\mathcal{F}}_a \dots \Phi_{0\,b}\, \mathcal{F}_b \dots \mathcal{F}_m \\ &\qquad= \sum_{1\leqslant a<b\leqslant m} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}P_{m-1\,m} \dots P_{a\,a+1}\, \mathcal{F}_1 \dots \widehat{\mathcal{F}}_a \dots \Phi_{0\,b}\, \mathcal{F}_b \dots \mathcal{F}_m \\ &\qquad= \sum_{1\leqslant a<b\leqslant m} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\Phi_{0\,b-1}\, \mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_{m-1}\, P_{m-1\,m} \dots P_{a\,a+1} \\ &\qquad= \sum_{a=1}^{m-1} a \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\Phi_{0\,a}\, \mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_{m-1}. \end{aligned}$$

Преобразовывая остальные суммы таким же образом, приходим к соотношению

$$
\begin{aligned}
F[1]_0 \operatorname{tr} S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m = &\sum_{a=1}^{m-1} a\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\Phi_{0\,a}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}\\
&-\sum_{a=1}^{m-1} a\operatorname{tr}_{1,\dots,m} \Phi_{0\,a}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}\\
&+\sum_{a=1}^{m-1} a\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\Phi_{0\,m}\Phi_{a\,m}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}\\
&+\sum_{a=1}^{m-1} a\operatorname{tr}_{1,\dots,m} \Phi_{a\,m}\,\Phi_{0\,m}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}\\
&+\big(mK-m(m-1)\big)\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\Phi_{0\,m}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}.
\end{aligned}
$$

Далее, заметим, что

$$S^{(m)}\Phi_{0\,m}\,P_{a\,m} = S^{(m)}P_{a\,m}\,\Phi_{0\,a} = S^{(m)}\Phi_{0\,a}$$

и

$$S^{(m)}\Phi_{0\,m}\,Q_{a\,m} = 0. \tag{8.23}$$

Формула (8.23) справедлива, так как

$$S^{(m)}\Phi_{0\,m}\,Q_{a\,m} = S^{(m)}\Phi_{0\,m}\,P_{a\,m}\,Q_{a\,m} = S^{(m)}\Phi_{0\,a}\,Q_{a\,m} = -S^{(m)}\Phi_{0\,m}\,Q_{a\,m},$$

где мы использовали свойства (2.28) и кососимметричность элемента Φ относительно транспозиции (2.27), применённой к первой или второй копии алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$. Таким образом, дальнейшее упрощение выражений приводит к формуле

$$
\begin{aligned}
F[1]_0 \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m = &\sum_{a=1}^{m-1} 2\,a\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\Phi_{0\,a}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}\\
&+\big(mK-m(m-1)\big)\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\Phi_{0\,m}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}.
\end{aligned} \tag{8.24}
$$

В качестве следующего шага вычислим частичный след tr_m в правой части относительно m-й копии алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$ в (8.20) с использованием следующей леммы.

Лемма 8.1.7. *Справедлива формула*

$$\operatorname{tr}_m S^{(m)}\Phi_{0\,m} = \frac{N+2m-2}{m\,(N+2m-4)}\,S^{(m-1)}\sum_{a=1}^{m-1}\Phi_{0\,a}.$$

Доказательство. Применяя гомоморфизм (1.69) к обеим частям рекуррентного соотношения (1.53), получим

$$S^{(m)} = \frac{1}{m\,(N+2m-4)}\Big(1+\sum_{a=1}^{m-1}\Phi_{a\,m}\Big)\Big(N+m-3+\sum_{a=1}^{m-1}\Phi_{a\,m}\Big)S^{(m-1)}.$$

Воспользуемся теперь соотношениями (1.31) и (1.71), чтобы переписать эту формулу в виде

$$S^{(m)} = \left(1+\sum_{a=1}^{m-1} P_{a\,m} - \frac{2}{N+2m-4}\Big(\sum_{a=1}^{m-1} Q_{a\,m} + \sum_{1\leqslant a<b\leqslant m-1} P_{a\,m} Q_{b\,m}\Big)\right)\frac{S^{(m-1)}}{m}.$$

Благодаря свойству цикличности следа приходим к вычислению частичного следа

$$\mathrm{tr}_m\,\Phi_{0\,m}\left(1+\sum_{a=1}^{m-1} P_{a\,m} - \frac{2}{N+2m-4}\Big(\sum_{a=1}^{m-1} Q_{a\,m} + \sum_{1\leqslant a<b\leqslant m-1} P_{a\,m} Q_{b\,m}\Big)\right) S^{(m-1)}.$$

Ясно, что $\mathrm{tr}_m\,\Phi_{0\,m}=0$, в то время как

$$\mathrm{tr}_m\,\Phi_{0\,m}\,P_{a\,m} = \Phi_{0\,a} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{tr}_m\,\Phi_{0\,m}\,Q_{a\,m} = -\Phi_{0\,a}.$$

Кроме того,

$$\mathrm{tr}_m\,\Phi_{0\,m}\,P_{a\,m}\,Q_{b\,m} = \mathrm{tr}_m\,\Phi_{0\,m}\,Q_{a\,b}\,P_{a\,m} = \mathrm{tr}_m\,Q_{a\,b}\,\Phi_{0\,m}\,P_{a\,m} = Q_{a\,b}\,\Phi_{0\,a}.$$

Однако $Q_{a\,b}\,\Phi_{0\,a}\,S^{(m-1)} = 0$, что является вариантом соотношения (8.23) и проверяется таким же способом. Отсюда вытекает требуемое выражение для следа $\mathrm{tr}_m\,S^{(m)}\Phi_{0\,m}$. □

Применяя формулу (5.32) для частичного следа $\mathrm{tr}_m\,S^{(m)}$ и лемму 8.1.7, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
F[1]_0\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m &= \frac{N+2m-2}{m\,(N+2m-4)} \\
&\times\Big((N+m-3)\sum_{a=1}^{m-1} 2\,a\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m-1}\,S^{(m-1)}\Phi_{0\,a}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1} \\
&\qquad + m\big(K-m+1\big)\sum_{a=1}^{m-1}\mathrm{tr}_{1,\dots,m-1}\,S^{(m-1)}\Phi_{0\,a}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}\Big).
\end{aligned}$$

Теперь нам понадобится ещё одна лемма.

Лемма 8.1.8. *Для всех a, b, $1\leqslant a<b\leqslant m$, выполняется соотношение*

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\Phi_{0\,a}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m = \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\Phi_{0\,b}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m.$$

Доказательство. По лемме 8.1.5 матрица $\mathcal{F}$ — это матрица Манина типа B или D соответственно, так что в силу свойства (5.53) получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\Phi_{0\,a}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m &= \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\Phi_{0\,a}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m\,S^{(m)} \\
&= \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,\Phi_{0\,a}\,P_{a\,b}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m\,S^{(m)},
\end{aligned}$$

где мы применили свойство цикличности следа. Это выражение равно

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,P_{a\,b}\,\Phi_{0\,b}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m\,S^{(m)} = \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,\Phi_{0\,b}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m\,S^{(m)}P_{a\,b},$$

т. е. оно совпадает с выражением

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\Phi_{0\,b}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m$$

по свойству симметризатора (1.31). □

По лемме 8.1.8 (с заменой m на $m-1$) получаем

$$F[1]_0 \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)} \mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_m$$
$$= \big(K+N-2\big) \frac{N+2m-2}{N+2m-4} \sum_{a=1}^{m-1} \operatorname{tr}_{1,\dots,m-1} S^{(m-1)} \Phi_{0\,a}\, \mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_{m-1},$$

а это выражение равно нулю, так как $K+N-2=0$ на критическом уровне. Это завершает доказательство теоремы. □

Докажем теперь теорему Фейгина–Френкеля (теорема 6.3.1) для ортогональных алгебр Ли.

Теорема 8.1.9. *Семейство элементов $\phi_{2\,2}, \phi_{4\,4}, \dots, \phi_{2n\,2n}$ — это полный набор векторов Сигала–Сугавары для алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n+1}$, а семейство элементов $\phi_{2\,2}, \phi_{4\,4}, \dots, \phi_{2n-2\,2n-2}, \operatorname{Pf} F[-1]$ — это полный набор векторов Сигала–Сугавары для алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$.*

Доказательство. Символы элементов каждого семейства совпадают с образами некоторых элементов симметрической алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{o}_N)$ относительно вложения $\mathrm{S}(\mathfrak{o}_N) \hookrightarrow \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{o}_N[t^{-1}]\big)$, при котором $X \in \mathfrak{o}_N$ переходит в $X[-1]$. В силу теорем 6.3.3 и 8.1.6 и предложения 8.1.4 нам нужно только проверить, что соответствующие элементы алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{o}_N)$ — это алгебраически независимые образующие алгебры инвариантов $\mathrm{S}(\mathfrak{o}_N)^{\mathfrak{o}_N}$; см. рассуждение после доказательства теоремы 6.3.3. Однако это свойство уже было установлено в §2.2; см. следствие 2.2.5. □

В завершение этого параграфа приведём эквивалентные выражения для векторов Сигала–Сугавары $\phi_{m\,a}$ в контексте двойственности Хау. В обозначениях §2.3 введём элемент $\mathcal{F}^{(m)} \in \operatorname{End} \mathcal{P}_N^m \otimes \mathrm{U}\big(\widehat{\mathfrak{o}}_N \oplus \mathbb{C}\tau\big)$, полагая

$$\mathcal{F}^{(m)} : z_{j_1} \dots z_{j_m} \mapsto \sum_{i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m} z_{i_1} \dots z_{i_m} \otimes \mathcal{F}^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m},$$

где

$$\mathcal{F}^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m} = \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_N!\, m!} \sum_{\sigma, \pi \in \mathfrak{S}_m} \mathcal{F}_{i_{\sigma(1)} j_{\pi(1)}} \dots \mathcal{F}_{i_{\sigma(m)} j_{\pi(m)}},$$

а α_i — это кратность индекса i в мультимножестве $\{i_1, \dots, i_m\}$. Вспомним, что экстремальный проектор p, определённый эквивалентными формулами (2.64) и (2.66), можно рассматривать как элемент алгебры $\operatorname{End} \mathcal{P}_N^m$ при действии (2.63).

Следствие 8.1.10. *Векторы Сигала–Сугавары $\phi_{m\,a}$ можно получить из разложения*

$$\gamma_m(N) \operatorname{tr} p\, \mathcal{F}^{(m)} = \phi_{m\,0}\, \tau^m + \phi_{m\,1}\, \tau^{m-1} + \dots + \phi_{m\,m},$$

где след берётся по подпространству $\mathfrak{sl}_2$-особых вектороы в пространстве полиномов $\mathcal{P}_N^m$.

Доказательство. Используя формулу (2.43) и свойство цикличности следа, мы можем записать левую часть в (8.15) в виде

$$\gamma_m(N)\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m = \gamma_m(N)\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\,H^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m\,H^{(m)}.$$

Благодаря изоморфизму (2.61) мы можем рассматривать произведение

$$H^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m\,H^{(m)}$$

как оператор в векторном пространстве $\mathcal{P}_N^m$ с коэффициентами в алгебре $\mathrm{U}\big(\widehat{\mathfrak{o}}_N\oplus\mathbb{C}\tau\big)$. Это и есть оператор $\mathcal{F}^{(m)}$. Остаётся заметить, что оператор $S^{(m)}$ действует в пространстве $\mathcal{P}_N^m$ как экстремальный проектор p в силу предложения 2.3.1. □

§ 8.2. Инварианты малой степени в виде следов

Как мы видели в теореме 7.1.3, все коэффициенты полинома $\operatorname{tr}\mathcal{E}^m$ в (7.9) — это векторы Сигала–Сугавары для $\mathfrak{gl}_N$. Их аналоги для ортогональной и симплектической алгебр Ли неизвестны. В частности, коэффициенты полинома $\operatorname{tr}\mathcal{F}^m$, вообще говоря, *не являются* векторами Сигала–Сугавары для $\mathfrak{o}_N$. В этом параграфе мы построим векторы малой степени, по аналогии с примером 7.1.6. Это можно сделать, записывая векторы Сигала–Сугавары $\phi_{m\,a}$ из теоремы 8.1.6 в терминах инвариантов вида

$$\operatorname{tr} F[r_1]\dots F[r_k],\qquad r_1,\dots,r_k<0.$$

Мы получим такие выражения для векторов $\phi_{2\,2}$ и $\phi_{4\,4}$. Используя формулу (1.46) и правило (1.69), мы можем записать

$$\phi_{2\,2}=\frac{N}{N+2}\operatorname{tr}_{1,2}\Big(\frac{1}{2}+\frac{P_{12}}{2}-\frac{Q_{12}}{N}\Big)\big(F[-1]_1F[-1]_2+F[-2]_2\big).$$

Далее, из соотношений (1.67) и (1.68) следует, что

$$\operatorname{tr}_{1,2}P_{12}F[-1]_1F[-1]_2=\operatorname{tr}_{1,2}F[-1]_2P_{12}F[-1]_2=\operatorname{tr}_2F[-1]_2F[-1]_2=\operatorname{tr}F[-1]^2.$$

Поскольку $F[-1]'+F[-1]=0$, в силу (1.76) и (2.28) получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_{1,2}Q_{12}F[-1]_1F[-1]_2&=-\operatorname{tr}_{1,2}Q_{12}F[-1]_2F[-1]_2\\&=-\operatorname{tr}_2F[-1]_2F[-1]_2=-\operatorname{tr}F[-1]^2.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\operatorname{tr}F[r]=0$ при всех r, приходим к формуле

$$\phi_{2\,2}=\frac{1}{2}\operatorname{tr}F[-1]^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}F_{i\,j}[-1]F_{j\,i}[-1].$$

Это подтверждает, что вектор $\phi_{2\,2}$ пропорционален каноническому вектору Сигала–Сугавары (6.11).

Чтобы получить такую формулу для $\phi_{4\,4}$, заметим, что свободный член полинома от τ,

$$\big(\tau+F[-1]_1\big)\big(\tau+F[-1]_2\big)\big(\tau+F[-1]_3\big)\big(\tau+F[-1]_4\big),$$

даётся выражением

$$F[-1]_1F[-1]_2F[-1]_3F[-1]_4+F[-1]_1F[-1]_2F[-2]_4+F[-1]_1F[-2]_3F[-1]_4\\ +F[-1]_1F[-1]_3F[-2]_4+F[-2]_2F[-1]_3F[-1]_4+F[-1]_2F[-2]_3F[-1]_4\\ +F[-1]_2F[-1]_3F[-2]_4+2\,F[-1]_1F[-3]_4+2\,F[-1]_2F[-3]_4+2\,F[-1]_3F[-3]_4\\ +2\,F[-3]_3F[-1]_4+2\,F[-2]_3F[-2]_4+F[-2]_2F[-2]_4+6\,F[-4]_4.$$

Применяя свойство симметризатора (1.31), свойство цикличности следа и используя сопряжения подходящими операторами перестановки, мы можем записать вектор $\phi_{4\,4}$ в виде

$$\phi_{4\,4}=\frac{N+2}{N+6}\,\mathrm{tr}_{1,2,3,4}\,S^{(4)}\Big(F[-1]_1F[-1]_2F[-1]_3F[-1]_4+3\,F[-1]_1F[-1]_2F[-2]_3\\ +2\,F[-1]_1F[-2]_2F[-1]_3+F[-2]_1F[-1]_2F[-1]_3+6\,F[-1]_1F[-3]_2\\ +3\,F[-2]_1F[-2]_2+2\,F[-3]_1F[-1]_2+6\,F[-4]_1\Big).$$

Применяя лемму 8.1.5, получим

$$\phi_{4\,4}=\frac{N+2}{N+6}\,\mathrm{tr}_{1,2,3,4}\,S^{(4)}\Big(F[-1]_1F[-1]_2F[-1]_3F[-1]_4+6\,F[-1]_1F[-1]_2F[-2]_3\\ +8\,F[-1]_1F[-3]_2+3\,F[-2]_1F[-2]_2+6\,F[-4]_1\Big).$$

Теперь вычислим частичный след tr_4, используя следующее общее свойство.

Лемма 8.2.1. *Предположим, что X — это некоторая линейная комбинация произведений элементов $F[s]_b$ алгебры* (8.3) *при $s<0$ и $1\leqslant b\leqslant m-1$. Тогда при всех $r<0$ справедлива формула*

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}X\,F[r]_m=\frac{N+2m-2}{m(N+2m-4)}\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m-1}\,S^{(m-1)}X\sum_{a=1}^{m-1}F[r]_a.$$

Доказательство. Фактически это версия леммы 8.1.7, в которой элемент $\Phi_{0\,m}$ следует заменить на $F[r]_m$. Она проверяется таким же рассуждением. □

Леммы 1.3.2 и 8.2.1 при $m=4$ позволяют нам привести выражение для вектора Сигала–Сугавары $\phi_{4\,4}$ к виду

$$\phi_{4\,4}=\frac{N+2}{4(N+4)}\,\mathrm{tr}_{1,2,3}\,S^{(3)}\Big(F[-1]_1F[-1]_2F[-1]_3\big(F[-1]_1+F[-1]_2+F[-1]_3\big)\\ +6\,(N+1)\,F[-1]_1F[-1]_2F[-2]_3+8\,(N+1)\,F[-1]_1F[-3]_2\\ +3\,(N+1)\,F[-2]_1F[-2]_2+6\,(N+1)\,F[-4]_1\Big).$$

Выражение в верхней строке можно записать как

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_{1,2,3} S^{(3)}\, F[-1]_1 F[-1]_2 F[-1]_3 \Big(F[-1]_1 + F[-1]_2 + F[-1]_3\Big)\\ = \operatorname{tr}_{1,2,3} S^{(3)} \Big(F[-1]_1 F[-1]_2 F[-1]_3 + F[-1]_2 F[-1]_1 F[-1]_3\\ + F[-1]_2 F[-1]_3 F[-1]_1\Big) F[-1]_1.\end{aligned}$$

Будем теперь повторно применять соотношение (8.16), чтобы передвинуть множитель $F[-1]_1$, входящий во второе и третье слагаемые внутри скобок, в крайнее левое положение. После этого воспользуемся свойством цикличности следа, чтобы переместить симметризатор $S^{(3)}$ в положение крайнего правого множителя. Это позволит применить соотношение (8.17) и передвинуть второй множитель $F[-1]_1$ влево. В результате выражение примет вид

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_{1,2,3} S^{(3)} \Big(3\,F[-1]_1^2 F[-1]_2 F[-1]_3 + 3\,F[-1]_1 F[-1]_2 F[-2]_3\\ - 6\,F[-1]_1 F[-2]_1 F[-1]_2 + 2\,F[-2]_1 F[-1]_1 F[-1]_2 + 2\,F[-2]_1 F[-2]_2\\ - 2\,F[-2]_1^2 + F[-1]_1 F[-2]_2 F[-1]_2 - 3\,F[-1]_1 F[-3]_2 + 3\,F[-1]_1 F[-3]_1\Big).\end{aligned}$$

Снова применяя леммы 1.3.2 и 8.2.1, в этот раз при $m = 3$, и записывая симметризатор $S^{(2)}$ в явном виде, получим

$$\begin{aligned}\phi_{4\,4} = \frac{1}{12}\operatorname{tr}_{1,2}\Big(\frac{1}{2} + \frac{P_{12}}{2} - \frac{Q_{12}}{N}\Big)\Big(3\,F[-1]_1^2 F[-1]_2\big(F[-1]_1 + F[-1]_2\big)\\ + (6\,N+9)\,F[-1]_1 F[-1]_2\big(F[-2]_1 + F[-2]_2\big) + (8\,N^2 + 5\,N)\,F[-1]_1 F[-3]_2\\ +(3\,N^2+5\,N)\,F[-2]_1 F[-2]_2 - 6\,N\,F[-1]_1 F[-2]_1 F[-1]_2 + 2\,N\,F[-2]_1 F[-1]_1 F[-1]_2\\ -2\,N\,F[-2]_1^2 + N\,F[-1]_1 F[-2]_2 F[-1]_2 + 3\,N\,F[-1]_1 F[-3]_1 + 6\,N\,(N+1)\,F[-4]_1\Big).\end{aligned}$$

Наконец, вычисляя следы таким же способом, как в случае вектора $\phi_{2\,2}$, с применением соотношений (8.5) и с учётом тождества $\big(F[r]_1 + F[r]_2\big)\,Q_{12} = 0$, приходим к формуле

$$\begin{aligned}\phi_{4\,4} = \frac{1}{24}\Big(6\operatorname{tr} F[-1]^4 + 3\,\big(\operatorname{tr} F[-1]^2\big)^2 + (3\,N+15)\operatorname{tr} F[-1]^2 F[-2]\\ + (N-1)\operatorname{tr} F[-1]F[-2]F[-1] + (2\,N+4)\operatorname{tr} F[-2]F[-1]^2\\ + (5\,N^2 + 27\,N + 22)\operatorname{tr} F[-1]F[-3] + (N^2 + 9\,N + 14)\operatorname{tr} F[-2]^2\Big).\end{aligned}$$

Для следов, входящих в эту формулу, выполняются тождества

$$\operatorname{tr} F[-1]^2 F[-2] = \operatorname{tr} F[-2]F[-1]^2 = (N/2-1)\operatorname{tr} F[-2]^2$$

и

$$\operatorname{tr} F[-1]F[-2]F[-1] = -(N/2-1)\operatorname{tr} F[-2]^2 + (N-2)\operatorname{tr} F[-1]F[-3],$$

которые легко проверить. Например, используя соотношения (8.5), для первого следа можем записать

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} F[-1]^2 F[-2] &= -\operatorname{tr}_{12} Q_{12} F[-1]_1 F[-1]_2 F[-2]_2\\ &= -\operatorname{tr}_{12} Q_{12} F[-1]_2 F[-1]_1 F[-2]_2 - \operatorname{tr}_{12} Q_{12}(P_{12}-Q_{12}) F[-2]_2 F[-2]_2\\ &\qquad + \operatorname{tr}_{12} Q_{12} F[-2]_2 (P_{12}-Q_{12}) F[-2]_2.\end{aligned}$$

Учитывая, что $Q_{12}F[-2]_2Q_{12} = 0$, и применяя свойство цикличности следа вместе с соотношениями (1.71), получаем

$$\operatorname{tr} F[-1]^2 F[-2] = -\operatorname{tr} F[-1]^2 F[-2] + (N-2)\operatorname{tr} F[-2]^2,$$

как и требовалось. Таким образом, формула для вектора ϕ_{44} упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned}\phi_{44} = \frac{1}{24}\Big(6\operatorname{tr} F[-1]^4 + 3\left(\operatorname{tr} F[-1]^2\right)^2 \\ + 6\,(N+2)^2 \operatorname{tr} F[-1]F[-3] + (3N^2+15N-6)\operatorname{tr} F[-2]^2\Big).\end{aligned}$$

Центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{o}}_N)$ инвариантен относительно трансляционного оператора T; см. (6.7). В частности, элементы $T\phi_{22}$ и $T^2\phi_{22}$ — это векторы Сигала–Сугавары, которые можно записать в виде

$$T\phi_{22} = \operatorname{tr} F[-1]F[-2] \qquad \text{и} \qquad T^2\phi_{22} = \operatorname{tr} F[-2]^2 + 2\operatorname{tr} F[-1]F[-3].$$

Поэтому

$$4\phi_{44} - 2\phi_{22}^2 - \frac{1}{2}\,(N+2)^2\,T^2\phi_{22} = \operatorname{tr} F[-1]^4 + (N/2-3)\operatorname{tr} F[-2]^2.$$

Следовательно, заменяя вектор ϕ_{44} на элемент

$$\operatorname{tr} F[-1]^4 + (N/2-3)\operatorname{tr} F[-2]^2 \tag{8.25}$$

в полном наборе векторов из теоремы 8.1.9, получаем новые полные наборы векторов Сигала–Сугавары.

Пример 8.2.2. С учётом замечания 8.1.1 получаем полные наборы векторов Сигала–Сугавары:

$$\begin{aligned}&\text{для}\quad \mathfrak{o}_3: &&\operatorname{tr} F[-1]^2,\\ &\text{для}\quad \mathfrak{o}_4: &&\operatorname{tr} F[-1]^2,\quad \operatorname{Pf} F[-1],\\ &\text{для}\quad \mathfrak{o}_5: &&\operatorname{tr} F[-1]^2,\quad \operatorname{tr} F[-1]^4 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} F[-2]^2,\\ &\text{для}\quad \mathfrak{o}_6: &&\operatorname{tr} F[-1]^2,\quad \operatorname{tr} F[-1]^4,\quad \operatorname{Pf} F[-1].\end{aligned}$$

□

Мы дадим также прямое доказательство того, что элемент (8.25) — это вектор Сигала–Сугавары. Рассмотрим алгебру (8.20), где U теперь обозначает универсальную обёртывающую алгебру $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{o}}_N)$.

Лемма 8.2.3. *При $m \geqslant 1$ выполняются соотношения*

$$F[0]_0 \operatorname{tr}_1 F[-1]_1^m = 0 \tag{8.26}$$

и

$$\begin{aligned} F[1]_0 \operatorname{tr}_1 F[-1]_1^m \\ = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{tr}_1 \Big(F[-1]_1^{i-1} \Phi_{01} F[-1]_1^{m-i} \Phi_{01} - \Phi_{01} F[-1]_1^{i-1} \Phi_{01} F[-1]_1^{m-i} \Big) \end{aligned} \tag{8.27}$$

по модулю левого идеала алгебры U, *порождённого пространством* $\mathfrak{o}_N[t]$ *и элементом* $K+N-2$, *где* $\Phi = P - Q$.

Доказательство. Отметим соотношение

$$F[0]_0 \, F[-1]_1^m - F[-1]_1^m \, F[0]_0 = \Phi_{01} \, F[-1]_1^m - F[-1]_1^m \, \Phi_{01}, \tag{8.28}$$

вытекающее из формул (8.5). Взяв частичный след tr_1 и применяя свойство цикличности следа, приходим к (8.26). Далее, проводя вычисления по модулю левого идеала, находим

$$F[1]_0 \operatorname{tr}_1 F[-1]_1^m = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{tr}_1 F[-1]_1^{i-1} \big(-\Phi_{01} \, F[0]_0 + F[0]_0 \, \Phi_{01} + \Phi_{01} \, K \big) F[-1]_1^{m-i}.$$

Из (8.28) следует, что

$$F[0]_0 \, F[-1]_1^{m-i} = \Phi_{01} \, F[-1]_1^{m-i} - F[-1]_1^{m-i} \, \Phi_{01}. \tag{8.29}$$

Используем теперь общее свойство транспозиции (2.27), которая применяется к копии алгебры $\operatorname{End} \mathbb{C}^N$, занумерованной индексом 1:

$$\operatorname{tr}_1 XY = \operatorname{tr}_1 X'Y'. \tag{8.30}$$

Для $X = F[-1]_1^{i-1} \, F[0]_0$ и $Y = \Phi_{01} \, F[-1]_1^{m-i}$ получаем

$$\operatorname{tr}_1 F[-1]_1^{i-1} \, F[0]_0 \, \Phi_{01} \, F[-1]_1^{m-i} = -\operatorname{tr}_1 \big(F[-1]^{i-1} \big)_1' \, F[0]_0 \, \big(F[-1]^{m-i} \big)_1' \, \Phi_{01},$$

где мы применили лемму 2.2.1 и свойство $\Phi_{01}' = -\Phi_{01}$. Применяя транспозицию к обеим частям в (8.29), приходим к формуле

$$F[0]_0 \, \big(F[-1]^{m-i} \big)_1' = \Phi_{01} \, \big(F[-1]^{m-i} \big)_1' - \big(F[-1]^{m-i} \big)_1' \, \Phi_{01}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F[1]_0 \operatorname{tr}_1 F[-1]_1^m = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{tr}_1 \Big(& F[-1]_1^{i-1} \, \Phi_{01} \, F[-1]_1^{m-i} \, \Phi_{01} - F[-1]_1^{i-1} \Phi_{01}^2 \, F[-1]_1^{m-i} \\ & - \big(F[-1]^{i-1} \big)_1' \, \Phi_{01} \, \big(F[-1]^{m-i} \big)_1' \, \Phi_{01} + \big(F[-1]^{i-1} \big)_1' \, \big(F[-1]^{m-i} \big)_1' \, \Phi_{01}^2 \\ & + K \, F[-1]_1^{i-1} \, \Phi_{01} \, F[-1]_1^{m-i} \Big). \end{aligned}$$

Наконец, применение свойства (8.30) к слагаемым в средней строке приводит к требуемому выражению в правой части (8.27), но с дополнительной суммой

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}_1\, F[-1]_1^{i-1}\big((\Phi_{01}^2)' - \Phi_{01}^2 + K\,\Phi_{01}\big)\,F[-1]_1^{m-i}.$$

Однако эта сумма равна нулю в силу формул $(\Phi_{01}^2)' = \Phi_{01}^2 + (N-2)\,\Phi_{01}$ и $K + N - 2 = 0$. □

Заметим, что $\mathrm{tr}\,F[-1] = 0$, в то время как $\mathrm{tr}\,F[-1]^2$ и $\mathrm{tr}\,F[-1]^3$ — это векторы Сигала–Сугавары для $\mathfrak{o}_N$ по лемме 8.2.3. Далее, из формулы (8.27) находим

$$\begin{aligned} F[1]_0\,\mathrm{tr}_1\,F[-1]_1^4 = \mathrm{tr}_1\,\Big(&F[-1]_1\,\Phi_{01}\,F[-1]_1^2\,\Phi_{01} + F[-1]_1^2\,\Phi_{01}\,F[-1]_1\,\Phi_{01}\\ &- \Phi_{01}\,F[-1]_1\,\Phi_{01}\,F[-1]_1^2 - \Phi_{01}\,F[-1]_1^2\,\Phi_{01}\,F[-1]_1\Big).\end{aligned}$$

Применяя свойство (8.30), можем переписать это выражение в виде

$$\mathrm{tr}_1\,\Big(\big(F[-1]_1^2 + (F[-1]^2)_1'\big)\,\Phi_{01}\,F[-1]_1\,\Phi_{01} - \Phi_{01}\,F[-1]_1\,\Phi_{01}\,\big(F[-1]_1^2 + (F[-1]^2)_1'\big)\Big).$$

С другой стороны,

$$\Phi_{01}\,F[-1]_1\,\Phi_{01} = F[-1]_0 + Q_{01}\,F[-1]_1 + F[-1]_1\,Q_{01},$$

так что ещё одно применение свойства (8.30) приводит выражение к виду

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_1\,\Big(&\big(F[-1]_1^2 + (F[-1]^2)_1'\big)\,\big(F[-1]_0 - F[-1]_1\,\Phi_{01}\big)\\ &- \big(F[-1]_0 - \Phi_{01}\,F[-1]_1\big)\,\big(F[-1]_1^2 + (F[-1]^2)_1'\big)\Big).\end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned}(F[-1]^2)_1' &= \mathrm{tr}_2\,F[-1]_1^2\,Q_{12} = -\mathrm{tr}_2\,F[-1]_1\,F[-1]_2\,Q_{12}\\ &= -\mathrm{tr}_2\,F[-1]_2\,F[-1]_1\,Q_{12} + \mathrm{tr}_2\,\big(\Phi_{12}\,F[-2]_1 - F[-2]_1\,\Phi_{12}\big)\,Q_{12},\end{aligned}$$

откуда получаем

$$(F[-1]^2)' = F[-1]^2 - (N-2)\,F[-2].$$

Это наблюдение и соотношения (8.5) приводят к более простой формуле

$$F[1]_0\,\mathrm{tr}_1\,F[-1]_1^4 = (N-6)\,\mathrm{tr}_1\,\big(F[-2]_1\,F[-1]_1\,\Phi_{01} - \Phi_{01}\,F[-1]_1\,F[-2]_1\big).$$

Кроме того, применяя свойство (8.30), получаем соотношение

$$\mathrm{tr}_1\,F[-2]_1^2 = -2\,\mathrm{tr}_1\,\big(F[-2]_1\,F[-1]_1\,\Phi_{01} - \Phi_{01}\,F[-1]_1\,F[-2]_1\big),$$

что позволяет прийти к заключению

$$F[1]_0\,\Big(\mathrm{tr}_1\,F[-1]_1^4 + (N/2-3)\,\mathrm{tr}_1\,F[-2]_1^2\Big) = 0,$$

т. е. элемент (8.25) — это вектор Сигала–Сугавары.

§ 8.3. Векторы Сигала–Сугавары для типа C

Сохраним те же обозначения для образующих симплектической алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$, которые использовались в гл. 5, т.е. будем рассматривать $\mathfrak{sp}_{2n}$ как подалгебру в $\mathfrak{gl}_{2n}$, линейно порождённую элементами F_{ij}, определёнными в (5.3). Рассмотрим аффинную алгебру Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n} = \mathfrak{sp}_{2n}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ (см. (6.5)) и положим $F_{ij}[r] = F_{ij}t^r$ для всех $r \in \mathbb{Z}$. Дуальное число Кокстера для алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$ даётся формулой

$$h^\vee = n + 1, \tag{8.31}$$

а нормализованную форму Киллинга (6.4) можно записать в виде

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr} XY, \qquad X, Y \in \mathfrak{sp}_{2n}.$$

В силу (5.4) в алгебре Ли $\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}$ выполняются коммутационные соотношения

$$\begin{aligned}\big[F_{ij}[r], F_{kl}[s]\big] &= \delta_{kj}\, F_{i\,l}[r+s] - \delta_{i\,l}\, F_{kj}[r+s] \\ - \varepsilon_i \varepsilon_j \big(\delta_{k\,i'}\, F_{j'l}[r+s] &+ \delta_{j'l}\, F_{k\,i'}[r+s]\big) + 2\,r\,\delta_{r,-s}\, K\big(\delta_{kj}\,\delta_{i\,l} - \varepsilon_i \varepsilon_j\, \delta_{k\,i'}\, \delta_{j'l}\big),\end{aligned} \tag{8.32}$$

где K — это центральный элемент, и имеют место соотношения симметрии $F_{ij}[r] + \varepsilon_i \varepsilon_j\, F_{j'i'}[r] = 0$. Как в ортогональном случае, для любого $r \in \mathbb{Z}$ будем рассматривать матрицу $F[r] = \big[F_{ij}[r]\big]$ как элемент

$$F[r] = \sum_{i,j=1}^{2n} e_{ij} \otimes F_{ij}[r] \in \operatorname{End} \mathbb{C}^{2n} \otimes \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}).$$

Она обладает свойством симметрии $F[r] + F[r]' = 0$; см. (2.24). Для каждого $a \in \{1, \dots, m\}$ введём элемент $F[r]_a$ алгебры

$$\underbrace{\operatorname{End} \mathbb{C}^{2n} \otimes \dots \otimes \operatorname{End} \mathbb{C}^{2n}}_{m} \otimes \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}) \tag{8.33}$$

по формуле

$$F[r]_a = \sum_{i,j=1}^{2n} 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(m-a)} \otimes F_{ij}[r]. \tag{8.34}$$

Так же как в конечномерном случае (см. (5.6)), определяющие соотношения в алгебре $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$ можно записать в матричной форме:

$$\begin{aligned}F[r]_1\, F[s]_2 - F[s]_2\, F[r]_1 \\ = (P - Q)\, F[r+s]_2 - F[r+s]_2\, (P - Q) + 2\,r\,\delta_{r,-s}\, (P - Q)\, K,\end{aligned} \tag{8.35}$$

где обе части — элементы алгебры (8.33) при $m = 2$.

Симметризатор $s^{(m)}$ в алгебре Брауэра $\mathcal{B}_m(\omega)$ был определён в §1.2. Сохраним обозначение $S^{(m)}$ для образа симметризатора $s^{(m)}$ относительно действия алгебры $\mathcal{B}_m(-2n)$ в пространстве тензоров, определённого в (1.73). Мы будем также рассматривать $S^{(m)}$ как элемент алгебры (8.33), отождествляя его с $S^{(m)}\otimes 1$. Нам понадобится константа $\gamma_m(-2n)$ заданная формулой (2.40), так что

$$\gamma_m(-2n)=\frac{2n-m+2}{2(n-m+1)}.$$

Критический уровень вакуумного модуля $V_\kappa(\mathfrak{sp}_{2n})$ соответствует значению $\kappa=-h^\vee$. Наша конструкция векторов Сигала–Сугавары для $\mathfrak{sp}_{2n}$ будет похожа на ортогональный случай. Однако выражение, аналогичное (8.15), теперь имеет смысл только для значений $m\leqslant n+1$. Причина в том, что если $m\geqslant n+2$, то формулы для симметризатора $s^{(m)}$ из §1.2 содержат нулевые знаменатели при специализации $\omega=-2n$. Эти формулы имеют смысл при $m=n+1$, но симметризатор $S^{(m)}$ оказывается равным нулю; см. предложение 2.3.2. Мы решим эту проблему таким же способом, как в конструкции элементов Казимира в §5.5. А именно, считая параметр m фиксированным, а n — переменным, мы покажем, что симплектический аналог формулы (8.15) задаёт векторы Сигала–Сугавары и значения n можно «аналитически продолжить» в область $n\geqslant(m-1)/2$.

Предположим сначала, что $n\geqslant m$, и введём элементы $\phi_{m\,a}$ вакуумного модуля $V_{-h^\vee}(\mathfrak{sp}_{2n})\cong \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)$ с помощью разложения

$$\gamma_m(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m=\phi_{m\,0}\,\tau^m+\phi_{m\,1}\,\tau^{m-1}+\dots+\phi_{m\,m}, \tag{8.36}$$

в котором $\mathcal{F}=\tau+F[-1]=\big[\delta_{ij}\tau+F_{ij}[-1]\big]$ — это матрица размера $2n\times 2n$ с элементами в универсальной обёртывающей алгебре для алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}\oplus\mathbb{C}\tau$, а элемент τ удовлетворяет коммутационным соотношениям (7.1).

Матрицы Манина типа C были введены в определении 5.6.1.

Лемма 8.3.1. *Матрица $\mathcal{F}$ — это матрица Манина типа C. Кроме того, если $n\geqslant m$, то для любых a,b, $1\leqslant a<b\leqslant m$, и любых $r,s<0$ справедливы следующие соотношения в алгебре* (8.33):

$$S^{(m)}\big(F[r]_a\,F[s]_b-F[s]_b\,F[r]_a\big)=S^{(m)}\big(F[r+s]_a-F[r+s]_b\big) \tag{8.37}$$

и

$$\big(F[r]_a\,F[s]_b-F[s]_b\,F[r]_a\big)S^{(m)}=-\big(F[r+s]_a-F[r+s]_b\big)S^{(m)}. \tag{8.38}$$

Доказательство. Как в доказательстве леммы 8.1.5, соотношения (8.37) и (8.38) вытекают из определяющих соотношений (8.35) с использованием (1.31), (1.73) и тождеств (8.18), которые выполняются и в симплектическом случае. Далее,

$$\mathcal{F}_1\,\mathcal{F}_2-\mathcal{F}_2\,\mathcal{F}_1=F[-1]_1\,F[-1]_2-F[-1]_2\,F[-1]_1-F[-2]_1+F[-2]_2.$$

Поэтому, применяя (8.37) при $m=2$, получаем

$$S^{(2)}\big(\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2-\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\big)=0,$$

так что $\mathcal{F}$ удовлетворяет соотношению (5.51), как и требовалось. □

Теорема 8.3.2. *Предположим, что $n\geqslant m$. Тогда все элементы $\phi_{m\,a}$ лежат в центре Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$.*

Доказательство. По существу, рассуждение повторяет доказательство теоремы 8.1.6. Мы отметим только некоторые необходимые изменения. Рассмотрим тензорное произведение алгебр

$$\underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N\otimes\ldots\otimes\operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m+1}\otimes\mathrm{U}, \tag{8.39}$$

содержащее $m+1$ копий алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$, занумерованных числами $0,1,\ldots,m$, где U обозначает универсальную обёртывающую алгебру для алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}\oplus\mathbb{C}\tau$. Нам нужно проверить соотношения

$$F[0]_0\,\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\ldots\mathcal{F}_m=0\quad\text{и}\quad F[1]_0\,\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\ldots\mathcal{F}_m=0, \tag{8.40}$$

по модулю левого идеала алгебры U, порождённого пространством $\mathfrak{sp}_{2n}[t]$ и элементом $K+h^\vee$. Первое соотношение проверяется таким же вычислением, как в случае $\mathfrak{o}_N$, с использованием формулы

$$[F[0]_0,\mathcal{F}_a]=\Phi_{0\,a}\,\mathcal{F}_a-\mathcal{F}_a\,\Phi_{0\,a}, \tag{8.41}$$

вытекающей из (8.35), где $\Phi=P-Q$. Чтобы проверить второе соотношение в (8.40), воспользуемся другим следствием из (8.35):

$$[F[1]_0,\mathcal{F}_a]=F[0]_0+\Phi_{0\,a}\,F[0]_a-F[0]_a\,\Phi_{0\,a}+2\,\Phi_{0\,a}\,K,$$

так что

$$F[1]_0\,\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\ldots\mathcal{F}_m=\sum_{a=1}^{m}\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\ldots\mathcal{F}_{a-1}$$
$$\times\Big(F[0]_0+\Phi_{0\,a}\,F[0]_a-F[0]_a\,\Phi_{0\,a}+2\,\Phi_{0\,a}\,K\Big)\mathcal{F}_{a+1}\ldots\mathcal{F}_m.$$

Преобразуем это выражение таким же способом, как в ортогональном случае, учитывая, что теперь выполняются соотношения

$$S^{(m)}\,P_{a\,b}=P_{a\,b}\,S^{(m)}=-S^{(m)}$$

при $a<b$. Повторяя соответствующие рассуждения, приходим к симплектическому варианту формулы (8.24):

$$F[1]_0\,\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\ldots\mathcal{F}_m=-\sum_{a=1}^{m-1}2\,a\,\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\,\Phi_{0\,a}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\ldots\mathcal{F}_{m-1}$$
$$+\big(2\,m\,K+m(m-1)\big)\,\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\,S^{(m)}\Phi_{0\,m}\,\mathcal{F}_1\ldots\mathcal{F}_{m-1}. \tag{8.42}$$

Имеет место симплектический аналог леммы 8.1.7.

Лемма 8.3.3. *Если $m\leqslant n$, то для m-го частичного следа справедлива формула*

$$\mathrm{tr}_m\,S^{(m)}\Phi_{0\,m}=-\frac{n-m+1}{m\,(n-m+2)}\,S^{(m-1)}\sum_{a=1}^{m-1}\Phi_{0\,a}.$$

Доказательство. Применим то же рассуждение, что для доказательства леммы 2.2.7, в котором роль F_m играет элемент $\Phi_{0\,m}$. □

Вычисляя частичный след tr_m в правой части (8.42) с использованием (5.43) и леммы 8.3.3, получаем

$$F[1]_0 \,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m = -\frac{n-m+1}{m\,(n-m+2)}$$
$$\times\Big((2n-m+3)\sum_{a=1}^{m-1} 2\,a\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m-1}\,\Phi_{0\,a}\,S^{(m-1)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}$$
$$+\,m\big(2K+m-1\big)\sum_{a=1}^{m-1}\mathrm{tr}_{1,\dots,m-1}\,\Phi_{0\,a}\,S^{(m-1)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}\Big).$$

Докажем теперь симплектический вариант леммы 8.1.8.

Лемма 8.3.4. *Если $m\leqslant n$, то для всех a,b, $1\leqslant a<b\leqslant m$, справедливо соотношение*

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,\Phi_{0\,a}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,\Phi_{0\,b}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m.$$

Доказательство. По лемме 8.3.1 матрица $\mathcal{F}$ — это матрица Манина типа C, поэтому в силу свойства (5.55) имеем

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,\Phi_{0\,a}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\Phi_{0\,a}\,S^{(m)}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m\,P_{a\,b}$$
$$=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}P_{a\,b}\,\Phi_{0\,a}\,S^{(m)}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m,$$

где мы применили свойство цикличности следа. Это выражение равно

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\Phi_{0\,b}\,P_{a\,b}\,S^{(m)}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\Phi_{0\,b}\,S^{(m)}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m,$$

как и требовалось. □

Доказательство теоремы завершается применением леммы 8.3.4, где m следует заменить на $m-1$. В результате приходим к формуле

$$F[1]_0\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m$$
$$=-2\big(K+n+1\big)\,\frac{n-m+1}{n-m+2}\,\sum_{a=1}^{m-1}\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m-1}\,S^{(m-1)}\Phi_{0\,a}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1},$$

и выражение в правой части равно нулю, так как $K+n+1=0$ на критическом уровне. □

Наша следующая цель — придать смысл элементам $\phi_{m\,a}$ для всех значений $n\geqslant(m-1)/2$. Рассмотрим симметрическую алгебру $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)$ как модуль над алгеброй Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$, определённый формулой (6.18) при $r=0$, так что $\mathfrak{sp}_{2n}$ отождествляется с подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}[t]$ с помощью вложения $Y\mapsto Y[0]$. Из результатов § 2.2 следует, что для любых положительных целых чисел $r_1,\dots,r_k$, элементы алгебры $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)$, заданные формулой

$$\mathrm{tr}\,F[-r_1]\dots F[-r_k], \tag{8.43}$$

— это $\mathfrak{sp}_{2n}$-инварианты. Кроме того, стандартное применение первой фундаментальной теоремы теории инвариантов для симплектической группы позволяет заключить, что алгебра инвариантов $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{sp}_{2n}}$ порождается элементами вида (8.43). Имеет место градуированное разложение этой алгебры в прямую сумму конечномерных пространств:

$$\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{sp}_{2n}} = \bigoplus_{d\geqslant 0} \mathrm{S}_n^d, \tag{8.44}$$

где S_n^d обозначает подпространство однородных элементов степени d относительно градуировки на симметрической алгебре, определённой формулой $\deg F_{ij}[-r] = r$.

Для всех $n \geqslant 2$ отождествим алгебру Ли $\mathfrak{sp}_{2n-2}$ с подалгеброй в $\mathfrak{sp}_{2n}$, линейно порождённой всеми элементами F_{ij} с индексами, пробегающими множество $i, j \in \{1, \ldots, n-1, (n-1)', \ldots, 1'\}$. Введём проекции $\pi_n : \mathfrak{sp}_{2n} \to \mathfrak{sp}_{2n-2}$, определённые условием, что $\pi_n(F_{ij}) = 0$ для всех $F_{ij} \notin \mathfrak{sp}_{2n-2}$. Проекция π_n естественно продолжается на векторное пространство $t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]$, в котором она действует на коэффициенты полиномов от t^{-1}. Сохраним то же самое обозначение для соответствующего гомоморфизма симметрических алгебр

$$\pi_n : \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big) \to \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n-2}[t^{-1}]\big).$$

Заметим, что образы элементов (8.43) относительно гомоморфизма π_n имеют такой же вид следов произведений соответствующих матриц. Поэтому эти образы лежат в алгебре $\mathfrak{sp}_{2n-2}$-инвариантов алгебры $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n-2}[t^{-1}]\big)$.

Лемма 8.3.5. *Для любого фиксированного значения $d \geqslant 0$ существует такое целое неотрицательное число n_0, что размерность подпространства S_n^d не зависит от n при всех $n \geqslant n_0$. Эти подпространства обладают такими соответствующими базисами B_n^d, образованными мономами от элементов (8.43), что $\pi_n(B_n^d) = B_{n-1}^d$ при всех $n > n_0$. Кроме того, все подпространства S_n^d при $1 \leqslant n < n_0$ линейно порождаются элементами $(\pi_n \circ \pi_{n+1} \circ \cdots \circ \pi_{n_0})(B_{n_0}^d)$.*

Доказательство. Начиная с $n = 1$, будем использовать следующую процедуру для последовательных значений n. Выберем базис в пространстве S_n^d, образованный мономами от элементов (8.43). Те же самые мономы, рассматриваемые как элементы пространства S_{n+1}^d (т. е. $F[-r_i]$ теперь следует понимать как матрицу, составленную из образующих, связанных с алгеброй Ли $\mathfrak{sp}_{2n+2}$), будут линейно независимы. Это ясно из свойств проекции π_{n+1}. Следовательно, $\dim \mathrm{S}_n^d \leqslant \dim \mathrm{S}_{n+1}^d$. Если это неравенство строгое, тогда дополним это семейство линейно независимых мономов в пространстве S_{n+1}^d до базиса, добавляя другие мономы от элементов вида (8.43). Поскольку алгебра $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{sp}_{2n}}$ порождается элементами (8.43), размерности пространств S_n^d ограничены сверху константой, не зависящей от n. Это гарантирует, что процесс стабилизируется при некотором значении $n = n_0$, и тем самым мы получаем единообразные базисы в пространствах S_n^d при $n \geqslant n_0$ с требуемыми свойствами. □

Докажем теперь симплектический аналог леммы 8.2.1.

Лемма 8.3.6. *Предположим, что $n \geqslant m$. Пусть X — это некоторая линейная комбинация произведений элементов $F[s]_b$ алгебры* (8.33) *для $s < 0$ и $1 \leqslant b \leqslant m-1$. Тогда для любого $r < 0$ справедлива формула*

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)} X\, F[r]_m = -\frac{n-m+1}{m(n-m+2)} \operatorname{tr}_{1,\dots,m-1} S^{(m-1)} X \sum_{a=1}^{m-1} F[r]_a.$$

Доказательство. Это аффинный вариант леммы 2.2.7. Доказательство сводится к вычислению частичного следа, как в (2.55), где F_m следует заменить на $F[r]_m$. □

Предложение 8.3.7. *Выражение в левой части* (8.36) *допускает эквивалентную форму, которая задаёт корректно определённый элемент алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$ для всех $n \geqslant (m-1)/2$.*

Доказательство. Записывая произведение $\big(\tau+F[-1]_1\big)\dots\big(\tau+F[-1]_m\big)$ как полином от τ, представим каждый коэффициент ϕ_{ma} в виде линейной комбинации выражений

$$\frac{1}{n-m+1} \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)} F[r_1]_{a_1} \dots F[r_k]_{a_k}, \tag{8.45}$$

где все r_i — это отрицательные целые числа, и $1 \leqslant a_1 < \dots < a_k \leqslant m$. Мы будем рассуждать, как в доказательстве предложения 5.5.3, с использованием формулы (5.43) вместе с леммами 8.3.1 и 8.3.6. В результате каждое выражение (8.45) мы сможем представить как линейную комбинацию выражений вида

$$\frac{1}{n-h+1} \operatorname{tr}_{1,\dots,h} S^{(h)} F[s_1]_{b_1} \dots F[s_p]_{b_p}, \tag{8.46}$$

где $h = \lfloor m/2 \rfloor$, все s_i — это отрицательные целые числа, а все индексы $b_1, \dots, b_p$ принадлежат множеству $\{1, \dots, h\}$. Такая линейная комбинация задаёт элемент алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)$ при всех $n \geqslant h$ (это эквивалентно условию $n \geqslant (m-1)/2$).

Все возможные выражения, представляющие полином (8.36) в результате описанной процедуры, совпадают как элементы вакуумного модуля при всех $n \geqslant m$ и лежат в алгебре $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$ по теореме 8.3.2. Нам необходимо убедиться, что это свойство продолжается на все значения $n \geqslant h$. Будем рассматривать алгебру $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)$ как присоединённый $\mathfrak{sp}_{2n}$-модуль, определённый с помощью вложения $\mathfrak{sp}_{2n} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}$, при котором $Y \mapsto Y[0]$. Рассмотрим градуировку универсальной обёртывающей алгебры, которую определяет дифференцирование D (см. (6.14)), так что однородные элементы степени d — это собственные векторы оператора D с собственным значением d. Имеет место градуированное разложение алгебры $\mathfrak{sp}_{2n}$-инвариантов, аналогичное разложению (8.44):

$$\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{sp}_{2n}} = \bigoplus_{d\geqslant 0} \mathrm{U}_n^d,$$

где U_n^d обозначает подпространство однородных элементов степени d. Каноническое отображение симметризации

$$\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big) \to \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)$$

— это изоморфизм градуированных $\mathfrak{sp}_{2n}$-модулей. Следовательно, по лемме 8.3.5 для любого фиксированного $d \geqslant 0$ подпространства U_n^d обладают соответствующими единообразно выбранными базисами для всех $n \geqslant n_0$, где n_0 — это некоторое неотрицательное целое число, зависящее от d. В частности, базис $\{T_l\}_{l\in I}$ пространства U_n^d можно занумеровать множеством I, которое зависит только от d и не зависит от $n \geqslant n_0$. Кроме того, множество $\{T_l\}_{l\in I}$ линейно порождает пространство U_n^d при всех $n \geqslant 1$.

Все выражения, представляющие коэффициент ϕ_{ma} в разложении (8.36), — это однородные элементы степени a. Из рассуждения в первой части доказательства теоремы 8.3.2, основанной на соотношении (8.41), нетрудно увидеть, что каждая компонента (8.46) при $s_1 + \dots + s_p = -a$ принадлежит пространству U_n^a. Поэтому любое такое выражение можно единственным способом представить как линейную комбинацию $\sum_{l\in I} c_l(n)T_l$ базисных элементов пространства U_n^a, в которой коэффициенты $c_l(n)$ — это $\mathbb{C}$-значные рациональные функции от n при $n \geqslant n_0$ для некоторого значения n_0, зависящего от a. По лемме 8.3.5 такое представление продолжается на все значения $n \geqslant h$. Так как все возможные выражения, представляющие полином (8.36), совпадают при всех $n \geqslant m$, а рациональные функции $c_l(n)$ определяются своими значениями в бесконечном числе значений аргумента n, эти выражения обязаны совпасть при всех значениях $n \geqslant h$, при которых они определены.

Наконец, заметим, что произвольный элемент $\phi \in \mathrm{U}_n^a$ лежит в алгебре $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$ тогда и только тогда, когда $F_{11}[1]\,\phi = 0$ в вакуумном модуле $V_{-h^\vee}(\mathfrak{sp}_{2n})$. Поэтому из условия, что $\phi_{m\,a} \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$ при $n \geqslant m$, следует система линейных уравнений на коэффициенты $c_l(n)$, возникающая из соотношения $F_{11}[1]\,\phi_{m\,a} = 0$ в вакуумном модуле $V_{-h^\vee}(\mathfrak{sp}_{2n})$. Поскольку коэффициенты $c_l(n)$ удовлетворяют этой системе для бесконечного семейства значений n, отсюда следует, что любое выражение, представляющее элемент $\phi_{m\,a}$, лежит в алгебре $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$ для всех $n \geqslant h$. □

Мы проиллюстрируем приведённое рассуждение ниже, в §8.4, где мы получим более простые выражения для $\phi_{2\,2}$ и $\phi_{4\,4}$; ср. §8.2. Предложение 8.3.7 позволяет нам расширить область определения элементов $\phi_{m\,a}$ в разложении (8.36) на все значения $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$. Мы сохраним то же самое обозначение (8.36) для этих значений, имея в виду, что оно представляет корректно определённый элемент алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$, полученный в доказательстве предложения 8.3.7. Таким образом, теорема 8.3.2 справедлива для расширенного множества значений параметров $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$.

Из следующей теоремы вытекает теорема 6.3.1 для типа C.

Теорема 8.3.8. *Семейство элементов $\phi_{2\,2}, \phi_{4\,4}, \dots, \phi_{2n\,2n}$ — это полный набор векторов Сигала–Сугавары для алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$.*

Доказательство. Символы элементов этого семейства совпадают с образами некоторых элементов симметрической алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n})$ относительно вложения $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n}) \hookrightarrow \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)$, переводящего элемент $X \in \mathfrak{sp}_{2n}$ в $X[-1]$. По теореме 6.3.3 и в силу расширенного варианта теоремы 8.3.2 нам достаточно убедиться, что соответствующие элементы алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n})$ — это алгебраически независимые образующие алгебры инвариантов $\mathrm{S}(\mathfrak{sp}_{2n})^{\mathfrak{sp}_{2n}}$; см. также рассуждение после доказательства теоремы 6.3.3. Однако это свойство было проверено в § 2.2; см. следствие 2.2.10. □

Особую роль параметров с условием $n+1 \leqslant m \leqslant 2n+1$ можно понять из свойств гомоморфизма

$$\mathcal{B}_m(-2n) \to \operatorname{End}_{\mathfrak{sp}_{2n}}\big(\mathbb{C}^{2n}\big)^{\otimes m}, \tag{8.47}$$

определённого в (1.73). Хорошо известно, что алгебра Брауэра $\mathcal{B}_m(-2n)$ полупроста для всех значений $m \leqslant 2n+1$; см. **[2]**, **[139]**. Гомоморфизм (8.47) — это изоморфизм при $m \leqslant n$, но при $n+1 \leqslant m \leqslant 2n+1$ он имеет ненулевое ядро. В частности, если $m = n+1$, то ядро одномерно и линейно порождается симметризатором $s^{(m)}$. Чтобы получить явные формулы для векторов Сигала–Сугавары в этом случае, применим рекуррентную формулу для симметризатора $S^{(m)}$; ср. доказательство леммы 2.2.7:

$$S^{(m)} = \frac{1}{2m\,(n-m+2)}$$
$$\times \Big(2n-2m+4-(2n-m+2)\sum_{a=1}^{m-1} P_{a\,m} - m\sum_{a=1}^{m-1} Q_{a\,m} - \sum_{a\neq b} \Phi_{a\,m}\Phi_{b\,m}\Big)\, S^{(m-1)},$$

где $\Phi_{a\,m} = P_{a\,m} - Q_{a\,m}$ при $a = 1, \ldots, m-1$. Следовательно, применяя транспонирование (2.27) относительно m-й копии алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^{2n}$, получаем

$$S^{(m)\,\prime} - S^{(m)} = -\frac{n-m+1}{m\,(n-m+2)}\, S^{(m-1)}\, Y^{(m)},$$

где

$$Y^{(m)} = -\sum_{a=1}^{m-1} \Phi_{a\,m}$$

— это образ элемента Юциса–Мёрфи $y_m - (\omega-1)/2$ относительно отображения (1.73); см. (1.26). Поэтому, предполагая, что $n \geqslant m$, и используя свойство (8.30) для m-го частичного транспонирования, получаем, что след

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} S^{(m)} \mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_m$$

равен

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} S^{(m)} \mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_{m-1}\big(\tau - F[-1]_m\big)$$
$$- \frac{n-m+1}{m\,(n-m+2)}\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} S^{(m-1)}\, Y^{(m)}\, \mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_{m-1}\big(\tau - F[-1]_m\big).$$

Поскольку $Y^{(m)\,\prime} = -Y^{(m)}$, отсюда следует, что

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m = \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}\,\tau \\ + \frac{n-m+1}{2m\,(n-m+2)}\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m-1)}\,Y^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m.$$

Вместе с формулой (5.43) это приводит к соотношению

$$\frac{1}{n-m+1}\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m \\ = \frac{2n-m+3}{m\,(n-m+2)}\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m-1)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_{m-1}\,\tau \\ + \frac{1}{2m\,(n-m+2)}\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m-1)}\,Y^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m,$$

которое можно принять за определение левой части при $n = m-1$. По существу, оно эквивалентно определению, полученному в доказательстве предложения 8.3.7. Мы может теперь заключить, что все коэффициенты полинома

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m-1)}\,Y^{(m)}\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m$$

— это векторы Сигала–Сугавары для $\mathfrak{sp}_{2n}$ при всех $n \geqslant m-1$. Из свойств ветвления примитивных идемпотентов (1.30) вытекает соотношение

$$S^{(m-1)} = S^{(m)} + \mathcal{E}_{\mathcal{U}} + \mathcal{E}_{\mathcal{V}},$$

где $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ и $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}$ обозначают образы идемпотентов $e_{\mathcal{U}}$ и $e_{\mathcal{V}}$, соответствующих ud-таблицам

$$\mathcal{U} = \big((1),(2),\dots,(m-1),(m-1,1)\big) \quad \text{и} \quad \mathcal{V} = \big((1),(2),\dots,(m-1),(m-2)\big),$$

относительно отображения (1.73). Кроме того, из свойств (1.27) следует, что

$$S^{(m)}\,Y^{(m)} = (m-1)\,S^{(m)}, \qquad \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,Y^{(m)} = -\mathcal{E}_{\mathcal{U}} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{\mathcal{V}}\,Y^{(m)} = (2n-m+3)\,\mathcal{E}_{\mathcal{V}}.$$

Поэтому

$$S^{(m-1)}\,(1+Y^{(m)}) = m\,S^{(m)} + (2n-m+4)\,\mathcal{E}_{\mathcal{V}}$$

и

$$S^{(m-1)}\,(2n-m+3-Y^{(m)}) = 2(n-m+2)\,S^{(m)} + (2n-m+4)\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}.$$

Таким образом, все коэффициенты полиномов

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tr}_{1,\dots,m} \mathcal{E}_{\mathcal{V}}\,\mathcal{F}_1\dots\mathcal{F}_m$$

— это векторы Сигала–Сугавары для $\mathfrak{sp}_{2n}$ при всех $n \geqslant m-1$. Было бы интересно найти аналогичные формулы для векторов Сигала–Сугавары при всех $n \geqslant (m-1)/2$ вместе с их прямыми доказательствами.

Имеют место эквивалентные выражения для векторов Сигала–Сугавары $\phi_{m\,a}$ в контексте косой двойственности Хау. В обозначениях §2.3 введём элемент $\mathcal{F}^{(m)} \in \operatorname{End}\Lambda^m_{2n}\otimes \mathrm{U}\big(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}\oplus\mathbb{C}\tau\big)$ по формуле

$$\mathcal{F}^{(m)} : \zeta_{j_1}\wedge\dots\wedge\zeta_{j_m} \mapsto \sum_{i_1<\dots<i_m} \zeta_{i_1}\wedge\dots\wedge\zeta_{i_m}\otimes\mathcal{F}^{\,i_1\dots\,i_m}_{\,j_1\dots\,j_m},$$

где

$$\mathcal{F}^{i_1\ldots i_m}_{j_1\ldots j_m}=\frac{1}{m!}\sum_{\sigma,\pi\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sgn}\sigma\pi\cdot\mathcal{F}_{i_{\sigma(1)}j_{\pi(1)}}\ldots\mathcal{F}_{i_{\sigma(m)}j_{\pi(m)}}.$$

Используя представление (2.69), будем рассматривать экстремальный проектор p, определённый эквивалентными формулами (2.64) и (2.66), как элемент пространства $\operatorname{End}\Lambda^m_{2n}$.

Следствие 8.3.9. *Векторы Сигала–Сугавары $\phi_{m\,a}$ при $m\leqslant n$ находятся из разложения*

$$\gamma_m(-2n)\operatorname{tr}p\,\mathcal{F}^{(m)}=\phi_{m\,0}\,\tau^m+\phi_{m\,1}\,\tau^{m-1}+\cdots+\phi_{m\,m},$$

в котором след берётся по подпространству $\mathfrak{sl}_2$-особых векторов в представлении Λ^m_{2n}.

Доказательство. Используя свойство цикличности следа и применяя формулу (2.52) для симметризатора, запишем левую часть равенства (8.36) в виде

$$\gamma_m(-2n)\operatorname{tr}_{1,\ldots,m}S^{(m)}\mathcal{F}_1\ldots\mathcal{F}_m=\gamma_m(-2n)\operatorname{tr}_{1,\ldots,m}S^{(m)}\,H^{(m)}\mathcal{F}_1\ldots\mathcal{F}_m\,H^{(m)}.$$

Благодаря изоморфизму (2.67) произведение $H^{(m)}\mathcal{F}_1\ldots\mathcal{F}_m\,H^{(m)}$ можно рассматривать как оператор в векторном пространстве Λ^m_{2n} с коэффициентами в алгебре $\mathrm{U}\big(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}\oplus\mathbb{C}\tau\big)$. Этот оператор совпадает с $\mathcal{F}^{(m)}$. Наконец, по предложению 2.3.2 оператор $S^{(m)}$ действует в пространстве Λ^m_{2n} как экстремальный проектор p. □

§ 8.4. Инварианты малой степени в виде следов

Как и в ортогональном случае (см. § 8.2), коэффициенты полиномов $\operatorname{tr}\mathcal{F}^m$, вообще говоря, *не являются* векторами Сигала–Сугавары для алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$. Здесь мы построим векторы малой степени, используя теорему 8.3.8. Рассуждая, как в § 8.2, мы получим формулы для векторов Сигала–Сугавары $\phi_{2\,2}$ и $\phi_{4\,4}$. В силу (1.46) и (1.73) при $n\geqslant 2$ получаем

$$\phi_{2\,2}=\frac{n}{n-1}\operatorname{tr}_{1,2}\Big(\frac{1}{2}-\frac{P_{12}}{2}-\frac{Q_{12}}{2n}\Big)\big(F[-1]_1F[-1]_2+F[-2]_2\big).$$

Такое же рассуждение, как в ортогональном случае, приводит к формуле

$$\phi_{2\,2}=-\frac{1}{2}\operatorname{tr}F[-1]^2=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}F_{i\,j}[-1]F_{j\,i}[-1].$$

Этот вектор пропорционален каноническому вектору Сигала–Сугавары (6.11) *при всех* $n\geqslant 1$.

При $n\geqslant 4$ вектор Сигала–Сугавары $\phi_{4\,4}$ — это свободный член полинома от τ, заданного формулой

$$\frac{n-1}{n-3}\operatorname{tr}_{1,2,3,4}S^{(4)}\big(\tau+F[-1]_1\big)\big(\tau+F[-1]_2\big)\big(\tau+F[-1]_3\big)F[-1]_4.$$

Применяя лемму 8.3.6, мы можем переписать полином в виде

$$-\frac{n-1}{4(n-2)}\operatorname{tr}_{1,2,3} S^{(3)}\big(\tau+F[-1]_1\big)\big(\tau+F[-1]_2\big)\big(\tau+F[-1]_3\big) \times\big(F[-1]_1+F[-1]_2+F[-1]_3\big). \tag{8.48}$$

Из леммы 8.3.1 следует, что $\tau+F[-1]$ — это матрица Манина типа C, поэтому из соотношения (5.55) получаем

$$\operatorname{tr}_{1,2,3} S^{(3)}\big(\tau+F[-1]_1\big)\big(\tau+F[-1]_2\big)\big(\tau+F[-1]_3\big)F[-1]_2 = \operatorname{tr}_{1,2,3} S^{(3)}\big(\tau+F[-1]_2\big)\big(\tau+F[-1]_1\big)\big(\tau+F[-1]_3\big)F[-1]_2.$$

Используя сопряжение оператором P_{12} и применяя свойство цикличности следа, можно представить это выражение как

$$\operatorname{tr}_{1,2,3} S^{(3)}\big(\tau+F[-1]_1\big)\big(\tau+F[-1]_2\big)\big(\tau+F[-1]_3\big)F[-1]_1.$$

Такое же вычисление, применённое к третьему слагаемому в (8.48), показывает, что вектор ϕ_{44} равен свободному члену полинома

$$-\frac{3(n-1)}{4(n-2)}\operatorname{tr}_{1,2,3} S^{(3)}\big(\tau+F[-1]_1\big)\big(\tau+F[-1]_2\big)\big(\tau+F[-1]_3\big)F[-1]_1.$$

Раскрывая произведение и используя лемму 8.3.1, получаем

$$\phi_{44}=-\frac{3(n-1)}{4(n-2)}\operatorname{tr}_{1,2,3} S^{(3)}\Big(F[-1]_1^2F[-1]_2F[-1]_3+F[-1]_1F[-1]_2F[-2]_3 + 4F[-1]_1F[-2]_1F[-1]_2+F[-1]_1^2F[-2]_2+3F[-2]_1F[-2]_2 + 2F[-1]_1F[-3]_2+6F[-1]_1F[-3]_1+6F[-4]_1\Big).$$

Применим теперь лемму 8.3.6 и соотношение (5.43) при $m=3$, чтобы привести это выражение к виду

$$\phi_{44}=\frac{1}{8}\operatorname{tr}_{1,2}\Big(1-P_{12}-\frac{Q_{12}}{n}\Big)\Big(F[-1]_1^2F[-1]_2\big(F[-1]_1+F[-1]_2\big) + F[-1]_1F[-1]_2\big(F[-1]_1+F[-1]_2\big)-8nF[-1]_1F[-2]_1F[-1]_2-2nF[-1]_1^2F[-2]_2 - 6nF[-2]_1F[-2]_2-4nF[-1]_1F[-3]_2-12nF[-1]_1F[-3]_1-12nF[-4]_1\Big).$$

Вычисляя следы с использованием определяющих соотношений (8.35) и тождества $\big(F[r]_1+F[r]_2\big)Q_{12}=0$, получаем

$$\phi_{44}=\frac{1}{8}\Big(\big(\operatorname{tr}F[-1]^2\big)^2-2\operatorname{tr}F[-1]^4+(4n-1)\operatorname{tr}F[-1]^2F[-2]+(6n-6)\operatorname{tr}F[-2]^2 + (8n-9)\operatorname{tr}F[-1]F[-2]F[-1]+(-24n^2+18n+10)\operatorname{tr}F[-1]F[-3]\Big).$$

Справедливы формулы, аналогичные ортогональному случаю, которые проверяются таким же способом:

$$\operatorname{tr} F[-1]^2 F[-2] = (n+1) \operatorname{tr} F[-2]^2$$

и

$$\operatorname{tr} F[-1]F[-2]F[-1] = -(n+1) \operatorname{tr} F[-2]^2 + (2n+2) \operatorname{tr} F[-1]F[-3].$$

Поэтому формула для ϕ_{44} приводится к более простому виду:

$$\phi_{44} = \frac{1}{8}\Big(\big(\operatorname{tr} F[-1]^2\big)^2 - 2 \operatorname{tr} F[-1]^4 \\ - 8\,(n-1)^2 \operatorname{tr} F[-1]F[-3] + (-4n^2 + 10n + 2) \operatorname{tr} F[-2]^2 \Big).$$

Это вектор Сигала–Сугавары *при всех* $n \geqslant 2$. При этом вектор ϕ_{44} корректно определён и при $n = 1$, но он равен нулю, так как $S^{(2)} = 0$.

Поскольку центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$ инвариантен относительно трансляционного оператора T, определённого в (6.7), элементы $T\phi_{22}$ и $T^2\phi_{22}$ — это тоже векторы Сигала–Сугавары. Справедливы формулы

$$T\phi_{22} = -\operatorname{tr} F[-1]F[-2] \qquad \text{и} \qquad T^2\phi_{22} = -\operatorname{tr} F[-2]^2 - 2 \operatorname{tr} F[-1]F[-3].$$

Поэтому вектор ϕ_{44} в полном наборе векторов Сигала–Сугавары из теоремы 8.3.8 можно заменить на элемент

$$-4\phi_{44} + 2\phi_{22}^2 + 2\,(n-1)^2\, T^2\phi_{22},$$

который равен

$$\operatorname{tr} F[-1]^4 - (n+3) \operatorname{tr} F[-2]^2. \tag{8.49}$$

Пример 8.4.1. Полные наборы векторов Сигала–Сугавары имеют вид:

$$\text{для} \quad \mathfrak{sp}_2: \qquad \operatorname{tr} F[-1]^2,$$

$$\text{для} \quad \mathfrak{sp}_4: \qquad \operatorname{tr} F[-1]^2, \quad \operatorname{tr} F[-1]^4 - 5 \operatorname{tr} F[-2]^2.$$

Мы также приведём прямое доказательство того, что элемент (8.49) — это вектор Сигала–Сугавары. В следующей лемме мы используем тензорное произведение алгебр (8.39).

Лемма 8.4.2. *При* $m \geqslant 1$ *выполняются соотношения*

$$F[0]_0 \operatorname{tr}_1 F[-1]_1^m = 0$$

и

$$F[1]_0 \operatorname{tr}_1 F[-1]_1^m \\ = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{tr}_1 \Big(F[-1]_1^{i-1} \Phi_{01} F[-1]_1^{m-i} \Phi_{01} - \Phi_{01} F[-1]_1^{i-1} \Phi_{01} F[-1]_1^{m-i} \Big)$$

по модулю левого идеала алгебры U, *порождённого пространством* $\mathfrak{sp}_{2n}[t]$ *и элементом* $K + n + 1$, *где* $\Phi = P - Q$.

Доказательство. Рассуждение такое же, как для леммы 8.2.3; оно опирается на соотношение $(\Phi_{01}^2)' = \Phi_{01}^2 + 2\,(n+1)\,\Phi_{01}$ и соответствующий вариант свойства (8.30), которое выполняется для транспонирования (2.27) в симплектическом случае. □

Ясно, что $\operatorname{tr} F[-1] = 0$, и из леммы 8.4.2 вытекает, что $\operatorname{tr} F[-1]^2$ и $\operatorname{tr} F[-1]^3$ — это векторы Сигала–Сугавары для $\mathfrak{sp}_{2n}$. Теперь будем следовать соответствующему рассуждению в §8.2, учитывая формулы (1.75) и соотношения

$$\Phi_{01}\, F[-1]_1\, \Phi_{01} = F[-1]_0 - Q_{01}\, F[-1]_1 - F[-1]_1\, Q_{01}$$

и

$$(F[-1]^2)' = F[-1]^2 - 2\,(n+1)\, F[-2].$$

Это приводит к формулам

$$F[1]_0 \operatorname{tr}_1 F[-1]_1^4 = -2\,(n+3) \operatorname{tr}_1 \big(F[-2]_1\, F[-1]_1\, \Phi_{01} - \Phi_{01}\, F[-1]_1\, F[-2]_1 \big)$$

и

$$F[1]_0 \operatorname{tr}_1 F[-2]_1^2 = -2 \operatorname{tr}_1 \big(F[-2]_1\, F[-1]_1\, \Phi_{01} - \Phi_{01}\, F[-1]_1\, F[-2]_1 \big),$$

а значит,

$$F[1]_0 \Big(\operatorname{tr}_1 F[-1]_1^4 - (n+3) \operatorname{tr}_1 F[-2]_1^2 \Big) = 0,$$

так что (8.49) — это вектор Сигала–Сугавары.

§ 8.5. Операторы Сугавары для типов B, C и D

Здесь мы применим общие результаты, кратко изложенные в §6.6, чтобы построить образующие пополненных универсальных обёртывающих алгебр на критическом уровне. Как в §5.1, мы будем рассматривать одновременно все три случая B, C и D и использовать общее обозначение $\mathfrak{g}_N$ для алгебр Ли $\mathfrak{o}_N$ и $\mathfrak{sp}_N$. Критический уровень $\kappa = -h^\vee$ определён в (8.1) и (8.31); см. также замечание 8.1.1. Введём ряды Лорана от z с коэффициентами в алгебре $\mathrm{U}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}}_N)$ по формуле

$$F_{ij}(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} F_{ij}[r]\, z^{-r-1}, \qquad i,j = 1,\dots,N, \tag{8.50}$$

и соберём их в матрицу $F(z)$, так что

$$F(z) = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes F_{ij}(z).$$

По аналогии с (8.4) и (8.34) при $a \in \{1,\dots,m\}$ будем использовать обозначение $F(z)_a$ для соответствующих элементов пространства

$$\underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{U},$$

где U — это пространство полиномиальных дифференциальных операторов от z с коэффициентами в рядах Лорана $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}}_N)[[z,z^{-1}]]$.

Сохраним обозначение $\gamma_m(\omega)$ для рациональной функции, определённой в (2.40). Переменная ω принимает значение $\omega = N$ в ортогональном случае и

$\omega = -N$ в симплектическом случае. В соответствии с формулами (8.15), (8.36) и предложением 8.3.7 введём ряды Лорана $\phi_{m\,a}(z)$ с использованием обычной интерпретации нормального упорядочения и его применения справа налево:

$$: \gamma_m(\omega)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)}\big(\partial_z + F(z)_1\big)\dots\big(\partial_z + F(z)_m\big) : \\ = \phi_{m\,0}(z)\,\partial_z^m + \phi_{m\,1}(z)\,\partial_z^{m-1} + \dots + \phi_{m\,m}(z).$$

Следуя (8.6), в случае $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}$ введём (некоммутативный) *пфаффиан* как ряд Лорана

$$\mathrm{Pf}\, F(z) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}} \mathrm{sgn}\,\sigma\ : F_{\sigma(1)\,\sigma(2)'}(z)\dots F_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)'}(z) : . \tag{8.51}$$

Результаты §8.1 в ортогональном случае и §8.3 в симплектическом случае вместе с предложением 6.6.1 приводят к следующей теореме.

Теорема 8.5.1. *Все коэффициенты рядов Лорана $\phi_{m\,a}(z)$ лежат в центре алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}}_N)$. Коэффициенты ряда Лорана* $\mathrm{Pf}\, F(z)$ *лежат в центре алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n})$. Кроме того, коэффициенты рядов Лорана*

$$\phi_{2\,2}(z), \phi_{4\,4}(z), \dots, \phi_{2n\,2n}(z)$$

— это топологические образующие центра алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}}_N)$ в случаях алгебр Ли $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n+1}$ и $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_{2n}$. Коэффициенты рядов Лорана

$$\phi_{2\,2}(z), \phi_{4\,4}(z), \dots, \phi_{2n-2\,2n-2}(z), \mathrm{Pf}\, F(z)$$

— это топологические образующие центра алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n})$. □

Пример 8.5.2. Из вычислений в §8.2 и §8.4 для вектора Сигала–Сугавары $\phi_{2\,2}$ ясно, что ряд Лорана $\phi_{2\,2}(z)$ равен $:\mathrm{tr}\, F(z)^2:$ с точностью до постоянного множителя. Мы можем записать

$$: \mathrm{tr}\, F(z)^2 : \ = \ : \sum_{i,j=1}^{N} F_{ij}(z) F_{ji}(z) := \sum_{i,j=1}^{N} \Big(F_{ij}(z)_+ F_{ji}(z) + F_{ji}(z) F_{ij}(z)_-\Big).$$

Следовательно, для любого $p \in \mathbb{Z}$ коэффициент при z^{-p-2} в этом ряде — это центральный элемент алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}}_N)$, заданный формулой

$$\sum_{i,j=1}^{N} \Big(\sum_{r<0} F_{ij}[r] F_{ji}[p-r] + \sum_{r\geqslant 0} F_{ji}[p-r] F_{ij}[r]\Big).$$

Пример 8.5.3. В случае $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_4$ справедлива формула

$$\mathrm{Pf}\, F(z) = \frac{1}{2}\Big(: F_{13}(z)\, F_{31}(z) : \ - \ : F_{12}(z)\, F_{21}(z) : \ + \ : F_{11}(z)\, F_{22}(z) : \\ + \ : F_{31}(z)\, F_{13}(z) : \ - \ : F_{21}(z)\, F_{12}(z) : \ + \ : F_{22}(z)\, F_{11}(z) : \Big).$$

Из примера 8.1.2 следует, что это выражение можно переписать в виде

$$\mathrm{Pf}\, F(z) = \ : F_{11}(z)\, F_{22}(z) : \ - \ : F_{12}(z)\, F_{21}(z) : \ + \ : F_{13}(z)\, F_{31}(z) : - \partial_z F_{22}(z).$$

Взяв коэффициент при z^{-p-2} в этом ряде для любого $p \in \mathbb{Z}$, получаем центральный элемент алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{o}}_4)$ (в предположении, что $h^\vee = 2$):

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}} F_{11}[r]F_{22}[p-r] + \sum_{r<0} \big(F_{13}[r]F_{31}[p-r] - F_{12}[r]F_{21}[p-r]\big) \\ + \sum_{r\geqslant 0} \big(F_{31}[p-r]F_{13}[r] - F_{21}[p-r]F_{12}[r]\big) + (p+1)\,F_{22}[p];$$

см. замечание 8.1.1. □

Благодаря общей конструкции, изложенной в §6.5, некоторые элементы Казимира, построенные в §5.4 и §5.5, можно получить из векторов Сигала–Сугавары; ср. §7.1. А именно, применим гомоморфизм ϱ, определённый в (6.30), к коэффициентам полинома (8.15) или (8.36). Умножая образ полинома справа на z^m, получаем выражение

$$\gamma_m(\omega)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)}\big(-\partial_z + F_1\, z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z + F_m\, z^{-1}\big)\, z^m \\ = \gamma_m(\omega)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)}\big(u + F_1\big)\dots\big(u + F_m - m + 1\big),$$

где $u = -\partial_z\, z$, а переменная ω принимает соответствующее значение N или $-N$. Используя лемму 5.3.4, взяв $m = 2k$ и полагая $u = k-1$ и $u = k$, мы приходим к соответствующим элементам Казимира (5.23) и (5.44). Те же самые элементы Казимира можно получить из построенных выше операторов Сугавары точно так же, как для типа A; см. рассуждения в конце гл. 7.

§ 8.6. Библиографические замечания

Изложение следует работе [**110**] с некоторыми модификациями, особенно в симплектическом случае. Если теорему Фейгина–Френкеля (теорема 6.3.1) считать выполненной в этом случае, то вторую часть предложения 8.3.7 можно доказать более простым рассуждением, как в доказательстве предложения 5.5.3. Некоторый некоммутативный вариант свойства, что элементы (8.43) порождают алгебру инвариантов, был получен Кумаром [**97**].

Глава 9

Коммутативные подалгебры в $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$

Теперь мы применим образующие алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, построенные в гл. 7 и 8, чтобы описать коммутативные подалгебры $\mathcal{A}_\mu$ в универсальной обёртывающей алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, параметризованные элементами $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Соответствующие коммутативные подалгебры в алгебре Пуассона $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ известны как подалгебры Мищенко–Фоменко или подалгебры сдвига аргумента. Конструкция подалгебр $\mathcal{A}_\mu$ приводит к положительному решению проблемы квантования Винберга в терминах явных образующих. Кроме того, мы получим прямое доказательство теоремы Фейгина, Френкеля и Толедано Ларедо [**42**], описывающей структуру алгебры $\mathcal{A}_\mu$ для регулярных элементов μ в случае классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$. В более общем контексте связь между центром на критическом уровне и коммутативным семейством гамильтонианов Годена будет обсуждаться в гл. 14.

§ 9.1. Подалгебры Мищенко–Фоменко

Алгебра Пуассона A — это коммутативная ассоциативная алгебра с заданной на ней *скобкой Пуассона*, которая представляет собой билинейное отображение

$$\{\ ,\ \} : A \times A \to A, \tag{9.1}$$

удовлетворяющее следующим условиям: A — это алгебра Ли относительно этой скобки, и выполняется *правило Лейбница*

$$\{x, yz\} = \{x, y\}\, z + y\, \{x, z\} \tag{9.2}$$

для любых элементов $x, y, z \in A$. В частности, отображение (9.1) *кососимметрично*:

$$\{x, y\} = -\{y, x\}$$

и удовлетворяет *тождеству Якоби*:

$$\{x, \{y, z\}\} + \{y, \{z, x\}\} + \{z, \{x, y\}\} = 0$$

для всех $x, y, z \in A$. Центр алгебры A относительно скобки Пуассона задаётся формулой

$$\mathrm{Z}(A) = \{P \in A \mid \{x, P\} = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in A\}. \tag{9.3}$$

Ясно, что $\mathrm{Z}(A)$ — это подалгебра в A.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — это произвольная конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$. Симметрическая алгебра $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ — это алгебра Пуассона со *скобкой Ли–Пуассона*, значение которой $\{x, y\}$ на любых элементах $x, y \in \mathfrak{g}$ — это коммутатор $[x, y]$. Эта скобка продолжается на всю алгебру $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ с помощью правила Лейбница (9.2). Если $J_1, \ldots, J_d$ — это такой базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^{d} c_{ij}^k \, J_k \tag{9.4}$$

для структурных констант c_{ij}^k, то

$$\{J_i, J_j\} = \sum_{k=1}^{d} c_{ij}^k \, J_k. \tag{9.5}$$

По правилу Лейбница скобка Пуассона для двух мономов даётся формулой

$$\{x_1 \ldots x_r, y_1 \ldots y_s\} = \sum_{a=1}^{r} \sum_{b=1}^{s} x_1 \ldots \widehat{x}_a \ldots x_r \, y_1 \ldots \widehat{y}_b \ldots y_s \, \{x_a, y_b\}, \tag{9.6}$$

в которой шляпки указывают, что соответствующие множители должны быть пропущены. По определению (9.3) центр алгебры Пуассона $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ совпадает с подалгеброй $\mathfrak{g}$-инвариантов $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$.

Зафиксируем функционал $\mu \in \mathfrak{g}^*$ и число $t \in \mathbb{C}$. Рассмотрим другое семейство образующих алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, полученное «сдвигом аргументов». А именно, положим $J_i' = J_i + t\,\mu_i$ при $i = 1, \ldots, d$, где $\mu_i = \mu(J_i)$. На алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ возникает другая скобка Пуассона $\{\ ,\ \}_t$, которая задаётся теми же формулами (9.5), но для сдвинутых образующих:

$$\{J_i', J_j'\}_t = \sum_{k=1}^{d} c_{ij}^k \, J_k'. \tag{9.7}$$

В терминах базисных элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ она принимает вид

$$\{J_i, J_j\}_t = \sum_{k=1}^{d} c_{ij}^k \, (J_k + t\,\mu_k). \tag{9.8}$$

Из формулы (9.7) ясно, что центр Z_t алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ относительно скобки $\{\ ,\ \}_t$ совпадает с подалгеброй, полученной из $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ с помощью сдвига аргументов в инвариантах $J_i \mapsto J_i + t\,\mu_i$, т. е.

$$\mathrm{Z}_t = \bigl\{ P(J + t\,\mu) \mid P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \bigr\}, \tag{9.9}$$

где элементы симметрической алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ рассматриваются как полиномы $P = P(J)$ от переменных $J = (J_1, \ldots, J_d)$ и мы используем запись

$$P(J + t\,\mu) = P\bigl(J_1 + t\,\mu_1, \ldots, J_d + t\,\mu_d\bigr).$$

Определение 9.1.1. Обозначим через $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ подалгебру в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, порождённую всеми центрами Z_t при $t \in \mathbb{C}$. Она называется *подалгеброй Мищенко–Фоменко* или *подалгеброй сдвига аргумента*. $\square$

Предложение 9.1.2. *Подалгебра $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ коммутативна относительно любой скобки $\{\ ,\ \}_t$, т. е. $\{x,y\}_t = 0$ для всех $x,y \in \overline{\mathcal{A}}_\mu$ и всех $t \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$. Возьмём произвольный элемент центра Z_{t_1} и произвольный элемент центра Z_{t_2}. В силу (9.9) эти элементы имеют вид $P(J + t_1\mu)$ и $Q(J + t_2\mu)$ для некоторых $P, Q \in \mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Из формул (9.6) и (9.8) видно, что выражение

$$\big\{P(J + t_1\mu), Q(J + t_2\mu)\big\}_t \tag{9.10}$$

линейно по t. Если $t_1 \neq t_2$, то это выражение равно нулю при $t = t_1$ и $t = t_2$, потому что элементы лежат в центрах относительно соответствующих скобок. Отсюда следует, что выражение (9.10) равно нулю при всех t. С другой стороны, при фиксированном значении t выражение (9.10) зависит полиномиально от t_1 и t_2. Поскольку этот полином обращается в нуль при всех $t_1 \neq t_2$, он тождественно равен нулю. $\square$

На определение подалгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ можно посмотреть с другой точки зрения. Пусть $P = P(J_1, \ldots, J_d)$ — это элемент алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ некоторой степени m как полином от переменных J_i. Будем теперь считать, что t — это переменная. В полиноме P сделаем подстановки $J_i \mapsto J_i + t\mu_i$ для всех i и запишем его как полином от t:

$$P\big(J_1 + t\mu_1, \ldots, J_d + t\mu_d\big) = P_{(0)} + P_{(1)}\,t + \cdots + P_{(m)}\,t^m, \tag{9.11}$$

тем самым определяя элементы $P_{(i)} \in \mathrm{S}(\mathfrak{g})$, связанные с P и μ. Подалгебра $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ порождается всеми элементами $P_{(i)}$, отвечающими всем $\mathfrak{g}$-инвариантам $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. По предложению 9.1.2 алгебра $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ коммутативна относительно исходной скобки Пуассона $\{\ ,\ \}$ (она соответствует значению $t = 0$).

В случае однородного полинома P мы будем также использовать эквивалентную форму разложения (9.11), в которой мы делаем другие подстановки $J_i \mapsto J_i\,z^{-1} + \mu_i$ для переменной z и записываем P как полином от z^{-1}:

$$P\big(J_1\,z^{-1} + \mu_1, \ldots, J_d\,z^{-1} + \mu_d\big) = P_{(0)}\,z^{-m} + \cdots + P_{(m-1)}\,z^{-1} + P_{(m)}. \tag{9.12}$$

Теперь будем считать, что $\mathfrak{g}$ — это простая алгебра Ли. Билинейная форма (6.4) позволяет нам отождествить пространство $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$, как в доказательстве теоремы 6.3.3. Нам будет удобно использовать базис $J^1, \ldots, J^d$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, двойственный базису $J_1, \ldots, J_d$ относительно формы (6.4). Для любого элемента $\mu \in \mathfrak{g}^*$ положим $\mu_i = \mu(J_i)$ и $\mu^i = \mu(J^i)$. Тогда μ отождествляется с элементом алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mu = \mu_1 J^1 + \cdots + \mu_d J^d = \mu^1 J_1 + \cdots + \mu^d J_d \tag{9.13}$$

и выполняются соотношения $\langle \mu, J_i\rangle = \mu_i$ и $\langle \mu, J^i\rangle = \mu^i$. Обозначим через n ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Элемент $\mu \in \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ называется *регулярным*, если централизатор $\mathfrak{g}^\mu$ элемента μ в $\mathfrak{g}$ имеет минимальную возможную размерность; эта минимальная размерность совпадает с n.

Как говорилось в гл. 2, подалгебра $\mathfrak{g}$-инвариантов в симметрической алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ обладает семейством $P_1, \ldots, P_n$ алгебраически независимых образующих; см. (2.2).

Теорема 9.1.3. *Предположим, что элемент μ регулярен. Если $P_1, \ldots, P_n$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ соответствующих степеней $d_1, \ldots, d_n$, то элементы*

$$P_{k(i)}, \qquad k = 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots, d_k - 1, \tag{9.14}$$

— алгебраически независимые образующие алгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$.

Доказательство. Ясно, что элементы $P_{k(i)}$ порождают алгебру $\overline{\mathcal{A}}_\mu$. Нам нужно только убедиться, что эти полиномы алгебраически независимы. Достаточно проверить, что дифференциалы $dP_{k\,(i)}$, вычисленные в некоторой точке, линейно независимы.

Мы будем рассматривать дифференциал dP полинома $P = P(J) \in \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ как элемент пространства $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$, заданный формулой

$$dP = \frac{\partial P}{\partial J_1} \otimes J_1 + \cdots + \frac{\partial P}{\partial J_d} \otimes J_d.$$

Нетрудно проверить, что он не зависит от выбора базиса. Векторное пространство $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ будем считать алгеброй Ли со скобкой

$$[P \otimes X, Q \otimes Y] = PQ \otimes [X, Y], \qquad P, Q \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \quad \text{и} \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Введём элемент этой алгебры Ли по формуле

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{d} J^i \otimes J_i.$$

Лемма 9.1.4. *Если $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, то в алгебре Ли $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ справедливо соотношение*

$$\big[\mathcal{X}, dP\big] = 0.$$

Доказательство. Используя структурные константы, введённые в (9.4), мы можем записать

$$\Big[\sum_{i=1}^{d} J^i \otimes J_i, dP\Big] = \sum_{i,j=1}^{d} J^i \frac{\partial P}{\partial J_j} \otimes [J_i, J_j] = \sum_{i,j,k=1}^{d} c_{ij}^k J^i \frac{\partial P}{\partial J_j} \otimes J_k. \tag{9.15}$$

С другой стороны, $c_{ij}^k = \langle [J_i, J_j], J^k \rangle$, так что $c_{ij}^k = \langle J_i, [J_j, J^k] \rangle$, поскольку форма (6.4) инвариантна. Отсюда следует соотношение

$$[J^k, J_j] = -\sum_{i=1}^{d} c_{ij}^k J^i.$$

Условие $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ означает, что при всех $k = 1, \ldots, d$ выполняется равенство

$$J^k \cdot P = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial P}{\partial J_j} [J^k, J_j] = -\sum_{i,j=1}^{d} c_{ij}^k \frac{\partial P}{\partial J_j} J^i = 0,$$

поэтому выражение в (9.15) равно нулю. □

Соотношение в лемме 9.1.4 останется справедливым, если мы заменим образующие алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ по правилу $J_i \mapsto J_i + t\mu_i$ для всех $i = 1, \ldots, d$, где t — это переменная. В терминах двойственных образующих эта замена записывается в виде $J^i \mapsto J^i + t\mu^i$. Таким образом,

$$\Big[\sum_{i=1}^{d}(J^i + t\mu^i) \otimes J_i, dP\big|_{J_i \mapsto J_i + t\mu_i}\Big] = 0.$$

Поэтому, разлагая полином $P(J + t\mu)$ как в (9.11) и приравнивая коэффициенты при всех степенях t к нулю, получим соотношения

$$\begin{gathered}\big[\mathcal{X}, dP_{(0)}\big] = 0,\\ \big[\mathcal{X}, dP_{(i+1)}\big] + \big[1 \otimes \mu, dP_{(i)}\big] = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-2,\\ \big[1 \otimes \mu, dP_{(m-1)}\big] = 0.\end{gathered} \tag{9.16}$$

В качестве следующего шага мы завершим доказательство теоремы в частном случае, считая μ регулярным нильпотентным элементом. Рассмотрим такую $\mathfrak{sl}_2$-подалгебру в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, что $e = \mu$, а базисные элементы e, f, h, удовлетворяют коммутационным соотношениям (6.12). Положим $x = h/2$ и введём точечное отображение

$$\mathrm{ev} : \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}, \qquad J_i \mapsto x_i \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, d,$$

где элемент x записан в виде $x = x_1 J^1 + \cdots + x_d J^d$. Мы будем использовать то же самое обозначение для его продолжения на алгебру Ли $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ev} : \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \tag{9.17}$$

которое действует на тензорном множителе $\mathfrak{g}$ как тождественное отображение. Ясно, что $\mathrm{ev}(\mathcal{X}) = x$. Рассмотрим соответствующие образы дифференциалов полиномов $P_{k(i)}$ и положим

$$\mathcal{P}_{k(i)} = \mathrm{ev}\big(dP_{k(i)}\big), \qquad k = 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots, d_k - 1. \tag{9.18}$$

Максимальное среди всех чисел d_k — это *число Кокстера* $h_{\mathfrak{g}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для $j = 0, 1, \ldots, h_{\mathfrak{g}} - 1$ введём подпространство в $\mathfrak{g}$ по формуле

$$\mathcal{D}_j = \text{линейная оболочка } \ \{\mathcal{P}_{k(i)} \mid k = 1, \ldots, n, \ \ i = 0, 1, \ldots, j\},$$

считая, что $\mathcal{P}_{k(i)} = 0$ при $i \geqslant d_k$.

Благодаря результатам Костанта **[93]** известно разложение присоединённого $\mathfrak{sl}_2$-модуля $\mathfrak{g}$ на неприводимые компоненты:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_n,$$

где $\dim \mathfrak{m}_k = 2d_k - 1$. Старший вектор $\mathfrak{sl}_2$-модуля $\mathfrak{m}_k$ аннулируется действием элемента e, а вес этого вектора относительно оператора x равен $d_k - 1$. Следовательно, весовое разложение модуля $\mathfrak{m}_k$ относительно присоединённого действия элемента x имеет вид

$$\mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_k^{(d_k-1)} \oplus \mathfrak{m}_k^{(d_k-2)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_k^{(-d_k+1)}.$$

Для каждого целого числа $-h_{\mathfrak{g}} + 1 \leqslant i \leqslant h_{\mathfrak{g}} - 1$ введём подпространство в $\mathfrak{g}$ по формуле

$$\mathfrak{g}^{(i)} = \mathfrak{m}_1^{(i)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_n^{(i)}. \tag{9.19}$$

Лемма 9.1.5. *При $j = 0, 1, \ldots, h_{\mathfrak{g}} - 1$ справедливо соотношение*

$$\mathcal{D}_j = \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(j)}. \tag{9.20}$$

Доказательство. Применяя точечное отображение (9.17) к соотношениям (9.16), получим

$$\begin{gathered}
\big[x, \mathcal{P}_{k(0)}\big] = 0, \\
\big[x, \mathcal{P}_{k(i+1)}\big] + \big[e, \mathcal{P}_{k(i)}\big] = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, d_k - 2, \\
\big[e, \mathcal{P}_{k(d_k-1)}\big] = 0
\end{gathered} \tag{9.21}$$

при $k = 1, \ldots, n$. Мы будем доказывать соотношение (9.20) индукцией по j. Начнём с $j = 0$. Первое соотношение в (9.21) показывает, что $\mathcal{D}_0 \subset \mathfrak{g}^{(0)}$. Однако x — это регулярный элемент в $\mathfrak{g}$, поскольку его централизатор совпадает с n-мерным подпространством $\mathfrak{g}^{(0)}$. В силу ещё одной теоремы Костанта **[94]** дифференциалы $dP_1, \ldots, dP_n$, вычисленные в регулярной точке x, линейно независимы, и, следовательно, $\mathcal{D}_0 = \mathfrak{g}^{(0)}$.

Предположим теперь, что соотношение (9.20) выполнено для всех значений $j = 0, 1, \ldots, m$. Из формул (9.21) следует, что

$$\operatorname{ad} x \cdot \mathcal{D}_{m+1} = \operatorname{ad} e \cdot \mathcal{D}_m. \tag{9.22}$$

Для каждого k отображение $\operatorname{ad} e : \mathfrak{m}_k^{(i)} \to \mathfrak{m}_k^{(i+1)}$ сюръективно при всех $i \geqslant 0$, поэтому этим свойством обладает и отображение $\operatorname{ad} e : \mathfrak{g}^{(i)} \to \mathfrak{g}^{(i+1)}$. Следовательно, по предположению индукции

$$\operatorname{ad} e \cdot \mathcal{D}_m = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(m+1)}. \tag{9.23}$$

Заметим, что для каждого $i \neq 0$ ограничение оператора $\operatorname{ad} x$ на подпространство $\mathfrak{g}^{(i)}$ обратимо. Кроме того, ядро этого оператора на $\mathfrak{g}$ совпадает с $\mathfrak{g}^{(0)}$. Поэтому из соотношений (9.22) и (9.23) вытекает, что

$$\mathcal{D}_{m+1} \subset \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(m+1)}$$

и что проекция пространства $\mathcal{D}_{m+1}$ на прямую сумму в (9.23), параллельно $\mathfrak{g}^{(0)}$, сюръективна. Однако пространство $\mathcal{D}_{m+1}$ содержит $\mathcal{D}_0 = \mathfrak{g}^{(0)}$, так что соотношение (9.20) выполнено при $j = m+1$, что и завершает доказательство леммы. □

Взяв $j = h_{\mathfrak{g}} - 1$ в лемме 9.1.5, получаем, что линейная оболочка всех дифференциалов (9.18) совпадает с прямой суммой

$$\mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(h_{\mathfrak{g}}-1)}, \tag{9.24}$$

которая является борелевской подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Следовательно, дифференциалы (9.18) линейно независимы, так как их общее число равно $d_1 + \cdots + d_n$, т. е. равно размерности борелевской подалгебры. Тем самым мы проверили, что полиномы (9.14) алгебраически независимы в случае регулярного нильпотентного элемента μ.

Чтобы завершить доказательство теоремы в общем случае, введём подмножество $S \subset \mathfrak{g}$, которое состоит из всех элементов μ, обладающих тем свойством, что соответствующие полиномы (9.14) алгебраически независимы. Тогда S — это непустое открытое по Зарисскому подмножество в $\mathfrak{g}$. Из определения алгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ с помощью разложений (9.11) следует, что $\overline{\mathcal{A}}_\mu = \overline{\mathcal{A}}_{c\mu}$ для любого ненулевого $c \in \mathbb{C}$. Кроме того, $\mathrm{Ad}_g(\overline{\mathcal{A}}_\mu) = \overline{\mathcal{A}}_{\mathrm{Ad}_g(\mu)}$ для любого элемента $g \in G$ присоединённой группы G, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом, S — это коническое подмножество в $\mathfrak{g}$, инвариантное относительно присоединённого действия группы G. Будем использовать $\mathfrak{sl}_2$-подалгебру в $\mathfrak{g}$, введённую в предыдущем рассуждении. Благодаря работе Костанта [**94**] хорошо известно, что присоединённая орбита любого регулярного элемента алгебры Ли $\mathfrak{g}$ пересекает аффинное подпространство $e + \mathfrak{g}^f$ (*срез Костанта*) в единственной точке. Здесь $\mathfrak{g}^f$ обозначает централизатор элемента f в $\mathfrak{g}$, который является подпространством в борелевской подалгебре, противоположной (9.24):

$$\mathfrak{g}^f \subset \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(-1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(-h_\mathfrak{g}+1)}.$$

Поэтому мы можем считать, что μ — это такой регулярный элемент, что $\mu \in e + \mathfrak{g}^f$. Предположим, что $\mu \notin S$, и для любого $a \in \mathbb{C}$ положим

$$\chi_a = \exp a \cdot \mathrm{Ad}_{\exp(-ax)}(\mu).$$

Все эти элементы не лежат в S. Заметим, что если $y \in \mathfrak{g}^{(p)}$, то

$$\exp\big(\mathrm{ad}(-ax)\big)(y) = \exp(-ap)y.$$

Поскольку $e \in \mathfrak{g}^{(1)}$, отсюда следует, что если $\exp a \to 0$, то $\chi_a \to e$. Это приводит к противоречию, так как элемент e открытого множества S аппроксимируется элементами, не лежащими в S. Таким образом $\mu \in S$, что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Общее число алгебраически независимых образующих алгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ из теоремы 9.1.3 равно $d_1 + \cdots + d_n$, что совпадает с размерностью $(\dim \mathfrak{g} + n)/2$ борелевской подалгебры в $\mathfrak{g}$. Известно, что степень трансцендентности любой коммутативной подалгебры в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ относительно скобки Ли–Пуассона не может превосходить этого числа.

Замечание 9.1.6. Подалгебра Мищенко–Фоменко $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, соответствующая регулярному элементу $\mu \in \mathfrak{g}^*$, — это максимальная коммутативная подалгебра относительно скобки Ли–Пуассона; см. [**133**] и [**148**]. $\square$

Пример 9.1.7. Теорема 9.1.3 очевидным образом переносится на редуктивную алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$. По сравнению со случаем простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_N$ нужно только добавить инвариант первой степени. Произвольный элемент $\mu \in \mathfrak{gl}_N^*$ можно рассматривать как матрицу $\mu = [\mu_{ij}]$ размера $N \times N$, где $\mu_{ij} = \mu(E_{ij})$. На алгебре Ли $\mathfrak{gl}_N$ зададим невырожденную инвариантную билинейную форму[1]

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr} XY, \qquad X, Y \in \mathfrak{gl}_N.$$

В соответствии с (9.13) мы можем отождествить μ с элементом алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$, представленным транспонированной матрицей μ^t. Тогда μ — это *регулярный элемент* в $\mathfrak{gl}_N^*$ в том и только том случае, если жорданова форма матрицы $[\mu_{ij}]$ (или, что эквивалентно, транспонированной матрицы) не содержит двух жордановых клеток с одним и тем же собственным значением. Кроме того, элемент μ *регулярный полупростой*, если эта матрица диагонализуемая и все её собственные значения различны. В случае, когда жорданова форма представляет собой единственную жорданову клетку с нулевым собственным значением, элемент μ называется *регулярным нильпотентным*.

Используя инварианты $C_1, \dots, C_N$ в алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$, определённые в (2.6), введём элементы $C_{m\,(i)}$ подалгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ с помощью разложений

$$\det\big(u + \mu + E\, z^{-1}\big) = u^N + \sum_{m=1}^{N} C_m(z)\, u^{N-m} \tag{9.25}$$

и

$$C_m(z) = C_{m\,(0)}\, z^{-m} + \dots + C_{m\,(m-1)}\, z^{-1} + C_{m\,(m)}.$$

Если μ регулярен, то элементы $C_{m\,(i)}$ при $m = 1, \dots, N$ и $i = 0, 1, \dots, m-1$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$.

Аналогично, рассматривая инварианты T_m, определённые в (2.11), положим

$$\operatorname{tr}\big(\mu + E\, z^{-1}\big)^m = T_{m\,(0)}\, z^{-m} + \dots + T_{m\,(m-1)}\, z^{-1} + T_{m\,(m)}.$$

Все элементы $T_{m\,(i)}$ лежат в подалгебре $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$. Кроме того, если μ регулярен, то элементы $T_{m\,(i)}$ при $m = 1, \dots, N$ и $i = 0, 1, \dots, m-1$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$. □

Аналогичные семейства алгебраически независимых образующих подалгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)$ для регулярных элементов μ можно получить, используя инварианты для типов B, C и D, построенные в § 2.2.

§ 9.2. Проблема квантования Винберга

Универсальную обёртывающую алгебру $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ можно рассматривать как «квантование» алгебры Пуассона $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Можно перенормировать базисные элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с помощью «параметра деформации» h (принимающего ненулевые комплексные значения) и ввести новые базисные элементы $\widetilde{J}_i = h\, J_i$ при $i = 1, \dots, d$. Коммутационные соотношения (9.4) в новом базисе примут вид

$$[\widetilde{J}_i, \widetilde{J}_j] = h \sum_{k=1}^{d} c_{ij}^k\, \widetilde{J}_k.$$

[1]Хотя мы используем то же самое обозначение, это форма отличается от формы Киллинга (7.2).

В пределе при $h \to 0$ получается симметрическая алгебра $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, а скобка Пуассона (9.5) восстанавливается по правилу

$$\{\widetilde{J}_i, \widetilde{J}_j\} = \lim_{h\to 0} \frac{[\widetilde{J}_i, \widetilde{J}_j]}{h}.$$

В гл. 4 мы использовали фактически эквивалентный подход, опирающийся на каноническую фильтрацию в алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, так что соответствующая градуированная алгебра $\mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ изоморфна симметрической алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$.

Поскольку подалгебра $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ коммутативна относительно скобки Пуассона, возникает вопрос, можно ли построить коммутативную подалгебру $\mathcal{A}_\mu$ в $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, которая «квантует» подалгебру $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ в том смысле, что $\mathrm{gr}\,\mathcal{A}_\mu = \overline{\mathcal{A}}_\mu$. Эта *проблема квантования* была поставлена Э. Б. Винбергом в работе [**150**], в которой, в частности, были построены коммутирующие семейства элементов алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Положительное решение проблемы Винберга может быть получено с помощью центра Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$; см. теорему 9.2.4.

Пусть z — это переменная. Для любого $\mu \in \mathfrak{g}^*$ рассмотрим обобщение точечного гомоморфизма (6.30):

$$\varrho_{\mu} : \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[z^{-1}], \qquad X[r] \mapsto X\, z^r + \delta_{r,-1}\, \mu(X), \tag{9.26}$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$ и $r < 0$. Пусть $S \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это однородный элемент степени d относительно градуировки, заданной дифференцированием (6.14). Определим элементы $S_{(a)} \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ (зависящие от μ) с помощью разложения

$$\varrho_{\mu}(S) = S_{(0)}\, z^{-d} + \dots + S_{(d-1)}\, z^{-1} + S_{(d)}. \tag{9.27}$$

Так как алгебра $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ инвариантна относительно трансляционного оператора T, определённого в (6.7), свойство (6.31) распространяется на гомоморфизм (9.26), так что

$$\varrho_{\mu}(TS) = -\partial_z\, \varrho_{\mu}(S). \tag{9.28}$$

По предложению 6.5.1 элемент $S_{(0)}$ лежит в центре алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Если переменная z принимает числовое значение в $\mathbb{C}$, то формула (9.26) задаёт гомоморфизм

$$\varrho_{\mu,z} : \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}), \qquad X[r] \mapsto X\, z^r + \delta_{r,-1}\, \mu(X), \tag{9.29}$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$ и $r < 0$. Поскольку центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это коммутативная подалгебра в $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$, его образ относительно гомоморфизма $\varrho_{\mu,z}$ — это коммутативная подалгебра в $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. В лемме 9.2.2 мы увидим, что этот образ не зависит от значения z.

Определение 9.2.1. Коммутативная подалгебра $\mathcal{A}_\mu$ в алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ определяется как образ алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ относительно гомоморфизма (9.29) при ненулевом $z \in \mathbb{C}$. □

Лемма 9.2.2. *Подалгебра $\mathcal{A}_\mu$ не зависит от z.*

Доказательство. Предположим, что алгебра $\mathcal{A}_\mu$ определена для фиксированного ненулевого значения $z \in \mathbb{C}$. Будет достаточно проверить, что для любого однородного элемента $S \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ степени d все коэффициенты $S_{(a)}$ полинома (9.27) лежат в $\mathcal{A}_\mu$. Введём ещё один полином

$$P(z) = S_{(0)} + S_{(1)} z + \cdots + S_{(d)} z^d \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[z],$$

считая z переменной. Тогда $P(z) = z^d \varrho_\mu(S)$, и в силу (9.28) все производные полинома $P(z)$ по z можно выразить как $\mathbb{C}[z]$-линейные комбинации образов $\varrho_\mu(T^r S)$. Остаётся взять значение переменной z в выбранной точке. □

Пусть $S_1, \dots, S_n$ — это полный набор векторов Сигала–Сугавары соответствующих степеней $d_1, \dots, d_n$; см. теорему 6.3.1. Следуя (9.27), введём полиномы

$$\varrho_\mu(S_k) = S_{k\,(0)}\, z^{-d_k} + \cdots + S_{k\,(d_k-1)}\, z^{-1} + S_{k\,(d_k)}. \tag{9.30}$$

Следствие 9.2.3. *Алгебра $\mathcal{A}_\mu$ порождается элементами*

$$S_{k\,(i)}, \qquad k = 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots, d_k - 1.$$

Доказательство. Как видно из доказательства леммы 9.2.2, алгебру $\mathcal{A}_\mu$ можно определить как подалгебру в $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, порождённую всеми коэффициентами $S_{(a)}$ полиномов (9.27), соответствующих всем однородным элементам $S \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$. С другой стороны, алгебра $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ порождается элементами $T^r S_k$; см. (6.15). Поэтому требуемое свойство вытекает из (9.28). □

Отметим, что по предложению 6.5.2 алгебра $\mathcal{A}_\mu$ содержит центр $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. В частном случае $\mu = 0$ она совпадает с центром.

Следующая теорема даёт положительное решение проблемы Винберга для произвольной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и регулярного элемента $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Мы используем обозначение (9.30).

Теорема 9.2.4. *Пусть $\mu \in \mathfrak{g}^*$ — это регулярный элемент. Если $S_1, \dots, S_n$ — это полный набор векторов Сигала–Сугавары соответствующих степеней $d_1, \dots, d_n$, то элементы*

$$S_{k\,(i)}, \qquad k = 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots, d_k - 1,$$

— это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathcal{A}_\mu$. Кроме того, справедливо соотношение $\mathrm{gr}\, \mathcal{A}_\mu = \overline{\mathcal{A}}_\mu$.

Общее доказательство содержится в работе [**42**]. В следующих параграфах мы дадим доказательство для алгебр Ли $\mathfrak{g}$ классических типов, опирающееся на конструкции полных наборов векторов Сигала–Сугавары, полученные в гл. 7 и 8.

Замечание 9.2.5. В предположениях теоремы 9.2.4 подалгебра $\mathcal{A}_\mu$ в $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ максимальная коммутативная. Это вытекает из соответствующего свойства подалгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$; см. замечание 9.1.6. □

§ 9.3. Образующие коммутативных подалгебр в $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$

Возьмём $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ и будем использовать тензорные обозначения из §7.1. Рассмотрим тензорное произведение алгебр

$$\underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{U}, \tag{9.31}$$

где $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N) \otimes \mathbb{C}[z^{-1}, \partial_z]$ — это алгебра дифференциальных операторов, элементами которой являются конечные суммы вида

$$\sum_{k,l \geqslant 0} x_{kl}\, z^{-k} \partial_z^l, \qquad x_{kl} \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N).$$

Как в примере 9.1.7, возьмём элемент $\mu \in \mathfrak{gl}_N^*$, который будем считать матрицей $\mu = [\mu_{ij}]$ размера $N \times N$, где $\mu_{ij} = \mu(E_{ij})$. Введём ещё одну матрицу

$$M = -\partial_z + \mu + E z^{-1} = \big[-\delta_{ij}\,\partial_z + \mu_{ij} + E_{ij} z^{-1}\big] \tag{9.32}$$

с элементами в U. Из леммы 4.5.3 следует, что M — это матрица Манина.

Введём полиномы $\phi_{m\,a}(z)$, $\psi_{m\,a}(z)$ и $\theta_{m\,a}(z)$ от z^{-1} (зависящие от μ) с коэффициентами в $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$ с помощью разложений

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)} M_1 \ldots M_m = \phi_{m\,0}(z)\,(-\partial_z)^m + \phi_{m\,1}(z)\,(-\partial_z)^{m-1} + \cdots + \phi_{m\,m}(z),$$

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} M_1 \ldots M_m = \psi_{m\,0}(z)\,(-\partial_z)^m + \psi_{m\,1}(z)\,(-\partial_z)^{m-1} + \cdots + \psi_{m\,m}(z)$$

и

$$\operatorname{tr} M^m = \theta_{m\,0}(z)\,(-\partial_z)^m + \theta_{m\,1}(z)\,(-\partial_z)^{m-1} + \cdots + \theta_{m\,m}(z);$$

ср. (7.7), (7.8) и (7.9). Кроме того, следуя (7.11), определим полиномы $\phi_a(z)$ формулой

$$\operatorname{cdet} M = (-\partial_z)^N + \phi_1(z)\,(-\partial_z)^{N-1} + \cdots + \phi_N(z). \tag{9.33}$$

То же самое рассуждение, что и в доказательстве формулы (7.12), показывает, что

$$\phi_{m\,a}(z) = \binom{N-a}{m-a}\,\phi_a(z), \qquad 0 \leqslant a \leqslant m \leqslant N, \tag{9.34}$$

так что $\phi_{m\,m}(z) = \phi_m(z)$ для всех m. Теперь введём коэффициенты некоторых полиномов:

$$\phi_m(z) = \phi_{m\,(0)} z^{-m} + \cdots + \phi_{m\,(m-1)} z^{-1} + \phi_{m\,(m)},$$

$$\psi_{m\,m}(z) = \psi_{m\,m\,(0)} z^{-m} + \cdots + \psi_{m\,m\,(m-1)} z^{-1} + \psi_{m\,m\,(m)}$$

и

$$\theta_{m\,m}(z) = \theta_{m\,m\,(0)} z^{-m} + \cdots + \theta_{m\,m\,(m-1)} z^{-1} + \theta_{m\,m\,(m)}.$$

Из следующей теоремы вытекает теорема 9.2.4 для типа A.

Теорема 9.3.1. (i) *Для любого $\mu \in \mathfrak{gl}_N^*$ все коэффициенты полиномов $\phi_m(z)$, $\psi_{m\,a}(z)$ и $\theta_{m\,a}(z)$ лежат в коммутативной подалгебре $\mathcal{A}_\mu$ алгебры* $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$. *Кроме того, элементы каждого из семейств*

$$\phi_{m\,(k)}, \qquad \psi_{m\,m\,(k)} \qquad \text{и} \qquad \theta_{m\,m\,(k)} \tag{9.35}$$

при $m = 1, \ldots, N$ *и* $k = 0, 1, \ldots, m-1$ *— это образующие алгебры* $\mathcal{A}_\mu$.

(ii) *Если элемент* μ *регулярен, то каждое из трёх семейств* (9.35) *алгебраически независимо. Кроме того,* $\operatorname{gr}\mathcal{A}_\mu = \overline{\mathcal{A}}_\mu$.

Доказательство. Применяя гомоморфизм ϱ_μ, определённый в (9.26), получаем

$$\varrho_\mu : E_{ij}[-1] \mapsto E_{ij}\, z^{-1} + \mu_{ij},$$

так что $E[-1] \mapsto \mu + Ez^{-1}$. Продолжим ϱ_μ до гомоморфизма тензорных произведений

$$\varrho_\mu : \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\big) \otimes \mathbb{C}[\tau] \to \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N) \otimes \mathbb{C}[z^{-1}, \partial_z], \tag{9.36}$$

полагая $\tau \mapsto -\partial_z$. Коэффициенты полиномов $\phi_m(z)$, $\psi_{m\,a}(z)$ и $\theta_{m\,a}(z)$ — это образы соответствующих элементов центра Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ из теоремы 7.1.3 относительно гомоморфизма ϱ_μ. Следовательно, они лежат в подалгебре $\mathcal{A}_\mu$. Вместе с теоремой 7.1.4 и следствием 9.2.3 это завершает доказательство части (i).

Предположим теперь, что элемент μ регулярен, и рассмотрим символы элементов из семейств (9.35) в градуированной алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N) \cong \operatorname{gr}\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$. Эти символы совпадают с соответствующими коэффициентами полиномов от z^{-1}:

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)}\big(\mu_1 + E_1 z^{-1}\big) \ldots \big(\mu_m + E_m z^{-1}\big),$$

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)}\big(\mu_1 + E_1 z^{-1}\big) \ldots \big(\mu_m + E_m z^{-1}\big)$$

и

$$\operatorname{tr}\big(\mu + Ez^{-1}\big)^m$$

при $m = 1, \ldots, N$; ср. пример 9.1.7. Однако эти коэффициенты лежат в подалгебре Мищенко–Фоменко $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$, так как они возникают из образующих алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{gl}_N}$ по правилу (9.12); см. следствие 2.1.6 и соотношение (2.12). Кроме того, по теореме 9.1.3 эти коэффициенты — алгебраически независимые образующие алгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$. Это доказывает часть (ii). □

В частности, коэффициенты столбцового определителя $\operatorname{cdet} M$ — это соответствующие квантования образующих алгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$, возникающих из «сдвинутого» характеристического полинома $\det\big(u + \mu + E\,z^{-1}\big)$, определённого в (9.25).

Пример 9.3.2. Используя полные наборы векторов Сигала–Сугавары из примера 7.1.6, получим алгебраически независимые образующие алгебры $\mathcal{A}_\mu$ для регулярных μ:

для $\mathfrak{gl}_2$: $\operatorname{tr} E$, $\operatorname{tr}\mu E$, $\operatorname{tr} E^2$,

для $\mathfrak{gl}_3$: $\operatorname{tr} E$, $\operatorname{tr}\mu E$, $\operatorname{tr}\mu^2 E$, $\operatorname{tr} E^2$, $\operatorname{tr}\mu E^2$, $\operatorname{tr} E^3$,

для $\mathfrak{gl}_4$: $\operatorname{tr} E$, $\operatorname{tr}\mu E$, $\operatorname{tr}\mu^2 E$, $\operatorname{tr}\mu^3 E$, $\operatorname{tr} E^2$, $\operatorname{tr}\mu E^2$,

$2\operatorname{tr}\mu^2 E^2 + \operatorname{tr}(\mu E)^2$, $\operatorname{tr} E^3$, $\operatorname{tr}\mu E^3$, $\operatorname{tr} E^4$.

Эти формулы получаются из вычисления коэффициентов при степенях z^{-1} в полиномах вида $\operatorname{tr}(\mu + E z^{-1})^m$. При этом мы использовали соотношения между коэффициентами, чтобы упростить выражения для образующих. Легко проверить, что

$$\operatorname{tr} E\mu E = \operatorname{tr}\mu E^2 + \operatorname{tr}\mu\ \operatorname{tr} E - N \operatorname{tr}\mu E$$

и

$$\operatorname{tr} E\mu E^2 = \operatorname{tr} E^2\mu E = \operatorname{tr}\mu E^3 + \operatorname{tr}\mu\ \operatorname{tr} E^2 - N\operatorname{tr}\mu E^2.$$

В самом деле, применяя (4.10), для первого соотношения получим

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} E\mu E &= \operatorname{tr}_{12} P_{12} E_1 \mu_1 E_2\\ &= \operatorname{tr}_{12} \mu_1 P_{12} E_1 E_2 = \operatorname{tr}_{12} \mu_1 P_{12} (E_2 E_1 + P_{12} E_2 - P_{12} E_1)\\ &= \operatorname{tr}_{12} \big(\mu_1 E_1 P_{12} E_1 + \mu_1 E_2 - \mu_1 E_1\big) = \operatorname{tr}\mu E^2 + \operatorname{tr}\mu\ \operatorname{tr} E - N\operatorname{tr}\mu E.\end{aligned}$$

Второе соотношение проверяется аналогично. □

Условие, что элемент $\mu \in \mathfrak{gl}_N^*$ регулярен, оказывается необходимым для того, чтобы подалгебра $\mathcal{A}_\mu$ в $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$ имела максимальную возможную степень трансцендентности. Это можно увидеть непосредственно из следующей теоремы, в которой даётся алгебраически независимое семейство образующих алгебры $\mathcal{A}_\mu$ для произвольного элемента $\mu \in \mathfrak{gl}_N^*$. Она также показывает, что подалгебра $\mathcal{A}_\mu$ — это квантование подалгебры сдвига аргумента $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ для любого μ, тем самым доказывая гипотезу из [**42**, Conjecture 1].

Рассмотрим матрицу M, введённую в (9.32). Мы будем работать с образующими $\phi_{m\,(k)}$ алгебры $\mathcal{A}_\mu$, возникающими как коэффициенты столбцового определителя

$$\operatorname{cdet} M = (-\partial_z)^N + \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m-1} \phi_{m\,(k)}\, z^{-m+k}\, (-\partial_z)^{N-m},$$

в соответствии с формулой (9.33). Чтобы сформулировать теорему, предположим, что различные собственные значения матрицы μ — это $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, а жорданова форма μ — это прямая сумма жордановых клеток $J_{\alpha_j^{(i)}}(\lambda_i)$ размеров $\alpha_1^{(i)} \geqslant \alpha_2^{(i)} \geqslant \dots \geqslant \alpha_{s_i}^{(i)} \geqslant 1$, где мы используем обозначение

$$J_p(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

для жордановой клетки размера p. Через $\alpha^{(i)}$ обозначим соответствующую диаграмму Юнга, j-я строка которой имеет $\alpha_j^{(i)}$ клеток, и пусть $|\alpha^{(i)}|$ — это число клеток в диаграмме $\alpha^{(i)}$. По этим данным введём другую диаграмму

Юнга $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$, полагая

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j \geqslant l+1} \alpha_j^{(i)}, \tag{9.37}$$

так что γ_l — это общее число клеток, находящихся ниже l-х строк во всех диаграммах $\alpha^{(i)}$. Далее, сопоставим элементы семейства $\phi_{m\,(k)}$ клеткам диаграммы $\Gamma = (N, N-1, \dots, 1)$:

$$\Gamma \quad = \quad \begin{matrix} \phi_{N\,(N-1)} & \phi_{N-1\,(N-2)} & \cdots & \phi_{2\,(1)} & \phi_{1\,(0)} \\ \phi_{N\,(N-2)} & \phi_{N-1\,(N-3)} & \cdots & \phi_{2\,(0)} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \phi_{N\,(1)} & \phi_{N-1\,(0)} & & & \\ \phi_{N\,(0)} & & & & \end{matrix} \tag{9.38}$$

Ясно, что диаграмма γ содержится в Γ. *Косая диаграмма* Γ/γ получается удалением из Γ всех клеток диаграммы γ.

Теорема 9.3.3. *Элементы $\phi_{m\,(k)}$, отвечающие клеткам косой диаграммы Γ/γ, — это алгебраически независимые образующие подалгебры $\mathcal{A}_\mu$. Кроме того, подалгебра $\mathcal{A}_\mu$ — это квантование алгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$, так что* $\operatorname{gr} \mathcal{A}_\mu = \overline{\mathcal{A}}_\mu$.

Доказательство. Как мы заметили выше, матрица M, определённая в (9.32), — это матрица Манина. Поэтому, применяя соотношение (3.17), получаем

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)} M_1 \dots M_m = \sum_{I,\,|I|=m} M_I^I, \tag{9.39}$$

где суммирование производится по всем подмножествам $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ при $i_1 < \dots < i_m$ и мы используем следующее обозначение для столбцовых миноров. Для двух подмножеств $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ и $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ множества $\{1, \dots, N\}$ соответствующий *столбцовый минор* $(N \times N)$-матрицы $X = [x_{ij}]$ определяется по правилу

$$X_C^B = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn} \tau \cdot x_{b_{\tau(1)} c_1} \dots x_{b_{\tau(k)} c_k}.$$

В силу соотношения (9.34) при $a = m$ определение образующих $\phi_{m\,(k)}$ алгебры $\mathcal{A}_\mu$ можно записать в терминах столбцовых миноров следующим образом

$$\phi_{m\,(0)} z^{-m} + \dots + \phi_{m\,(m-1)} z^{-1} + \phi_{m\,(m)} = \sum_{I,\,|I|=m} M_I^I\, 1,$$

где мы предполагаем, что дифференциальный оператор в правый части применяется к элементу 1, так что $\partial_z 1 = 0$. Отсюда следует формула

$$\phi_{m\,(k)} = z^{m-k} \sum_{I,\,|I|=m} \sum_{\substack{B,C \subset I \\ |B|=|C|=k}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \mu_C^B \left[-\partial_z + E z^{-1}\right]_{I \setminus C}^{I \setminus B} 1, \tag{9.40}$$

в которой σ обозначает перестановку множества I,

$$\sigma = \begin{pmatrix} B, & I \setminus B \\ C, & I \setminus C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1, \dots, b_k, i_1, \dots, \widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_k, \dots, i_m \\ c_1, \dots, c_k, i_1, \dots, \widehat{c}_1, \dots, \widehat{c}_k, \dots, i_m \end{pmatrix},$$

и мы предполагаем, что $b_1 < \dots < b_k$ и $c_1 < \dots < c_k$ для соответствующих элементов подмножеств B и C в I.

Для каждого $l = 1, \dots, N$ введём полином от переменной t с коэффициентами в алгебре $\mathcal{A}_\mu$ по правилу

$$\Phi_l(t, \mu) = \phi_{l\,(0)}(\mu)\, t^{\,N-l} + \phi_{l+1\,(1)}(\mu)\, t^{\,N-l-1} + \dots + \phi_{N\,(N-l)}(\mu),$$

где мы учли зависимость от μ в обозначениях элементов $\phi_{m\,(k)}$. Заметим, что в соответствии с (9.38) коэффициенты полинома $\Phi_l(t, \mu)$ — это элементы l-й строки диаграммы Γ.

Лемма 9.3.4. *Для любого $a \in \mathbb{C}$ справедливо соотношение*

$$\Phi_l(t, \mu + a1) = \Phi_l(t + a, \mu).$$

Доказательство. Раскрывая скобки, получим

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, A^{(m)} (a + M_1) \dots (a + M_m) = \sum_{p=0}^{m} a^p \sum_{i_1 < \dots < i_{m-p}} \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, A^{(m)} M_{i_1} \dots M_{i_{m-p}}.$$

Для любой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ имеем равенство $A^{(m)} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^{(m)} P_\sigma$, где P_σ обозначает образ σ в алгебре (9.31) относительно действия группы $\mathfrak{S}_m$, определённого в (1.65). Следовательно, применяя сопряжения с помощью подходящих элементов P_σ и используя свойство цикличности следа, мы можем записать это выражение как

$$\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} a^p\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, A^{(m)} M_1 \dots M_{m-p}.$$

Частичный след антисимметризатора находится по формуле (3.26), откуда следует, что

$$\mathrm{tr}_{m-p+1,\dots,m}\, A^{(m)} = \frac{(N-m+p)!\,(m-p)!}{(N-m)!\,m!}\, A^{(m-p)}.$$

Поэтому

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, A^{(m)} (a + M_1) \dots (a + M_m) = \sum_{p=0}^{m} \binom{N-m+p}{p} a^p\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m-p}\, A^{(m-p)} M_1 \dots M_{m-p}.$$

Рассмотрим теперь свободные члены дифференциальных операторов в обеих частях и приравняем в них коэффициенты при z^{-m+k}. Это приводит к формуле

$$\phi_{m\,(k)}(\mu + a1) = \sum_{p=0}^{k} \binom{N-m+p}{p} a^p\, \phi_{m-p\,(k-p)}(\mu).$$

Таким образом, для полинома $\Phi_l(t, \mu + a\,1)$ получаем

$$\begin{aligned}\Phi_l(t, \mu + a\,1) &= \sum_{k=0}^{N-l} \phi_{l+k\,(k)}(\mu + a\,1)\, t^{\,N-l-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-l} \sum_{p=0}^{k} \binom{N-l-k+p}{p} a^p\, \phi_{l+k-p\,(k-p)}(\mu)\, t^{\,N-l-k},\end{aligned}$$

а это выражение равно

$$\sum_{p=0}^{N-l} a^p \sum_{r=0}^{N-l-p} \binom{N-l-r}{p} \phi_{l+r\,(r)}(\mu)\, t^{\,N-l-p-r} = \sum_{p=0}^{N-l} \frac{a^p}{p!} \left(\frac{d}{dt}\right)^p \Phi_l(t, \mu) = \Phi_l(t + a, \mu),$$

как и требовалось. □

Лемма 9.3.5. *Предположим, что μ имеет вид блочно-диагональной матрицы*

$$\mu = \begin{bmatrix} J_\alpha(0) & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \widetilde{\mu} \end{bmatrix}, \tag{9.41}$$

где $J_\alpha(0)$ — это нильпотентная жорданова матрица, соответствующая некоторой диаграмме Юнга $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, а $\widetilde{\mu}$ — это произвольная квадратная матрица такого размера $q \times q$, что $|\alpha| + q = N$. Тогда при всех $l \geqslant 1$ справедливы равенства

$$\phi_{l+k\,(k)} = 0 \qquad \textit{для всех} \quad N - l - \delta_l + 1 \leqslant k \leqslant N - l,$$

где $\delta_l = \alpha_{l+1} + \alpha_{l+2} + \dots$ — это число клеток диаграммы α ниже l-й строки.

Доказательство. Элемент $\phi_{l+k\,(k)}$ находится по формуле (9.40) при $m = l + k$. Внутренняя сумма в ней — это линейная комбинация миноров размера $k \times k$ матрицы μ, удовлетворяющих условию, что объединение $B \cup C$ индексов строк и столбцов каждого минора — это множество, размер которого не превосходит $k + l$. Поэтому лемма будет следовать из утверждения, что при предположениях на индекс k в условии леммы минор μ_C^B может быть ненулевым, только если объединение индексов строк и столбцов — это множество, размер которого не меньше $k + l + 1$. В самом деле, если p — это положительное целое число, то любой ненулевой минор размера $p \times p$ нильпотентной жордановой клетки обладает тем свойством, что минимальный возможный размер объединения индексов его строк и столбцов равен $p + 1$. Однако условие $k \geqslant N - l - \delta_l + 1$ означает, что $k \geqslant \alpha_1 + \dots + \alpha_l - l + 1 + q$. Поэтому любой ненулевой минор размера $k \times k$ должен вовлекать по меньшей мере $l + 1$ жорданову клетку, откуда и следует утверждение. □

В условиях теоремы для каждой диаграммы $\alpha^{(i)}$ обозначим через $\delta_l^{(i)}$ соответствующий параметр δ_l, введённый в лемме 9.3.5, так что число γ_l, определённое в (9.37), находится по формуле

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^{r} \delta_l^{(i)}.$$

Лемма 9.3.6. *Полином $\Phi_l(t,\mu)$ допускает разложение*

$$\Phi_l(t,\mu) = (t+\lambda_1)^{\delta_l^{(1)}} \ldots (t+\lambda_r)^{\delta_l^{(r)}}\, \widetilde{\Phi}_l(t,\mu)$$

для некоторого полинома $\widetilde{\Phi}_l(t,\mu)$ от t.

Доказательство. Из формул (9.39) следует, что элементы $\phi_{m\,(k)}$ остаются неизменными при одновременных заменах $\mu \mapsto g\,\mu\,g^{-1}$ и $E \mapsto g\,E\,g^{-1}$ для любого элемента $g \in \mathrm{GL}_N$. Отсюда следует, что алгебру $\mathcal{A}_{g\,\mu\,g^{-1}}$ можно отождествить с алгеброй $\mathcal{A}_\mu$, связанной с образом $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$ относительно автоморфизма, переводящего матрицу E в $g\,E\,g^{-1}$. Поэтому алгебра $\mathcal{A}_\mu$ зависит только от коприсоединённой орбиты элемента μ. Это частный случай общего свойства; ср. доказательство теоремы 9.1.3.

Для любого $i \in \{1,\ldots,r\}$ жорданова форма матрицы $\mu - \lambda_i 1$ — это матрица вида (9.41) при $\alpha = \alpha^{(i)}$. По лемме 9.3.5 полином $\Phi_l(t, \mu - \lambda_i 1)$ делится на $t^{\delta_l^{(i)}}$. Тогда по лемме 9.3.4 полином $\Phi_l(t,\mu) = \Phi_l(t+\lambda_i, \mu - \lambda_i 1)$ делится на $(t+\lambda_i)^{\delta_l^{(i)}}$. □

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что по лемме 9.3.6 для любого $l = 1,\ldots,N$ образующие $\phi_{l+k\,(k)}$ с параметрами, удовлетворяющими условиям $N - l - \gamma_l + 1 \leqslant k \leqslant N - l$, — это линейные комбинации образующих при $k = 0, 1, \ldots, N - l - \gamma_l$. Отсюда следует, что элементы $\phi_{l+k\,(k)}$, отвечающие клеткам косой диаграммы Γ/γ, порождают алгебру $\mathcal{A}_\mu$. Остаётся проверить, что эти образующие алгебраически независимы.

Рассмотрим элементы $\overline{\phi}_{m\,(k)} \in \mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$, определённые формулой

$$\overline{\phi}_{m\,(k)} = \sum_{I,\,|I|=m} \; \sum_{\substack{B,C\subset I \\ |B|=|C|=k}} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \mu_C^B\, E_{I\setminus C}^{I\setminus B},$$

с обозначениями как в (9.40), где элементы матрицы E теперь считаются элементами симметрической алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$. Элементы $\overline{\phi}_{m\,(k)}$ находятся также из формулы

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)} \big(\mu_1 + E_1 z^{-1}\big) \ldots \big(\mu_m + E_m z^{-1}\big) \\ = \overline{\phi}_{m\,(0)} z^{-m} + \cdots + \overline{\phi}_{m\,(m-1)} z^{-1} + \overline{\phi}_{m\,(m)}.$$

По теореме 9.3.1(i) они порождают подалгебру $\overline{\mathcal{A}}_\mu$. Приведённые выше рассуждения, применённые к этим образующим вместо $\phi_{m\,(k)}$, показывают, что алгебра $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ порождается подмножеством элементов $\overline{\phi}_{m\,(k)}$, отвечающих клеткам косой диаграммы Γ/γ.

Лемма 9.3.7. *Образующие $\overline{\phi}_{m\,(k)}$ подалгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$, отвечающие клеткам косой диаграммы Γ/γ, алгебраически независимы.*

Доказательство. Рассматривая элементы $\overline{\phi}_{m\,(k)}$ как полиномы от переменных E_{ij}, мы убедимся, что их дифференциалы $d\,\overline{\phi}_{m\,(k)}$ линейно независимы в некоторой точке. Так как эти элементы порождают алгебру $\overline{\mathcal{A}}_\mu$, линейная оболочка дифференциалов $d\,\overline{\phi}_{m\,(k)}$ в любой точке совпадает с линейной оболочкой всех дифференциалов

$$d\,\overline{\mathcal{A}}_\mu = \text{линейная оболочка } \{d\phi \mid \phi \in \overline{\mathcal{A}}_\mu\}.$$

Размерность пространства дифференциалов, вычисленных в некоторой регулярной точке, можно найти с помощью *критерия Болсинова* [**11**, Theorem 3.2]. Чтобы сформулировать его для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$, вспомним, что *индекс* $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это минимальная размерность

$$\operatorname{ind}\mathfrak{g} = \min_{\xi\in\mathfrak{g}^*} \dim \operatorname{Ann}\xi$$

аннуляторов $\operatorname{Ann}\xi$ для коприсоединённого представления, где

$$\operatorname{Ann}\xi = \{X \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad}^*_X\xi = 0\}.$$

По критерию Болсинова соотношение

$$\dim d\,\overline{\mathcal{A}}_\mu = \operatorname{rank}\mathfrak{gl}_N + \frac{1}{2}\big(\dim\mathfrak{gl}_N - \dim\operatorname{Ann}\mu\big)$$

для дифференциалов, вычисленных в некоторой регулярной точке, выполнено тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{ind}\operatorname{Ann}\mu = \operatorname{rank}\mathfrak{gl}_N. \tag{9.42}$$

Это равенство справедливо для любого μ [**155**], поэтому для проверки того, что дифференциалы $d\,\overline{\phi}_{m\,(k)}$ образующих линейно независимы в некоторой точке, нам достаточно показать, что число клеток в косой диаграмме Γ/γ совпадает с числом

$$\operatorname{rank}\mathfrak{gl}_N + \frac{1}{2}\big(\dim\mathfrak{gl}_N - \dim\operatorname{Ann}\mu\big) = N + \frac{1}{2}\big(N^2 - \dim\operatorname{Ann}\mu\big).$$

Поскольку $|\Gamma| = N(N+1)/2$, желаемая формула эквивалентна равенству

$$\dim\operatorname{Ann}\mu = 2\,|\gamma| + N. \tag{9.43}$$

Размерность аннулятора $\operatorname{Ann}\mu$ совпадает с размерностью централизатора μ^t в $\mathfrak{gl}_N$; см. пример 9.1.7. Справедливо равенство

$$\dim\operatorname{Ann}\mu = \sum_{i=1}^{r} \dim\operatorname{Ann}_{\,\mathfrak{gl}_{n_i}}\mu^{(i)},$$

где $\mu^{(i)}$ обозначает прямую сумму всех жордановых клеток матрицы μ с собственным значением λ_i, а n_i — это размер $\mu^{(i)}$. Следовательно, по определению γ проверка формулы (9.43) сводится к случаю, когда μ имеет единственное собственное значение. Пусть $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_s$ — это размеры жордановых клеток такой матрицы μ. Размерность аннулятора (или централизатора элемента μ^t) даётся известной формулой [**80**, Section 3.1]

$$\dim \operatorname{Ann} \mu = \alpha_1 + 3\,\alpha_2 + \dots + (2\,s-1)\,\alpha_s,$$

в то время как

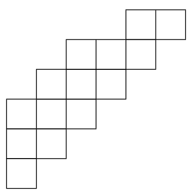
$$|\gamma| = \alpha_2 + 2\,\alpha_3 + \dots + (s-1)\,\alpha_s \qquad \text{и} \qquad N = \alpha_1 + \dots + \alpha_s,$$

откуда следует формула (9.43). □

Рассмотрим теперь образующие $\phi_{m\,(k)}$ алгебры $\mathcal{A}_\mu$, отвечающие клеткам диаграммы Γ/γ. По лемме 9.3.7 соответствующие элементы $\overline{\phi}_{m\,(k)}$ отличны от нуля, так что образ элемента $\phi_{m\,(k)}$ в $(m-k)$-й компоненте градуированной алгебры $\operatorname{gr} \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N) \cong \mathrm{S}(\mathfrak{gl}_N)$ совпадает с $\overline{\phi}_{m\,(k)}$. Кроме того, образующие $\phi_{m\,(k)}$, отвечающие клеткам диаграммы Γ/γ, алгебраически независимы. Это завершает доказательство теоремы. □

Замечание 9.3.8. Теорема 9.3.3 остаётся справедливой для некоторых других семейств образующих алгебры $\mathcal{A}_\mu$ вместо элементов $\phi_{m\,(k)}$; см. [**53**]. □

Пример 9.3.9. Пусть $N = 6$, и пусть μ — это нильпотентная матрица с жордановыми клетками размеров $(2, 2, 1, 1)$. Тогда $\gamma = (4, 2, 1)$ и косая диаграмма Γ/γ имеет вид



так что алгебра $\mathcal{A}_\mu$ имеет 14 алгебраически независимых образующих. □

Если элемент μ регулярен, то все жордановы клетки соответствуют различным собственным значениям, так что каждая $\alpha^{(i)}$ — это диаграмма-строка. Поэтому $\gamma = \varnothing$ и все образующие $\phi_{m\,(k)}$, отвечающие клеткам диаграммы Γ, алгебраически независимы. С другой стороны, если μ — это скалярная матрица (в частности, $\mu = 0$), то $\gamma = (N-1, N-2, \dots, 1)$. В этом случае алгебра $\mathcal{A}_\mu$ порождается элементами $\phi_{1\,(0)}, \dots, \phi_{N\,(0)}$ и совпадает с центром алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$; ср. §6.5.

§ 9.4. Образующие коммутативных подалгебр в U($\mathfrak{o}_N$) и U($\mathfrak{sp}_N$)

Пусть теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_N$ — это ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{o}_N$ или симплектическая алгебра Ли $\mathfrak{sp}_N$. Мы будем по-прежнему использовать тензорные обозначения и рассмотрим алгебру

$$\underbrace{\operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End} \mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{U},$$

где $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathfrak{g}_N) \otimes \mathbb{C}[z^{-1}, \partial_z]$ — это алгебра дифференциальных операторов, элементами которой являются конечные суммы вида

$$\sum_{k,l \geqslant 0} x_{kl}\, z^{-k}\, \partial_z^l, \qquad x_{kl} \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_N).$$

Нам снова понадобится рациональная функция $\gamma_m(\omega)$, определённая в (2.40), со специализациями $\omega = N$ и $\omega = -N$ в ортогональном и симплектическом случае соответственно.

Любой элемент $\mu \in \mathfrak{g}_N^*$ будет рассматриваться как матрица $\mu = [\mu_{ij}]$ размера $N \times N$, где $\mu_{ij} = \mu(F_{ij})$. Эта матрица обладает свойством $\mu + \mu' = 0$; см. (2.24). Зададим полиномы $\phi_{m\,a}(z)$ от z^{-1} (зависящие от μ) с помощью разложения

$$\begin{aligned}(9.44)\quad \gamma_m(\omega)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)}\big(-\partial_z + \mu_1 + F_1\, z^{-1}\big) \dots \big(-\partial_z + \mu_m + F_m\, z^{-1}\big)& \\ = \phi_{m\,0}(z)\,(-\partial_z)^m + \phi_{m\,1}(z)\,(-\partial_z)^{m-1} + \dots + \phi_{m\,m}(z)&.\end{aligned}$$

В симплектическом случае $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_{2n}$ мы принимаем такое же соглашение для выражения (9.44), как для элементов (8.36); ср. замечание перед теоремой 8.3.8. А именно, предполагается, что левая часть записана в эквивалентной форме, которая корректно определена для всех значений $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$; см. предложение 8.3.7. И в ортогональном, и в симплектическом случаях выражение (9.44) совпадает с соответствующим образом выражения (8.15) или (8.36) относительно гомоморфизма (9.26), продолженного на дифференциальные операторы по правилу $\tau \mapsto -\partial_z$, как в (9.36).

В случае $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}$ мы также определим (некоммутативный) *пфаффиан* матрицы $\mu + F\, z^{-1}$ формулой

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pf}\,\big(\mu + F\, z^{-1}\big) \\ &\qquad = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot \big(\mu + F\, z^{-1}\big)_{\sigma(1)\,\sigma(2)'} \dots \big(\mu + F\, z^{-1}\big)_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)'}.\end{aligned}$$

Введём коэффициенты полиномов

$$\phi_{m\,m}(z) = \phi_{m\,m\,(0)} z^{-m} + \dots + \phi_{m\,m\,(m-1)} z^{-1} + \phi_{m\,m\,(m)}$$

и

$$\mathrm{Pf}\,\big(\mu + F\, z^{-1}\big) = \pi_{(0)} z^{-n} + \dots + \pi_{(n-1)} z^{-1} + \pi_{(n)}.$$

В частности, $\pi_{(0)}$ совпадает с $\mathrm{Pf}\, F$.

Из следующей теоремы вытекает теорема 9.2.4 для типов B, C и D.

Теорема 9.4.1. (i) *Для любого $\mu \in \mathfrak{g}_N^*$ все коэффициенты полинома $\phi_{m\,a}(z)$ лежат в подалгебре $\mathcal{A}_\mu$ алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)$. Кроме того, все коэффициенты полинома $\mathrm{Pf}\,\big(\mu + F\, z^{-1}\big)$ лежат в подалгебре $\mathcal{A}_\mu$ алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{o}_{2n})$.*

(ii) *Если элемент μ регулярен, то элементы*

$$\phi_{2k\,2k\,(i)} \qquad \textit{при} \quad k = 1, \dots, n \quad \textit{и} \quad i = 0, 1, \dots, 2k-1$$

— это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathcal{A}_\mu$ в случаях B и C, в то время как элементы

$$\phi_{2k\,2k\,(i)} \qquad \textit{при} \quad k = 1, \dots, n-1 \quad \textit{и} \quad i = 0, 1, \dots, 2k-1$$

вместе с $\pi_{(0)}, \dots, \pi_{(n-1)}$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathcal{A}_\mu$ в случае D. Кроме того, во всех трёх случаях $\operatorname{gr} \mathcal{A}_\mu = \overline{\mathcal{A}}_\mu$.

Доказательство. Коэффициенты полиномов $\phi_{m\,a}(z)$ и $\operatorname{Pf}\big(\mu + F z^{-1}\big)$ являются образами соответствующих элементов центра Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}_N)$ из предложения 8.1.4, теоремы 8.1.6 и предложения 8.3.7 относительно гомоморфизма ϱ_μ. Поэтому они лежат в подалгебре $\mathcal{A}_\mu$.

Для доказательства части (ii) рассмотрим символы элементов $\phi_{2k\,2k\,(i)}$ и $\pi_{(j)}$ в градуированной алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_N) \cong \operatorname{gr} \mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)$. Эти символы совпадают с соответствующими коэффициентами полиномов от z^{-1}:

$$\gamma_{2k}(\omega) \operatorname{tr}_{1,\dots,2k} S^{(2k)} \big(\mu_1 + F_1 z^{-1}\big) \dots \big(\mu_{2k} + F_{2k} z^{-1}\big)$$

и $\operatorname{Pf}\big(\mu + F z^{-1}\big)$. Коэффициенты полиномов лежат в подалгебре Мищенко–Фоменко $\overline{\mathcal{A}}_\mu$, так как они возникают из образующих алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{g}_N}$ по правилу (9.12); см. §2.2. Кроме того, учитывая следствия 2.2.5 и 2.2.10, мы заключаем из теоремы 9.1.3, что соответствующие коэффициенты — это алгебраически независимые образующие алгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$. Это доказывает часть (ii). □

Пример 9.4.2. Применяя векторы Сигала–Сугавары из примера 8.2.2, получаем алгебраически независимые образующие алгебры $\mathcal{A}_\mu$ для регулярных элементов μ (ср. пример 9.3.2):

для $\mathfrak{o}_3$: $\operatorname{tr} \mu F, \quad \operatorname{tr} F^2,$

для $\mathfrak{o}_4$: $\operatorname{tr} \mu F, \quad \operatorname{tr} F^2, \quad \pi_{(0)}, \quad \pi_{(1)},$

для $\mathfrak{o}_5$: $\operatorname{tr} \mu F, \quad \operatorname{tr} F^2, \quad \operatorname{tr} \mu^3 F, \quad 2 \operatorname{tr} \mu^2 F^2 + \operatorname{tr} (\mu F)^2, \quad \operatorname{tr} \mu F^3, \quad \operatorname{tr} F^4,$

для $\mathfrak{o}_6$: $\operatorname{tr} \mu F, \quad \operatorname{tr} F^2, \quad \operatorname{tr} \mu^3 F, \quad 2 \operatorname{tr} \mu^2 F^2 + \operatorname{tr} (\mu F)^2, \quad \operatorname{tr} \mu F^3, \quad \operatorname{tr} F^4,$
$\pi_{(0)}, \quad \pi_{(1)}, \quad \pi_{(2)}.$

Как в примере 9.3.2, мы находим коэффициенты при степенях z^{-1} в полиномах вида $\operatorname{tr}(\mu + F z^{-1})^k$. Мы также используем некоторые соотношения (в случае $\mathfrak{o}_N$) между этими коэффициентами, вытекающие из (5.2) или (5.6):

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr} F \mu F^2 = \operatorname{tr} F^2 \mu F = \operatorname{tr} \mu F^3 - (N-2) \operatorname{tr} \mu F^2, \\ &2 \operatorname{tr} \mu F^2 = (N-2) \operatorname{tr} \mu F \end{aligned}$$

и

$$\operatorname{tr} F \mu^2 F = \operatorname{tr} \mu^2 F^2, \qquad \operatorname{tr} \mu^2 F = 0.$$

Пример 9.4.3. Из примера 8.4.1 получаем алгебраически независимые образующие алгебры $\mathcal{A}_\mu$ для регулярных элементов μ в симплектическом случае:

$$\text{для} \quad \mathfrak{sp}_2: \qquad \operatorname{tr} \mu F, \quad \operatorname{tr} F^2,$$

$$\text{для} \quad \mathfrak{sp}_4: \qquad \operatorname{tr} \mu F, \quad \operatorname{tr} F^2, \quad \operatorname{tr} \mu^3 F, \quad 2 \operatorname{tr} \mu^2 F^2 + \operatorname{tr} (\mu F)^2, \quad \operatorname{tr} \mu F^3, \quad \operatorname{tr} F^4.$$

§ 9.5. Библиографические замечания

Коммутативные подалгебры $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ относительно скобки Пуассона были введены А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [**108**] в связи с уравнениями Эйлера; см. также статью С. В. Манакова [**105**]. В случае регулярного полупростого элемента μ теорема 9.1.3 была доказана в работе [**108**]. Её обобщение на случай произвольного регулярного μ принадлежит А. В. Болсинову [**11**], [**12**]. Мы следовали доказательству Б. Фейгина, Э. Френкеля и В. Толедано Ларедо [**42**]; см. также работу Б. Костанта [**95**]. Статья [**42**] содержит также общее доказательство теоремы 9.2.4. В случае регулярного полупростого элемента μ она была ранее доказана Л. Г. Рыбниковым [**140**].

Формулы из теоремы 9.3.1 берут начало в статье Д. Талалаева [**146**]; см. также работу А. Червова и Д. Талалаева [**24**]. Эти семейства образующих связаны друг с другом, благодаря тождествам, которым удовлетворяют матрицы Манина; см. доказательство теоремы 7.1.3. Другая конструкция коммутативной подалгебры в $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$ была дана А. А. Тарасовым [**147**] с использованием отображения симметризации. В недавней работе О. Якимовой и автора [**118**] было показано, что эта конструкция применима ко всем классическим алгебрам Ли. Кроме того, там же дано другое доказательство теоремы 9.3.3 и её аналога для симплектической алгебры Ли, включая соотношение $\operatorname{gr} \mathcal{A}_\mu = \overline{\mathcal{A}}_\mu$ для всех μ.

Конструкции максимальных коммутативных подалгебр в $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ для регулярного полупростого элемента $\mu \in \mathfrak{g}^*$ были даны М. Назаровым и Г. Ольшанским [**127**] с использованием янгиана для $\mathfrak{gl}_N$ и скрученных янгианов, отвечающих ортогональной и симплектической алгебрам Ли. В случае $\mathfrak{gl}_N$ элементы подалгебр находятся из разложения квантового определителя, что фактически эквивалентно формуле (9.33). Для типов B, C и D связь их конструкции с теоремой 9.4.1 (доказанной в [**110**]) менее очевидна. Спектры подалгебры $\mathcal{A}_\mu$ в конечномерных неприводимых представлениях произвольной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ были описаны Б. Фейгиным, Э. Френкелем и Л. Рыбниковым [**41**].

В доказательстве теоремы 9.3.3 мы следовали статье [**53**], которая опирается на работу Болсинова [**11**]; см. также статью Болсинова и Жанга [**13**]. Соотношение (9.42) — это частный случай *гипотезы Болсинова–Элашвили*, которая восходит к работе [**12**] и относится к произвольной редуктивной алгебре Ли; см. также статью Д. Панюшева [**131**]. Первое опубликованное доказательство соотношения (9.42) принадлежит О. Якимовой; в её работе [**155**] оно доказано для всех классических алгебр Ли. Шарбоннель и Моро в статье [**17**] привели доказательство для всех простых алгебр Ли.

Глава 10

Янгианные характеры для типа A

Как мы отметили в предисловии, изоморфизм Хариш-Чандры (0.1) приводит к описанию структуры центра $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ как алгебры полиномов. Наша цель теперь — доказать аффинный аналог теоремы об изоморфизме для всех классических алгебр Ли. В его основном варианте этот аналог применяется к центру Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, который будет играть роль центра $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$. Алгебра W-инвариантов в $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$ заменится теперь на *классическую* $\mathcal{W}$*-алгебру*; мы обсудим эти алгебры в гл. 12. Наши рассуждения будут основываться на конструкциях образующих алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, приведённых в гл. 7 и 8. Вычисление образов Хариш-Чандры как элементов соответствующей классической $\mathcal{W}$-алгебры будет закончено в гл. 13 и будет опираться на *янгианные характеры*. Мы выведем необходимые формулы для характеров в настоящей главе для типа A и в гл. 11 для типов B, C и D.

Янгиан $\mathrm{Y}(\mathfrak{g})$ — это алгебра Хопфа, которая является деформацией универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}\big(\mathfrak{g}[t]\big)$ в классе алгебр Хопфа. Мы будем работать с RTT*-реализацией* янгианов, чтобы вычислить характеры некоторых представлений. По существу, то же самое вычисление даст формулы для характеров представлений *двойственного янгиана* $\mathrm{Y}^{+}(\mathfrak{g})$, который представляет собой деформацию универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$. Переходя к подходящим классическим пределам, мы получим образы Хариш-Чандры некоторых элементов алгебр $\mathrm{U}(\mathfrak{g}[t])$ и $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$, которые приведут к желаемым формулам для образов Хариш-Чандры векторов Сигала–Сугавары.

Янгианный подход можно также использовать для альтернативной конструкции векторов Сигала–Сугавары из §7.1, которую мы обсудим в §10.5. Этот подход может быть применён и для произвольной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ при наличии подходящего варианта процедуры слияния. Мы начнём с обзора некоторых хорошо известных свойств янгиана для $\mathfrak{gl}_N$, следуя книге **[109]**.

§ 10.1. Янгиан для $\mathfrak{gl}_N$

Янгиан $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ — это ассоциативная алгебра с единицей и образующими $t_{ij}^{(r)}$ при $1 \leqslant i,j \leqslant N$ и $r = 1,2,\ldots,$ удовлетворяющими определяющим соотношениям

$$[t_{ij}^{(r+1)}, t_{kl}^{(s)}] - [t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s+1)}] = t_{kj}^{(r)} t_{il}^{(s)} - t_{kj}^{(s)} t_{il}^{(r)}, \tag{10.1}$$

где $r, s = 0, 1, \ldots$ и $t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$, с обычным обозначением для коммутатора $[a, b] = ab - ba$. В терминах формальных рядов

$$t_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{\infty} t_{ij}^{(r)} \, u^{-r} \in \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)[[u^{-1}]]$$

определяющие соотношения записываются в виде

$$(u - v)\,[t_{ij}(u), t_{kl}(v)] = t_{kj}(u)\, t_{il}(v) - t_{kj}(v)\, t_{il}(u). \tag{10.2}$$

Разделив обе части на $u - v$, получим соотношения (10.1) в эквивалентной форме:

$$[t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s)}] = \sum_{a=1}^{\min\{r,s\}} \Big(t_{kj}^{(a-1)} t_{il}^{(r+s-a)} - t_{kj}^{(r+s-a)} t_{il}^{(a-1)} \Big). \tag{10.3}$$

Положим

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes t_{ij}(u) \in \operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)[[u^{-1}]] \tag{10.4}$$

и примем матричные обозначения из § 1.4 и § 1.5, так что $T_a(u)$ при $a = 1, \ldots, m$ — это формальные ряды по u^{-1} с коэффициентами в тензорном произведении алгебр

$$\underbrace{\operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End} \mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N).$$

R-матрица Янга $R_{12}(u)$ — это рациональная функция от комплексного параметра u со значениями в алгебре $\operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \operatorname{End} \mathbb{C}^N$, заданная формулой

$$R_{12}(u) = 1 - P_{12}\, u^{-1}, \tag{10.5}$$

где P — это оператор перестановки (1.64). Эта функция удовлетворяет *уравнению Янга–Бакстера*

$$R_{12}(u)\, R_{13}(u+v)\, R_{23}(v) = R_{23}(v)\, R_{13}(u+v)\, R_{12}(u). \tag{10.6}$$

Определяющие соотношения в алгебре $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ можно записать в матричном виде:

$$R_{12}(u-v)\, T_1(u)\, T_2(v) = T_2(v)\, T_1(u)\, R_{12}(u-v). \tag{10.7}$$

Алгебра $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ обладает двумя естественными фильтрациями, определёнными по правилам

$$\deg t_{ij}^{(r)} = r \qquad \text{и} \qquad \deg' t_{ij}^{(r)} = r - 1$$

для всех $r \geqslant 1$. Обозначим через $\operatorname{gr} \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ и $\operatorname{gr}' \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ соответствующие градуированные алгебры. Имеют место изоморфизмы

$$\operatorname{gr} \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N) \cong \mathrm{S}\big(\mathfrak{gl}_N[t]\big) \qquad \text{и} \qquad \operatorname{gr}' \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N) \cong \mathrm{U}\big(\mathfrak{gl}_N[t]\big).$$

В частности, алгебра $\operatorname{gr} \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ коммутативна. Образ $\bar{t}_{ij}^{(r)}$ образующего $t_{ij}^{(r)}$ в $(r-1)$-й компоненте градуированной алгебры $\operatorname{gr}' \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ соответствует элементу $E_{ij}[r-1]$ алгебры $\mathrm{U}\big(\mathfrak{gl}_N[t]\big)$.

Из предложения 4.2.2 следует, что отображение

$$\mathrm{ev} : T(u) \mapsto 1 + E\,u^{-1}, \tag{10.8}$$

задаёт сюръективный гомоморфизм $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N) \to \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$, известный как *точечный гомоморфизм*. Он позволяет продолжить любое представление V алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ до представления янгиана. Такое представление янгиана называется *точечным модулем*.

Универсальную обёртывающую алгебру $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$ можно отождествить с подалгеброй в янгиане $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ с помощью вложения $E_{ij} \mapsto t_{ij}^{(1)}$. Тогда янгиан можно рассматривать как $\mathfrak{gl}_N$-модуль с присоединённым действием, и из определяющих соотношений (10.3) следует, что

$$[E_{ij}, t_{kl}^{(s)}] = \delta_{kj}\, t_{il}^{(s)} - \delta_{il}\, t_{kj}^{(s)}. \tag{10.9}$$

Имеет место обобщение теоремы 4.5.1, в котором мы используем обозначения из этой теоремы.

Предложение 10.1.1. *Для любого элемента $s \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ и переменных $u_1, \ldots, u_m$ все коэффициенты рядов*

$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S\, T_1(u_1) \ldots T_m(u_m)$$

коммутируют с элементами алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$.

Доказательство. Рассмотрим тензорное произведение

$$\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes m} \otimes \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$$

с дополнительной копией алгебры $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$, занумерованной индексом 0. Применяя соотношение (10.7) или записывая (10.9) в матричном виде, получим соотношения

$$[E_0, T_a(u_a)] = P_{0\,a} T_a(u_a) - T_a(u_a) P_{0\,a}$$

при $a = 1, \ldots, m$. Теперь соотношение

$$\big[E_0, \mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S\, T_1(u_1) \ldots T_m(u_m)\big] = 0,$$

аналогичное (4.32), проверяется точно так же, как в доказательстве теоремы 4.5.1. □

Обозначим через $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}}$ подалгебру $\mathfrak{h}$-инвариантов относительно действия (10.9):

$$\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}} = \{y \in \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N) \mid [E_{ii}, y] = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, N\}.$$

Рассмотрим левый идеал I алгебры $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$, порождённый всеми элементами $t_{ij}^{(r)}$, удовлетворяющими условиям $1 \leqslant i < j \leqslant N$ и $r \geqslant 1$. По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта для янгиана [**109**, §1.4] пересечение $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}} \cap I$ — это двусторонний идеал в алгебре $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}}$. Кроме того, фактор алгебры $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}}$ по этому идеалу изоморфен коммутативной алгебре, свободно порождённой образами элементов $t_{ii}^{(r)}$ при $i = 1, \ldots, N$ и $r \geqslant 1$ в факторе. Мы будем использовать обозначение $\lambda_i^{(r)}$ для образа элемента $t_{ii}^{(r)}$. Это приводит к аналогу гомоморфизма Хариш-Чандры (4.6):

$$\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}} \to \mathbb{C}[\lambda_i^{(r)} \,|\, i = 1, \ldots, N,\ r \geqslant 1]. \tag{10.10}$$

Соберём элементы $\lambda_i^{(r)}$ в формальные ряды

$$\lambda_i(u) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_i^{(r)} u^{-r}, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

которые можно считать образами рядов $t_{ii}(u)$ при гомоморфизме (10.10).

Используя обозначения §4.9, возьмём разбиение $\mu \vdash m$ длины $\ell(\mu) \leqslant N$. Пусть $\mathcal{U}$ — это стандартная таблица формы $\mu \vdash m$, и пусть $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ — это образ примитивного идемпотента $e_{\mathcal{U}}$ относительно действия симметрической группы $\mathfrak{S}_m$, определённого в (1.65). Оператор $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ коммутирует с естественным действием алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ в пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$. Образ $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ — это неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$, изоморфное представлению старшего веса $L(\mu)$, где μ рассматривается как N-набор $(\mu_1, \ldots, \mu_N)$; см. §4.4. Кроме того, пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ — это также представление янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$, изоморфное точечному модулю $L(\mu)$; см. [**109**, §6.5].

В следующей теореме вычисляется образ Хариш-Чандры некоторого ряда $\mathbb{T}_\mu(u)$, отвечающего разбиению μ. Коэффициенты этого ряда лежат в алгебре $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}}$ по предложению 10.1.1. Мы принимаем за определение, что этот образ — это *янгианный характер* точечного модуля $L(\mu)$; см. также замечание 10.1.5(ii).

Как и прежде, через $c_a = c_a(\mathcal{U})$ мы обозначаем содержание $c(\alpha) = j - i$ клетки $\alpha = (i, j)$ таблицы $\mathcal{U}$, в которой находится число $a \in \{1, \ldots, m\}$.

Теорема 10.1.2. *Степенной ряд (по u^{-1})*

$$\mathbb{T}_\mu(u) = \mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, T_1(u + c_1) \ldots T_m(u + c_m) \tag{10.11}$$

не зависит от стандартной таблицы $\mathcal{U}$ формы μ. Кроме того, образы его коэффициентов относительно гомоморфизма Хариш-Чандры (10.10) *находятся по формуле*

$$\mathbb{T}_\mu(u) \mapsto \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{T})=\mu} \prod_{\alpha\in\mu} \lambda_{\mathcal{T}(\alpha)}\big(u + c(\alpha)\big),$$

где суммирование производится по всем полустандартным таблицам $\mathcal{T}$ формы μ с элементами из множества $\{1, \ldots, N\}$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно убедиться, что правая часть в (10.11) не изменится, если заменить $\mathcal{U}$ на такую стандартную таблицу $\mathcal{U}' = s_a\mathcal{U}$ при $a \in \{1, \ldots, m-1\}$, что элементы a и $a+1$ в таблице $\mathcal{U}$ не лежат в одной строке или в одном столбце. Из свойств (1.67) и определяющих соотношений (10.7), получаем

$$\begin{aligned} &P_{a\,a+1} R_{a\,a+1}(c_a - c_{a+1})\, T_a(u + c_a)\, T_{a+1}(u + c_{a+1}) \\ &\qquad\qquad = T_a(u + c_{a+1})\, T_{a+1}(u + c_a) P_{a\,a+1} R_{a\,a+1}(c_a - c_{a+1}). \end{aligned}$$

Поэтому, приводя правую часть в (10.11) к виду

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} \mathcal{E}_{\mathcal{U}} R_{a\,a+1}(c_a - c_{a+1})^{-1} P_{a\,a+1} P_{a\,a+1} R_{a\,a+1}(c_a - c_{a+1}) \\ \times T_1(u+c_1)\dots T_m(u+c_m)$$

и применяя свойство цикличности следа, мы можем представить её как

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} P_{a\,a+1} R_{a\,a+1}(c_a - c_{a+1})\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}} R_{a\,a+1}(c_a - c_{a+1})^{-1} P_{a\,a+1} \\ \times T_1(u+c_1)\dots T_a(u+c_{a+1})\, T_{a+1}(u+c_a)\dots T_m(u+c_m).$$

Используя обозначение $d = (c_{a+1} - c_a)^{-1}$, как в лемме 1.1.1, запишем

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}} R_{a\,a+1}(c_a - c_{a+1})^{-1} P_{a\,a+1} \\ = \mathcal{E}_{\mathcal{U}}(P_{a\,a+1} - d)\,\frac{1}{1-d^2} = \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, P_{a\,a+1}\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}'}\,\frac{1}{1-d^2}, \tag{10.12}$$

где последнее равенство выполнено в силу (1.6).

Лемма 10.1.3. *В обозначениях теоремы выполнено соотношение*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, T_1(u+c_1)\dots T_m(u+c_m) = \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, T_1(u+c_1)\dots T_m(u+c_m)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}}.$$

Доказательство. Пусть $R(u_1,\dots,u_m)$ обозначает образ рациональной функции $\phi(u_1,\dots,u_m)$, определённой в (1.23), относительно действия симметрической группы в пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$. Тогда

$$R(u_1,\dots,u_m) = \prod_{1\leqslant a<b\leqslant m} R_{a\,b}(u_a - u_b), \tag{10.13}$$

где произведение берётся в соответствии с лексикографическим порядком на множестве пар (a,b). Повторное применение соотношения (10.7) приводит к тождеству

$$R(u_1,\dots,u_m) T_1(u_1)\dots T_m(u_m) = T_m(u_m)\dots T_1(u_1) R(u_1,\dots,u_m).$$

Процедура слияния из предложения 1.1.7 позволяет заключить, что последовательные специализации переменных $u_a = u + c_a$ при $a = 1,\dots,m$ дают соотношение

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, T_1(u+c_1)\dots T_m(u+c_m) = T_m(u+c_m)\dots T_1(u+c_1)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}}. \tag{10.14}$$

Остаётся заметить, что $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}^2 = \mathcal{E}_{\mathcal{U}}$, поэтому умножение справа на $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ не изменит это выражение. □

Применяя (10.12), свойство цикличности следа и лемму 10.1.3 для таблицы $\mathcal{U}'$ вместо $\mathcal{U}$, мы приведём правую часть в (10.11) к виду

$$\frac{1}{1-d^2}\operatorname{tr}_{1,\dots,m} \mathcal{E}_{\mathcal{U}'} P_{a\,a+1}\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}} P_{a\,a+1} \mathcal{E}_{\mathcal{U}'} \\ \times T_1(u+c_1)\dots T_a(u+c_{a+1}) T_{a+1}(u+c_a)\dots T_m(u+c_m).$$

В силу соотношения (1.7) это выражение совпадает с правой частью в (10.11) для таблицы $\mathcal{U}'$ вместо $\mathcal{U}$, как и требовалось.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, положим

$$\mathcal{E}_\mu(u) = \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{V})=\mu} \mathcal{E}_\mathcal{V}\, T_1(u+c_1)\dots T_m(u+c_m),$$

где суммирование производится по всем стандартным таблицам $\mathcal{V}$ формы μ, учитывая, что содержания $c_a = c_a(\mathcal{V})$ зависят от $\mathcal{V}$.

Лемма 10.1.4. *Для любой перестановки $s \in \mathfrak{S}_m$ выполнено равенство*

$$P_s\, \mathcal{E}_\mu(u) = \mathcal{E}_\mu(u)\, P_s.$$

Доказательство. Будем использовать изоморфизм (1.2) между групповой алгеброй $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$ и прямой суммой матричных алгебр. Мы проверим, что элемент $\mathcal{E}_\mu(u)$ коммутирует с образом $\mathcal{E}_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ любой матричной единицы $e_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ относительно действия симметрической группы в пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$, где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ — это стандартные таблицы одинаковой формы. По лемме 10.1.3 имеем

$$\mathcal{E}_\mu(u) = \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{V})=\mu} \mathcal{E}_\mathcal{V}\, T_1(u+c_1)\dots T_m(u+c_m)\, \mathcal{E}_\mathcal{V}.$$

Следовательно, если $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ — это стандартные таблицы формы ν и $\nu \neq \mu$, то

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}\, \mathcal{E}_\mu(u) = \mathcal{E}_\mu(u)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = 0.$$

Предположим теперь, что таблицы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ имеют форму μ. В случае $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ получаем

$$\mathcal{E}_\mathcal{U}\, \mathcal{E}_\mu(u) = \mathcal{E}_\mu(u)\, \mathcal{E}_\mathcal{U} = \mathcal{E}_\mathcal{U}\, T_1(u+c_1)\dots T_m(u+c_m)\, \mathcal{E}_\mathcal{U},$$

где $c_a = c_a(\mathcal{U})$ для всех a. Наконец, пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ — это различные стандартные таблицы формы μ. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{U}'$ получается из $\mathcal{U}$ перестановкой элементов a и $a+1$, которые не лежат в одной строке или одном столбце, где $a \in \{1,\dots,m-1\}$. В этом случае $\mathcal{U}' = s_a\mathcal{U}$, и из соотношения (1.8) следует, что

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \frac{1}{\sqrt{1-d^2}}\, \mathcal{E}_\mathcal{U}(P_{a\,a+1} - d)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}'} = \frac{1}{\sqrt{1-d^2}}\, \mathcal{E}_\mathcal{U}\, P_{a\,a+1}\, R_{a\,a+1}(c_{a+1}-c_a)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}'}.$$

Применяя (1.67), (10.7) и лемму 10.1.3, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_\mu(u)\, \mathcal{E}_\mathcal{U} P_{a\,a+1}\, R_{a\,a+1}(c_{a+1}-c_a)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}'}\\
&\qquad = \mathcal{E}_\mathcal{U}\, T_1(u+c_1)\dots T_m(u+c_m)\, \mathcal{E}_\mathcal{U} P_{a\,a+1}\, R_{a\,a+1}(c_{a+1}-c_a)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}'}\\
&\qquad = \mathcal{E}_\mathcal{U}\, T_1(u+c_1)\dots T_m(u+c_m)\, P_{a\,a+1}\, R_{a\,a+1}(c_{a+1}-c_a)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}'}\\
&\qquad = \mathcal{E}_\mathcal{U}\, P_{a\,a+1}\, R_{a\,a+1}(c_{a+1}-c_a)\, T_1(u+c'_1)\dots T_m(u+c'_m)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}'},
\end{aligned}$$

где мы положили $c'_a = c_a(\mathcal{U}')$ для всех a. Преобразуем дальше это выражение с использованием соотношения (1.6):

$$\mathcal{E}_\mathcal{U}\, P_{a\,a+1}\, R_{a\,a+1}(c_{a+1}-c_a) = \mathcal{E}_\mathcal{U}\, P_{a\,a+1}\, R_{a\,a+1}(c_{a+1}-c_a)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}'}.$$

Таким образом, по лемме 10.1.3, применённой к таблице $\mathcal{U}'$ вместо $\mathcal{U}$, это выражение равно

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, P_{a\,a+1}\, R_{a\,a+1}(c_{a+1}-c_a)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}'}\, T_1(u+c'_1)\dots T_m(u+c'_m)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}'} \\ = \mathcal{E}_{\mathcal{U}}\, P_{a\,a+1}\, R_{a\,a+1}(c_{a+1}-c_a)\, \mathcal{E}_{\mathcal{U}'}\, \mathcal{E}_{\mu}(u),$$

что завершает доказательство леммы. □

Запишем степенной ряд (10.11) в виде

$$\mathbb{T}_{\mu}(u) = \frac{1}{f_{\mu}}\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, \mathcal{E}_{\mu}(u),$$

где f_{μ} — это число стандартных таблиц формы μ. Введём матричные элементы оператора $\mathcal{E}_{\mu}(u)$:

$$\mathcal{E}_{\mu}(u) = \sum_{I,J} e_{i_1 j_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m j_m} \otimes \mathcal{E}_{\mu}(u)^{\,i_1\dots i_m}_{\,j_1\dots j_m},$$

где суммирование производится по всем наборам индексов $I=(i_1,\dots,i_m)$ и $J=(j_1,\dots,j_m)$ из множества $\{1,\dots,N\}$. Тогда

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, \mathcal{E}_{\mu}(u) = \sum_{I} \mathcal{E}_{\mu}(u)^{\,i_1\dots i_m}_{\,i_1\dots i_m}.$$

По лемме 10.1.4 для любого $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ слагаемые, соответствующие m-наборам $(i_1,\dots,i_m)$ и $(i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(m)})$, равны друг другу. Поэтому суммирование можно ограничить на неубывающие m-наборы. Принимая в расчёт число равных слагаемых, приходим к выражению

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, \mathcal{E}_{\mu}(u) = \sum_{i_1\leqslant\dots\leqslant i_m} \frac{m!}{\alpha_1!\dots\alpha_N!}\, \mathcal{E}_{\mu}(u)^{\,i_1\dots i_m}_{\,i_1\dots i_m}, \tag{10.15}$$

где α_i — это кратность индекса i в m-наборе $(i_1,\dots,i_m)$. Пусть

$$\Phi_{\mathcal{U}} = \sum_{s\in\mathfrak{S}_m} \Phi_{\mathcal{U}}(s)\, P_{s^{-1}}$$

— это образ диагонального матричного элемента $\phi_{\mathcal{U}}$, определённого в (1.5), относительно действия симметрической группы в пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$. В силу инвариантности скалярного произведения

$$\Phi_{\mathcal{U}}(s) = (s\cdot v_{\mathcal{U}}, v_{\mathcal{U}}) = (v_{\mathcal{U}},\, s^{-1}\cdot v_{\mathcal{U}}) = \Phi_{\mathcal{U}}(s^{-1}).$$

Из формулы (1.4) получаем, что

$$\mathcal{E}_{\mu}(u) = \frac{f_{\mu}}{m!} \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\mu} \Phi_{\mathcal{U}}\, T_1(u+c_1)\dots T_m(u+c_m), \tag{10.16}$$

где $c_a = c_a(\mathcal{U})$ при $a=1,\dots,m$. Поэтому

$$\mathcal{E}_{\mu}(u)^{\,i_1\dots i_m}_{\,i_1\dots i_m} = \frac{f_{\mu}}{m!} \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\mu}\, \sum_{s\in\mathfrak{S}_m} \Phi_{\mathcal{U}}(s)\, t_{i_{s(1)}\, i_1}(u+c_1)\dots t_{i_{s(m)}\, i_m}(u+c_m).$$

Степенной ряд (10.11) можно теперь записать в виде

$$\mathbb{T}_\mu(u) = \sum_{i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\mu} \sum_{s \in \mathfrak{S}_m} \Phi_{\mathcal{U}}(s)\, t_{i_{s(1)}\, i_1}(u+c_1) \dots t_{i_{s(m)}\, i_m}(u+c_m).$$

Из этой формулы следует, что образ Хариш-Чандры ряда $\mathbb{T}_\mu(u)$ вычисляется как

$$\sum_{i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\mu} \sum_{s \in \mathfrak{S}_{(i)}} \Phi_{\mathcal{U}}(s)\, \lambda_{i_1}(u+c_1) \dots \lambda_{i_m}(u+c_m), \tag{10.17}$$

где $\mathfrak{S}_{(i)} \cong \mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\alpha_N}$ — это подгруппа в $\mathfrak{S}_m$, состоящая из перестановок, лежащих в стабилизаторе m-набора $(i_1, \dots, i_m) = (1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots N^{\alpha_N})$. В самом деле, коэффициенты ряда $t_{i_{s(m)}\, i_m}(u + c_m)$ аннулируются по модулю левого идеала I в $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$, кроме случая, когда $i_{s(m)} = i_m$. В этом случае перестановка s сохраняет подмножество индексов $\{r \mid i_r = i_m\}$. Образ ряда $t_{i_m i_m}(u+c_m)$ при гомоморфизме (10.10) — это $\lambda_{i_m}(u+c_m)$, так что утверждение доказывается по индукции: то же самое рассуждение применяется к степенному ряду $t_{i_{s(m-1)}\, i_{m-1}}(u+c_{m-1})$, и т. д.

Для данного m-набора $(i_1, \dots, i_m)$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m \leqslant N$, и для каждой стандартной таблицы $\mathcal{U}$ формы μ обозначим через $\mathcal{T} = i(\mathcal{U})$ таблицу, полученную из $\mathcal{U}$ заменой её элемента r числом i_r при $r = 1, \dots, m$. Элементы таблицы $\mathcal{T}$ не убывают по строкам слева направо и по столбцам сверху вниз. Меняя порядок суммирования в выражении (10.17), мы можем записать его как

$$\sum_{i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{T})=\mu} \Psi_{\mathcal{T}} \prod_{\alpha \in \mu} \lambda_{\mathcal{T}(\alpha)}\big(u + c(\alpha)\big), \tag{10.18}$$

где суммирование производится по таблицам $\mathcal{T}$ с элементами $i_1, \dots, i_m$ и мы положили

$$\Psi_{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{U},\, i(\mathcal{U})=\mathcal{T}} \sum_{s \in \mathfrak{S}_{(i)}} \Phi_{\mathcal{U}}(s). \tag{10.19}$$

Для такой произвольной μ-таблицы $\mathcal{T}$ с элементами в множестве $\{1, \dots, N\}$, что её элементы не убывают по строкам слева направо и по столбцам сверху вниз, введём косые диаграммы $\omega_1, \dots, \omega_N$, где ω_r — это объединение клеток в $\mathcal{T}$, занятых числом r. Тогда формула (10.19) примет вид

$$\Psi_{\mathcal{T}} = \prod_{r=1}^{N} \sum_{s_r \in \mathfrak{S}_{\alpha_r}} \chi_{\omega_r}(s_r),$$

где χ_{ω_r} — это характер группы $\mathfrak{S}_{\alpha_r}$, отвечающий косой диаграмме ω_r. Однако выражение

$$\frac{1}{\alpha_r!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_{\alpha_r}} \chi_{\omega_r}(s)$$

совпадает со стандартным скалярным произведением характера χ_{ω_r} и тривиального характера группы $\mathfrak{S}_{\alpha_r}$. Поэтому это выражение равно кратности тривиального представления в косом представлении группы $\mathfrak{S}_{\alpha_r}$ отвечающем диаграмме ω_r. По правилу Пьери эта кратность отлична от нуля, только если в диаграмме ω_r нет столбцов, содержащих более одной клетки. В этом случае кратность равна 1. Отсюда следует, что суммирование в формуле (10.18) можно ограничить на такие таблицы $\mathcal{T}$, что их элементы строго возрастают по столбцам сверху вниз, так что выражение (10.18) приобретает вид

$$\sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{T})=\mu} \prod_{\alpha\in\mu} \lambda_{\mathcal{T}(\alpha)}\big(u + c(\alpha)\big),$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Замечание 10.1.5. (i) Применяя точечный гомоморфизм (10.8) к степенному ряду $\mathbb{T}_\mu(u)$, определённому в (10.11), и умножая на полином от u, мы получаем элемент Казимира $\mathbb{S}_\mu(u)$ заданный в (4.44):

$$\mathbb{S}_\mu(u) = (u + c_1)\dots(u + c_m)\,\mathrm{ev}\big(\mathbb{T}_\mu(u)\big).$$

Рассмотрим гомоморфизм Хариш-Чандры (4.6) для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ со стандартным выбором подалгебры Картана $\mathfrak{h}$, линейно порождённой элементами $\lambda_i = E_{ii}$ при $i = 1,\dots,N$, и подалгебры $\mathfrak{n}_+$, линейно порождённой элементами E_{ij} при $1 \leqslant i < j \leqslant N$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] & \mathbb{C}[\lambda_1^{(r)},\dots,\lambda_N^{(r)} \mid r \geqslant 1] \arrow[d] \\
\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}} \arrow[r] & \mathbb{C}[\lambda_1,\dots,\lambda_N],
\end{tikzcd}$$

в которой горизонтальные стрелки — это соответствующие гомоморфизмы Хариш-Чандры (10.10) и (4.6), в то время как правая вертикальная стрелка — это гомоморфизм, заданный по правилу

$$\lambda_i^{(1)} \mapsto \lambda_i \qquad \text{и} \qquad \lambda_i^{(r)} \mapsto 0, \quad r \geqslant 2.$$

С помощью этой диаграммы и теоремы 10.1.2 мы получаем формулы для образов Хариш-Чандры полиномов $\mathbb{S}_\mu(u)$, тем самым доказывая предложение 4.9.1.

Заметим, что кроме значений центральных характеров $\chi(\mathbb{S}_\mu)$ из теоремы 10.1.2 вытекает также формула для характера неприводимого представления $L(\lambda)$ группы GL_N. А именно, формула (4.27) получется при специализации $T(u) \mapsto \mathbf{h}$.

(ii) Янгианные характеры можно определить для всех конечномерных представлений янгиана по аналогии с квантовыми аффинными алгебрами, как образы Хариш-Чандры соответствующих *трансфер-матриц*; см. [**51**]. Однако доказательство того, что ряд $\mathbb{T}_\mu(u)$ совпадает с трансфер-матрицей, соответствующей представлению $L(\mu)$, требует дополнительных соображений, опирающихся на свойства универсальной R-матрицы; ср. [**48**] и [**125**]. Из свойств трансфер-матриц следует, что коэффициенты всех рядов $\mathbb{T}_\mu(u)$ лежат в коммутативной подалгебре янгиана. Это факт можно установить непосредственно, применяя процедуру слияния из предложения 1.1.7. Другое доказательство коммутативности подалгебры, порождённой коэффициентами рядов

$\mathbb{T}_\mu(u)$, можно получить с использованием структуры квантовой вертексной алгебры, связанной с двойным янгианом [**37**]; см. замечание 10.4.2. $\square$

Отметим два частных случая теоремы 10.1.2, соответствующих конструкциям элементов Казимира для $\mathfrak{gl}_N$ в предложениях 4.6.1 и 4.7.1. В этих случаях янгианные характеры вычисляются для внешних и симметрических степеней $\Lambda^m(\mathbb{C}^N)$ и $\mathrm{S}^m(\mathbb{C}^N)$ векторного представления. Здесь μ — это диаграмма-столбец или диаграмма-строка с m клетками, а $\mathcal{U}$ — это единственная стандартная таблица формы μ. Примитивный идемпотент $\mathcal{E}_\mathcal{U}$ в (10.11) совпадает с антисимметризатором $A^{(m)}$ или симметризатором $H^{(m)}$ соответственно.

Следствие 10.1.6. *Для образов относительно гомоморфизма Хариш-Чандры* (10.10) *справедливы формулы*

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, A^{(m)}\, T_1(u)\dots T_m(u-m+1) \mapsto \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant N} \lambda_{i_1}(u)\cdots\lambda_{i_m}(u-m+1)$$

и

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, H^{(m)}\, T_1(u)\dots T_m(u+m-1) \mapsto \sum_{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_m\leqslant N} \lambda_{i_1}(u)\cdots\lambda_{i_m}(u+m-1).$$

§ 10.2. Двойственный янгиан для $\mathfrak{gl}_N$

По аналогии с (10.3) определим *двойственный янгиан* $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$ как ассоциативную алгебру с единицей и с образующими $t_{ij}^{(-r)}$ при $1\leqslant i,j\leqslant N$ и $r=1,2,\dots$, удовлетворяющими определяющим соотношениям

$$[t_{ij}^{(-r)}, t_{kl}^{(-s)}] = \delta_{kj}\, t_{il}^{(-r-s)} - \delta_{il}\, t_{kj}^{(-r-s)} + \sum_{a=1}^{\min\{r,s\}} \Big(t_{kj}^{(-r-s+a-1)} t_{il}^{(-a)} - t_{kj}^{(-a)} t_{il}^{(-r-s+a-1)}\Big).$$

Вводя формальные степенные ряды

$$t_{ij}^+(u) = \delta_{ij} - \sum_{r=1}^{\infty} t_{ij}^{(-r)}\, u^{r-1} \in \mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)[[u]],$$

определяющие соотношения можно записать как

$$(u-v)\,[t_{ij}^+(u), t_{kl}^+(v)] = t_{kj}^+(u)\, t_{il}^+(v) - t_{kj}^+(v)\, t_{il}^+(u), \tag{10.20}$$

так что они имеют такой же вид, как (10.2). Поэтому и матричная форма соотношений выглядит точно так же, как (10.7):

$$R_{12}(u-v)\, T_1^+(u)\, T_2^+(v) = T_2^+(v)\, T_1^+(u)\, R_{12}(u-v), \tag{10.21}$$

где мы используем R-матрицу Янга (10.5) и полагаем

$$T^+(u) = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij}\otimes t_{ij}^+(u) \in \operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)[[u]]. \tag{10.22}$$

В соответствии с матричными обозначениями пусть $T_a^+(u)$ при $a = 1, \ldots, m$ — это формальные степенные ряды по u, определённые как в (1.61), с коэффициентами в тензорном произведении алгебр

$$\underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N). \tag{10.23}$$

Алгебра $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$ обладает естественной возрастающей фильтрацией, заданной условием, что $\deg' t_{ij}^{(-r)} = -r$ для всех $r \geqslant 1$. Для соответствующей градуированной алгебры имеет место изоморфизм

$$\operatorname{gr}' \mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N) \cong \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\big).$$

Образ $\bar{t}_{ij}^{(-r)}$ образующего $t_{ij}^{(-r)}$ в $(-r)$-й компоненте градуированной алгебры $\operatorname{gr}' \mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$ соответствует элементу $E_{ij}[-r]$ алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\big)$.

Будем рассматривать алгебру $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$ как модуль над подалгеброй Картана $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{gl}_N$, в котором каждый базисный элемент E_{ii} подалгебры $\mathfrak{h}$ действует как дифференцирование. На образующих его действие даётся формулой

$$E_{ii} \cdot t_{kl}^+(u) = \delta_{ki}\, t_{il}^+(u) - \delta_{il}\, t_{ki}^+(u).$$

Обозначим через $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}}$ подалгебру $\mathfrak{h}$-инвариантов относительно этого действия. Рассмотрим левый идеал J в алгебре $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$, порождённый всеми элементами $t_{ij}^{(-r)}$ при $N \geqslant i > j \geqslant 1$ и $r \geqslant 1$. Как и в случае янгиана, фактор алгебры $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}}$ по двустороннему идеалу $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}} \cap J$ изоморфен коммутативной алгебре, свободно порождённой образами элементов $t_{ii}^{(-r)}$ при $i = 1, \ldots, N$ и $r \geqslant 1$ в факторалгебре. Примем обозначение $\lambda_i^{(-r)}$ для образа элемента $t_{ii}^{(-r)}$. Соответствующий аналог гомоморфизма Хариш-Чандры (10.10) теперь принимает вид

$$\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}} \to \mathbb{C}[\lambda_i^{(-r)} \,|\, i = 1, \ldots, N,\ r \geqslant 1]. \tag{10.24}$$

Соберём элементы $\lambda_i^{(-r)}$ в формальный степенной ряд

$$\lambda_i^+(u) = 1 - \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_i^{(-r)} u^{r-1}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{10.25}$$

который можно считать образом ряда $t_{ii}^+(u)$ при гомоморфизме (10.24).

Наша следующая цель — доказать вариант теоремы 10.1.2 для двойственного янгиана. Заметим, однако, что автоморфизм янгиана, переводящий $T(u)$ в $T(u+c)$, который использовался в определении рядов $\mathbb{T}_\mu(u)$, не определён на двойственном янгиане. Чтобы ввести аналоги этих рядов, нам необходимо расширить алгебру $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$, вложив её в пополненный двойственный янгиан $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{gl}_N)$, определённый следующим образом. Рассмотрим *убывающую* фильтрацию

$$\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N) = \mathrm{Y}_0^+ \supset \mathrm{Y}_1^+ \supset \mathrm{Y}_2^+ \supset \ldots \tag{10.26}$$

на алгебре $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$, заданную условием, что степень образующего $t_{ij}^{(-r)}$ при $r \geqslant 1$ равна r. Таким образом, подпространство Y_k^+ линейно порождается всеми такими мономами от образующих, что их общая степень не меньше k. Алгебра $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{gl}_N)$ — это пополнение двойственного янгиана $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$ по этой фильтрации. Ясно, что для любого $c \in \mathbb{C}$ коэффициенты при степенях u в ряде $t^+_{ij}(u+c)$ могут рассматриваться как элементы пополненной алгебры $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{gl}_N)$. Гомоморфизм Хариш-Чандры (10.24) продолжается по непрерывности до гомоморфизма из алгебры $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{h}}$ в соответствующую пополненную алгебру полиномов $\widehat{\mathbb{C}}[\lambda_i^{(-r)}\,|\,i=1,\ldots,N,\ r\geqslant 1]$.

В алгебре (10.23) заменим тензорный множитель $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$ на $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{gl}_N)$ и введём степенные ряды $\mathbb{T}^+_\mu(u)$ с коэффициентами в новой алгебре по формуле

$$\mathbb{T}^+_\mu(u) = \mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,T^+_1(u+c_1)\ldots T^+_m(u+c_m) \tag{10.27}$$

с использованием тех же самых идемпотентов $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$, что и в теореме 10.1.2. Для данной диаграммы μ *обратная таблица* формы μ получается заполнением клеток диаграммы числами из данного множества таким образом, что элементы таблицы не возрастают по строкам слева направо и строго убывают по столбцам сверху вниз.

Теорема 10.2.1. *Степенной ряд $\mathbb{T}^+_\mu(u)$ не зависит от стандартной таблицы $\mathcal{U}$ формы μ. Кроме того, образы его коэффициентов при гомоморфизме Хариш-Чандры* (10.24) *находятся по формуле*

$$\mathbb{T}^+_\mu(u) \mapsto \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{T})=\mu}\ \prod_{\alpha\in\mu} \lambda^+_{\mathcal{T}(\alpha)}\big(u+c(\alpha)\big),$$

где суммирование производится по обратным таблицам $\mathcal{T}$ формы μ с элементами в множестве $\{1,\ldots,N\}$.

Доказательство. Первая часть вытекает из соответствующего рассуждения в доказательстве теоремы 10.1.2, потому что оно опирается только на матричную форму определяющих соотношений, которая имеет одинаковый вид для янгиана и двойственного янгиана. В частности, соотношение (10.14) выполняется в той же форме:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,T^+_1(u+c_1)\ldots T^+_m(u+c_m) = T^+_m(u+c_m)\ldots T^+_1(u+c_1)\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}. \tag{10.28}$$

В доказательстве второй части требуется небольшое изменение. Используя матрицу $T^+(u)$ вместо $T(u)$ в соответствующих рассуждениях, приходим к такому варианту формулы (10.15):

$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\,\mathcal{E}^+_\mu(u) = \sum_{i_1\geqslant\cdots\geqslant i_m} \frac{m!}{\alpha_1!\ldots\alpha_N!}\,\mathcal{E}^+_\mu(u)^{\,i_1\ldots i_m}_{\,i_1\ldots i_m},$$

где α_i — это кратность индекса i в m-наборе $(i_1,\ldots,i_m)$. Применяя (10.28), получим соответствующий аналог формулы (10.16):

$$\mathcal{E}^+_\mu(u) = \frac{f_\mu}{m!}\sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\mu} T^+_m(u+c_m)\ldots T^+_1(u+c_1)\,\Phi_{\mathcal{U}},$$

где $c_a = c_a(\mathcal{U})$ при $a = 1, \ldots, m$. Следовательно,

$$\mathcal{E}^+_\mu(u)^{\,i_1\ldots i_m}_{\,i_1\ldots i_m} = \frac{f_\mu}{m!} \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\mu} \sum_{s\in\mathfrak{S}_m} \Phi_{\mathcal{U}}(s)\, t^+_{i_m\, i_{s(m)}}(u+c_m)\ldots t^+_{i_1\, i_{s(1)}}(u+c_1),$$

так что

$$\mathbb{T}^+_\mu(u) = \sum_{i_1\geqslant\cdots\geqslant i_m} \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_N!} \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\mu} \sum_{s\in\mathfrak{S}_m} \Phi_{\mathcal{U}}(s)\, t^+_{i_m\, i_{s(m)}}(u+c_m)\ldots t^+_{i_1\, i_{s(1)}}(u+c_1).$$

В обозначениях формулы (10.17) для образа Хариш-Чандры ряда $\mathbb{T}^+_\mu(u)$ получаем

$$\sum_{i_1\geqslant\cdots\geqslant i_m} \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_N!} \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{U})=\mu} \sum_{s\in\mathfrak{S}_{(i)}} \Phi_{\mathcal{U}}(s)\, \lambda^+_{i_m}(u+c_m)\ldots\lambda^+_{i_1}(u+c_1).$$

Повторяя заключительную часть рассуждения с обратным порядком на индексах, приходим к требуемому выражению для образа Хариш-Чандры, в котором роль полустандартных таблиц играют обратные таблицы. □

Приведём аналог следствия 10.1.6 для двойственного янгиана.

Следствие 10.2.2. *Для образов относительно гомоморфизма Хариш-Чандры* (10.24) *справедливы формулы*

$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, A^{(m)}\, T^+_1(u)\ldots T^+_m(u-m+1) \mapsto \sum_{N\geqslant i_1>\cdots>i_m\geqslant 1} \lambda^+_{i_1}(u)\cdots\lambda^+_{i_m}(u-m+1)$$

и

$$\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, H^{(m)}\, T^+_1(u)\ldots T^+_m(u+m-1) \mapsto \sum_{N\geqslant i_1\geqslant\cdots\geqslant i_m\geqslant 1} \lambda^+_{i_1}(u)\cdots\lambda^+_{i_m}(u+m-1).$$

§ 10.3. Двойной янгиан для $\mathfrak{gl}_N$

Двойной янгиан $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_N)$ для $\mathfrak{gl}_N$ определяется как ассоциативная алгебра, порождённая центральным элементом C и элементами $t^{(r)}_{ij}$ и $t^{(-r)}_{ij}$ при $1 \leqslant i,j \leqslant N$ и $r = 1, 2, \ldots$ с определяющими соотношениями, записанными в терминах матриц образующих (10.4) и (10.22) следующим образом. Они задаются формулами (10.7), (10.21), а также соотношением

$$\overline{R}_{12}\big(u-v+C/2\big)\, T_1(u)\, T^+_2(v) = T^+_2(v)\, T_1(u)\, \overline{R}_{12}\big(u-v-C/2\big), \tag{10.29}$$

в котором

$$\overline{R}_{12}(u) = g(u)\, R_{12}(u) = g(u)\,\big(1 - P_{12}\, u^{-1}\big)$$

и

$$g(u) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} g_i\, u^{-i}, \qquad g_i \in \mathbb{C}, \tag{10.30}$$

— это формальный ряд по u^{-1}, однозначно определённый формулой

$$g(u+N) = g(u)\,(1-u^{-2}). \tag{10.31}$$

Несколько первых членов в разложении имеют вид

$$g(u) = 1 + \frac{1}{N}\, u^{-1} + \frac{N^2+1}{2\,N^2}\, u^{-2} + \dots$$

Соотношение (10.31) необходимо, чтобы обеспечить *перекрёстную симметрию* R-матрицы $\overline{R}_{12}(u)$:

$$\big(\overline{R}_{12}(u)^{-1}\big)^{t_1}\, \overline{R}_{12}\big(u+N\big)^{t_1} = 1 \quad \text{и} \quad \big(\overline{R}_{12}(u)^{-1}\big)^{t_2}\, \overline{R}_{12}\big(u+N\big)^{t_2} = 1, \tag{10.32}$$

где t_1 и t_2 — это стандартные матричные транспонирования $t : e_{ij} \mapsto e_{ji}$, действующие соответственно на первой и второй копии алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$. Кроме того, выполняется *свойство унитарности*

$$\overline{R}_{12}(u)\,\overline{R}_{12}(-u) = 1. \tag{10.33}$$

Действительно, заменяя u на $-u-N$ в (10.31), получаем

$$g(-u) = g(-u-N)\,\big(1-(u+N)^{-2}\big),$$

следовательно,

$$g(u)\,g(-u)\,(1-u^{-2}) = g(u+N)\,g(-u-N)\,\big(1-(u+N)^{-2}\big).$$

Это означает, что левая часть инвариантна относительно сдвига $u \mapsto u+N$, а это возможно, только если

$$g(u)\,g(-u)\,(1-u^{-2}) = 1,$$

откуда и следует соотношение (10.33). Ряд $g(u)$ можно определить равносильным условием, что это единственный формальный степенной ряд вида (10.30), удовлетворяющий соотношению

$$g(u)\,g(u+1)\dots g(u+N-1) = \big(1-u^{-1}\big)^{-1}. \tag{10.34}$$

Равносильность условий видна из того, что в силу (10.31) ряд $G(u)$, представляющий левую часть в (10.34), обладает свойством $G(u+1) = G(u)\,(1-u^{-2})$. Однако, это свойство однозначно определяет $G(u)$, поэтому этот ряд совпадает с правой частью в (10.34).

Для произвольного значения $c \in \mathbb{C}$ введём *двойной янгиан на уровне* c как фактор $\mathrm{DY}_c(\mathfrak{gl}_N)$ алгебры $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_N)$ по идеалу, порождённому элементом $C-c$. Как векторное пространство, этот фактор изоморфен тензорному произведению

$$\mathrm{DY}_c(\mathfrak{gl}_N) \cong \mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N) \otimes \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N) \tag{10.35}$$

янгиана и двойственного янгиана. Это свойство является следствием теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для алгебры $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_N)$. Эта теорема доказывается для нулевого уровня $c=0$ с помощью соображений, изложенных в работах [**35**] и [**126**], а затем продолжается на произвольный уровень с использованием представлений уровня 1, построенных в статье [**72**]; см. [**82**].

Рассмотрим возрастающую фильтрацию на двойном янгиане $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_N)$, заданную формулами

$$\deg' t_{ij}^{(r)} = r-1 \qquad \text{и} \qquad \deg' t_{ij}^{(-r)} = -r$$

для всех $r \geqslant 1$; степень центрального элемента C полагается равной нулю. Обозначим через $\mathrm{gr}'\,\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_N)$ соответствующую градуированную алгебру. Мы будем использовать обозначения $\bar{t}_{ij}^{(r)}$ и $\bar{t}_{ij}^{(-r)}$ для образов образующих в соответствующих компонентах градуированной алгебры, и пусть $\overline{C}$ — это образ элемента C в нулевой компоненте.

Вспомним, что аффинная алгебра Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{gl}}_N = \mathfrak{gl}_N[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ определяется коммутационными соотношениями (7.3).

Предложение 10.3.1. *Отображения*

$$E_{ij}[r-1] \mapsto \bar{t}_{ij}^{(r)}, \qquad E_{ij}[-r] \mapsto \bar{t}_{ij}^{(-r)} \qquad \text{и} \qquad K \mapsto \overline{C} \tag{10.36}$$

при $r \geqslant 1$ задают изоморфизм алгебр

$$\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N) \to \mathrm{gr}'\,\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_N).$$

Доказательство. Как мы отметили в предыдущих параграфах, имеются изоморфизмы

$$\mathrm{U}\big(\mathfrak{gl}_N[t]\big) \cong \mathrm{gr}'\,\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N) \qquad \text{и} \qquad \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\big) \cong \mathrm{gr}'\,\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N).$$

Они заданы отображениями (10.36). Теперь будем использовать определяющие соотношения (10.29) для проверки того, что образы образующих $\bar{t}_{ij}^{(r)}$ и $\bar{t}_{kl}^{(-s)}$ при $r, s \geqslant 1$ удовлетворяют требуемым соотношениям в алгебре $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$. Введём нормировку для образующих алгебры $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_N)$, полагая

$$\widetilde{t}_{ij}^{(r)} = h^{r-1}\, t_{ij}^{(r)} \qquad \text{и} \qquad \widetilde{t}_{ij}^{(-r)} = h^{-r}\, t_{ij}^{(-r)}$$

при $r \geqslant 1$, где h — это комплекснозначный параметр. Соотношения, которым удовлетворяют элементы $\bar{t}_{ij}^{(r)}$ и $\bar{t}_{kl}^{(-s)}$ в градуированной алгебре $\mathrm{gr}'\,\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_N)$, можно получить взятием предела при $h \to 0$ в соотношениях между образующими $\widetilde{t}_{ij}^{(r)}$ и $\widetilde{t}_{kl}^{(-s)}$. Положим

$$\widetilde{t}_{ij}(u) = \sum_{r=1}^{\infty} \widetilde{t}_{ij}^{(r)}\, u^{-r} = \frac{1}{h}\left(t_{ij}\Big(\frac{u}{h}\Big) - \delta_{ij}\right)$$

и

$$\widetilde{t}_{kl}^{+}(v) = \sum_{s=1}^{\infty} \widetilde{t}_{kl}^{(-s)}\, v^{s-1} = \frac{1}{h}\left(\delta_{kl} - t_{kl}^{+}\Big(\frac{v}{h}\Big)\right).$$

Запишем определяющие соотношения (10.29) в терминах производящих функций:

$$g\big(u-v+C/2\big)\left(t_{ij}(u)\, t_{kl}^{+}(v) - \frac{1}{u-v+C/2}\, t_{kj}(u)\, t_{il}^{+}(v)\right) \tag{10.37}$$

$$= g\big(u-v-C/2\big)\left(t_{kl}^{+}(v)\, t_{ij}(u) - \frac{1}{u-v-C/2}\, t_{kj}^{+}(v)\, t_{il}(u)\right).$$

Для разложения в степенной ряд по $(u-v)^{-1}$ справедлива формула

$$\frac{g\big(u-v-C/2\big)}{g\big(u-v+C/2\big)} = 1 + \frac{C}{N\,(u-v)^2} + \dots. \tag{10.38}$$

Заменим теперь u на u/h и v на v/h в формуле (10.37), чтобы получить соотношения между рядами $\widetilde{t}_{ij}(u)$ и $\widetilde{t}^{+}_{kl}(v)$:

$$\begin{aligned}\big(\delta_{ij}+h\widetilde{t}_{ij}(u)\big)\big(\delta_{kl}-h\widetilde{t}^{+}_{kl}(v)\big)-\frac{h}{u-v+hC/2}\,\big(\delta_{kj}+h\widetilde{t}_{kj}(u)\big)\big(\delta_{il}-h\widetilde{t}^{+}_{il}(v)\big)\\ -\Big(\big(\delta_{kl}-h\widetilde{t}^{+}_{kl}(v)\big)\big(\delta_{ij}+h\widetilde{t}_{ij}(u)\big)-\frac{h}{u-v-hC/2}\,\big(\delta_{kj}-h\widetilde{t}^{+}_{kj}(v)\big)\big(\delta_{il}+h\widetilde{t}_{il}(u)\big)\Big)\\ \times\Big(1+\frac{h^2C}{N(u-v)^2}+\dots\Big)=0.\end{aligned}$$

Левая часть — это степенной ряд по h, делящийся на h^2. При делении получим соотношение по модулю h:

$$\begin{aligned}\big[\widetilde{t}_{ij}(u),\widetilde{t}^{+}_{kl}(v)\big]\equiv\frac{1}{u-v}\Big(\delta_{kj}\,\big(\widetilde{t}_{il}(u)+\widetilde{t}^{+}_{il}(v)\big)-\delta_{il}\,\big(\widetilde{t}_{kj}(u)+\widetilde{t}^{+}_{kj}(v)\big)\Big)\\ +\frac{C}{N(u-v)^2}\Big(N\,\delta_{kj}\,\delta_{il}-\delta_{ij}\,\delta_{kl}\Big).\end{aligned}$$

Таким образом, взяв коэффициенты при $u^{-r}v^{s-1}$ при $r,s\geqslant 1$ в обеих частях, в пределе при $h\to 0$ в градуированной алгебре получим

$$\big[\bar{t}^{(r)}_{ij},\bar{t}^{(-s)}_{kl}\big]=\begin{cases}\delta_{kj}\,\bar{t}^{(r-s)}_{i\,l}-\delta_{i\,l}\,\bar{t}^{(r-s)}_{k\,j}+(r-1)\,\delta_{r,s+1}\,\overline{C}\Big(\delta_{kj}\,\delta_{i\,l}-\dfrac{\delta_{ij}\,\delta_{kl}}{N}\Big)\\ \delta_{kj}\,\bar{t}^{(r-s-1)}_{i\,l}-\delta_{i\,l}\,\bar{t}^{(r-s-1)}_{k\,j}+(r-1)\,\delta_{r,s+1}\,\overline{C}\Big(\delta_{kj}\,\delta_{i\,l}-\dfrac{\delta_{ij}\,\delta_{kl}}{N}\Big),\end{cases}$$

где верхняя строка берётся при $r>s$, а нижняя строка при $r\leqslant s$. Сравнивая эти формулы с соотношениями (7.3), мы можем заключить, что отображения (10.36) задают гомоморфизм $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)\to\mathrm{gr}'\,\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_N)$. Его сюръективность очевидна, в то время как инъективность вытекает из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для двойного янгиана. □

В последующем особую роль будет играть *критический уровень* $c=-N$. При этой специализации выражение (10.38) допускает замкнутую форму:

$$\frac{g\big(u-v+N/2\big)}{g\big(u-v-N/2\big)}=1-\frac{1}{(u-v-N/2)^2}.$$

Из неё вытекает альтернативная форма определяющих соотношений (10.37) на критическом уровне:

$$\begin{aligned}\big[t_{ij}(u),t^{+}_{kl}(v)\big]=-\frac{1}{u-v+N/2}\,t^{+}_{kj}(v)\,t_{il}(u)+\frac{1}{u-v-N/2}\,t^{+}_{il}(v)\,t_{kj}(u)\\ -\frac{1}{(u-v)^2-N^2/4}\,t^{+}_{ij}(v)\,t_{kl}(u).\end{aligned}$$

§ 10.4. Инварианты вакуумного модуля над двойным янгианом

По аналогии с вакуумным модулем над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{gl}}_N$, определённым в (6.6) (для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$), введём *вакуумный модуль* $\mathcal{V}_c(\mathfrak{gl}_N)$ *на уровне* $c \in \mathbb{C}$ над двойным янгианом $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_N)$ как фактор алгебры $\mathrm{DY}_c(\mathfrak{gl}_N)$ по левому идеалу, порождённому всеми элементами $t_{ij}^{(r)}$ при $r \geqslant 1$:

$$\mathcal{V}_c(\mathfrak{gl}_N) = \mathrm{DY}_c(\mathfrak{gl}_N)/\mathrm{DY}_c(\mathfrak{gl}_N)\langle t_{ij}^{(r)} \mid r \geqslant 1\rangle.$$

Образ элемента 1 в факторе будем обозначать через $\mathbf{1}$. При ограничении на подалгебру $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ вакуумный модуль $\mathcal{V}_c(\mathfrak{gl}_N)$ можно рассматривать как модуль над янгианом $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$. Как векторное пространство, вакуумный модуль изоморфен двойственному янгиану $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$ в силу разложения (10.35). В частности, пространство $\mathcal{V}_c(\mathfrak{gl}_N)$ обладает убывающей фильтрацией (10.26). Соответствующее пополненное пространство $\widehat{\mathcal{V}}_c(\mathfrak{gl}_N)$ тоже $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$-модуль.

Предположим теперь, что уровень критический, $c = -N$, и введём подпространство $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$-инвариантов:

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathcal{V}}_{\mathrm{cri}}) = \{v \in \widehat{\mathcal{V}}_{-N}(\mathfrak{gl}_N) \mid t_{ij}(u)\, v = \delta_{ij}\, v\},$$

так что любой элемент $\mathfrak{z}(\widehat{\mathcal{V}}_{\mathrm{cri}})$ аннулируется операторами $t_{ij}^{(r)}$ при $r \geqslant 1$. Как и в случае центра Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$, подпространство $\mathfrak{z}(\widehat{\mathcal{V}}_{\mathrm{cri}})$ можно рассматривать как подалгебру пополненного двойственного янгиана $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{gl}_N)$. Более того, эта подалгебра оказывается коммутативной; см. [**82**].

Пусть μ — это диаграмма с m клетками, длина которой не превосходит N. Рассмотрим степенной ряд $\mathbb{T}_\mu^+(u)$ по u, введённый в (10.27).

Теорема 10.4.1. *Все коэффициенты ряда* $\mathbb{T}_\mu^+(u)\,\mathbf{1}$ *лежат в подалгебре инвариантов* $\mathfrak{z}(\widehat{\mathcal{V}}_{cri})$ *вакуумного модуля. В частности, эти коэффициенты являются попарно коммутирующими элементами пополненного двойственного янгиана* $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{gl}_N)$.

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 7.1.3, рассмотрим тензорное произведение

$$\underbrace{\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N}_{m+1} \otimes \widehat{\mathcal{V}}_{-N}(\mathfrak{gl}_N)$$

с $m+1$ копиями алгебры $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$, занумерованными числами $0, 1, \ldots, m$. Нам нужно проверить соотношение

$$T_0(z)\,\mathbb{T}_\mu^+(u)\,\mathbf{1} = \mathbb{T}_\mu^+(u)\,\mathbf{1}.$$

Применяя определяющие соотношения (10.29), при $a = 1, \ldots, m$ получим

$$T_0(z)\,T_a^+(u + c_a) \\ = \overline{R}_{0\,a}(z - u - c_a - N/2)^{-1}\,T_a^+(u + c_a)\,T_0(z)\,\overline{R}_{0\,a}(z - u - c_a + N/2).$$

Следовательно, опуская аргументы R–матриц, получаем

$$T_0(z)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,T_1^+(u+c_1)\dots T_m^+(u+c_m)\,\mathbf{1}$$

$$=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,\overline{R}_{0\,1}^{\,-1}\dots\overline{R}_{0\,m}^{\,-1}\,T_1^+(u+c_1)\dots T_m^+(u+c_m)\,T_0(z)\,\overline{R}_{0\,m}\dots\overline{R}_{0\,1}\,\mathbf{1}$$

$$=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,\overline{R}_{0\,1}^{\,-1}\dots\overline{R}_{0\,m}^{\,-1}\,T_1^+(u+c_1)\dots T_m^+(u+c_m)\,\overline{R}_{0\,m}\dots\overline{R}_{0\,1}\,\mathbf{1},$$

где второе равенство выполняется, так как $T_0(z)$ действует как тождественный оператор на подпространстве $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes\,(m+1)}\otimes\mathbf{1}$.

Из уравнения Янга–Бакстера (10.6) следует, что

$$R(u_1,\dots,u_m)\,R_{0\,m}(u_0-u_m)\dots R_{0\,1}(u_0-u_1)$$
$$=R_{0\,1}(u_0-u_1)\dots R_{0\,m}(u_0-u_m)\,R(u_1,\dots,u_m), \tag{10.39}$$

где u_0 — это ещё одна переменная и мы используем обозначение (10.13). Соотношение (10.39) останется справедливым при замене каждого множителя $R_{0\,a}(u_0-u_a)$ на $\overline{R}_{0\,a}(u_0-u_a)$. Применяя процедуру слияния из предложения 1.1.7 с последовательными специализациями $u_a=c_a$ при $a=1,\dots,m$, приходим к соотношению

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,\overline{R}_{0\,m}(u_0-c_m)\dots\overline{R}_{0\,1}(u_0-c_1)=\overline{R}_{0\,1}(u_0-c_1)\dots\overline{R}_{0\,m}(u_0-c_m)\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}.$$

Обращая R-матрицы, получим

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,\overline{R}_{0\,1}(u_0-c_1)^{\,-1}\dots\overline{R}_{0\,m}(u_0-c_m)^{\,-1}$$
$$=\overline{R}_{0\,m}(u_0-c_m)^{\,-1}\dots\overline{R}_{0\,1}(u_0-c_1)^{\,-1}\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}.$$

Возвращаясь к выражению $T_0(z)\,\mathbb{T}_\mu^+(u)\,\mathbf{1}$, вспомним, что $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ — это идемпотент, и, применив свойство цикличности следа, запишем

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,X\,Y=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,X^\circ\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,Y=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,X^\circ\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}^2\,Y$$

$$=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,X\,Y^\circ\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,X\,Y^\circ\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}^2=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,X\,Y^\circ\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,X\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,Y,$$

где мы положили

$$X=\overline{R}_{0\,1}^{\,-1}\dots\overline{R}_{0\,m}^{\,-1},\qquad Y=T_1^+(u+c_1)\dots T_m^+(u+c_m)\,\overline{R}_{0\,m}\dots\overline{R}_{0\,1}$$

и использовали обозначения X° и Y° для тех же самых произведений, записанных в обратном порядке. Таким образом,

$$T_0(z)\,\mathbb{T}_\mu^+(u)\,\mathbf{1}=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,X\,\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,Y\,\mathbf{1}=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,X^{t_1\dots t_m}\,\big(\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,Y\big)^{t_1\dots t_m}\,\mathbf{1}.$$

Справедливы формулы

$$\big(\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,Y\big)^{t_1\dots t_m}=\overline{R}_{0\,m}^{\,t_m}\dots\overline{R}_{0\,1}^{\,t_1}\,\big(\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,T_1^+(u+c_1)\dots T_m^+(u+c_m)\big)^{t_1\dots t_m}$$

и

$$X^{t_1\dots t_m}=\Big(\overline{R}_{0\,1}^{\,-1}\Big)^{t_1}\dots\Big(\overline{R}_{0\,m}^{\,-1}\Big)^{t_m}.$$

Благодаря перекрёстной симметрии (10.32) имеем

$$\left(\overline{R}_{0\,a}^{\,-1}\right)^{t_a}\overline{R}_{0\,a}^{\,t_a}=1$$

при $a=1,\dots,m$, так что

$$T_0(z)\,\mathbb{T}_{\mu}^{+}(u)\,\mathbf{1}=\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\left(\mathcal{E}_{\mathcal{U}}\,T_1^{+}(u+c_1)\dots T_m^{+}(u+c_m)\right)^{t_1\dots t_m}\mathbf{1}=\mathbb{T}_{\mu}^{+}(u)\,\mathbf{1},$$

как и требовалось. □

Замечание 10.4.2. Как мы отметили выше, в работе **[82]** было установлено, что коэффициенты всех рядов $\mathbb{T}_{\mu}^{+}(u)$ попарно коммутируют как элементы коммутативной подалгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathcal{V}}_{\mathrm{cri}})$ пополненного двойственного янгиана $\widehat{\mathrm{Y}}^{+}(\mathfrak{gl}_N)$. Поскольку определяющие соотношения янгиана и двойственного янгиана записываются в терминах производящих функций идентичными формулами (10.2) и (10.20), тем самым мы приходим к хорошо известному свойству, что коэффициенты всех рядов $\mathbb{T}_{\mu}(u)$ лежат в коммутативной подалгебре янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$. □

§ 10.5. От янгианных инвариантов к векторам Сигала–Сугавары

В этом параграфе мы дадим ещё одно доказательство теоремы 7.1.3. По предложению 10.3.1 для любого элемента $S\in\mathfrak{z}(\widehat{\mathcal{V}}_{\mathrm{cri}})$ его образ $\overline{S}$ в градуированной алгебре $\mathrm{gr}'\,\widehat{\mathrm{Y}}^{+}(\mathfrak{gl}_N)$ лежит в центре Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$. Мы применим теорему 10.4.1, чтобы найти подходящие линейные комбинации инвариантов из $\mathfrak{z}(\widehat{\mathcal{V}}_{\mathrm{cri}})$, символы которых совпадут с элементами, определёнными в (7.7). Благодаря соображениям, изложенным в начале доказательства теоремы 7.1.3, отсюда также будут следовать соответствующие свойства элементов (7.8), (7.9) и (7.10).

Продолжим возрастающую фильтрацию на двойственном янгиане, заданную по правилу $\deg' t_{ij}^{(-r)}=-r$, на алгебру формальных рядов $\mathrm{Y}^{+}(\mathfrak{gl}_N)[[u,\partial_u]]$, полагая $\deg u=1$ и $\deg\partial_u=-1$, так что соответствующая градуированная алгебра изоморфна алгебре $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\big)[[u,\partial_u]]$. Тогда элемент

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,A^{(m)}\big(1-T_1^{+}(u)\,e^{-\partial_u}\big)\dots\big(1-T_m^{+}(u)\,e^{-\partial_u}\big)\tag{10.40}$$

имеет степень $-m$, а его образ в градуированной алгебре совпадает с элементом

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,A^{(m)}\big(\partial_u+E(u)_{+\,1}\big)\dots\big(\partial_u+E(u)_{+\,m}\big),\tag{10.41}$$

где, как и в §7.2,

$$E(u)_{+}=\sum_{r=1}^{\infty}E[-r]\,u^{r-1}.$$

С другой стороны, элемент (10.40) равен

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,A^{(m)}\sum_{k=0}^{m}\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant m}(-1)^k\,T_{i_1}^{+}(u)\dots T_{i_k}^{+}(u-k+1)\,e^{-k\,\partial_u}.$$

Преобразуем это выражение, применяя сопряжения элементами группы $\mathfrak{S}_m$ и свойство цикличности следа, чтобы привести его к виду

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)} \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k} T_1^+(u)\dots T_k^+(u-k+1)\, e^{-k\,\partial_u}.$$

Вычисляя частичные следы антисимметризатора с использованием формулы (3.26), мы можем записать это выражение как

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{N-k}{m-k} \operatorname{tr}_{1,\dots,k} A^{(k)}\, T_1^+(u)\dots T_k^+(u-k+1)\, e^{-k\,\partial_u}. \tag{10.42}$$

Применим теорему 10.4.1 к случаю диаграммы-столбца $\mu = (1^k)$. Для единственной стандартной таблицы $\mathcal{U}$ формы μ получаем $\mathcal{E}_{\mathcal{U}} = A^{(k)}$, а содержания имеют вид $c_i = -i+1$ при $i = 1,\dots,k$. По теореме 10.4.1 все элементы

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,k} A^{(k)}\, T_1^+(u)\dots T_k^+(u-k+1)\, \mathbf{1}$$

лежат в алгебре $\mathfrak{z}(\widehat{\mathcal{V}}_{\mathrm{cri}})$. Это доказывает, что все коэффициенты в (10.41) при степенях u и ∂_u — это векторы Сигала–Сугавары для $\mathfrak{gl}_N$. В частности, это выполнено для коэффициента при u^0, который совпадает с полиномом (7.7) после замены ∂_u на τ. Последний шаг — это, по существу, применение вакуумной аксиомы для аффинной вертексной алгебры. Это завершает доказательство теоремы 7.1.3.

Описанную выше конструкцию векторов Сигала–Сугавары для $\mathfrak{gl}_N$, основанную на использовании двойного янгиана, можно, в принципе, перенести на произвольную простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Согласно Дринфельду [**32**], соответствующий янгиан $\mathrm{Y}(\mathfrak{g})$ допускает RTT-реализацию вида (10.7). Двойной янгиан $\mathrm{DY}(\mathfrak{g})$ можно определить с помощью дополнительных соотношений, аналогичных (10.21) и (10.29). Алгебра $\mathrm{U}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$ должна возникать как присоединённая градуированная алгебра на критическом уровне. Тогда векторы Сигала–Сугавары для $\mathfrak{g}$ должны получаться как символы подходящих инвариантов вакуумного модуля над двойным янгианом по аналогии с $\mathfrak{gl}_N$.

Отметим также, что доказательство теоремы 10.4.1 опирается на процедуру слияния. А именно, в соответствии с предложением 1.1.7 примитивные идемпотенты $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ получаются в результате последовательных специализаций произведения R-матриц

$$\mathcal{E} = \frac{1}{h(\mu)}\, R(u_1,\dots,u_m)\big|_{u_1=c_1}\big|_{u_2=c_2}\dots\big|_{u_m=c_m}, \tag{10.43}$$

где

$$R(u_1,\dots,u_m) = \prod_{1\leqslant a<b\leqslant m} R_{a\,b}(u_a-u_b)$$

и произведение берётся в лексикографическом порядке на множестве пар (a,b). Поэтому, чтобы перенести теорему 10.4.1 на двойной янгиан $\mathrm{DY}(\mathfrak{g})$, необходимо найти идемпотент $\mathcal{E}$, допускающий факторизацию вида (10.43).

Для типа A такие идемпотенты существуют для всех $m \geqslant 1$; они отвечают произвольным стандартным таблицам с m клетками. Процедуры слияния для алгебры Брауэра показывают, что для типов B, C и D существует по крайней мере один идемпотент вида (10.43) для любого m; см. §1.2. А именно, мультипликативная формула для симметризатора (1.46) принимает вид (10.43) в соответствующих представлениях алгебр Брауэра (1.69) и (1.73), так как множители — это значения R-матриц для типов B, C и D; см. формулу (11.13). Это приводит к другому доказательству теорем 8.1.6 и 8.3.2.

Подходящая версия процедуры слияния для исключительных типов, приводящая к формулам вида (10.43) для идемпотентов (возможно, для специальных значений m), позволила бы применить этот подход к построению векторов Сигала–Сугавары. Другой подход, опирающийся на компьютерные вычисления, был использован в работе [**116**] для получения формул для образующих алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа G_2.

§ 10.6. Скрининговые операторы

Образы Хариш-Чандры, полученные в теореме 10.1.2, можно рассматривать как полиномы от формальных переменных $\lambda_i(u+a)$ при $i=1,\ldots,N$ и $a\in\mathbb{C}$. В работе [**51**] была высказана гипотеза, впоследствии доказанная в статье [**48**], что полиномы, возникающие как характеры представлений янгиана, могут быть охарактеризованы как полиномы, лежащие в пересечении ядер *скрининговых операторов*. Хотя образ Хариш-Чандры ряда $\mathbb{T}_\mu(u)$ совпадает с q-характером точечного модуля при подходящем соответствии параметров, мы покажем независимо, что он принадлежит ядрам всех скрининговых операторов, и тем самым проиллюстрируем соответствующий результат из статьи [**48**].

Мы опустим переменную u в обозначениях и введём алгебру полиномов

$$\mathcal{L}=\mathbb{C}[\lambda_i(a)\,|\,i=1,\ldots,N,\quad a\in\mathbb{C}]$$

от переменных $\lambda_i(a)$. Для каждого $i\in\{1,\ldots,N-1\}$ рассмотрим свободный левый $\mathcal{L}$-модуль $\widetilde{\mathcal{L}}_i$ с образующими $\sigma_i(a)$, где a пробегает $\mathbb{C}$, и обозначим через $\mathcal{L}_i$ его фактор по соотношениям

$$\lambda_i(a)\,\sigma_i(a)=\lambda_{i+1}(a)\,\sigma_i(a+1),\quad a\in\mathbb{C}. \tag{10.44}$$

Зададим линейный оператор $\widetilde{S}_i:\mathcal{L}\to\widetilde{\mathcal{L}}_i$ с помощью формулы

$$\widetilde{S}_i:\lambda_j(a)\mapsto\begin{cases}\lambda_i(a)\,\sigma_i(a) & \text{при}\quad j=i,\\ -\lambda_{i+1}(a)\,\sigma_i(a+1) & \text{при}\quad j=i+1,\\ 0 & \text{при}\quad j\neq i,i+1\end{cases} \tag{10.45}$$

и правила Лейбница

$$\widetilde{S}_i(AB)=B\,\widetilde{S}_i(A)+A\,\widetilde{S}_i(B). \tag{10.46}$$

Теперь i*-й скрининговый оператор*

$$S_i:\mathcal{L}\to\mathcal{L}_i$$

определяется как композиция оператора $\widetilde{S}_i$ и проекции $\widetilde{\mathcal{L}}_i\to\mathcal{L}_i$.

Подалгебру янгианных характеров $\operatorname{Rep} \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ в алгебре $\mathcal{L}$ можно определить как пересечение ядер скрининговых операторов:

$$\operatorname{Rep} \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N) = \bigcap_{i=1}^{N-1} \ker S_i.$$

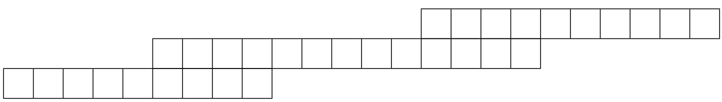
Для произвольной диаграммы μ длины $\ell(\mu) \leqslant N$ введём полином $\chi_{L(\mu)} \in \mathcal{L}$ формулой

$$\chi_{L(\mu)} = \sum_{\operatorname{sh}(\mathcal{T})=\mu} \prod_{\alpha \in \mu} \lambda_{\mathcal{T}(\alpha)}\big(c(\alpha)\big), \tag{10.47}$$

где суммирование производится по всем полустандартным таблицам $\mathcal{T}$ формы μ с элементами в множестве $\{1, \dots, N\}$; см. теорему 10.1.2.

Предложение 10.6.1. *Полином* $\chi_{L(\mu)}$ *лежит в подалгебре* $\operatorname{Rep} \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$.

Доказательство. Нам нужно проверить, что полином $\chi_{L(\mu)}$ аннулируется всеми операторами S_i при $i = 1, \dots, N-1$. По определению (10.45) оператор S_i аннулирует все переменные, кроме $\lambda_i(a)$ и $\lambda_{i+1}(a)$. Поскольку каждая таблица $\mathcal{T}$ полустандартная, её элементы i и $i+1$ занимают косую поддиаграмму, в которой каждый столбец состоит не более чем из двух клеток:



Поэтому, меняя порядок суммирования в формуле (10.47), мы можем свести вычисление к случаю, где диаграмма μ заменяется на такую косую диаграмму с элементами в множестве $\{i, i+1\}$. Двум таким элементам, находящимся в столбце из двух клеток, в формуле для полинома соответствует множитель $\lambda_i(c)\,\lambda_{i+1}(c-1)$, где c — это содержание верхней клетки. Однако

$$S_i : \lambda_i(c)\,\lambda_{i+1}(c-1) \mapsto \lambda_i(c)\,\lambda_{i+1}(c-1)\,\sigma_i(c) - \lambda_i(c)\,\lambda_{i+1}(c-1)\,\sigma_i(c) = 0.$$

Если удалить все двуклеточные столбцы из диаграммы, то останется несвязное объединение строк. Такой строке длины k соответствует сумма

$$\sum_{p=0}^{k} \lambda_i(c)\,\lambda_i(c+1) \dots \lambda_i(c+p-1) \\ \times \lambda_{i+1}(c+p)\,\lambda_{i+1}(c+p+1) \dots \lambda_{i+1}(c+k), \tag{10.48}$$

где c — это теперь содержание самой левой клетки строки. Применяя скрининговый оператор S_i, получим

$$\sum_{p=0}^{k} \lambda_i(c)\,\lambda_i(c+1) \dots \lambda_i(c+p-1)\,\lambda_{i+1}(c+p)\,\lambda_{i+1}(c+p+1) \dots \lambda_{i+1}(c+k)$$
$$\times \big(\sigma_i(c) + \sigma_i(c+1) + \dots + \sigma_i(c+p-1) - \sigma_i(c+p+1) - \dots - \sigma_i(c+k+1)\big).$$

В силу (10.44) мы можем преобразовать произведения в этой формуле, используя соотношения

$$\lambda_{i+1}(c+p)\ldots\lambda_{i+1}(c+p+r)\,\sigma_i(c+p+r+1)\\ =\lambda_i(c+p)\ldots\lambda_i(c+p+r)\,\sigma_i(c+p).$$

Отсюда следует, что результат применения оператора S_i к полиному (10.48) — это линейная комбинация, содержащая каждый моном вида

$$\lambda_i(c)\ldots\lambda_i(c+q-1)\,\lambda_{i+1}(c+q)\ldots\lambda_{i+1}(c+k)\,\sigma_i(c+s-1)$$

при $s=1,\ldots,q$ ровно два раза с противоположными знаками. Требуемое свойство аннулирования следует теперь из правила Лейбница (10.46). $\square$

Замечание 10.6.2. По аналогии с (4.34) введём оператор сдвига e^{∂} по правилу

$$e^{\partial}\lambda_i(a)=\lambda_i(a+1)\,e^{\partial} \qquad \text{и} \qquad e^{\partial}\sigma_i(a)=\sigma_i(a+1)\,e^{\partial}.$$

Каждый скрининговый оператор S_i коммутирует с e^{∂}. Полиномы (10.48) можно собрать в производящую функцию

$$\big(1-\lambda_i(c)\,e^{\partial}\big)^{-1}\big(1-\lambda_{i+1}(c)\,e^{\partial}\big)^{-1}.$$

Поэтому в качестве альтернативы последнему шагу в доказательстве предложения 10.6.1 достаточно проверить, что обратная к ней функция

$$\big(1-\lambda_{i+1}(c)\,e^{\partial}\big)\big(1-\lambda_i(c)\,e^{\partial}\big)$$

аннулируется оператором S_i. Применяя S_i, получаем

$$\lambda_{i+1}(c)\,\sigma_i(c+1)\,e^{\partial}\big(1-\lambda_i(c)\,e^{\partial}\big)+\big(1-\lambda_{i+1}(c)\,e^{\partial}\big)\big(-\lambda_i(c)\,\sigma_i(c)\,e^{\partial}\big)\\ =\lambda_{i+1}(c)\,\sigma_i(c+1)\,e^{\partial}-\lambda_i(c)\,\sigma_i(c)\,e^{\partial}=0$$

в силу (10.44). Заметим также, что доказательство предложения 10.6.1 применимо к произвольным косым диаграммам μ, столбцы которых содержат не более N клеток. Соответствующие полиномы (10.47) — это характеры косых представлений янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ [**128**]; см. также [**109**, §8.5]. $\square$

Теперь мы сформулируем соответствующий вариант предложения 10.6.1 для образа Хариш-Чандры степенного ряда $\mathbb{T}^+_\mu(u)$, связанного с двойственным янгианом $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$; см. теорему 10.2.1. Заметим, что единственное формальное отличие от полиномов в теореме 10.1.2 состоит в использовании обратных таблиц. Однако имеется очевидная биекция между полустандартными таблицами $\mathcal{U}$ и обратными таблицами $\mathcal{U}'$ одной и той же формы μ с элементами в множестве $\{1,\ldots,N\}$. Эта биекция заменяет элемент i в $\mathcal{U}$ на $i'=N-i+1$. Поэтому следующие определения и результаты — это по существу переформулировки соответствующих определений и результатов, связанных с янгианом $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$.

Введём алгебру полиномов

$$\mathcal{L}^+=\mathbb{C}[\lambda_i^+(a)\,|\,i=1,\ldots,N,\quad a\in\mathbb{C}] \tag{10.49}$$

от переменных $\lambda_i^+(a)$. Для каждого $i \in \{1,\dots,N-1\}$ рассмотрим свободный левый $\mathcal{L}^+$-модуль $\widetilde{\mathcal{L}}_i^+$ с образующими $\sigma_i^+(a)$, где a пробегает $\mathbb{C}$, и обозначим через $\mathcal{L}_i^+$ его фактор по соотношениям

$$\lambda_i^+(a)\,\sigma_i^+(a+1) = \lambda_{i+1}^+(a)\,\sigma_i^+(a), \qquad a \in \mathbb{C}. \tag{10.50}$$

Введём линейный оператор $\widetilde{S}_i^+ : \mathcal{L}^+ \to \widetilde{\mathcal{L}}_i^+$ с помощью формулы

$$\widetilde{S}_i^+ : \lambda_j^+(a) \mapsto \begin{cases} -\lambda_i^+(a)\,\sigma_i^+(a+1) & \text{при} \quad j=i, \\ \lambda_{i+1}^+(a)\,\sigma_i^+(a) & \text{при} \quad j=i+1, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq i, i+1 \end{cases} \tag{10.51}$$

и правила Лейбница

$$\widetilde{S}_i^+(AB) = B\,\widetilde{S}_i^+(A) + A\,\widetilde{S}_i^+(B). \tag{10.52}$$

Теперь *i-й скрининговый оператор*

$$S_i^+ : \mathcal{L}^+ \to \mathcal{L}_i^+$$

определяется как композиция оператора $\widetilde{S}_i^+$ и проекции $\widetilde{\mathcal{L}}_i^+ \to \mathcal{L}_i^+$.

Подалгебра $\operatorname{Rep} \mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$ в $\mathcal{L}^+$ вводится как пересечение ядер скрининговых операторов:

$$\operatorname{Rep} \mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N) = \bigcap_{i=1}^{N-1} \ker S_i^+. \tag{10.53}$$

Для произвольной диаграммы μ длины $\ell(\mu) \leqslant N$ введём полином $\chi^+_{L(\mu)} \in \mathcal{L}^+$ по формуле

$$\chi^+_{L(\mu)} = \sum_{\mathrm{sh}(\mathcal{T})=\mu} \prod_{\alpha\in\mu} \lambda^+_{\mathcal{T}(\alpha)}\big(c(\alpha)\big),$$

где суммирование производится по всем обратным таблицам $\mathcal{T}$ формы μ с элементами в множестве $\{1,\dots,N\}$; см. теорему 10.2.1.

Предложение 10.6.3. *Полином $\chi^+_{L(\mu)}$ лежит в подалгебре* $\operatorname{Rep} \mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$.

Доказательство. Это проверяется таким же рассуждением, как для предложения 10.6.1. □

§ 10.7. Библиографические замечания

Подробное изложение свойств янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ и его теории представлений, а также ссылки на многочисленные источники можно найти в книгах Чари и Прессли [**18**] и автора [**109**]. Доказательство теоремы 10.1.2 следует статье Окунькова [**129**]. Хотя в ней обсуждается алгебра $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)$, рассуждения переносятся на янгиан без существенных изменений. Другие вычисления характера точечного модуля даны в работе Френкеля и Мухина [**49**, Sec. 4.5] и Брандана и Клещёва [**16**, Sec. 7.4].

Наше определение двойного янгиана следует работе Иохары [**72**] (мы положили $h = -1$ в его обозначениях). Эти алгебры использовали Этингоф и Каждан [**36**], [**37**] в их конструкции квантовых вертексных алгебр. Двойственные янгианы изучались в их предыдущей работе [**35**], а также в работе Назарова [**126**]; он ввёл их для странных супералгебр Ли. Результаты §10.4 основаны на работе [**45**] и следуют статье [**82**].

Теория характеров берёт начало в работе Найта [**91**] в янгианном контексте и в работе Френкеля и Решетихина [**51**] в контексте квантовых аффинных алгебр (они более известны как q-характеры). Дальнейшее развитие теория получила в работе Френкеля и Мухина [**48**], где был предложен алгоритм для вычисления q-характеров, а гипотезы о функциональных соотношениях, которым удовлетворяют q-характеры, были доказаны Херналдесом [**66**] и Накадзимой [**123**]. Подробный обзор приложений q-характеров в классических и квантовых интегрируемых системах содержится в работе Кунибы, Наканиши и Сузуки [**99**].

Глава 11

Янгианные характеры для типов B, C и D

В этой главе мы получим некоторые аналоги теоремы 10.1.2 для янгианных характеров для типов B, C и D. Мы сделаем это только для одного идемпотента в алгебре Брауэра — симметризатора $s^{(m)}$, отвечающего тривиальному представлению; см. § 1.2. Соответствующие янгианные характеры будут использоваться в гл. 13 для вычисления образов Хариш-Чандры образующих центра Фейгина–Френкеля, построенных в гл. 8.

§ 11.1. Янгиан для $\mathfrak{g}_N$

Вспомним, что подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}_N$, линейно порождённая элементами F_{ij}, определёнными в (2.23), изоморфна ортогональной алгебре Ли $\mathfrak{o}_N$ или симплектической алгебре Ли $\mathfrak{sp}_N$. Мы сохраним общее обозначение $\mathfrak{g}_N$ для $\mathfrak{o}_N$ (при $N = 2n$ или $N = 2n + 1$) или $\mathfrak{sp}_N$ (при $N = 2n$). Пусть $\mathfrak{h}$ — это подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_N$, линейно порождённая базисными элементами $F_{11}, \ldots, F_{nn}$. Положим

$$\kappa = \begin{cases} N/2 - 1 & \text{в ортогональном случае,} \\ N/2 + 1 & \text{в симплектическом случае.} \end{cases}$$

В обозначениях § 1.5, *R-матрица* $R_{12}(u)$ для типов B, C и D — это рациональная функция комплексного параметра u со значениями в тензорном произведении $\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N$, определённая формулой

$$R_{12}(u) = 1 - \frac{P_{12}}{u} + \frac{Q_{12}}{u - \kappa}. \tag{11.1}$$

Благодаря работе **[156]** хорошо известно, что эта функция удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера (10.6).

Расширенный янгиан $\mathrm{X}(\mathfrak{g}_N)$ — это ассоциативная алгебра с образующими $t_{ij}^{(r)}$, где $1 \leqslant i, j \leqslant N$ и $r = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющими некоторым квадратичным соотношениям. Введём формальный ряд

$$t_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{\infty} t_{ij}^{(r)}\, u^{-r} \in \mathrm{X}(\mathfrak{g}_N)[[u^{-1}]] \tag{11.2}$$

и положим

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes t_{ij}(u) \in \operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{X}(\mathfrak{g}_N)[[u^{-1}]].$$

Определяющие соотношения для алгебры $\mathrm{X}(\mathfrak{g}_N)$ записываются в виде

$$R_{12}(u-v)\,T_1(u)\,T_2(v) = T_2(v)\,T_1(u)\,R_{12}(u-v). \tag{11.3}$$

Янгиан $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$ — это фактор алгебры $\mathrm{X}(\mathfrak{g}_N)$ по дополнительным соотношениям

$$T'(u+\kappa)\,T(u) = 1. \tag{11.4}$$

Мы используем матричные обозначения из §1.4, а штрих обозначает матричное транспонирование, определённое в (2.24). В терминах рядов (11.2) определяющие соотношения (11.3) можно записать как

$$\begin{aligned}[t_{ij}(u), t_{kl}(v)] &= \frac{1}{u-v}\Big(t_{kj}(u)\,t_{il}(v) - t_{kj}(v)\,t_{il}(u)\Big)\\ &\qquad - \frac{1}{u-v-\kappa}\Big(\delta_{ki'}\sum_{p=1}^{N}\theta_{ip}\,t_{pj}(u)\,t_{p'l}(v) - \delta_{lj'}\sum_{p=1}^{N}\theta_{jp}\,t_{kp'}(v)\,t_{ip}(u)\Big),\end{aligned}$$

где мы положили $\theta_{ij}\equiv 1$ в ортогональном случае и $\theta_{ij}=\varepsilon_i\varepsilon_j$ в симплектическом случае. Взяв коэффициенты при $u^{-r}v^{-s}$ в обеих частях, соотношения можно записать явно в терминах образующих $t_{ij}^{(r)}$, как в (10.3), однако их общий вид нам не потребуется. Аналогично соотношение (11.4) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N}\theta_{ki}\,t_{i'k'}(u+\kappa)\,t_{il}(u) = \delta_{kl}.$$

Мы будем отождествлять универсальную обёртывающую алгебру $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_N)$ с подалгеброй в янгиане $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$ с помощью вложения $F_{ij}\mapsto t_{ij}^{(1)}$. При этом янгиан $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$ можно рассматривать как $\mathfrak{g}_N$-модуль с присоединённым действием, заданным формулами

$$[F_{ij}, t_{kl}^{(s)}] = \delta_{kj}\,t_{il}^{(s)} - \delta_{il}\,t_{kj}^{(s)} - \theta_{ij}\big(\delta_{ki'}\,t_{j'l}^{(s)} - \delta_{j'l}\,t_{ki'}^{(s)}\big). \tag{11.5}$$

В следующем предложении мы используем обозначения из теоремы 5.3.1.

Предложение 11.1.1. *Для любого элемента* $s\in\mathcal{B}_m(\omega)$ *и переменных* $u_1,\dots,u_m$ *все коэффициенты ряда*

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S\,T_1(u_1)\dots T_m(u_m)$$

коммутируют с элементами алгебры Ли $\mathfrak{g}_N$.

Доказательство. Рассмотрим тензорное произведение

$$\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N\otimes\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}\otimes\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$$

с дополнительной копией алгебры $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$, занумерованной индексом 0. Из матричной формы соотношений (11.5) получаем

$$[F_0, T_a(u_a)] = (P_{0\,a}-Q_{0\,a})T_a(u_a) - T_a(u_a)(P_{0\,a}-Q_{0\,a})$$

при $a=1,\dots,m$. Соотношение

$$\big[E_0, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S\,T_1(u_1)\dots T_m(u_m)\big] = 0$$

— это аналог формулы (5.20), он проверяется таким же рассуждением, как в доказательстве теоремы 5.3.1. □

Введём подалгебру $\mathfrak{h}$-инвариантов $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{h}}$ относительно действия (11.5):

$$\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{h}} = \{y \in \mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N) \mid [F_{ii}, y] = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Рассмотрим левый идеал I алгебры $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$, порождённый всеми элементами $t_{ij}^{(r)}$ с условиями $1 \leqslant i < j \leqslant N$ и $r \geqslant 1$. Из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для янгиана [**7**, Sec. 3] следует, что пересечение $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{h}} \cap I$ — это двусторонний идеал в $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{h}}$. Кроме того, фактор алгебры $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{h}}$ по этому идеалу изоморфен коммутативной алгебре, которая свободно порождается образами элементов $t_{ii}^{(r)}$ при $i = 1, \ldots, n$ и $r \geqslant 1$ в факторе. Будем обозначать через $\lambda_i^{(r)}$ образ элемента $t_{ii}^{(r)}$ и распространим это обозначение на все индексы $i = 1, \ldots, N$. Таким образом, приходим к соответствующей версии гомоморфизмов Хариш-Чандры (4.6) и (10.10):

$$\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{h}} \to \mathbb{C}[\lambda_i^{(r)} \,|\, i = 1, \ldots, n,\ r \geqslant 1]. \tag{11.6}$$

Соберём элементы $\lambda_i^{(r)}$ в формальный ряд

$$\lambda_i(u) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_i^{(r)}\, u^{-r}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{11.7}$$

и будем считать его образом ряда $t_{ii}(u)$ относительно гомоморфизма (11.6). Придавая коэффициентам каждого ряда $\lambda_i(u)$ значения в $\mathbb{C}$, получим N-набор рядов с числовыми коэффициентами

$$\lambda(u) = \big(\lambda_1(u), \ldots, \lambda_N(u)\big). \tag{11.8}$$

Его можно рассматривать как *старший вес* соответствующего *модуля Верма* $M(\lambda(u))$ над янгианом $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$. Из теории представлений янгиана известно, что модуль Верма ненулевой тогда и только тогда, когда N-набор (11.8) удовлетворяет некоторым условиям; см. [**7**, Prop. 5.2 & 5.14]. Из этих условий следует, что образы Хариш-Чандры (11.7) должны удовлетворять соотношениям

$$\lambda_i(u + \kappa - i)\, \lambda_{i'}(u) = \lambda_{i+1}(u + \kappa - i)\, \lambda_{(i+1)'}(u) \tag{11.9}$$

при $i = 0, 1, \ldots, n-1$, если $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}$ или $\mathfrak{sp}_{2n}$, и при $i = 0, 1, \ldots, n$, если $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n+1}$, где $\lambda_0(u) = \lambda_{0'}(u) := 1$.

Отметим, что аналогичное определение гомоморфизма Хариш-Чандры можно дать и для расширенного янгиана $\mathrm{X}(\mathfrak{g}_N)$. Соотношения (11.9) будут выполняться в том же виде для всех значений $i \geqslant 1$. Соотношения при $i = 0$ для расширенного янгиана отсутствуют, так они являются следствием формул (11.4).

Вспомним элемент $S^{(m)}$, введённый в §2.2. Мы будем отождествлять его с элементом $S^{(m)} \otimes 1$ алгебры

$$\underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N). \tag{11.10}$$

По предложению 1.2.8 для него справедливы следующие мультипликативные формулы в ортогональном и симплектическом случаях соответственно:

$$S^{(m)} = \frac{1}{m!} \prod_{1\leqslant a<b\leqslant m} \Big(1 + \frac{P_{a\,b}}{b-a} - \frac{Q_{a\,b}}{N/2+b-a-1}\Big) \tag{11.11}$$

и

$$S^{(m)} = \frac{1}{m!} \prod_{1\leqslant a<b\leqslant m} \Big(1 - \frac{P_{a\,b}}{b-a} - \frac{Q_{a\,b}}{n-b+a+1}\Big), \tag{11.12}$$

где произведения берутся в лексикографическом порядке на множестве пар (a, b) и в формуле (11.12) предполагается выполненным условие $m \leqslant n + 1$. В обоих случаях произведения состоят из R-матриц (11.1), вычисленных в определённых точках:

$$S^{(m)} = \frac{1}{m!} \prod_{1\leqslant a<b\leqslant m} R_{a\,b}(u_a - u_b), \tag{11.13}$$

где $u_a = u + a - 1$ и $u_a = u - a + 1$ при $a = 1, \ldots, m$ в ортогональном и симплектическом случаях соответственно.

Теперь рассмотрим случаи B, C и D отдельно. Для типов B и D введём формальный ряд $\mathbb{T}^{(m)}(u)$ с коэффициентами в янгиане $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_N)$ по формуле

$$\mathbb{T}^{(m)}(u) = \mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S^{(m)} T_1(u)\, T_2(u+1) \ldots T_m(u+m-1), \tag{11.14}$$

в которой след берётся по всем m копиям алгебры $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$ в тензорном произведении (11.10) при $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_N$. По предложению 11.1.1 все коэффициенты этого ряда лежат в алгебре $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_N)^{\mathfrak{h}}$.

Серия B_n. В определении (11.14) возьмём $N = 2n + 1$.

Теорема 11.1.2. *Образ ряда $\mathbb{T}^{(m)}(u)$ при гомоморфизме* (11.6) *находится по формуле*

$$\mathbb{T}^{(m)}(u) \mapsto \sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_m\leqslant N} \lambda_{i_1}(u)\, \lambda_{i_2}(u+1) \ldots \lambda_{i_m}(u+m-1)$$

при условии, что $n+1$ встречается среди индексов суммирования $i_1, \ldots, i_m$ не более одного раза.

Доказательство. В силу соотношений (1.31) симметризатор $S^{(m)}$ обладает следующими свойствами:

$$S^{(m)}\, Q_{a\,b} = Q_{a\,b}\, S^{(m)} = 0 \qquad \text{и} \qquad S^{(m)}\, P_{a\,b} = P_{a\,b}\, S^{(m)} = S^{(m)}. \tag{11.15}$$

Подпространство *гармонических тензоров* в $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ линейно порождается такими тензорами v, что $Q_{a\,b}\, v = 0$ при всех $1 \leqslant a < b \leqslant m$. Из формулы (2.43) для оператора $S^{(m)}$ ясно, что он проектирует пространство $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ на подпространство симметрических гармонических тензоров, которое мы обозначим через $\mathcal{H}_m$. Как мы отметили в § 5.2, пространство $\mathcal{H}_m = S^{(m)}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$

имеет структуру неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$, изоморфного представлению старшего веса $L(m, 0, \ldots, 0)$. Из формулы (1.52) следует, что

$$\dim L(m, 0, \ldots, 0) = \frac{N + 2m - 2}{N + m - 2} \binom{N + m - 2}{m}. \tag{11.16}$$

Эта формула является также частным случаем формулы крюков (5.14).

Таким образом, след в выражении (11.14) можно вычислять по подпространству $\mathcal{H}_m$. Для этого введём в нём специальный базис. Отождествим образ симметризатора $H^{(m)}$ с пространством однородных полиномов степени m от переменных $z_1, \ldots, z_N$ с помощью изоморфизма (2.62), так что

$$z_{i_1} \ldots z_{i_m} = H^{(m)}(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}). \tag{11.17}$$

По предложению 2.3.1 пространство $\mathcal{H}_m$ можно отождествить с подпространством $\mathfrak{sl}_2$-особых векторов в $\mathcal{P}_N^m$ относительно действия (2.63). Элементы этого подпространства — однородные *гармонические полиномы* степени m. Они лежат в ядре *оператора Лапласа*

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial_{i'} + \frac{1}{2} \partial_{n+1}^2,$$

где ∂_i обозначает частную производную по z_i.

Базисные векторы в $\mathcal{H}_m$ будут параметризоваться N-наборами неотрицательных целых чисел $(k_1, \ldots, k_n, \delta, l_n, \ldots, l_1)$, в которых δ может принимать только два значения $\delta \in \{0, 1\}$, а сумма всех элементов набора равна m. Соответствующий гармонический полином задаётся формулой

$$\sum_{a_1, \ldots, a_n} \frac{(-2)^{a_1 + \cdots + a_n} (a_1 + \cdots + a_n)! \, z_{n+1}^{2a_1 + \cdots + 2a_n + \delta}}{a_1! \ldots a_n! \, (2a_1 + \cdots + 2a_n + \delta)!} \times \prod_{i=1}^{n} \frac{z_i^{k_i - a_i} \; z_{i'}^{l_i - a_i}}{(k_i - a_i)! \, (l_i - a_i)!}, \tag{11.18}$$

где суммирование производится по всем неотрицательным целым числам a_i, удовлетворяющим условиям $a_i \leqslant \min\{k_i, l_i\}$. Каждый полином содержит единственный моном (который мы будем называть *главным мономом*), в котором степень переменной z_{n+1} не превосходит 1. Простое вычисление показывает, что эти полиномы действительно гармонические и линейно независимые. Кроме того, число полиномов равно

$$\binom{N + m - 2}{m} + \binom{N + m - 3}{m - 1},$$

что совпадает с размерностью представления $\dim L(m, 0, \ldots, 0)$ в (11.16). Таким образом, полиномы (11.18) образуют базис пространства $\mathcal{H}_m$.

Точно так же, как в доказательстве формулы (10.14), из соотношений (11.3) и (11.13) вытекает, что произведение, входящее в (11.14), можно записать в виде

$$S^{(m)} T_1(u) \ldots T_m(u + m - 1) = T_m(u + m - 1) \ldots T_1(u) \, S^{(m)}. \tag{11.19}$$

Это соотношение показывает, что произведения в обеих частях можно рассматривать как такой оператор в пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ с коэффициентами в алгебре $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_N)[[u^{-1}]]$, что подпространство $\mathcal{H}_m$ остаётся инвариантным относительно этого оператора. Зафиксируем базисный вектор $v \in \mathcal{H}_m$ вида (11.18). Обозначим оператор в правой части (11.19) через A и посмотрим на коэффициент при v в разложении вектора Av как линейной комбинации базисных векторов. Применим отождествление (11.17), чтобы записать вектор v в виде линейной комбинации тензоров $e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_m}$. Имеем $S^{(m)}v = v$, в то время как матричные элементы остальных множителей находятся из разложения

$$T_m(u+m-1)\ldots T_1(u)(e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_m})$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_m} t_{i_m j_m}(u+m-1)\ldots t_{i_1 j_1}(u)(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}).$$

Коэффициент при v в разложении вектора Av однозначно определяется коэффициентом при тензоре $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}$, $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_m$, который соответствует главному моному в v при изоморфизме (11.17):

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m} = \underbrace{e_1 \otimes \ldots \otimes e_1}_{k_1} \otimes \underbrace{e_2 \otimes \ldots \otimes e_2}_{k_2} \otimes \ldots \otimes \underbrace{e_{1'} \otimes \ldots \otimes e_{1'}}_{l_1}. \tag{11.20}$$

Из формулы (11.18) следует, что если тензор $e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_m}$ соответствует не главному моному, входящему в разложение вектора v, то матричный элемент $t_{i_m j_m}(u+m-1)\ldots t_{i_1 j_1}(u)$ аннулируется при гомоморфизме (11.6). В самом деле, кратность индекса 1 в мультимножестве $\{j_1, \ldots, j_m\}$ равна $k_1 - a_1$ при неотрицательном a_1, в то время как коэффициенты ряда $t_{1 j_c}(u+c-1)$ лежат в левом идеале I при $1 < j_c$. Поэтому матричный элемент не аннулируется при гомоморфизме (11.6), только если $a_1 = 0$. Аналогично кратность индекса 2 в мультимножестве $\{j_1, \ldots, j_m\}$ должна быть равна k_2 и т. д., а это означает, что все параметры $a_1, \ldots, a_n$ должны быть равны нулю.

Таким образом, ненулевой вклад в образ диагонального матричного элемента оператора A, отвечающего вектору v, при гомоморфизме (11.6) возникает только из произведения $t_{i_m i_m}(u+m-1)\ldots t_{i_1 i_1}(u)$. Взяв сумму по всем базисным векторам (11.18), приходим к требуемой формуле для образа элемента (11.14). □

Замечание 11.1.3. Как и в случае янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$, мы принимаем образ Хариш-Чандры, вычисленный в теореме 11.1.2, за *определение* янгианного характера представления алгебры $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_{2n+1})$ в пространстве $L(m, 0, \ldots, 0)$, которое продолжает действие алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n+1}$. Существование такого продолжения объясняется тем фактом, что проекция $S^{(m)}$ есть произведение значений R-матриц (11.13). Это представление янгиана — частный случай *модуля Кириллова–Решетихина*. При подходящем отождествлении параметров характер в теореме 11.1.2 совпадает с *q-характером*; см. обзоры [**99**, Sec. 7] и [**122**, Sec. 2]. В частности, соотношения (11.9) выполняются для q-характеров, если ряды $\lambda_i(u)$ соотнести переменным, отвечающим «одной клетке». Отметим также, что все коэффициенты рядов $\mathbb{T}^{(m)}(u)$, определённых в (11.14), попарно коммутируют, поскольку их можно рассматривать как *трансфер-матрицы* [**98**]; ср. замечание 10.1.5(ii). Прямое доказательство свойства коммутативности дано в работе [**110**]. $\square$

Серия D_n. Рассмотрим ряды $\mathbb{T}^{(m)}(u)$, заданные формулой (11.14), где параметр N теперь равен $2n$.

Теорема 11.1.4. *Образ ряда $\mathbb{T}^{(m)}(u)$ при гомоморфизме (11.6) находится по формуле*

$$\mathbb{T}^{(m)}(u) \mapsto \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m \leqslant N} \lambda_{i_1}(u)\,\lambda_{i_2}(u+1)\dots\lambda_{i_m}(u+m-1)$$

при условии, что n и n' не встречаются одновременно среди индексов суммирования $i_1, \dots, i_m$.

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 11.1.2, мы будем опираться на свойства (11.15) симметризатора $S^{(m)}$. Следуя этому доказательству, отождествим образ $S^{(m)}(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ с пространством $\mathcal{H}_m$ однородных *гармонических полиномов* степени m от переменных $z_1, \dots, z_N$ по правилу (11.17). Теперь гармонические полиномы аннулируются *оператором Лапласа* вида

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i\,\partial_{i'}.$$

Пространство $\mathcal{H}_m$ — это неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$, изоморфное представлению старшего веса $L(m, 0, \dots, 0)$. Его размерность находится по формуле (11.16) при $N = 2n$. Базисные векторы в $\mathcal{H}_m$ будут параметризоваться N-наборами $(k_1, \dots, k_n, l_n, \dots, l_1)$, где все k_i и l_i — это неотрицательные целые числа, сумма которых равна m, и хотя бы одно из чисел k_n или l_n равно нулю. Такому набору сопоставим гармонический полином по формуле

(11.21)
$$\sum_{a_1,\dots,a_{n-1}} \frac{(-1)^{a_1+\dots+a_{n-1}}(a_1+\dots+a_{n-1})!\, z_n^{a_1+\dots+a_{n-1}+k_n}\; z_{n'}^{a_1+\dots+a_{n-1}+l_n}}{a_1!\dots a_{n-1}!\,(a_1+\dots+a_{n-1}+k_n)!\,(a_1+\dots+a_{n-1}+l_n)!} \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{z_i^{k_i-a_i}\; z_{i'}^{l_i-a_i}}{(k_i-a_i)!\,(l_i-a_i)!},$$

где суммирование производится по целым числам $a_1, \dots, a_{n-1}$, удовлетворяющим неравенствам $0 \leqslant a_i \leqslant \min\{k_i, l_i\}$. *Главный моном* полинома соответствует значениям $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$. Нетрудно проверить, что эти полиномы действительно гармонические и линейно независимые. Число этих полиномов равно

$$2\binom{N+m-2}{m} - \binom{N+m-3}{m},$$

что совпадает с размерностью $\dim L(m, 0, \dots, 0)$ в формуле (11.16). Следовательно, полиномы (11.21) образуют базис пространства $\mathcal{H}_m$.

Рассуждение завершается, как в доказательстве теоремы 11.1.2; мы рассматриваем диагональные матричные элементы оператора A в правой части соотношения (11.19), отвечающие базисным векторам v вида (11.21). Эти матричные элементы полностью определяются коэффициентами при тензорах $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_m}$ при $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_m$, соответствующих главным мономам, входящим в базисный вектор v, при изоморфизме (11.17). Такие тензоры задаются той же формулой (11.20) при $N = 2n$ при условии, что хотя бы одно из чисел k_n или l_n равно нулю. Ненулевой вклад в образ диагонального матричного элемента оператора A, отвечающего данному базисному вектору v, относительно гомоморфизма (11.6), даёт только произведение $t_{i_m i_m}(u+m-1)\ldots t_{i_1 i_1}(u)$ при условии, что индексы $i_1, \ldots, i_m$ соответствуют главному моному. □

Как и для серии B_n, коэффициенты рядов $\mathbb{T}^{(m)}(u)$ лежат в коммутативной подалгебре янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{o}_{2n})$; ср. замечание 11.1.3.

Серия C_n. Пусть теперь $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_N$ при $N = 2n$. Симметризатор $S^{(m)}$ задаётся формулой (11.12) при $m \leqslant n + 1$. Введём формальный ряд

$$\mathbb{T}^{(m)}(u) = \mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S^{(m)} T_1(u)\, T_2(u-1)\ldots T_m(u-m+1), \tag{11.22}$$

где след берётся по всем m копиям алгебры $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^{2n}$ в (11.10). В силу предложения 11.1.1 все коэффициенты ряда $\mathbb{T}^{(m)}(u)$ принадлежат алгебре $\mathrm{Y}(\mathfrak{sp}_{2n})^{\mathfrak{h}}$.

Теорема 11.1.5. *Образ ряда $\mathbb{T}^{(m)}(u)$ при $m \leqslant n$ относительно гомоморфизма* (11.6) *находится по формуле*

$$\mathbb{T}^{(m)}(u) \mapsto \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant 2n} \lambda_{i_1}(u)\,\lambda_{i_2}(u-1)\ldots\lambda_{i_m}(u-m+1) \tag{11.23}$$

при условии, что если числа i и i' содержатся среди индексов суммирования как $i = i_r$ и $i' = i_s$ при $1 \leqslant r < s \leqslant m$, то $s - r \leqslant n - i$.

Доказательство. Из свойств (1.31) и формул (1.73) для действия алгебры Брауэра вытекают соотношения

$$S^{(m)}\, Q_{a\,b} = Q_{a\,b}\, S^{(m)} = 0 \qquad \text{и} \qquad S^{(m)}\, P_{a\,b} = P_{a\,b}\, S^{(m)} = -S^{(m)}. \tag{11.24}$$

Как и в ортогональном случае, подпространство *гармонических тензоров* в $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$ линейно порождается тензорами v со свойством $Q_{a\,b}\, v = 0$ для всех $1 \leqslant a < b \leqslant m$. Из формулы (2.52) для оператора $S^{(m)}$ видно, что он проектирует пространство $(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes m}$ на подпространство кососимметрических гармонических тензоров, которое мы обозначим через $\mathcal{H}_m$. Векторное пространство $\mathcal{H}_m = S^{(m)}(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes m}$ — это неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$, изоморфное представлению старшего веса $L(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (в старшем весе m копий числа 1); см. §5.2. Из формулы (1.52) и диаграммы (1.77) находим, что

$$\dim L(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) = \frac{2n-2m+2}{2n-m+2}\binom{2n+1}{m}, \tag{11.25}$$

что также следует из формулы (5.15) как частный случай.

Таким образом, след в формуле (11.22) можно вычислять по подпространству $\mathcal{H}_m$. Введём специальный базис в этом подпространстве, отождествляя образ антисимметризатора $H^{(m)}$ с пространством однородных полиномов степени m от антикоммутирующих переменных $\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}$ с помощью изоморфизма (2.68), так что

$$\zeta_{i_1} \wedge \dots \wedge \zeta_{i_m} = H^{(m)}(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}).$$

При этом пространство $\mathcal{H}_m$ отождествляется с подпространством однородных *гармонических полиномов* степени m. Они лежат в ядре *косого оператора Лапласа*

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i \wedge \partial_{i'}, \tag{11.26}$$

где ∂_i обозначает (левую) частную производную по ζ_i.

Базисные векторы пространства $\mathcal{H}_m$ будут параметризоваться подмножествами $\{i_1, \dots, i_m\}$ множества $\{1, \dots, 2n\}$, удовлетворяющими условию, сформулированному в теореме. Мы предполагаем, что элементы $i_1, \dots, i_m$ записаны в возрастающем порядке. Назовём такие подмножества *допустимыми* и распространим это определение на все значения m, $1 \leqslant m \leqslant n+1$.

Лемма 11.1.6. *Для всех $m \leqslant n+1$ число допустимых подмножеств $\{i_1, \dots, i_m\}$ множества $\{1, \dots, 2n\}$ равно*

$$\binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-2}.$$

В частности, это число равно нулю при $m = n+1$, и оно совпадает с размерностью $\dim L(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ в формуле (11.25) при $m \leqslant n$.

Доказательство. Мы построим биекцию π между множеством недопустимых (т. е. не являющихся допустимыми) подмножеств $\{i_1, \dots, i_m\}$ и множеством всех подмножеств $\{j_1, \dots, j_{m-2}\}$ множества $\{1, \dots, 2n\}$, откуда будет следовать требуемая формула. Наша биекция будет использовать некоторые мультимножества, поэтому будет удобно ввести соответствующие обозначения. Пусть $\{i_1, \dots, i_m\}$ — это такое мультимножество с элементами в множестве $\{1, \dots, 2n\}$, что $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_m$. Если (q, q') — это такая пара индексов, что $q = i_r$ и $q' = i_s$ для некоторых $1 \leqslant r < s \leqslant m$ (как и раньше, $q' = 2n-q+1$), то мы скажем, что *расстояние* между этими элементами q и q' в мультимножестве равно $s - r - 1$.

По определению недопустимое подмножество $\{i_1, \dots, i_m\}$ содержит такую пару индексов (q, q') (которую мы назовём *разбивающей парой*), что расстояние между q и q' не меньше чем $n - q$. *Максимальная разбивающая пара* недопустимого подмножества — это разбивающая пара (p, p') с максимальным возможным значением p. При этом $1 \leqslant p \leqslant n$. Заметим, что если (p, p') — это максимальная разбивающая пара недопустимого подмножества, то расстояние между p и p' равно $n - p$. В самом деле, если предположить, что расстояние превышает $n - p$, то тогда в подмножестве найдётся такая пара

(t,t'), что $p<t\leqslant n$. Возьмём такую пару с минимальным возможным значением t. Тогда расстояние между t и t' будет больше чем

$$n-p-(t-p-1)-2=n-t-1,$$

а это означает, что (t,t') — это ещё одна разбивающая пара, что противоречит максимальности пары (p,p').

Мы построим теперь желаемую биекцию как композицию некоторых преобразований π_q мультимножеств. Преобразования π_q параметризуются элементами $q\in\{1,\dots,n-1\}$ и определяются на мультимножествах $\{i_1,\dots,i_m\}$ следующим образом. Рассмотрим все такие пары (q,q'), входящие в данное мультимножество $\{i_1,\dots,i_m\}$, что расстояние между q и q' равно $n-q$. Заметим, что такие пары не пересекаются. Преобразование π_q заменяет каждую из этих пар на пару $\big(q+1,(q+1)'\big)$, так что $q\mapsto q+1$ и $q'\mapsto(q+1)'$. Если в мультимножестве нет пар (q,q') с требуемым условием на расстояние, то π_q — это тождественное преобразование.

Для данного недопустимого подмножества $\{i_1,\dots,i_m\}$ пусть (p,p') — это максимальная разбивающая пара, так что расстояние между p и p' равно $n-p$. Нетрудно убедиться, что применение композиции преобразований π_q приводит к мультимножеству следующего вида:

$$\pi_{n-1}\circ\dots\circ\pi_{p+1}\circ\pi_p:\{i_1,\dots,i_m\}\mapsto\{j_1,\dots,j_a,n,n',j_{a+1},\dots,j_{m-2}\},$$

где

$$j_1<\dots<j_a\leqslant n<n'\leqslant j_{a+1}<\dots<j_{m-2} \tag{11.27}$$

для некоторого $a\in\{0,\dots,m-2\}$. Действительно, по определению каждое мультимножество, полученное после применения преобразования π_q на каждом шаге, имеет такое свойство, что только элементы $q+1$ и $(q+1)'$ могут входить в него с кратностями, превосходящими 1. При этом разность между этими двумя кратностями может быть равна только $-1,0$ или 1. Кроме того, на последнем шаге кратности элементов n и n' могут быть равны только 1 или 2.

Желаемое отображение π теперь определяется по правилу

$$\pi:\{i_1,\dots,i_m\}\mapsto\{j_1,\dots,j_a,j_{a+1},\dots,j_{m-2}\}.$$

Чтобы проверить, что π — биекция, мы построим обратное отображение. Начиная с произвольного подмножества $\{j_1,\dots,j_{m-2}\}$ множества $\{1,\dots,2n\}$, присоединим к нему элементы n и n', чтобы получить m-мультимножество J, удовлетворяющее условиям (11.27). Зададим отображение τ, полагая

$$\tau\big(\{j_1,\dots,j_{m-2}\}\big)=\big(\tau_{p+1}\circ\tau_{p+2}\circ\dots\circ\tau_n\big)(J),$$

где преобразования τ_q и параметр p определяются следующим образом. Возьмём все такие пары (q,q'), входящие в данное мультимножество $\{i_1,\dots,i_m\}$, что расстояние между q и q' равно $n-q+1$. Тогда преобразование τ_q заменяет каждую их этих пар на пару $\big(q-1,(q-1)'\big)$. Если в мультимножестве нет пар (q, q') с требуемым условием на расстояние, то τ_q — это тождественное преобразование. Параметр p, $1 \leqslant p \leqslant n$, — это максимальное значение $q \in \{1, \ldots, n\}$, для которого выполнено условие

$$\big(\tau_q \circ \tau_{q+1} \circ \cdots \circ \tau_n\big)(J) = \big(\tau_{q+1} \circ \tau_{q+2} \circ \cdots \circ \tau_n\big)(J),$$

где правая часть считается равной J, если $q = n$. Нетрудно проверить, что $\tau\big(\{j_1, \ldots, j_{m-2}\}\big)$ — это недопустимое подмножество множества $\{1, \ldots, 2n\}$ и что композиции $\pi \circ \tau$ и $\tau \circ \pi$ — это тождественные отображения. $\square$

Пример 11.1.7. Для иллюстрации биекции, использованной в доказательстве леммы 11.1.6, возьмём $n = m = 7$ и рассмотрим недопустимое подмножество $\{3, 4, 5, 6', 4', 3', 1'\}$. Его единственная разбивающая пара — это $(3, 3')$, и, следовательно, она максимальная. Преобразования действуют по правилу

$$\begin{aligned}
\pi_3 &: \{3, 4, 5, 6', 4', 3', 1'\} \mapsto \{4, 4, 5, 6', 4', 4', 1'\},\\
\pi_4 &: \{4, 4, 5, 6', 4', 4', 1'\} \mapsto \{5, 5, 5, 6', 5', 5', 1'\},\\
\pi_5 &: \{5, 5, 5, 6', 5', 5', 1'\} \mapsto \{5, 6, 6, 6', 6', 6', 1'\},\\
\pi_6 &: \{5, 6, 6, 6', 6', 6', 1'\} \mapsto \{5, 7, 7, 7', 7', 6', 1'\}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\pi : \{3, 4, 5, 6', 4', 3', 1'\} \mapsto \{5, 7, 7', 6', 1'\}.$$

Ясно, что преобразования $\tau_7, \tau_6, \tau_5, \tau_4$ соответственно обратны преобразованиям $\pi_6, \pi_5, \pi_4, \pi_3$. При этом τ_3 — это тождественное преобразование множества $\{3, 4, 5, 6', 4', 3', 1'\}$. $\square$

Чтобы построить базис в пространстве $\mathcal{H}_m$, рассмотрим мономы вида

$$\zeta_{a_1} \wedge \zeta_{a'_1} \wedge \cdots \wedge \zeta_{a_k} \wedge \zeta_{a'_k} \wedge \zeta_{b_1} \wedge \cdots \wedge \zeta_{b_l} \tag{11.28}$$

при $1 \leqslant a_1 < \cdots < a_k \leqslant n$ и $1 \leqslant b_1 < \cdots < b_l \leqslant 2n$, связанные с подмножествами $\{a_1, a'_1, \ldots, a_k, a'_k, b_1, \ldots, b_l\}$ множества $\{1, \ldots, 2n\}$, содержащими $m = 2k+l$ элементов, где $b_i \neq b'_j$ при всех i и j. Когда элементы b_i зафиксированы, мы будем идентифицировать моном (11.28) с помощью соответствующего k-набора $(a_1, \ldots, a_k)$. Упорядочим такие k-наборы (и мономы) лексикографически.

Пусть теперь $\{a_1, a'_1, \ldots, a_k, a'_k, b_1, \ldots, b_l\}$ — это допустимое подмножество. Соответствующий моном (11.28) тоже назовём допустимым. Возьмём элемент $i \in \{1, \ldots, k\}$. Пусть s — это число элементов b_j в подмножестве, удовлетворяющих условию $a_i < b_j < a'_i$. По условию допустимости, применённому к a_i и a'_i, справедливо неравенство $2(k-i)+s < n-a_i$. Поэтому существуют такие элементы $c_i, \ldots, c_k$, что $a_i < c_i < \cdots < c_k \leqslant n$, и ни один из элементов c_j или c'_j при $j = i, \ldots, k$ не лежит в подмножестве $\{a_1, a'_1, \ldots, a_k, a'_k, b_1, \ldots, b_l\}$. Введём дополнительное условие максимальности, чтобы такие элементы можно было выбрать единственным способом. А именно, выберем сначала максимально возможный элемент c_k при $i = k$, затем максимально возможный элемент c_{k-1} при $i = k-1$ и т. д. Тем самым мы получим семейство элементов $c_1 < \cdots < c_k$, которое однозначно задаётся допустимым подмножеством. В частности, $c_i > a_i$ при всех i.

Из условий на параметры b_i следует, что моном $\zeta_{b_1} \wedge \dots \wedge \zeta_{b_l}$ аннулируется косым оператором Лапласа (11.26). Обозначим этот моном через y и положим $x_a = \zeta_a \wedge \zeta_{a'}$ при $a = 1, \dots, n$. Рассмотрим вектор

$$\sum_{p=0}^{k} (-1)^p \sum_{d_1 < \dots < d_p} x_{a_1} \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{a_{d_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{a_{d_p}} \wedge \dots \wedge x_{a_k} \wedge x_{c_{d_1}} \wedge \dots \wedge x_{c_{d_p}} \wedge y,$$

где шляпки указывают на множители, которые следует пропустить. Легко видеть, что он лежит в ядре оператора (11.26), а значит, он принадлежит подпространству $\mathcal{H}_m$. Кроме того, такие векторы, занумерованные всеми допустимыми подмножествами, образуют базис пространства $\mathcal{H}_m$. В самом деле, эти векторы линейно независимы, потому что линейная комбинация, задающая каждый вектор, однозначно определяется допустимым мономом $x_{a_1} \wedge \dots \wedge x_{a_k} \wedge y$, который предшествует всем остальным мономам относительно лексикографического упорядочения. Число допустимых мономов совпадает с размерностью пространства $\mathcal{H}_m$ по лемме 11.1.6.

Заметим, что кроме минимального допустимого монома $x_{a_1} \wedge \dots \wedge x_{a_k} \wedge y$ линейная комбинация, задающая базисный вектор, может содержать другие допустимые мономы. Однако, применяя индукцию по лексикографическому упорядочению и рассматривая подходящие линейные комбинации базисных векторов, мы можем получить другой базис пространства $\mathcal{H}_m$ с тем свойством, что он по-прежнему нумеруется допустимыми подмножествами, причём каждый базисный вектор — это снова линейная комбинация таких же мономов, как выше, но только ровно один из этих мономов допустимый.

В силу соотношений (11.3) и (11.13) мы можем записать произведение в (11.22) в виде

$$S^{(m)} T_1(u) \dots T_m(u - m + 1) = T_m(u - m + 1) \dots T_1(u) \, S^{(m)} \tag{11.29}$$

и завершить рассуждение точно так же, как в доказательстве теоремы 11.1.2. Действительно, из формул (11.24) и (11.29) видно, что произведение в каждой части можно рассматривать как оператор в пространстве $(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes m}$ с коэффициентами в алгебре $\mathrm{Y}(\mathfrak{sp}_{2n})[[u^{-1}]]$, относительно которого подпространство $\mathcal{H}_m$ инвариантно. Обозначим оператор в правой части соотношения (11.29) через A, и пусть v — это базисный вектор пространства $\mathcal{H}_m$, отвечающий допустимому подмножеству $\{i_1, \dots, i_m\}$ при $i_1 < \dots < i_m$. Из свойств базисных векторов вытекает, что ненулевой вклад в образ диагонального матричного элемента оператора A на векторе v при гомоморфизме (11.6) возникает только из произведения $t_{i_m i_m}(u - m + 1) \dots t_{i_1 i_1}(u)$. □

Замечание 11.1.8. Как и в ортогональном случае (см. замечание 11.1.3), образ Хариш-Чандры, вычисленный в теореме 11.1.5, — это *по определению* янгианный характер представления алгебры $\mathrm{Y}(\mathfrak{sp}_{2n})$ на m-м фундаментальном модуле $L(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (с m копиями 1) алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$. Этот характер совпадает с *q-характером*, записанным в терминах других переменных; см. **[50]** и **[98]**. Заметим также, что коэффициенты всех рядов $\mathbb{T}^{(m)}(u)$ при

$m \leqslant n$, определённых в (11.22), попарно коммутируют в алгебре $\mathrm{Y}(\mathfrak{sp}_{2n})$; см. [**98**] и [**110**]. □

Нам понадобится эквивалентная формула для выражения (11.23). Введём параметры $\varkappa_i(u)$ при $i = 1, \dots, 2n+2$ по правилам

$$\varkappa_i(u) = \lambda_i(u), \qquad \varkappa_{2n-i+3}(u) = \lambda_{2n-i+1}(u) \qquad \text{при} \quad i = 1, \dots, n,$$

и

$$\varkappa_{n+2}(u) = -\varkappa_{n+1}(u), \tag{11.30}$$

где $\varkappa_{n+1}(u)$ — это формальный ряд по u^{-1}, однозначно определённый условиями, что его свободный член равен 1 и выполнено соотношение

$$\varkappa_{n+1}(u)\,\varkappa_{n+1}(u-1) = \lambda_n(u)\,\lambda_{n'}(u-1). \tag{11.31}$$

Следствие 11.1.9. *Образ ряда* (11.22) *при* $m \leqslant n$ *относительно гомоморфизма* (11.6) *можно записать в виде*

$$\mathbb{T}^{(m)}(u) \mapsto \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant 2n+2} \varkappa_{i_1}(u)\,\varkappa_{i_2}(u-1) \dots \varkappa_{i_m}(u-m+1). \tag{11.32}$$

Кроме того, если $m = n+1$, *то сумма в* (11.32) *равна нулю.*

Доказательство. Заметим, что $\mathbb{T}^{(n+1)}(u) = 0$, так как $S^{(n+1)} = 0$ в силу предложения 2.3.2. Поэтому теорема 11.1.5 справедлива и в случае $m = n+1$, поскольку по лемме 11.1.6 множество допустимых подмножеств пусто, так что сумма в (11.23) равна нулю. Мы покажем, что сумма в (11.32) совпадает с суммой в (11.23) при всех $m \leqslant n+1$.

Заметим сначала, что слагаемые в (11.32), соответствующие множествам индексов суммирования $\{i_1, \dots, i_m\}$, которые содержат ровно один из элементов $n+1$ или $n+2$, попарно сокращаются из-за условия (11.30). Если ни одно из чисел $n+1$ и $n+2$ не входит в индексы суммирования, то соответствующую частичную сумму можно записать как

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant 2n} \lambda_{i_1}(u)\,\lambda_{i_2}(u-1) \dots \lambda_{i_m}(u-m+1). \tag{11.33}$$

Оставшуюся частичную сумму, соответствующую множествам индексов суммирования, содержащим оба числа $n+1$ и $n+2$, можно записать в терминах рядов $\lambda_i(u)$, принимая во внимание соотношения (11.30) и (11.31). Таким образом, сумма в (11.32) получается вычитанием выражения

$$\sum_{a=0}^{m-2} \sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_a \leqslant n < n' \leqslant j_{a+1} < \dots < j_{m-2} \leqslant 2n} \lambda_{j_1}(u) \dots \lambda_{j_a}(u-a+1) \\ \times \lambda_n(u-a)\,\lambda_{n'}(u-a-1)\,\lambda_{j_{a+1}}(u-a-2) \dots \lambda_{j_{m-2}}(u-m+1) \tag{11.34}$$

из частичной суммы (11.33). Чтобы завершить доказательство, будет достаточно проверить, что выражение (11.34) совпадает с суммой

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant 2n} \lambda_{i_1}(u)\,\lambda_{i_2}(u-1) \dots \lambda_{i_m}(u-m+1), \tag{11.35}$$

взятой по всем недопустимым подмножествам $\{i_1, \ldots, i_m\}$. Однако в доказательстве леммы 11.1.6 была построена биекция между множествами индексов суммирования в (11.34) и (11.35). Более того, эта биекция «сохраняет вес» в том смысле, что соответствующие слагаемые в суммах совпадают. В самом деле, это вытекает из соотношений (11.9), которые в симплектическом случае принимают вид

$$\lambda_q(v)\,\lambda_{q'}(v-n+q-1) = \lambda_{q+1}(v)\,\lambda_{(q+1)'}(v-n+q-1) \tag{11.36}$$

при $q = 1, \ldots, n-1$. Это означает, что произведения в (11.35) сохраняются преобразованиями π_q, использованными при построении биекции π, поскольку соотношения (11.36) соответствуют случаю, когда расстояние между элементами q и q' равно $n-q$. □

Замечание 11.1.10. Так как соотношение (11.4) не использовалось в доказательствах, образы Хариш-Чандры из теорем 11.1.2, 11.1.4 и 11.1.5 будут иметь точно такой же вид, если янгиан $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$ заменить на расширенный янгиан $\mathrm{X}(\mathfrak{g}_N)$. □

§ 11.2. Двойственный янгиан для $\mathfrak{g}_N$

Определим *расширенный двойственный янгиан* $\mathrm{X}^+(\mathfrak{g}_N)$ как ассоциативную алгебру с образующими $t_{ij}^{(-r)}$ при $1 \leqslant i, j \leqslant N$ и $r = 1, 2, \ldots$, с определяющими соотношениями, записанными в матричной форме следующим образом. Соберём образующие в формальный степенной ряд

$$t_{ij}^+(u) = \delta_{ij} - \sum_{r=1}^{\infty} t_{ij}^{(-r)}\, u^{r-1} \in \mathrm{X}^+(\mathfrak{g}_N)[[u]]$$

и введём матрицу

$$T^+(u) = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes t_{ij}^+(u) \in \operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \mathrm{X}^+(\mathfrak{g}_N)[[u]].$$

Определяющие соотношения имеют вид

$$R_{12}(u-v)\,T_1^+(u)\,T_2^+(v) = T_2^+(v)\,T_1^+(u)\,R_{12}(u-v), \tag{11.37}$$

где мы используем R-матрицу (11.1). В соответствии с (1.61) выражение $T_a^+(u)$ при $a = 1, \ldots, m$ обозначает соответствующий элемент алгебры

$$\underbrace{\operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N}_{m} \otimes \mathrm{X}^+(\mathfrak{g}_N).$$

По аналогии с (10.26) зададим *убывающую* фильтрацию на алгебре $\mathrm{X}^+(\mathfrak{g}_N)$, полагая степень образующего $t_{ij}^{(-r)}$ при $r \geqslant 1$ равной r. Обозначим через $\widehat{\mathrm{X}}^+(\mathfrak{g}_N)$ пополнение алгебры $\mathrm{X}^+(\mathfrak{g}_N)$ по этой фильтрации.

Двойственный янгиан $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)$ определяется как фактор алгебры $\widehat{\mathrm{X}}^+(\mathfrak{g}_N)$ по дополнительным соотношениям

$$T^{+\,\prime}(u+\kappa)\,T^+(u) = 1,$$

где штрих обозначает матричное транспонирование, определённое в (2.24).

Теперь рассмотрим *возрастающую* фильтрацию на алгебре $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)$, заданную по правилу $\deg' t_{ij}^{(-r)} = -r$ для всех $r \geqslant 1$. Версию теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для алгебры $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)$ можно доказать таким же способом, как для янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$ (см. работу **[7]**), и из неё следует изоморфизм соответствующих градуированных алгебр

$$\mathrm{gr}' \,\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N) \cong \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}_N[t^{-1}]\big).$$

Образ $\bar{t}_{ij}^{(-r)}$ образующего $t_{ij}^{(-r)}$ в $(-r)$-й компоненте градуированной алгебры $\mathrm{gr}' \,\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)$ соответствует элементу $F_{ij}[-r]$ алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}_N[t^{-1}]\big)$.

Будем рассматривать алгебру $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)$ как модуль над подалгеброй Картана $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}_N$, в котором каждый базисный элемент $F_{ii} \in \mathfrak{h}$ при $i = 1, \ldots, n$ действует как дифференцирование. При этом

$$F_{ii} \cdot t_{kl}^+(u) = \delta_{ki}\, t_{il}^+(u) - \delta_{il}\, t_{ki}^+(u) - \delta_{ki'}\, t_{i'l}^+(u) + \delta_{il'}\, t_{ki'}^+(u).$$

Обозначим через $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{h}}$ подалгебру $\mathfrak{h}$-инвариантов относительно этого действия. Рассмотрим левый идеал J алгебры $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)$, порождённый всеми элементами $t_{ij}^{(-r)}$, удовлетворяющими условиям $N \geqslant i > j \geqslant 1$ и $r \geqslant 1$. Фактор алгебры $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{h}}$ по двустороннему идеалу $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{h}} \cap J$ изоморфен коммутативной алгебре, свободно порождённой образами элементов $t_{ii}^{(-r)}$ при $i = 1, \ldots, n$ и $r \geqslant 1$ в факторалгебре. Примем обозначение $\lambda_i^{(-r)}$ для образа элемента $t_{ii}^{(-r)}$ и распространим его на все значения $i = 1, \ldots, N$. Аналог гомоморфизма Хариш-Чандры (11.6) принимает вид

$$\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)^{\mathfrak{h}} \to \widehat{\mathbb{C}}[\lambda_i^{(-r)} \,|\, i = 1, \ldots, n,\ r \geqslant 1], \tag{11.38}$$

где $\widehat{\mathbb{C}}[\lambda_i^{(-r)}]$ — это пополнение алгебры полиномов относительно градуировки, заданной условием, что степень элемента $\lambda_i^{(-r)}$ равна r. Соберём элементы $\lambda_i^{(-r)}$ в формальные ряды

$$\lambda_i^+(u) = 1 - \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_i^{(-r)} u^{r-1}, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

которые можно понимать как образы рядов $t_{ii}^+(u)$ при гомоморфизме (11.38). Чтобы сформулировать аналоги результатов из § 11.1 для двойственного янгиана, введём тензорное произведение алгебр

$$\underbrace{\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N}_{m} \otimes \widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N). \tag{11.39}$$

Эти аналоги проверяются единообразным рассуждением, которое мы приведём в конце параграфа.

Серия B_n. Рассмотрим элемент $S^{(m)}$, заданный формулой (11.11), и введём формальный ряд $\mathbb{T}^{+\,(m)}(u)$ с коэффициентами в двойственном янгиане $\widehat{\mathrm{Y}}^{+}(\mathfrak{o}_N)$ при $N = 2n+1$ по формуле

$$\mathbb{T}^{+\,(m)}(u) = \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} T_1^{+}(u)\, T_2^{+}(u+1) \dots T_m^{+}(u+m-1), \tag{11.40}$$

в которой след берётся по всем m копиям алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$ в (11.39).

Теорема 11.2.1. *Образ ряда $\mathbb{T}^{+\,(m)}(u)$ при гомоморфизме* (11.38) *находится по формуле*

$$\mathbb{T}^{+\,(m)}(u) \mapsto \sum_{N \geqslant i_1 \geqslant \dots \geqslant i_m \geqslant 1} \lambda_{i_1}^{+}(u)\, \lambda_{i_2}^{+}(u+1) \dots \lambda_{i_m}^{+}(u+m-1)$$

при условии, что $n+1$ встречается среди индексов суммирования $i_1, \dots, i_m$ не более одного раза.

Серия D_n. Введём ряд $\mathbb{T}^{+\,(m)}(u)$ формулой (11.40) при $N = 2n$.

Теорема 11.2.2. *Образ ряда $\mathbb{T}^{+\,(m)}(u)$ при гомоморфизме* (11.38) *находится по формуле*

$$\mathbb{T}^{+\,(m)}(u) \mapsto \sum_{N \geqslant i_1 \geqslant \dots \geqslant i_m \geqslant 1} \lambda_{i_1}^{+}(u)\, \lambda_{i_2}^{+}(u+1) \dots \lambda_{i_m}^{+}(u+m-1)$$

при условии, что n и n' не встречаются одновременно среди индексов суммирования $i_1, \dots, i_m$.

Серия C_n. Положим

$$\mathbb{T}^{+\,(m)}(u) = \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} T_1^{+}(u)\, T_2^{+}(u-1) \dots T_m^{+}(u-m+1), \tag{11.41}$$

где след берётся по всем m копиям алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$ в (11.39) для $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_N$, а элемент $S^{(m)}$ определяется формулой (11.12) при $m \leqslant n$.

Теорема 11.2.3. *При $m \leqslant n$ образ ряда $\mathbb{T}^{+\,(m)}(u)$ относительно гомоморфизма* (11.38) *находится по формуле*

$$\mathbb{T}^{+\,(m)}(u) \mapsto \sum_{2n \geqslant i_1 > \dots > i_m \geqslant 1} \lambda_{i_1}^{+}(u)\, \lambda_{i_2}^{+}(u-1) \dots \lambda_{i_m}^{+}(u-m+1)$$

при условии, что если числа i и i' содержатся среди индексов суммирования как $i' = i_r$ и $i = i_s$ при $1 \leqslant r < s \leqslant m$, то $s - r \leqslant n - i$.

Чтобы сформулировать аналог следствия 11.1.9 для двойственного янгиана, мы хотели бы ввести параметры $\varkappa_i^{+}(u)$ при $i = 1, \dots, 2n+2$ соотношениями

$$\varkappa_i^{+}(u) = \lambda_i^{+}(u), \qquad \varkappa_{2n-i+3}^{+}(u) = \lambda_{2n-i+1}^{+}(u) \qquad \text{при} \quad i = 1, \dots, n$$

и условиями

$$\varkappa_{n+1}^{+}(u) + \varkappa_{n+2}^{+}(u) = 0 \quad \text{и} \quad \varkappa_{n+2}^{+}(u)\, \varkappa_{n+1}^{+}(u-1) = -\lambda_{n'}^{+}(u)\, \lambda_n^{+}(u-1). \tag{11.42}$$

Однако, в отличие от параметров $\varkappa_{n+1}(u)$ и $\varkappa_{n+2}(u)$, которые представляют собой корректно определённые степенные ряды по u^{-1}, нам приходится рассматривать $\varkappa_{n+1}^{+}(u)$ и $\varkappa_{n+2}^{+}(u)$ как формальные параметры со свойствами (11.42), считая их выполненными при всех заменах $u \mapsto u + a$ для $a \in \mathbb{C}$.

Следствие 11.2.4. *При $m \leqslant n$ образ ряда* (11.41) *относительно гомоморфизма* (11.38) *можно записать в виде*

$$\mathbb{T}^{+\,(m)}(u) \mapsto \sum_{2n+2 \geqslant i_1 > \dots > i_m \geqslant 1} \varkappa^+_{i_1}(u)\, \varkappa^+_{i_2}(u-1) \dots \varkappa^+_{i_m}(u-m+1). \tag{11.43}$$

Кроме того, сумма в (11.43) *равна нулю при $m = n+1$.* □

Заметим, что формальные параметры $\varkappa^+_{n+1}(u)$ и $\varkappa^+_{n+2}(u)$ можно исключить из формулы для образа в (11.43), как в доказательстве следствия 11.1.9. А именно, в силу соотношений (11.42) слагаемые, отвечающие двум множествам индексов суммирования, которые отличаются только одним индексом $i_k = n+2$ и $i_k = n+1$ при $k \in \{1, \dots, m\}$, попарно сокращаются, в то время как слагаемое, отвечающее множеству индексов, содержащему $i_k = n+2$ и $i_{k+1} = n+1$, выражается в терминах элементов $\lambda^+_i(u+a)$.

Теоремы 11.2.1, 11.2.2 и 11.2.3 выводятся из их соответствующих аналогов, сформулированных в §11.1. Отображение

$$\theta : T(u) \mapsto T^t(-u), \tag{11.44}$$

где $t : e_{ij} \mapsto e_{ji}$ — это стандартное транспонирование, задаёт автоморфизм расширенного янгиана $\mathrm{X}(\mathfrak{g}_N)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно применить транспонирование $t_1 t_2$ к обеим частям в (11.3) с использованием леммы 2.2.1 и свойств R-матрицы (11.1):

$$R^{t_1 t_2}(u) = R(u) \qquad \text{и} \qquad R(u)\, R(-u) = 1 - u^{-2}.$$

Применяя автоморфизм (11.44) и опираясь на результаты §11.1, мы можем получить образ ряда $\theta\big(\mathbb{T}^{(m)}(u)\big)$ относительно версии гомоморфизма Хариш-Чандры, в которой вместо I используется левый идеал расширенного янгиана, порождённый всеми элементами $t^{(r)}_{ij}$ при $N \geqslant i > j \geqslant 1$ и $r \geqslant 1$; см. замечание 11.1.10. Поскольку определяющие соотношения расширенного янгиана и двойственного расширенного янгиана имеют одну и ту же матричную форму, мы можем заключить, что в ортогональном случае образ ряда

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} T^{+\,t}_1(-u)\, T^{+\,t}_2(-u-1) \dots T^{+\,t}_m(-u-m+1) \tag{11.45}$$

относительно гомоморфизма (11.38) равен

$$\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m \leqslant N} \lambda^+_{i_1}(-u)\, \lambda^+_{i_2}(-u-1) \dots \lambda^+_{i_m}(-u-m+1)$$

с такими же дополнительными условиями на индексы суммирования, как в теоремах 11.1.2 и 11.1.4. Теперь применим транспонирование $t_1 t_2 \dots t_m$ к выражению под знаком следа в (11.45) и заметим, что оно не изменяет элемент $S^{(m)}$. Это свойство выполняется, поскольку применение этого транспонирования к правым частям формул (11.11) и (11.12) даёт то же самое произведение, записанное в обратном порядке. Так как множители — это значения

R-матрицы (11.1), новое произведение равно $S^{(m)}$ в силу уравнения Янга–Бакстера (10.6). Таким образом, выражение (11.45) равно

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}_{1,\dots,m} T_1^+(-u)\dots T_m^+(-u-m+1)\, S^{(m)} \\ &= \operatorname{tr}_{1,\dots,m} T_m^+(-u)\dots T_1^+(-u-m+1)\, S^{(m)} \\ &= \operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\, T_1^+(-u-m+1)\dots T_m^+(-u) = \mathbb{T}^{+\,(m)}(-u-m+1), \end{aligned}$$

где мы применили сопряжение оператором перестановки $P_{1\,m}\, P_{2\,m-1}\dots$ и соотношение (11.37). Отсюда следуют теоремы 11.2.1 и 11.2.2; достаточно заменить u на $-u-m+1$.

Теорема 11.2.3 и следствие 11.2.4 выводятся таким же рассуждением из теоремы 11.1.5 и следствия 11.1.9 с использованием формулы (11.12).

Замечание 11.2.5. Коэффициенты всех рядов $\mathbb{T}^{+\,(m)}(u)$ попарно коммутируют как элементы двойственного янгиана. Этот факт можно связать со структурой квантовой вертексной алгебры, соответствующей двойному янгиану **[37]**, и с тем, что коэффициенты всех рядов $\mathbb{T}^{(m)}(u)$ попарно коммутируют как элементы янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$; ср. замечание 10.4.2. □

§ 11.3. Скрининговые операторы

Мы покажем, что образы Хариш-Чандры рядов $\mathbb{T}^{(m)}(u)$ лежат в пересечении ядер скрининговых операторов, а значит, они совпадают с характерами представлений янгианов; ср. § 10.6.

Опуская переменную u в обозначении $\lambda_i(u+a)$, рассмотрим алгебру полиномов от переменных $\lambda_i(a)$ при $i=1,\dots,N$ и $a\in\mathbb{C}$ и обозначим через $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\mathfrak{g}_N)$ её фактор по соотношениям

$$\lambda_i(a+\kappa-i)\,\lambda_{i'}(a)=\lambda_{i+1}(a+\kappa-i)\,\lambda_{(i+1)'}(a),\qquad a\in\mathbb{C}, \tag{11.46}$$

при $i=0,1,\dots,n-1$, если $\mathfrak{g}_N=\mathfrak{o}_{2n}$ или $\mathfrak{sp}_{2n}$, и при $i=0,1,\dots,n$, если $\mathfrak{g}_N=\mathfrak{o}_{2n+1}$, где $\lambda_0(a)=\lambda_{0'}(a)=1$; ср. (11.9).

Для $i=1,\dots,n$ рассмотрим свободный левый $\mathcal{L}$-модуль $\widetilde{\mathcal{L}}_i$ с образующими $\sigma_i(a)$, где a пробегает множество $\mathbb{C}$, и обозначим через $\mathcal{L}_i$ его фактор по соотношениям

$$\lambda_i(a)\,\sigma_i(a)=\lambda_{i+1}(a)\,\sigma_i(a+1),\qquad i=1,\dots,n-1,\quad a\in\mathbb{C},$$

а также

$$\begin{aligned} \lambda_n(a)\,\sigma_n(a)&=\lambda_{n+1}(a)\,\sigma_n(a+1/2) &&\text{для}\quad \mathfrak{g}_N=\mathfrak{o}_{2n+1},\\ \lambda_n(a)\,\sigma_n(a)&=\lambda_{n+1}(a)\,\sigma_n(a+2) &&\text{для}\quad \mathfrak{g}_N=\mathfrak{sp}_{2n},\\ \lambda_{n-1}(a)\,\sigma_n(a)&=\lambda_{n+1}(a)\,\sigma_n(a+1) &&\text{для}\quad \mathfrak{g}_N=\mathfrak{o}_{2n}. \end{aligned} \tag{11.47}$$

Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ зададим линейный оператор $\widetilde{S}_i : \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}_i$, удовлетворяющий правилу Лейбница (10.46). Для $i = 1, \dots, n-1$ положим

$$\widetilde{S}_i : \lambda_j(a) \mapsto \begin{cases} \lambda_i(a)\,\sigma_i(a) & \text{при} \quad j = i, \\ -\lambda_{i+1}(a)\,\sigma_i(a+1) & \text{при} \quad j = i+1, \\ -\lambda_{i'}(a)\,\sigma_i(a+\kappa-i+1) & \text{при} \quad j = i', \\ \lambda_{(i+1)'}(a)\,\sigma_i(a+\kappa-i) & \text{при} \quad j = (i+1)', \\ 0 & \text{при} \quad j \neq i, i', i+1, (i+1)'. \end{cases}$$

Действие оператора $\widetilde{S}_n$ зависит от серии и задаётся следующими формулами.

Случай $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n+1}$. $\widetilde{S}_n : \lambda_j(a) \mapsto 0$, если $j < n$ или $j > n'$, и

$$\lambda_n(a) \mapsto \lambda_n(a)\,\big(\sigma_n(a) + \sigma_n(a-1/2)\big),$$

$$\lambda_{n+1}(a) \mapsto \lambda_{n+1}(a)\,\big(\sigma_n(a-1/2) - \sigma_n(a+1/2)\big),$$

$$\lambda_{n'}(a) \mapsto -\lambda_{n'}(a)\,\big(\sigma_n(a) + \sigma_n(a+1/2)\big).$$

Случай $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_{2n}$. $\widetilde{S}_n : \lambda_j(a) \mapsto 0$, если $j < n$ или $j > n'$, и

$$\lambda_n(a) \mapsto \lambda_n(a)\,\sigma_n(a),$$

$$\lambda_{n'}(a) \mapsto -\lambda_{n'}(a)\,\sigma_n(a+2).$$

Случай $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}$. $\widetilde{S}_n : \lambda_j(a) \mapsto 0$, если $j < n-1$ или $j > (n-1)'$, и

$$\lambda_{n-1}(a) \mapsto \lambda_{n-1}(a)\,\sigma_n(a),$$

$$\lambda_n(a) \mapsto \lambda_n(a)\,\sigma_n(a),$$

$$\lambda_{n'}(a) \mapsto -\lambda_{n'}(a)\,\sigma_n(a+1),$$

$$\lambda_{(n-1)'}(a) \mapsto -\lambda_{(n-1)'}(a)\,\sigma_n(a+1).$$

Легко видеть, что соотношения (11.46) сохраняются под действием операторов $\widetilde{S}_i$, так что эти операторы на пространстве $\mathcal{L}$ корректно определены. *Скрининговый оператор*

$$S_i : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_i$$

определяется теперь как композиция оператора $\widetilde{S}_i$ и проекции $\widetilde{\mathcal{L}}_i \to \mathcal{L}_i$. Введём подалгебру $\operatorname{Rep} \mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$ янгианных характеров в алгебре $\mathcal{L}$ как пересечение ядер скрининговых операторов:

$$\operatorname{Rep} \mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N) = \bigcap_{i=1}^{n} \ker S_i.$$

Учитывая теорему 11.1.2, для $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n+1}$ зададим полином $\chi_m \in \mathcal{L}$ формулой

$$\chi_m = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m \leqslant N} \lambda_{i_1}(0)\,\lambda_{i_2}(1) \dots \lambda_{i_m}(m-1)$$

при условии, что $n+1$ входит в индексы суммирования $i_1,\dots,i_m$ не более одного раза. Далее, следуя теореме 11.1.4, для $\mathfrak{g}_N=\mathfrak{o}_{2n}$ зададим полином $\chi_m\in\mathcal{L}$ формулой

$$\chi_m=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_m\leqslant N}\lambda_{i_1}(0)\,\lambda_{i_2}(1)\dots\lambda_{i_m}(m-1)$$

при условии, что n и n' не входят одновременно в индексы суммирования $i_1,\dots,i_m$. Учитывая теорему 11.1.5, для $\mathfrak{g}_N=\mathfrak{sp}_{2n}$ зададим полином $\chi_m\in\mathcal{L}$ формулой

$$\chi_m=\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant 2n}\lambda_{i_1}(0)\,\lambda_{i_2}(-1)\dots\lambda_{i_m}(-m+1)$$

при условии, что если i и i' входят в индексы суммирования как $i=i_r$ и $i'=i_s$ для некоторых $1\leqslant r<s\leqslant m$, то $s-r\leqslant n-i$. Кроме того, в обозначениях следствия 11.1.9 имеем

$$\chi_m=\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant 2n+2}\varkappa_{i_1}(0)\,\varkappa_{i_2}(-1)\dots\varkappa_{i_m}(-m+1).$$

Эта формула определяет полином χ_m для всех значений $m=1,2,\dots,2n+2$.

Предложение 11.3.1. *Во всех трёх случаях* $\chi_m\in\operatorname{Rep}\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$.

Доказательство. Такое же вычисление, как в доказательстве предложения 10.6.1 (см. также замечание 10.6.2), показывает, что полином χ_m лежит в ядре скрининговых операторов S_i при $i=1,\dots,n-1$. Чтобы проверить это свойство для оператора S_n, рассмотрим три случая отдельно.

Случай $\mathfrak{g}_N=\mathfrak{o}_{2n+1}$. Используя обозначения из замечания 10.6.2, соберём полиномы χ_m в производящий ряд

$$\begin{aligned}1+\sum_{m=1}^{\infty}\chi_m\,e^{m\,\partial}=\big(1-\lambda_1(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\dots\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}&\\ \times\big(1+\lambda_{n+1}(0)\,e^{\partial}\big)\big(1-\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\dots\big(1-\lambda_{1'}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}.&\end{aligned}$$

Достаточно проверить требуемое свойство для обратного ряда, т. е. убедиться, что произведение

$$\big(1-\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)\big(1+\lambda_{n+1}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\big) \tag{11.48}$$

аннулируется оператором S_n. Вычисляя его действие, получаем

$$\begin{aligned}S_n:\big(1+\lambda_{n+1}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}&\\ \mapsto\sigma_n(-1/2)\,\big(1+\lambda_{n+1}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}-\big(1+\lambda_{n+1}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\sigma_n(-1/2).&\end{aligned}$$

Следовательно, образ произведения (11.48) относительно S_n равен

$$\lambda_{n'}(0)\big(\sigma_n(0)+\sigma_n(1/2)\big)\,e^{\partial}\big(1+\lambda_{n+1}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\big)$$
$$+\big(1-\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)\Big(\sigma_n(-1/2)\,\big(1+\lambda_{n+1}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}$$
$$-\big(1+\lambda_{n+1}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\sigma_n(-1/2)\Big)\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\big)$$
$$-\big(1-\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)\big(1+\lambda_{n+1}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\,\lambda_n(0)\big(\sigma_n(0)+\sigma_n(-1/2)\big)\,e^{\partial}.$$

Это выражение приводится к виду

$$\big(\lambda_{n'}(0)\,\sigma_n(0)\,e^{\partial}+\sigma_n(-1/2)\big)\,\big(1+\lambda_{n+1}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\big)$$
$$-\big(1-\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)\big(1+\lambda_{n+1}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\,\big(\lambda_n(0)\,\sigma_n(0)\,e^{\partial}+\sigma_n(-1/2)\big).$$

Из соотношений (11.46) (при $i=n$) и (11.47) получаем

$$\lambda_{n'}(0)\,\sigma_n(0)=\lambda_{n+1}(0)\,\sigma_n(-1/2)\quad\text{и}\quad\lambda_n(0)\,\sigma_n(0)=\lambda_{n+1}(0)\,\sigma_n(1/2),\tag{11.49}$$

что позволяет упростить образ произведения (11.48) и записать его как

$$\sigma_n(-1/2)\,\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\big)-\big(1-\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)\,\sigma_n(-1/2).$$

В силу соотношения $\lambda_n(0)\,\sigma_n(-1/2)=\lambda_{n'}(0)\,\sigma_n(1/2)$, вытекающего из (11.49), это выражение равно нулю.

Случай $\mathfrak{g}_N=\mathfrak{o}_{2n}$. Соответствующий производящий ряд имеет вид

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\chi_m\,e^{m\,\partial}=\big(1-\lambda_1(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\ldots\big(1-\lambda_{n-1}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}$$
$$\Big(\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}+\big(1-\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}-1\Big)\big(1-\lambda_{(n-1)'}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\ldots\big(1-\lambda_{1'}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1},$$

и его можно записать как

$$\big(1-\lambda_1(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\ldots\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}$$
$$\times\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\,\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)\big(1-\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\ldots\big(1-\lambda_{1'}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}.$$

Обращая этот ряд, приходим к проверке того, что произведение

$$\big(1-\lambda_{(n-1)'}(0)\,e^{\partial}\big)\big(1-\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)$$
$$\times\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\,\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\big)\big(1-\lambda_{n-1}(0)\,e^{\partial}\big)$$

аннулируется оператором S_n. Это вытекает из соотношения

$$S_n:\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\,\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}$$
$$\mapsto\sigma_n(0)\,\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\,\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}-\big(1-\lambda_n(0)\,e^{\partial}\,\lambda_{n'}(0)\,e^{\partial}\big)^{-1}\sigma_n(0)$$

и формул

$$\lambda_{(n-1)'}(0)\,\sigma_n(1)=\lambda_n(0)\,\sigma_n(0)\qquad\text{и}\qquad\lambda_{n-1}(0)\,\sigma_n(0)=\lambda_{n'}(0)\,\sigma_n(1).$$

Случай $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_{2n}$. Справедливо разложение

$$1 + \sum_{m=1}^{2n+2} \chi_m\, e^{-m\,\partial} = \big(1 + \varkappa_1(0)\, e^{-\partial}\big) \dots \big(1 + \varkappa_{2n+2}(0)\, e^{-\partial}\big).$$

Достаточно проверить, что произведение

$$\big(1 + \varkappa_n(0)\, e^{-\partial}\big)\big(1 + \varkappa_{n+1}(0)\, e^{-\partial}\big)\big(1 + \varkappa_{n+2}(0)\, e^{-\partial}\big)\big(1 + \varkappa_{n+3}(0)\, e^{-\partial}\big)$$
$$= \big(1 + \lambda_n(0)\, e^{-\partial}\big)\big(1 - \lambda_n(0)\, e^{-\partial}\, \lambda_{n'}(0)\, e^{-\partial}\big)\big(1 + \lambda_{n'}(0)\, e^{-\partial}\big)$$

аннулируется оператором S_n. Это простое вычисление, опирающееся на соотношение

$$\lambda_n(0)\, \sigma_n(0) = \lambda_{n'}(0)\, \sigma_n(2),$$

завершает доказательство. □

Чтобы сформулировать аналог предложения 11.3.1 для двойственного янгиана (см. ниже предложение 11.3.2), заметим, что образы Хариш-Чандры, вычисленные в §11.1 и §11.2, получаются друг из друга с помощью замен

$$\lambda_i(u) \longleftrightarrow \lambda^+_{i'}(u), \qquad i = 1, \dots, N.$$

Это позволяет перенести определения и свойства скрининговых операторов, связанных с янгианом $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$, на случай двойственного янгиана, заменяя переменные по правилам

$$\lambda_i(a) \mapsto \lambda^+_{i'}(a), \qquad i = 1, \dots, N,$$

и

$$\sigma_i(a) \mapsto \sigma^+_i(a - \kappa + i), \qquad i = 1, \dots, n,$$

для всех $a \in \mathbb{C}$. Теперь мы рассматриваем алгебру полиномов от переменных $\lambda^+_i(a)$ при $i = 1, \dots, N$ и $a \in \mathbb{C}$ и обозначаем через $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+(\mathfrak{g}_N)$ её фактор по соотношениям

$$\lambda^+_i(a)\, \lambda^+_{i'}(a + \kappa - i) = \lambda^+_{i+1}(a)\, \lambda^+_{(i+1)'}(a + \kappa - i), \qquad a \in \mathbb{C}, \tag{11.50}$$

при $i = 0, 1, \dots, n-1$, если $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}$ или $\mathfrak{sp}_{2n}$, и при $i = 0, 1, \dots, n$, если $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n+1}$, где $\lambda^+_0(a) = \lambda^+_{0'}(a) = 1$; ср. (11.46).

Для $i = 1, \dots, n$ рассмотрим свободный левый $\mathcal{L}^+$-модуль $\widetilde{\mathcal{L}}^+_i$ с образующими $\sigma^+_i(a)$, где a пробегает множество $\mathbb{C}$, и обозначим через $\mathcal{L}^+_i$ его фактор по соотношениям

$$\lambda^+_i(a)\, \sigma^+_i(a+1) = \lambda^+_{i+1}(a)\, \sigma^+_i(a), \qquad i = 1, \dots, n-1, \quad a \in \mathbb{C}, \tag{11.51}$$

а также[1]

$$\begin{aligned} &\lambda^+_n(a)\, \sigma^+_n(a + 1/2) = \lambda^+_{n+1}(a)\, \sigma^+_n(a) && \text{для} \quad \mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n+1}, \\ &\lambda^+_n(a)\, \sigma^+_n(a + 1) = \lambda^+_{n+1}(a)\, \sigma^+_n(a - 1) && \text{для} \quad \mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_{2n}, \\ &\lambda^+_{n-1}(a)\, \sigma^+_n(a + 2) = \lambda^+_{n+1}(a)\, \sigma^+_n(a + 1) && \text{для} \quad \mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}. \end{aligned} \tag{11.52}$$

[1] Для серий C_n и D_n можно сделать замену переменных $\sigma^+_n(a) \mapsto \sigma^+_n(a \pm 1)$, чтобы получить условия, аналогичные (11.47). Это не повлияет на свойства, обсуждаемые ниже.

При $i \in \{1, \ldots, n\}$ введём линейный оператор $\widetilde{S}_i^+ : \mathcal{L}^+ \to \widetilde{\mathcal{L}}_i^+$, удовлетворяющий правилу Лейбница (10.52). Для $i = 1, \ldots, n-1$ положим

$$\widetilde{S}_i^+ : \lambda_j^+(a) \mapsto \begin{cases} -\lambda_i^+(a)\,\sigma_i^+(a+1) & \text{при} \quad j = i, \\ \lambda_{i+1}^+(a)\,\sigma_i^+(a) & \text{при} \quad j = i+1, \\ \lambda_{i'}^+(a)\,\sigma_i^+(a-\kappa+i) & \text{при} \quad j = i', \\ -\lambda_{(i+1)'}^+(a)\,\sigma_i^+(a-\kappa+i+1) & \text{при} \quad j = (i+1)', \\ 0 & \text{при} \quad j \neq i, i', i+1, (i+1)'. \end{cases}$$

Действие оператора $\widetilde{S}_n^+$ определяется отдельно для каждой серии.

Случай $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n+1}$. $\widetilde{S}_n^+ : \lambda_j^+(a) \mapsto 0$, если $j < n$ или $j > n'$, и

$$\lambda_n^+(a) \mapsto -\lambda_n^+(a)\left(\sigma_n^+(a+1/2) + \sigma_n^+(a+1)\right),$$

$$\lambda_{n+1}^+(a) \mapsto \lambda_{n+1}^+(a)\left(\sigma_n^+(a) - \sigma_n^+(a+1)\right),$$

$$\lambda_{n'}^+(a) \mapsto \lambda_{n'}^+(a)\left(\sigma_n^+(a) + \sigma_n^+(a+1/2)\right).$$

Случай $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_{2n}$. $\widetilde{S}_n^+ : \lambda_j^+(a) \mapsto 0$, если $j < n$ или $j > n'$, и

$$\lambda_n^+(a) \mapsto -\lambda_n^+(a)\,\sigma_n^+(a+1),$$

$$\lambda_{n'}^+(a) \mapsto \lambda_{n'}^+(a)\,\sigma_n^+(a-1).$$

Случай $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}$. $\widetilde{S}_n^+ : \lambda_j^+(a) \mapsto 0$, если $j < n-1$ или $j > (n-1)'$, и

$$\lambda_{n-1}^+(a) \mapsto -\lambda_{n-1}^+(a)\,\sigma_n^+(a+2),$$

$$\lambda_n^+(a) \mapsto -\lambda_n^+(a)\,\sigma_n^+(a+2),$$

$$\lambda_{n'}^+(a) \mapsto \lambda_{n'}^+(a)\,\sigma_n^+(a+1),$$

$$\lambda_{(n-1)'}^+(a) \mapsto \lambda_{(n-1)'}^+(a)\,\sigma_n^+(a+1).$$

Легко проверить, что действие операторов $\widetilde{S}_i^+$ в пространстве $\mathcal{L}^+$ корректно определено. *Скрининговый оператор*

$$S_i^+ : \mathcal{L}^+ \to \mathcal{L}_i^+$$

— это композиция оператора $\widetilde{S}_i^+$ и проекции $\widetilde{\mathcal{L}}_i^+ \to \mathcal{L}_i^+$. Введём подалгебру $\operatorname{Rep}\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)$ янгианных характеров в алгебре $\mathcal{L}^+$ как пересечение ядер скрининговых операторов:

$$\operatorname{Rep}\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N) = \bigcap_{i=1}^{n} \ker S_i^+. \tag{11.53}$$

Принимая в расчёт теорему 11.2.1, в случае $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n+1}$ введём полином $\chi_m^+ \in \mathcal{L}^+$ формулой

$$\chi_m^+ = \sum_{N \geqslant i_1 \geqslant \cdots \geqslant i_m \geqslant 1} \lambda_{i_1}^+(0)\,\lambda_{i_2}^+(1) \ldots \lambda_{i_m}^+(m-1)$$

при условии, что $n+1$ встречается среди индексов суммирования $i_1, \dots, i_m$ не более одного раза. Следуя теореме 11.2.2, для $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{o}_{2n}$ введём полином $\chi_m^+ \in \mathcal{L}^+$ по формуле

$$\chi_m^+ = \sum_{N \geqslant i_1 \geqslant \dots \geqslant i_m \geqslant 1} \lambda_{i_1}^+(0)\, \lambda_{i_2}^+(1) \dots \lambda_{i_m}^+(m-1)$$

при условии, что n и n' не встречаются одновременно среди индексов суммирования $i_1, \dots, i_m$. Учитывая теорему 11.2.3, в случае $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{sp}_{2n}$ введём полином $\chi_m^+ \in \mathcal{L}$ формулой

$$\chi_m^+ = \sum_{2n \geqslant i_1 > \dots > i_m \geqslant 1} \lambda_{i_1}^+(0)\, \lambda_{i_2}^+(-1) \dots \lambda_{i_m}^+(-m+1)$$

при условии, что если i и i' входят в индексы суммирования как $i' = i_r$ и $i = i_s$ при $1 \leqslant r < s \leqslant m$, то $s - r \leqslant n - i$. По следствию 11.2.4, имеет место формула

$$\chi_m^+ = \sum_{2n+2 \geqslant i_1 > \dots > i_m \geqslant 1} \varkappa_{i_1}^+(0)\, \varkappa_{i_2}^+(-1) \dots \varkappa_{i_m}^+(-m+1).$$

Заметим, что определение полинома χ_m^+ имеет смысл для всех значений параметра $m = 1, 2, \dots, 2n+2$.

Предложение 11.3.2. *Во всех трёх случаях* $\chi_m^+ \in \operatorname{Rep} \widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)$. □

§ 11.4. Библиографические замечания

Реализация янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$, основанная на RTT-соотношениях, и его представления изучались в работах [**6**], [**7**], [**61**] и [**62**]. Изоморфизмы между различными реализациями алгебры $\mathrm{Y}(\mathfrak{g}_N)$ были построены недавно в явном виде в работах [**63**] и [**83**]. В §11.1 мы следовали статье [**111**]. Доказательства леммы 11.1.6 и следствия 11.1.9 взяты из статьи Кунибы, Окадо, Сузуки и Ямады [**100**]. Скрининговые операторы были введены в работе Френкеля и Решетихина [**51**]; см. также статью Френкеля и Мухина [**48**]. Явные формулы в янгианном контексте были даны в работе [**113**].

Глава 12

Классические $\mathcal{W}$-алгебры

Классические $\mathcal{W}$-алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, f)$ — это коммутативные алгебры, наделённые скобками Пуассона и дифференцированиями. Слово «классические» отражает тот факт, что они являются «классическими пределами» некоторого семейства вертексных алгебр, известного как *аффинные $\mathcal{W}$-алгебры*, так что эти пределы обладают структурами *пуассоновых вертексных алгебр*. Алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, f)$ соответствуют конечномерным простым алгебрам Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{C}$ и нильпотентным элементам $f \in \mathfrak{g}$. Нас будет интересовать только случай, когда f — это регулярный (главный) нильпотент, поэтому мы будем опускать символ f и обозначать алгебру $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$.

Вспомним, что центр $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ универсальной обёртывающей алгебры изоморфен подалгебре W-инвариантов $\mathrm{U}(\mathfrak{h})^W$ в $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$; см. (4.7). Аффинная версия изоморфизма Хариш-Чандры между центром $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ аффинной вертексной алгебры на критическом уровне (см. гл. 6) и классической $\mathcal{W}$-алгеброй $\mathcal{W}({}^L\mathfrak{g})$ будет рассматриваться ниже в гл. 13 (через ${}^L\mathfrak{g}$ мы обозначаем алгебру Ли, двойственную по Ленглендсу к алгебре Ли $\mathfrak{g}$). В настоящей главе мы обсудим некоторые свойства алгебр $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ и построим их образующие. Мы начнём с описания классических $\mathcal{W}$-алгебр в контексте пуассоновых вертексных алгебр, следуя работам Де Соле, Каца и Валери **[26]**, **[27]**, **[28]** и Каца **[88]** (см. §12.1 и §12.2), затем дадим их определение с помощью скрининговых операторов и установим эквивалентность определений, опираясь на изоморфизм Шевалле (§12.3).

§ 12.1. Пуассоновы вертексные алгебры

Мы будем использовать термин *дифференциальная алгебра* для коммутативной ассоциативной алгебры $\mathcal{V}$ с единицей и с дифференцированием ∂. Вспомним, что конформные алгебры Ли были введены в определении 6.1.5.

Определение 12.1.1. *Пуассонова вертексная алгебра* — это дифференциальная алгебра $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \partial)$, наделённая таким $\mathbb{C}$-линейным отображением

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{V}, \qquad a \otimes b \mapsto \{a_\lambda b\},$$

называемым *λ-скобкой*, что $(\mathcal{V}, \partial, \{_\lambda\})$ — это конформная алгебра Ли и выполняется *правило Лейбница*

$$\{a_\lambda bc\} = \{a_\lambda b\}c + b\{a_\lambda c\} \qquad (12.1)$$

для всех $a, b, c \in \mathcal{V}$. □

Предположим, что $\mathfrak{g}$ — это простая алгебра Ли, и пусть $J_1, \ldots, J_d$ — это базис в $\mathfrak{g}$. Рассмотрим дифференциальную алгебру $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$, заданную как алгебра полиномов

$$\mathcal{V}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[J_1^{(r)}, \ldots, J_d^{(r)} \mid r = 0, 1, 2, \ldots], \qquad J_i^{(0)} = J_i, \tag{12.2}$$

с таким дифференцированием ∂, что $\partial(J_i^{(r)}) = J_i^{(r+1)}$ для всех $i = 1, \ldots, d$ и $r \geqslant 0$. Зафиксируем невырожденную инвариантную симметрическую билинейную форму $\langle\ ,\ \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и введём λ-скобку на алгебре $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$, полагая

$$\{X\,_\lambda\, Y\} = [X, Y] + \lambda\langle X, Y\rangle \qquad \text{при} \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

и продолжая её на всю дифференциальную алгебру $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$ с помощью свойства полуторалинейности $\big(a, b \in \mathcal{V}(\mathfrak{g})\big)$:

$$\{\partial a\,_\lambda\, b\} = -\lambda\,\{a\,_\lambda\, b\}, \qquad \{a\,_\lambda\, \partial b\} = (\lambda + \partial)\{a\,_\lambda\, b\},$$

кососимметричности:

$$\{a\,_\lambda\, b\} = -\{b\,_{-\lambda-\partial}\, a\}$$

и правила Лейбница (12.1); ср. определение 6.1.5. Проверка показывает, что эта λ-скобка наделяет дифференциальную алгебру $(\mathcal{V}(\mathfrak{g}), \partial)$ структурой пуассоновой вертексной алгебры; $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$ называется *аффинной пуассоновой вертексной алгеброй* (соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$).

Замечание 12.1.2. Можно показать, что аффинная пуассонова вертексная алгебра $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$ получается из аффинной вертексной алгебры $V_\kappa(\mathfrak{g})$, определённой в §6.2, с помощью *квазиклассического предела*; см. [**88**]. $\square$

Введём стандартные *образующие Шевалле* e_i, h_i, f_i простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ранга n, где i принимает значения $1, \ldots, n$. Линейная оболочка $\mathfrak{h}$ элементов $h_1, \ldots, h_n$ — это подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, в то время как e_i и f_i порождают нильпотентные подалгебры $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ соответственно. Пусть $A = [a_{ij}]$ — это матрица Картана для алгебры Ли $\mathfrak{g}$, так что определяющие соотношения в ней принимают вид

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \qquad [h_i, h_j] = 0,$$
$$[h_i, e_j] = a_{ij}\, e_j, \qquad [h_i, f_j] = -a_{ij}\, f_j,$$

вместе с соотношениями Серра

$$(\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}}\, e_j = 0, \qquad (\operatorname{ad} f_i)^{1-a_{ij}}\, f_j = 0, \qquad i \neq j.$$

Существует такая диагональная матрица

$$D = \operatorname{diag}[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n] \tag{12.3}$$

с положительными рациональными элементами, что матрица $B = D^{-1}A$ симметрическая. Нормализуем симметрическую инвариантную билинейную форму на $\mathfrak{g}$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\langle e_i, f_j\rangle = \delta_{ij}\,\epsilon_i. \tag{12.4}$$

Элемент $f \in \mathfrak{g}$, заданный формулой

$$f = f_1 + \dots + f_n,$$

— это регулярный нильпотентный элемент в $\mathfrak{g}$. Введём $\mathfrak{sl}_2$-подалгебру в $\mathfrak{g}$ со стандартными базисными элементами e, f, h, удовлетворяющими коммутационным соотношениям (6.12), и положим $x = h/2$. Рассмотрим разложение $\mathfrak{g}$ в прямую сумму собственных подпространств относительно оператора $\operatorname{ad} x$:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{(i)}, \qquad \mathfrak{g}^{(i)} = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [x, Y] = iY\}. \tag{12.5}$$

Как и в разложении (9.19), подпространство $\mathfrak{g}^{(i)}$ ненулевое, только если индекс i содержится в промежутке, зависящем от числа Кокстера: $-h_{\mathfrak{g}} < i < h_{\mathfrak{g}}$. Заметим, что $f \in \mathfrak{g}^{(-1)}$, $e \in \mathfrak{g}^{(1)}$ и $h \in \mathfrak{g}^{(0)}$. Кроме того, подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ совпадает с подпространством $\mathfrak{g}^{(0)}$, и справедливо треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, где

$$\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{i<0} \mathfrak{g}^{(i)} \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}^{(i)}.$$

Положим $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}$ и введём проекцию $\pi_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{p}$ с ядром $\mathfrak{n}_+$.

Распространим обозначение (12.2) на любое подпространство $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, так что $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ будет обозначать соответствующую дифференциальную подалгебру в $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$. Элементы подалгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ — это полиномы от переменных $Y^{(r)}$ при $Y \in \mathfrak{a}$ и $r \geqslant 0$. Зададим гомоморфизм дифференциальных алгебр

$$\rho : \mathcal{V}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{V}(\mathfrak{p})$$

по правилу

$$\rho(X) = \pi_{\mathfrak{p}}(X) + \langle f, X \rangle, \qquad X \in \mathfrak{g}. \tag{12.6}$$

Определение 12.1.3. *Классическая $\mathcal{W}$-алгебра $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ определяется формулой*

$$\mathcal{W}(\mathfrak{g}) = \{P \in \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \mid \rho\{X_{\lambda} P\} = 0 \quad \text{для всех} \quad X \in \mathfrak{n}_+\}. \qquad \square$$

Теорема 12.1.4. *Подпространство $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ — это дифференциальная подалгебра в $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$. Кроме того, $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ — это пуассонова вертексная алгебра, наделённая λ-скобкой*

$$\{a_{\lambda} b\}_{\rho} = \rho\{a_{\lambda} b\}, \qquad a, b \in \mathcal{W}(\mathfrak{g}). \qquad \square$$

Чтобы описать структуру классической $\mathcal{W}$-алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$, выберем подпространство $U \subset \mathfrak{g}$, дополнительное к $[f, \mathfrak{g}]$,

$$\mathfrak{g} = [f, \mathfrak{g}] \oplus U, \tag{12.7}$$

которое согласовано с градуировкой (12.5) в том смысле, что U — это прямая сумма подпространств $U \cap \mathfrak{g}^{(i)}$. Поскольку

$$\mathfrak{g} = [f, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{g}^e, \tag{12.8}$$

возможный универсальный выбор — это $U = \mathfrak{g}^e$, централизатор элемента e в $\mathfrak{g}$. Заметим, что отображение $\operatorname{ad} f : \mathfrak{g}^{(i)} \to \mathfrak{g}^{(i-1)}$ сюръективно при $i \leqslant 0$, так что справедливо вложение $\mathfrak{n}_- \subset [f, \mathfrak{g}]$. Поэтому при любом выборе подпространства U имеется вложение $U \subset \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$. Так как форма (12.4) инвариантна и невырожденна, ортогональное дополнение к $[f, \mathfrak{g}]$ в $\mathfrak{g}$ совпадает с централизатором $\mathfrak{g}^f$ элемента f в $\mathfrak{g}$. Следовательно, взяв ортогональные дополнения в разложении (12.7), получим

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^f \oplus U_{\mathfrak{g}}^{\perp}.$$

Централизатор $\mathfrak{g}^f$ содержится в подалгебре $\mathfrak{p}$, откуда вытекает разложение

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^f \oplus U^{\perp},$$

где мы положили

$$U^{\perp} = \mathfrak{p} \cap U_{\mathfrak{g}}^{\perp} = \{v \in \mathfrak{p} \mid \langle v, U \rangle = 0\}. \tag{12.9}$$

Это индуцирует разложение в прямую сумму:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{p}) = \mathcal{V}(\mathfrak{g}^f) \oplus \langle U^{\perp} \rangle, \tag{12.10}$$

где $\langle U^{\perp} \rangle$ обозначает идеал дифференциальной алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$, порождённый подпространством $U^{\perp}$. Введём обозначение $\pi = \pi_{\mathfrak{g}^f}$ для проекции

$$\pi : \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \to \mathcal{V}(\mathfrak{g}^f)$$

на первое слагаемое в (12.10) с ядром $\langle U^{\perp} \rangle$.

Теорема 12.1.5. *Ограничение проекции π на классическую $\mathcal{W}$-алгебру $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ задаёт изоморфизм дифференциальных алгебр*

$$\pi : \mathcal{W}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{V}(\mathfrak{g}^f). \tag{12.11}$$

□

Из теоремы 12.1.5 следует, что для любого элемента $q \in \mathfrak{g}^f$ существует единственный элемент $w(q) \in \mathcal{W}(\mathfrak{g})$ вида $w(q) = q + r$ при $r \in \langle U^{\perp} \rangle$.

§ 12.2. Образующие алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$

Нам понадобятся общие формулы для определителей некоторых специальных матриц. Пусть A — это квадратная матрица вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N-1\,1} & a_{N-1\,2} & a_{N-1\,3} & \dots & \dots & a_{N-1\,N} \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \tag{12.12}$$

с элементами в некотором кольце. Если элементы $a_{12}, a_{23}, \dots, a_{N-1\,N}$ лежат в центре кольца, то легко проверить, что столбцовый определитель матрицы A совпадает с её строчным определителем, и мы положим

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(N)\,N} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\,\sigma(1)} \dots a_{N\,\sigma(N)}. \tag{12.13}$$

В частности, если кольцо содержит единицу, а матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N-1\,1} & a_{N-1\,2} & a_{N-1\,3} & \dots & \dots & 1 \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}, \tag{12.14}$$

то

$$\det A = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{0=i_0<i_1<\dots<i_{k+1}=N} (-1)^{N-k-1}\, a_{i_1\, i_0+1}\, a_{i_2\, i_1+1} \dots a_{i_{k+1}\, i_k+1}. \tag{12.15}$$

Возвращаясь к более общим матрицам вида (12.12), обозначим через D_i (соответственно $\overline{D}_i$) определитель $i \times i$-подматрицы матрицы A, отвечающей первым (соответственно последним) i строкам и столбцам. Будем считать, что $D_0 = \overline{D}_0 = 1$.

Лемма 12.2.1. *Зафиксируем $p \in \{0, 1, \dots, N\}$. Определитель матрицы* (12.12) *равен*

$$\det A = D_p\, \overline{D}_{N-p} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=p+1}^{N} (-1)^{j+i}\, D_{j-1}\, \widetilde{a}_{i\,j}\, \overline{D}_{N-i},$$

где

$$\widetilde{a}_{i\,j} = a_{i\,j}\, a_{j\,j+1}\, a_{j+1\,j+2} \dots a_{i-1\,i} \qquad \text{при} \quad i > j.$$

Доказательство. Требуемая формула следует из определения определителя (12.13). В приложениях, которые мы рассмотрим ниже, центральные элементы $a_{12}, a_{23}, \dots, a_{N-1\,N}$ оказываются обратимыми. Тогда лемма сводится к частному случаю матриц вида (12.14) и вытекает из формулы (12.15). $\square$

Серия A_{N-1}. Нам будет удобнее работать с редуктивной алгеброй Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ вместо простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_N$ типа A. Будем использовать базисные элементы E_{ij}, $i, j = 1, \dots, N$. Элементы $E_{11}, \dots, E_{NN}$ линейно порождают подалгебру Картана в $\mathfrak{gl}_N$, которую мы обозначим через $\mathfrak{h}$. Подмножества базисных элементов E_{ij} при $i < j$ и $i > j$ линейно порождают нильпотентные подалгебры $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ соответственно. Тогда подалгебра $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}$ линейно порождается элементами E_{ij} при $i \geqslant j$. Возьмём главный нильпотентный элемент

$$f = E_{21} + E_{32} + \dots + E_{N\,N-1}$$

и дополним его до $\mathfrak{sl}_2$-тройки $\{e, f, h\}$, полагая

$$e = \sum_{i=1}^{N-1} i\,(N-i)\, E_{i\,i+1} \qquad \text{и} \qquad h = \sum_{i=1}^{N} (N - 2i + 1)\, E_{i\,i}.$$

Классическая $\mathcal{W}$-алгебра $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ задаётся определением 12.1.3, в то время как теоремы 12.1.4 и 12.1.5 выполняются для редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ в том же виде.

Мы будем работать с алгеброй дифференциальных операторов $\mathcal{V}(\mathfrak{p})\otimes\mathbb{C}[\partial]$, определённой соотношениями

$$\partial\, E_{ij}^{(r)} - E_{ij}^{(r)}\,\partial = E_{ij}^{(r+1)}.$$

Другими словами, ∂ будет рассматриваться как образующий этой алгебры, который следует отличать от дифференцирования алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$. Для любого $g \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ и любого целого неотрицательного числа r элемент $g^{(r)} = \partial^r(g)$ совпадает со свободным членом дифференциального оператора $\partial^r g$:

$$g^{(r)} = \partial^r g\, 1, \tag{12.16}$$

где мы предполагаем, что $\partial\, 1 = 0$.

Будем использовать невырожденную инвариантную симметрическую билинейную форму на $\mathfrak{gl}_N$, как в примере 9.1.7:

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr} XY, \qquad X, Y \in \mathfrak{gl}_N,$$

где X и Y считаются матрицами размера $N \times N$ над $\mathbb{C}$.

Возьмём определитель (12.13) матрицы с элементами в алгебре $\mathcal{V}(\mathfrak{p})\otimes\mathbb{C}[\partial]$:

$$\det\begin{bmatrix} \partial + E_{11} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ E_{21} & \partial + E_{22} & 1 & 0 & \dots & 0\\ E_{31} & E_{32} & \partial + E_{33} & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ E_{N-1\,1} & E_{N-1\,2} & E_{N-1\,3} & \dots & \dots & 1\\ E_{N1} & E_{N2} & E_{N3} & \dots & \dots & \partial + E_{NN} \end{bmatrix} \tag{12.17}$$

и запишем его как дифференциальный оператор

$$\partial^N + w_1\,\partial^{N-1} + \dots + w_N, \qquad w_i \in \mathcal{V}(\mathfrak{p}).$$

Теорема 12.2.2. *Все элементы $w_1, \dots, w_N$ принадлежат классической $\mathcal{W}$-алгебре $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$. Кроме того, элементы $w_1^{(r)}, \dots, w_N^{(r)}$ при $r = 0, 1, \dots$ алгебраически независимы и порождают алгебру $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$.*

Доказательство. Обозначим определитель в (12.17) через D_N. При всех $1 \leqslant k < N$ отождествим алгебру Ли $\mathfrak{gl}_k$ с подалгеброй в $\mathfrak{gl}_N$, линейно порождённой базисными элементами E_{ij} при $1 \leqslant i, j \leqslant k$, так что определитель D_k будет рассматриваться как элемент алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}[\partial]$. Положим $D_0 = 1$. Будем доказывать первую часть теоремы индукцией по N. База индукции тривиальна, а при $1 \leqslant i < N-1$ из предположения индукции следует, что

$$\rho\{E_{i\,i+1}\,{}_\lambda\, D_k\} = 0 \tag{12.18}$$

при $k = i+1, \dots, N$. Кроме того, соотношение (12.18), очевидно, выполнено при $k = 1, \dots, i-1$, в то время как

$$\rho\{E_{i\,i+1}\,{}_\lambda D_i\} = -\rho\big(D_{i-1}^{+}\, E_{i\,i+1}\big) = -D_{i-1}^{+},$$

где для каждого полинома $P = P(\partial) \in \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}[\partial]$ через P^+ мы обозначаем полином $P(\partial + \lambda)$, рассматриваемый как элемент алгебры $\mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}[\partial]$.

Разлагая определитель по последней строке, получим соотношение

$$D_N = D_{N-1}\,(\partial + E_{NN}) - D_{N-2}\,E_{N\,N-1} + D_{N-3}\,E_{N\,N-2} + \dots + (-1)^{N-2}\,D_1\,E_{N\,2} + (-1)^{N-1}\,D_0\,E_{N\,1}. \tag{12.19}$$

Следовательно, из свойств λ-скобки выводим, что

$$\rho\{E_{i\,i+1\;\lambda} D_N\} = (-1)^{N-i+1}\,D^+_{i-1}\,E_{N\,i+1} + (-1)^{N-i}\,D^+_{i-1}\,E_{N\,i+1} = 0$$

при $i = 1, \dots, N-2$. Кроме того,

$$\rho\{E_{N-1\,N\;\lambda} D_N\} = D^+_{N-1} - D^+_{N-2}\,(\partial + E_{NN}) - D^+_{N-2}\,(E_{N-1\,N-1} - E_{N\,N} + \lambda) + D^+_{N-3}\,E_{N-1\,N-2} + \dots + (-1)^{N-2}\,D^+_1\,E_{N-1\,2} + (-1)^{N-1}\,D^+_0\,E_{N-1\,1},$$

а это выражение равно нулю в силу соотношения (12.19), применённого к определителю D^+_{N-1} вместо D_N. Поскольку $\rho\{E_{i\,i+1\;\lambda} D_N\} = 0$ при $i = 1, \dots, N-1$, мы можем заключить, что $\rho\{X\,{}_\lambda D_N\} = 0$ для всех $X \in \mathfrak{n}_+$, так что все элементы $w_1, \dots, w_N$ лежат в подалгебре $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Для доказательства второй части применим теорему 12.1.5. Мы можем взять

$$U = \text{линейная оболочка}\ \ \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1N}\},$$

так что

$$U^\perp = \text{линейная оболочка}\ \ \{E_{ij} \mid N \geqslant i \geqslant j > 1\}.$$

Чтобы вычислить образы элементов $w_1, \dots, w_N$ относительно изоморфизма (12.11), запишем их сначала как дифференциальные полиномы от переменных $E_{11}, E_{21}, \dots, E_{N1}$ по модулю дифференциального идеала алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$, порождённого пространством $U^\perp$. Это сводится к замене нулями всех элементов E_{ij} при $N \geqslant i \geqslant j > 1$ в определителе (12.17). В силу (12.15) определитель принимает вид

$$(\partial + E_{11})\,\partial^{N-1} - E_{21}\,\partial^{N-1} + \dots + (-1)^{N-1} E_{N1},$$

так что $w_m \equiv (-1)^{m-1} E_{m\,1} \mod \langle U^\perp\rangle$. Поэтому относительно изоморфизма (12.11) получаем

$$\pi : w_m \mapsto (-1)^{m-1}\big(E_{m\,1} + E_{m+1\,2} + \dots + E_{N\,N-m+1}\big)$$

при $m = 1, \dots, N$. Так как образы $\pi(w_1), \dots, \pi(w_N)$ образуют базис централизатора $\mathfrak{gl}_N^f$, отсюда следует требуемое утверждение. $\square$

Серия B_n. Будем использовать реализацию классических алгебр Ли типов B, C и D, как в §2.2 и §5.1. Элементы $F_{11}, \dots, F_{nn}$ линейно порождают подалгебру Картана в $\mathfrak{o}_N$ при $N = 2n$ или $N = 2n+1$, которую мы обозначим через $\mathfrak{h}$. Подмножества элементов F_{ij} при $i < j$ и $i > j$ линейно порождают нильпотентные подалгебры $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ соответственно. Подалгебра $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}$ линейно порождается элементами F_{ij} при $i \geqslant j$.

Будем использовать алгебру дифференциальных операторов $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}[\partial]$ с соотношениями

$$\partial\, F^{(r)}_{ij} - F^{(r)}_{ij}\,\partial = F^{(r+1)}_{ij}. \tag{12.20}$$

Для произвольного элемента $g \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ и целого неотрицательного числа r элемент $g^{(r)}$ совпадает со свободным членом дифференциального оператора $\partial^r g$, как в (12.16).

Выберем главный нильпотентный элемент $f \in \mathfrak{o}_{2n+1}$ в виде

$$f = F_{2\,1} + F_{3\,2} + \dots + F_{n+1\,n}.$$

Теперь $\mathfrak{sl}_2$-тройка образована элементами $\{e, f, h\}$, где

$$e = \sum_{i=1}^{n} i\,(2n-i+1)\,F_{i\,i+1} \qquad \text{и} \qquad h = 2\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\,F_{i\,i}. \tag{12.21}$$

Невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма на алгебре Ли $\mathfrak{o}_{2n+1}$ определяется по правилу

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr} XY, \qquad X, Y \in \mathfrak{o}_{2n+1},$$

где X и Y считаются матрицами над $\mathbb{C}$, кососимметрическими относительно побочной диагонали.

Возьмём определитель (12.13) матрицы с элементами в алгебре $\mathcal{V}(\mathfrak{p})\otimes\mathbb{C}[\partial]$,

$$\det\begin{bmatrix}
\partial + F_{1\,1} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
F_{2\,1} & \partial + F_{2\,2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
F_{n\,1} & F_{n\,2} & \dots & \partial + F_{n\,n} & 1 & 0 & \dots & 0\\
F_{n+1\,1} & F_{n+1\,2} & \dots & F_{n+1\,n} & \partial & -1 & \dots & 0\\
F_{n'\,1} & F_{n'\,2} & \dots & 0 & F_{n'\,n+1} & \partial + F_{n'\,n'} & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots\\
F_{2'\,1} & 0 & \dots & \dots & F_{2'\,n+1} & F_{2'\,n'} & \dots & -1\\
0 & F_{1'\,2} & \dots & \dots & F_{1'\,n+1} & F_{1'\,n'} & \dots & \partial + F_{1'\,1'}
\end{bmatrix},$$

который имеет вид

$$\partial^{\,2n+1} + w_2\,\partial^{\,2n-1} + w_3\,\partial^{\,2n-2} + \dots + w_{2n+1}, \qquad w_i \in \mathcal{V}(\mathfrak{p}). \tag{12.22}$$

Теорема 12.2.3. *Все элементы $w_2, w_3, \dots, w_{2n+1}$ лежат в классической $\mathcal{W}$-алгебре $\mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n+1})$. Кроме того, элементы $w_2^{(r)}, w_4^{(r)}, \dots, w_{2n}^{(r)}$ при $r = 0, 1, \dots$ алгебраически независимы и порождают алгебру $\mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n+1})$.*

Доказательство. Рассуждение вполне аналогично доказательству теоремы 12.2.2. Обозначим определитель через D, и пусть D_i (соответственно $\overline{D}_i$) — минор размера $i \times i$, отвечающий первым (соответственно последним) i строкам и столбцам. Положим $D_0 = \overline{D}_0 = 1$. Из леммы 12.2.1 следует разложение

$$D = D_n\,\partial\,\overline{D}_n + \sum_{j,k=1}^{n+1}(-1)^{n-j+1}\,D_{j-1}\,F_{k'\,j}\,\overline{D}_{k-1}. \tag{12.23}$$

Для доказательства первой части теоремы заметим, что элементы F_{ij} при $1 \leqslant i, j \leqslant n$ линейно порождают подалгебру в $\mathfrak{o}_{2n+1}$, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{gl}_n$. Следовательно, по теореме 12.2.2, если $1 \leqslant i \leqslant n-1$, то

$$\rho\{F_{i\,i+1\;\lambda}\, D_k\} = 0 \qquad \text{и} \qquad \rho\{F_{i\,i+1\;\lambda}\, \overline{D}_k\} = 0$$

для всех $1 \leqslant k \leqslant n,\ k \neq i$. Кроме того,

$$\rho\{F_{i\,i+1\;\lambda}\, D_i\} = -D^+_{i-1} \qquad \text{и} \qquad \rho\{F_{i\,i+1\;\lambda}\, \overline{D}_i\} = \overline{D}_{i-1},$$

где, как и раньше, $P^+ = P(\partial+\lambda)$ для любого полинома $P = P(\partial) \in \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}[\partial]$. Поэтому если $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ и $k \neq i, i+1$, то

$$\rho\big\{F_{i\,i+1\;\lambda}\,(D_i\, F_{k'\,i+1}\, \overline{D}_{k-1} - D_{i-1}\, F_{k'\,i}\, \overline{D}_{k-1})\big\} = 0.$$

Аналогично если $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ и $j \neq i, i+1$, то

$$\rho\big\{F_{i\,i+1\;\lambda}\,(D_{j-1}\, F_{i'\,j}\, \overline{D}_{i-1} + D_{j-1}\, F_{(i+1)'\,j}\, \overline{D}_{i})\big\} = 0$$

и

$$\rho\big\{F_{i\,i+1\;\lambda}\,(D_{i-1}\, F_{(i+1)'\,i}\, \overline{D}_{i} - D_{i}\, F_{i'\,i+1}\, \overline{D}_{i-1})\big\} = 0.$$

Из этих соотношений вытекает, что $\rho\{F_{i\,i+1\;\lambda}\, D\} = 0$. Наконец, проводя аналогичные вычисления, получаем

$$\rho\{F_{n\,n+1\;\lambda}\, D\} = D^+_n\, (\partial + \lambda)\, \overline{D}_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} D^+_n\, F_{k'\,n'}\, \overline{D}_{k-1} - D^+_n\, (F_{n\,n} + \lambda)\, \overline{D}_{n-1}$$
$$- D^+_{n-1}\, \partial\, \overline{D}_n + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j+1}\, D^+_{j-1}\, F_{n\,j}\, \overline{D}_n - D^+_{n-1}\, (F_{n\,n} + \lambda)\, \overline{D}_n.$$

Применяя лемму 12.2.1 к определителям D^+_n и $\overline{D}_n$, приходим к соотношениям

$$D^+_n = D^+_{n-1}\, (\partial + \lambda + F_{n\,n}) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j}\, D^+_{j-1}\, F_{n\,j} \tag{12.24}$$

и

$$\overline{D}_n = (\partial + F_{n'\,n'})\, \overline{D}_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} F_{k'\,n'}\, \overline{D}_{k-1}, \tag{12.25}$$

из которых следует, что $\rho\{F_{n\,n+1\;\lambda}\, D\} = 0$. Таким образом, все элементы $w_2, \ldots, w_{2n+1}$ лежат в подалгебре $\mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n+1})$ алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Для доказательства второй части применим теорему 12.1.5. Нечётные степени $e, e^3, \ldots, e^{2n-1}$ матрицы e, заданной в (12.21), образуют базис централизатора $\mathfrak{o}^e_{2n+1}$. Поэтому, используя (12.8), получаем, что соотношение (12.7) выполнено для подпространства

$$U = \text{линейная оболочка } \ \{F_{12}, F_{14}, \ldots, F_{1\,2n}\},$$

так что $U^\perp$ — это линейная оболочка элементов множества

$$\{F_{ij} \ \text{ при } \ 1' \geqslant i \geqslant j > 1 \quad \text{и} \quad F_{2k-1\,1} \ \text{ при } \ k = 1, \ldots, n\}.$$

Вычислим теперь образы элементов $w_2, w_4, \dots, w_{2n}$ относительно изоморфизма (12.11). В качестве первого шага запишем каждый элемент w_{2m} в виде дифференциального полинома от переменных $F_{21}, F_{41}, \dots, F_{2n\,1}$ по модулю дифференциального идеала $\langle U^{\perp}\rangle$. Из формулы (12.15) и разложения (12.23) следует, что по модулю $\langle U^{\perp}\rangle$ определитель D равен

$$\begin{aligned} D \equiv \big(\partial^n - F_{21}\,\partial^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} F_{n1}\big)\,\partial\,\big(\partial^n - \partial^{n-2} F_{21} - \dots - F_{n1}\big) \\ + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^n F_{k'1}\big(\partial^{k-1} - \partial^{k-3} F_{21} - \dots - F_{k-1\,1}\big) \\ + \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{n-j+1}\big(\partial^{j-1} - F_{21}\,\partial^{j-3} + \dots + (-1)^{j-2} F_{j-1\,1}\big) F_{1'j}, \end{aligned}$$

где мы сохранили все переменные F_{p1} при $p \geqslant 2$. Из этого выражения видно, что если $2m \leqslant n$, то по модулю дифференциального идеала $\langle U^{\perp}\rangle$ элемент w_{2m} равен $-2F_{2m\,1}$ плюс линейная комбинация элементов $F_{q\,1}^{(s)}$ при $s+q = 2m$ и $s > 0$, а также произведений $F_{p\,1}\,F_{q\,1}^{(t)}$ при $p+q+t = 2m$, где все числа p, q, s, t чётные. Аналогично если $2m \geqslant n+1$, то элемент w_{2m} равен $2(-1)^n F_{2m\,1}$ плюс линейная комбинация элементов такого же вида, как выше.

С другой стороны, нечётные степени $f, f^3, \dots, f^{2n-1}$ матрицы f образуют базис централизатора $\mathfrak{o}_{2n+1}^{f}$. Заметим, что элемент f^{2m-1} совпадает с $\pm F_{2m\,1}$ по модулю $U^{\perp}$. Таким образом, мы можем заключить, что образы элементов $w_2^{(r)}, w_4^{(r)}, \dots, w_{2n}^{(r)}$ при $r = 0, 1, \dots$ относительно изоморфизма (12.11) — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_{2n+1}^{f})$, что и завершает доказательство. □

Серия D_n. Сохраним обозначения для образующих алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$, как выше для серии B_n. Теперь мы будем работать с алгеброй псевдодифференциальных операторов $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}((\partial^{-1}))$ с соотношениями (12.20) и

$$\partial^{-1} F_{ij}^{(r)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s F_{ij}^{(r+s)}\,\partial^{-s-1}.$$

Возьмём главный нильпотентный элемент $f \in \mathfrak{o}_{2n}$ в виде

$$f = F_{2\,1} + F_{3\,2} + \dots + F_{n\,n-1} + F_{n'\,n-1}.$$

Теперь $\mathfrak{sl}_2$-тройка образована элементами $\{e, f, h\}$, где

$$e = \sum_{i=1}^{n-2} i\,(2n-i-1)\,F_{i\,i+1} + \frac{n^2-n}{2}\,\big(F_{n-1\,n} + F_{n-1\,n'}\big) \quad \text{и} \tag{12.26}$$

$$h = 2\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\,F_{i\,i}.$$

Невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма на алгебре Ли $\mathfrak{o}_{2n}$ задаётся формулой

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr} XY, \qquad X, Y \in \mathfrak{o}_{2n},$$

где X и Y считаются кососимметрическими матрицами относительно побочной диагонали.

Рассмотрим следующую матрицу размера $(2n+1)\times(2n+1)$ с элементами в алгебре $\mathcal{V}(\mathfrak{p})\otimes\mathbb{C}((\partial^{-1}))$:

$$\begin{bmatrix} \partial+F_{1\,1} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ F_{2\,1} & \partial+F_{2\,2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1}-F_{n'1} & F_{n2}-F_{n'2} & \dots & \partial+F_{n\,n} & 0 & -2\partial & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \partial^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ F_{n'\,1} & F_{n'\,2} & \dots & 0 & 0 & \partial+F_{n'\,n'} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ F_{2'\,1} & 0 & \dots & \dots & 0 & F_{2'n'}-F_{2'n} & \dots & -1 \\ 0 & F_{1'\,2} & \dots & \dots & 0 & F_{1'\,n'}-F_{1'\,n} & \dots & \partial+F_{1'\,1'} \end{bmatrix}.$$

В ней все элементы строки и столбца с номером $n+1$ равны нулю, кроме матричного элемента $(n+1, n+1)$, равного ∂^{-1}. Матричные элементы (n, j) равны $F_{n\,j}-F_{n'\,j}$ при $j=1,\dots,n-1$, элемент (n,n) равен $\partial+F_{n\,n}$, а элемент $(n, n+2)$ равен -2∂, в то время как остальные элементы в строке n равны нулю. Остальные элементы в столбце $n+2$ — это разности $F_{k'\,n'}-F_{k'\,n}$ при $k=1,2,\dots,n-1$, которые находятся в соответствующих строках $2n-k+2$, и элемент $\partial+F_{n'\,n'}$ в строке $n+2$.

Нетрудно проверить, что столбцовый и строчный определители этой матрицы совпадают, так что формула (12.13) задаёт корректно определённый элемент, который мы обозначим через D. Применяя одновременное разложение по первым n столбцам и используя лемму 12.2.1, приходим к формуле

$$D = D_n\,\partial^{-1}\,\overline{D}_n + 2\sum_{j,k=1}^{n}(-1)^{n-j}\,D_{j-1}\,F_{k'\,j}\,\overline{D}_{k-1}, \tag{12.27}$$

где D_i (соответственно $\overline{D}_i$) обозначает минор размера $i\times i$, отвечающий первым (соответственно последним) i строкам и столбцам. Будем считать, что $D_0=\overline{D}_0=1$. Запишем разложения

$$D_n = \partial^{\,n} + y_1\,\partial^{\,n-1} + y_2\,\partial^{\,n-2} + \dots + y_n,$$

$$\overline{D}_n = \partial^{\,n} + \partial^{\,n-1}\,\bar{y}_1 + \partial^{\,n-2}\,\bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n,$$

которые однозначно определяют элементы $y_i, \bar{y}_i \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Лемма 12.2.4. *При всех $i=1,\dots,n$ справедлива формула $\bar{y}_i=(-1)^i\,y_i$.*

Доказательство. В миноре $\overline{D}_n$ заменим ∂ на $-\partial$ и умножим каждую строку на -1. Утверждение леммы равносильно тождеству

$$(-1)^n\,\overline{D}_n\Big|_{\partial\mapsto-\partial}=\partial^{\,n}+\partial^{\,n-1}\,y_1+\partial^{\,n-2}\,y_2+\dots+y_n.$$

Левая часть в нём — это определитель

$$\det\begin{bmatrix}\partial+F_{n\,n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ F_{n\,n-1}-F_{n'\,n-1} & \partial+F_{n-1\,n-1} & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ F_{n\,2}-F_{n'\,2} & F_{n-1\,2} & \dots & \dots & \partial+F_{2\,2} & 1\\ F_{n\,1}-F_{n'\,1} & F_{n-1\,1} & \dots & \dots & F_{2\,1} & \partial+F_{1\,1}\end{bmatrix}.$$

Требуемое тождество следует теперь из наблюдения, что этот определитель совпадает с образом минора D_n при антиавтоморфизме алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{p})\otimes\mathbb{C}[\partial]$, тождественном на образующих F_{ij} и ∂. □

По лемме 12.2.4 псевдодифференциальный оператор D можно записать в виде

$$D=\partial^{\,2n-1}+w_2\,\partial^{\,2n-3}+w_3\,\partial^{\,2n-4}+\dots+w_{2n-1}+(-1)^n\,y_n\,\partial^{-1}\,y_n \tag{12.28}$$

для некоторых элементов $w_i\in\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Теорема 12.2.5. *Коэффициенты $w_2,w_3,\dots,w_{2n-1}$ и y_n лежат в классической $\mathcal{W}$-алгебре $\mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n})$. Кроме того, элементы $w_2^{(r)},w_4^{(r)},\dots,w_{2n-2}^{(r)},y_n^{(r)}$ при $r=0,1,\dots$ алгебраически независимы и порождают алгебру $\mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n})$.*

Доказательство. Соотношение $\rho\{F_{i\,i+1}\,{}_\lambda\,D\}=0$ при каждом значении $1\leqslant i\leqslant n-1$ вытекает из тех же соображений, что и в доказательстве теоремы 12.2.3. Далее, пусть $\sigma=(n\,n')$ — это перестановка множества индексов $\{1,\dots,2n\}$, которая меняет местами n и $n'=n+1$ и оставляет все остальные индексы неподвижными. Отображение

$$\varsigma: F_{i\,j}\mapsto F_{\sigma(i)\,\sigma(j)} \tag{12.29}$$

задаёт инволютивный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$. Он продолжается до инволютивного автоморфизма пуассоновой вертексной алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_{2n})$. Проверим теперь, что все коэффициенты псевдодифференциального оператора D инвариантны относительно автоморфизма ς. В самом деле, применим следующие операции к строкам и столбцам данной матрицы. Заменим строку с номером $n+2$ суммой строк с номерами n и $n+2$. Затем заменим столбец с номером n суммой столбцов с номерами n и $n+2$. Наконец, умножим строку с номером n и столбец с номером $n+2$ на -1. В результате получим образ матрицы относительно инволюции (12.29). С другой стороны, определитель D не изменился. Это доказывает соотношение $\rho\{F_{n-1\,n'}\,{}_\lambda\,D\}=0$. Тем самым все коэффициенты оператора D лежат в подалгебре $\mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n})$.

Заметим, что минор D_n можно записать в виде

$$\begin{aligned}D_n=D_{n-1}\,(\partial+F_{n\,n})-D_{n-2}\,(F_{n\,n-1}-F_{n'\,n-1})\\ +\dots+(-1)^{n-2}\,D_1\,(F_{n\,2}-F_{n'\,2})+(-1)^{n-1}\,D_0\,(F_{n\,1}-F_{n'\,1}).\end{aligned} \tag{12.30}$$

Повторяя соответствующее вычисление из доказательства теоремы 12.2.2, находим, что $\rho\{F_{i\,i+1\ \lambda}\, D_n\} = 0$ при $i = 1, \ldots, n-1$. Далее,

$$\rho\{F_{n-1\,n'\ \lambda} D_n\} = -D^+_{n-1} - D^+_{n-2}\,(\partial + F_{n\,n}) + D^+_{n-2}\,(F_{n-1\,n-1} + F_{n\,n} + \lambda) \\ - D^+_{n-3}\, F_{n-1\,n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\, D^+_1\, F_{n-1\,2} + (-1)^n\, D^+_0\, F_{n-1\,1}.$$

Применяя соотношение (12.19) к определителю D^+_{n-1}, получим

$$\rho\{F_{n-1\,n'\ \lambda} D_n\} = -2\, D^+_{n-2}\,\partial.$$

Отсюда следует, что $\rho\{F_{n-1\,n'\ \lambda}\, y_n\} = 0$, поэтому свободный член y_n дифференциального оператора D_n лежит в подалгебре $\mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n})$.

Вторая часть теоремы будет следовать из теоремы 12.1.5. Нечётные степени $e, e^3, \ldots, e^{2n-3}$ матрицы e, заданной в (12.26), вместе с элементом $F_{1n} - F_{1n'}$ образуют базис централизатора $\mathfrak{o}^e_{2n}$. Поэтому из соотношения (12.8) следует, что разложение (12.7) справедливо для подпространства

$$U = \text{линейная оболочка} \quad \{F_{12}, F_{14}, \ldots, F_{1\,n}, F_{1\,n+1}, F_{1\,n+3}, \ldots, F_{1\,2n-1}\}$$

при чётных n, и для линейной оболочки U множества

$$\{F_{12}, F_{14}, \ldots, F_{1\,n-1}, F_{1n} - F_{1n+1}, F_{1\,n+2}, F_{1\,n+4}, \ldots, F_{1\,2n-1}\}$$

при нечётных n. Дополнительное подпространство $U^\perp$ к подпространству $\mathfrak{o}^f_{2n}$ в $\mathfrak{p}$ даётся формулой (12.9).

Как в доказательстве теоремы 12.2.3, из разложения (12.27) вытекает, что по модулю дифференциального идеала $\langle U^\perp\rangle$ определитель D равен

$$D \equiv \big(\partial^n - F_{21}\,\partial^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}(F_{n1} - F_{n'1})\big) \\ \times \partial^{-1}\big(\partial^n - \partial^{n-2}\, F_{21} - \cdots - (F_{n1} - F_{n'1})\big) \\ + 2\sum_{k=2}^{n} (-1)^{n-1} F_{k'1}\big(\partial^{k-1} - \partial^{k-3}\, F_{21} - \cdots - F_{k-1\,1}\big) \\ + 2\sum_{j=2}^{n} (-1)^{n-j}\big(\partial^{j-1} - F_{21}\,\partial^{j-3} + \cdots + (-1)^{j-2} F_{j-1\,1}\big) F_{1'j},$$

где мы сохранили все переменные F_{p1} при $p \geqslant 2$. Кроме того, в силу (12.30) имеет место формула $y_n \equiv (-1)^{n-1}(F_{n1} - F_{n'1})$. Поэтому если $2m \leqslant n-1$, то по модулю дифференциального идеала $\langle U^\perp\rangle$ элемент w_{2m} равен $-2F_{2m\,1}$ плюс линейная комбинация элементов $F^{(s)}_{q\,1}$ при $s + q = 2m$ и $s > 0$, а также произведений $F_{p\,1}\, F^{(t)}_{q\,1}$ при $p + q + t = 2m$, где все числа p, q, s, t чётные.

Далее мы рассмотрим случаи чётного и нечётного n отдельно. Если n чётно, то по модулю дифференциального идеала $\langle U^\perp\rangle$ коэффициент w_n равен $-2(F_{n1} + F_{n'1})$ плюс линейная комбинация такого же вида, как выше, при $2m = n$. Если $n + 2 \leqslant 2m \leqslant 2n - 2$, то элемент w_{2m} равен $-4\, F_{2m+1\,1}$ плюс такая же линейная комбинация. Если n нечётно и $n + 1 \leqslant 2m \leqslant 2n - 2$, то по модулю дифференциального идеала $\langle U^\perp\rangle$ коэффициент w_{2m} равен $4\, F_{2m+1\,1}$ плюс линейная комбинация такого же вида, как выше.

Нечётные степени $f, f^3, \dots, f^{2n-3}$ матрицы f и элемент $F_{n1} - F_{n'1}$ образуют базис централизатора $\mathfrak{o}_{2n}^f$. Заметим, что по модулю подпространства $U^\perp$ нечётная степень f^{2m-1} совпадает с элементом $F_{2m\,1}$, если $2m < n$, и с элементом $2(-1)^n F_{2m+1\,1}$, если $2m > n$. Кроме того, если n чётно, то степень f^{n-1} совпадает с $F_{n\,1} + F_{n'1}$ по модулю $U^\perp$. Таким образом, мы можем заключить, что образы элементов $w_2^{(r)}, w_4^{(r)}, \dots, w_{2n-2}^{(r)}$ и $y_n^{(r)}$ при $r = 0, 1, \dots$ относительно изоморфизма (12.11) — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_{2n}^f)$, что и завершает доказательство. □

Серия C_n. Мы будем использовать реализацию алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$, как в §2.2 и §5.1. Элементы $F_{11}, \dots, F_{nn}$ линейно порождают подалгебру Картана $\mathfrak{h}$. Подмножества элементов F_{ij} при $i < j$ и $i > j$ линейно порождают подалгебры $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ соответственно. Подалгебра $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}$ линейно порождается элементами F_{ij} при $i \geqslant j$.

Рассмотрим алгебру дифференциальных операторов $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}[\partial]$ с соотношениями

$$\partial\, F_{ij}^{(r)} - F_{ij}^{(r)}\, \partial = F_{ij}^{(r+1)}.$$

Если $g \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ и r — целое неотрицательное число, то элемент $g^{(r)}$ совпадает со свободным членом оператора $\partial^r g$, как в (12.16).

Возьмём главный нильпотент $f \in \mathfrak{sp}_{2n}$ в виде

$$f = F_{2\,1} + F_{3\,2} + \dots + F_{n\,n-1} + \frac{1}{2}\, F_{n'\,n}.$$

Здесь $\mathfrak{sl}_2$-тройка образована элементами $\{e, f, h\}$, где

$$e = \sum_{i=1}^{n-1} i\,(2n - i)\, F_{i\,i+1} + \frac{n^2}{2}\, F_{n\,n'} \qquad \text{и} \qquad h = \sum_{i=1}^{n} (2n - 2i + 1)\, F_{i\,i}.$$

Невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{sp}_{2n}$ задаётся формулой[1]

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr} XY, \qquad X, Y \in \mathfrak{sp}_{2n},$$

где X и Y — это симплектические матрицы над $\mathbb{C}$ размера $2n \times 2n$.

Возьмём определитель (12.13) матрицы с элементами в алгебре $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}[\partial]$:

$$\det \begin{bmatrix} \partial + F_{1\,1} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ F_{2\,1} & \partial + F_{2\,2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n\,1} & F_{n\,2} & \dots & \partial + F_{n\,n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ F_{n'\,1} & F_{n'\,2} & \dots & F_{n'\,n} & \partial + F_{n'\,n'} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{2'\,1} & F_{2'\,2} & \dots & F_{2'\,n} & F_{2'\,n'} & \dots & \dots & -1 \\ F_{1'\,1} & F_{1'\,2} & \dots & F_{1'\,n} & F_{1'\,n'} & \dots & \dots & \partial + F_{1'\,1'} \end{bmatrix}.$$

[1] Отметим дополнительный множитель 1/2 по сравнению с нормализованной формой Киллинга в §8.3.

Он имеет вид

$$\partial^{2n} + w_2\,\partial^{2n-2} + w_3\,\partial^{2n-3} + \cdots + w_{2n}, \qquad w_i \in \mathcal{V}(\mathfrak{p}). \tag{12.31}$$

Теорема 12.2.6. *Все коэффициенты $w_2, w_3, \ldots, w_{2n}$ лежат в классической $\mathcal{W}$-алгебре $\mathcal{W}(\mathfrak{sp}_{2n})$. Кроме того, все элементы $w_2^{(r)}, w_4^{(r)}, \ldots, w_{2n}^{(r)}$ при $r = 0, 1, \ldots$ алгебраически независимы и порождают алгебру $\mathcal{W}(\mathfrak{sp}_{2n})$.*

Доказательство. Обозначим определитель матрицы через D, и пусть D_i (соответственно $\overline{D}_i$) — это минор размера $i \times i$, отвечающий первым (соответственно последним) i строкам и столбцам. Положим $D_0 = \overline{D}_0 = 1$. Из леммы 12.2.1 вытекает разложение

$$D = D_n\,\overline{D}_n + \sum_{j,k=1}^{n} (-1)^{n-j+1}\,D_{j-1}\,F_{k'\,j}\,\overline{D}_{k-1}. \tag{12.32}$$

При $1 \leqslant i \leqslant n-1$ соотношение $\rho\{F_{i\,i+1\;\lambda}\,D\} = 0$ проверяется точно так же, как в доказательстве теоремы 12.2.3. Далее,

$$\begin{aligned}\rho\{F_{n\,n'\;\lambda}\,D\} = -2\,D^{+}_{n-1}\,\overline{D}_n + 2\,D^{+}_{n}\,\overline{D}_{n-1} + 2\sum_{k=1}^{n-1} D^{+}_{n-1}\,F_{k'\,n'}\,\overline{D}_{k-1}\\ - 2\,D^{+}_{n-1}\,(2\,F_{n\,n} + \lambda)\,\overline{D}_{n-1} + 2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-j+1}\,D^{+}_{j-1}\,F_{n\,j}\,\overline{D}_{n-1}.\end{aligned}$$

Это выражение равно нулю, поскольку соотношения (12.24) и (12.25) справедливы и в случае $\mathfrak{sp}_{2n}$. Таким образом, все элементы $w_2, w_3, \ldots, w_{2n}$ лежат в подалгебре $\mathcal{W}(\mathfrak{sp}_{2n})$ алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Применим теперь теорему 12.1.5. Нечётные степени $e, e^3, \ldots, e^{2n-1}$ матрицы e образуют базис централизатора $\mathfrak{sp}_{2n}^{e}$. Поэтому, используя (12.8), получаем, что разложение (12.7) выполнено для подпространства

$$U = \text{линейная оболочка} \quad \{F_{12}, F_{14}, \ldots, F_{1\,2n}\},$$

так что $U^{\perp}$ — это линейная оболочка множества

$$\{F_{ij} \ \text{ при } \ 1' \geqslant i \geqslant j > 1 \quad \text{и} \quad F_{2k-1\,1} \ \text{ при } \ k = 1, \ldots, n\}.$$

Представим каждый коэффициент w_{2m} как дифференциальный полином от переменных $F_{21}, F_{41}, \ldots, F_{2n\,1}$ по модулю дифференциального идеала $\langle U^{\perp}\rangle$. Из формулы (12.15) и разложения (12.32) следует, что по модулю $\langle U^{\perp}\rangle$ определитель D равен

$$\begin{aligned}D \equiv \big(\partial^{n} - F_{21}\,\partial^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}F_{n1}\big)\big(\partial^{n} - \partial^{n-2}\,F_{21} - \cdots - F_{n1}\big)\\ + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n}F_{k'1}\big(\partial^{k-1} - \partial^{k-3}\,F_{21} - \cdots - F_{k-1\,1}\big)\\ + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{n-j+1}\big(\partial^{j-1} - F_{21}\,\partial^{j-3} + \cdots + (-1)^{j-2}F_{j-1\,1}\big)F_{1'j},\end{aligned}$$

где мы сохранили все переменные F_{p1} при $p \geqslant 2$. Следовательно, если $2m \leqslant n$, то по модулю дифференциального идеала $\langle U^{\perp} \rangle$ элемент w_{2m} равен $-2F_{2m\,1}$ плюс линейная комбинация элементов $F_{q\,1}^{(s)}$ при $s+q=2m$ и $s>0$, а также произведений $F_{p\,1}F_{q\,1}^{(t)}$ при $p+q+t=2m$, где все числа p,q,s,t чётные. Аналогично если $n+1 \leqslant 2m$, то элемент w_{2m} равен $2(-1)^n F_{2m\,1}$ или $(-1)^n F_{2n\,1}$, при $m<2n$ или $m=2n$ соответственно плюс линейная комбинация такого же вида как выше.

Как для серии B_n, нечётные степени $f, f^3, \ldots, f^{2n-1}$ матрицы f образуют базис централизатора $\mathfrak{sp}_{2n}^f$. Матрица f^{2m-1} совпадает с элементом $\pm F_{2m\,1}$ по модулю подпространства $U^{\perp}$. Поэтому образы элементов $w_2^{(r)}, w_4^{(r)}, \ldots, w_{2n}^{(r)}$ при $r=0,1,\ldots$ относительно изоморфизма (12.11) — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{sp}_{2n}^f)$, что и завершает доказательство. □

§ 12.3. Проекция Шевалле

Вернёмся теперь к общей ситуации, связанной с произвольной простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, как в §12.1. Дифференциальная алгебра $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$ — это алгебра полиномов от переменных $h_j^{(r)} = \partial^r(h_j)$ при $r=0,1,\ldots$ и $j=1,\ldots,n$. Рассмотрим гомоморфизм дифференциальных алгебр

$$\phi : \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \to \mathcal{V}(\mathfrak{h}), \tag{12.33}$$

который задан на образующих как проекция $\mathfrak{p} \to \mathfrak{h}$ с ядром $\mathfrak{n}_-$. По теореме 12.1.4 классическая $\mathcal{W}$-алгебра $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ — это дифференциальная подалгебра в $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Теорема 12.3.1. *Ограничение гомоморфизма ϕ на подалгебру $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ инъективно. Следовательно, дифференциальная алгебра $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ изоморфна подалгебре $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{g}) = \phi\big(\mathcal{W}(\mathfrak{g})\big)$ в $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$.*

Доказательство (для классических серий). Мы покажем, что образы алгебраически независимых образующих алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$, построенных в §12.2, — это алгебраически независимые элементы алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$. Мы будем опираться на следующую общую лемму.

Лемма 12.3.2. *Предположим, что полиномы $v_1, \ldots, v_n$ от n переменных $h_1, \ldots, h_n$ алгебраически независимы. Тогда все производные $v_1^{(r)}, \ldots, v_n^{(r)}$ при $r=0,1,\ldots$ — это алгебраически независимые элементы алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что для любого неотрицательного целого числа p элементы $v_1^{(r)}, \ldots, v_n^{(r)}$ при $r=0,1,\ldots,p$ — это алгебраически независимые полиномы от переменных $h_1^{(r)}, \ldots, h_n^{(r)}$ при $r=0,1,\ldots,p$. Будем использовать якобианный критерий алгебраической независимости [**71**, Prop. 3.10]. По этому критерию полиномы $v_1^{(r)}, \ldots, v_n^{(r)}$ алгебраически независимы тогда и только тогда, когда якобиан не равен нулю, т. е.

$$\det\left[\frac{\partial v_i^{(r)}}{\partial h_j^{(s)}}\right] \neq 0. \tag{12.34}$$

Упорядочим строки и столбцы якобиана в соответствии с линейным порядком на переменных и полиномах, заданным по правилу $h_i^{(r)} \prec h_j^{(s)}$ и $v_i^{(r)} \prec v_j^{(s)}$, если $r < s$, а также полагая $h_1^{(r)} \prec \dots \prec h_n^{(r)}$ и $v_1^{(r)} \prec \dots \prec v_n^{(r)}$ для любого r. Далее, заметим, что

$$\frac{\partial v_i^{(r)}}{\partial h_j^{(r)}} = \frac{\partial v_i}{\partial h_j}$$

при $r = 0, 1, \dots, p$. Отсюда следует, что якобиан в формуле (12.34) имеет блочно-диагональную форму, в которой все $p+1$ диагональных блоков одинаковые и совпадают с якобианом

$$\det\left[\frac{\partial v_i}{\partial h_j}\right].$$

По предположению леммы этот якобиан отличен от нуля, поэтому свойство (12.34) тоже выполнено. □

Теперь рассмотрим каждую классическую серию отдельно.

Серия A_{N-1}. Образующие $w_1, \dots, w_N$ классической $\mathcal{W}$-алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ были получены в теореме 12.2.2. Соответствующие образы относительно гомоморфизма (12.33) — это элементы $\widetilde{w}_m \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$, которые находятся из соотношения

$$(\partial + E_{11}) \dots (\partial + E_{NN}) = \partial^{\,N} + \widetilde{w}_1\, \partial^{\,N-1} + \dots + \widetilde{w}_N.$$

Мы хотим показать, что все полиномы $\widetilde{w}_1^{(r)}, \dots, \widetilde{w}_N^{(r)}$ при $r = 0, 1, \dots$ алгебраически независимы. Достаточно проверить это свойство для их старших компонент относительно градуировки на алгебре $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$, заданной формулой $\deg E_{ii}^{(r)} = 1$ для всех i и r. Однако компонента старшей степени полинома $\widetilde{w}_m$ совпадает с m-м элементарным симметрическим полиномом (2.10) от переменных $E_{11}, \dots, E_{NN}$. Поскольку элементарные симметрические полиномы алгебраически независимы, желаемое свойство полиномов $\widetilde{w}_1^{(r)}, \dots, \widetilde{w}_N^{(r)}$ вытекает из леммы 12.3.2.

Серия B_n. Образы $\widetilde{w}_m \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ коэффициентов w_m дифференциального оператора (12.22) относительно гомоморфизма (12.33) находятся из соотношения

$$\begin{aligned}(\partial + F_{11}) \dots (\partial + F_{n\,n})\, \partial\, (\partial - F_{n\,n}) \dots (\partial - F_{11})& \\ = \partial^{\,2n+1} + \widetilde{w}_2\, \partial^{\,2n-1} + \widetilde{w}_3\, \partial^{\,2n-2} + \dots + \widetilde{w}_{2n+1}&.\end{aligned}$$

Зададим градуировку на алгебре $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$, полагая $\deg F_{ii}^{(r)} = 1$. При $k = 1, \dots, n$ компонента старшей степени полинома $(-1)^k \widetilde{w}_{2k}$ совпадает с k-м элементарным симметрическим полиномом от переменных $F_{11}^2, \dots, F_{nn}^2$. Следовательно, полиномы $\widetilde{w}_2^{(r)}, \widetilde{w}_4^{(r)}, \dots, \widetilde{w}_{2n}^{(r)}$ при $r = 0, 1, \dots$ алгебраически независимы по лемме 12.3.2.

Серия D_n. Образы коэффициентов $w_2, w_3, \dots, w_{2n-1}, y_n$ оператора D в разложении (12.28), относительно гомоморфизма (12.33) — это соответствующие элементы $\widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3, \dots, \widetilde{w}_{2n-1}, \widetilde{y}_n \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$, которые находятся из соотношения

$$(\partial + F_{11}) \dots (\partial + F_{n\,n})\, \partial^{-1}\, (\partial - F_{n\,n}) \dots (\partial - F_{11}) \\ = \partial^{\,2n-1} + \widetilde{w}_2\, \partial^{\,2n-3} + \widetilde{w}_3\, \partial^{\,2n-4} + \dots + \widetilde{w}_{2n-1} + (-1)^n\, \widetilde{y}_n\, \partial^{-1}\, \widetilde{y}_n.$$

В частности,

$$\widetilde{y}_n = (\partial + F_{11}) \dots (\partial + F_{n\,n})\, 1.$$

Как и в случае B_n, старшая компонента полинома $(-1)^k \widetilde{w}_{2k}$ — это k-й элементарный симметрический полином от переменных $F_{11}^2, \dots, F_{nn}^2$ при $k = 1, \dots, n-1$. Старшая компонента полинома $\widetilde{y}_n$ равна $F_{11} \dots F_{n\,n}$. Хорошо известно, что эти компоненты алгебраически независимы, так что доказательство завершается применением леммы 12.3.2.

Серия C_n. Образы $\widetilde{w}_m \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ коэффициентов w_m дифференциального оператора (12.31) относительно гомоморфизма (12.33) находятся из соотношения

$$(\partial + F_{11}) \dots (\partial + F_{n\,n})\, (\partial - F_{n\,n}) \dots (\partial - F_{11}) \\ = \partial^{\,2n} + \widetilde{w}_2\, \partial^{\,2n-2} + \widetilde{w}_3\, \partial^{\,2n-3} + \dots + \widetilde{w}_{2n}.$$

Как в случае B_n, старшая компонента полинома $(-1)^k \widetilde{w}_{2k}$ — это k-й элементарный симметрический полином от переменных $F_{11}^2, \dots, F_{nn}^2$ при $k = 1, \dots, n$. По лемме 12.3.2 полиномы $\widetilde{w}_2^{(r)}, \widetilde{w}_4^{(r)}, \dots, \widetilde{w}_{2n}^{(r)}$ при $r = 0, 1, \dots$ алгебраически независимы. $\square$

Инъективный гомоморфизм $\phi : \mathcal{W}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ из теоремы 12.3.1 называется *преобразованием Миуры*. Его образ $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{g}) = \phi\big(\mathcal{W}(\mathfrak{g})\big)$ можно рассматривать как альтернативную реализацию классической $\mathcal{W}$-алгебры. Именно эта реализация понадобится нам для описания образов векторов Сигала–Сугавары относительно изоморфизма Хариш-Чандры в гл. 13. В следующем параграфе мы обсудим ещё одно эквивалентное определение подалгебры $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ в терминах скрининговых операторов.

§ 12.4. Скрининговые операторы

Для каждого $i = 1, \dots, n$ введём *скрининговый оператор*

$$V_i^{\circ} : \mathcal{V}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{V}(\mathfrak{h})$$

по формуле

$$V_i^{\circ} = \sum_{r=0}^{\infty} V_{i\,r}^{\circ} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, \frac{\partial}{\partial h_j^{(r)}}, \tag{12.35}$$

где $A = [a_{ij}]$ — это матрица Картана простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а коэффициенты $V^{\circ}_{i\,r}$ — это элементы алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$, которые находятся из соотношения

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{V^{\circ}_{i\,r}\, z^r}{r!} = \exp\Big(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_i^{(m-1)}\, z^m}{\epsilon_i\, m!}\Big). \tag{12.36}$$

Положительные рациональные числа ϵ_i определены в (12.3). Их конкретные значения для классических серий будут выбраны ниже.

Предложение 12.4.1. *Образ $\phi(P)$ любого элемента $P \in \mathcal{W}(\mathfrak{g})$ относительно гомоморфизма* (12.33) *аннулируется всеми скрининговыми операторами:*

$$V^{\circ}_i\, \phi(P) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{g}) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \ker V^{\circ}_i. \tag{12.37}$$

Доказательство. Нам будет удобнее работать с эквивалентной аффинной версией дифференциальной алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$. Аффинная алгебра Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{g}}$ определяется как центральное расширение (6.5). Рассмотрим фактор $\mathrm{S}(\widehat{\mathfrak{g}})/\mathrm{I}$ симметрической алгебры $\mathrm{S}(\widehat{\mathfrak{g}})$ по идеалу I, порождённому подпространством $\mathfrak{g}[t]$ и элементом $K - 1$. Как векторное пространство, этот фактор изоморфен симметрической алгебре $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$. Отождествим дифференциальные алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$ с помощью изоморфизма

$$X^{(r)} \mapsto r!\, X[-r-1], \qquad X \in \mathfrak{g}, \quad r \geqslant 0, \tag{12.38}$$

так что дифференцирование ∂ будет соответствовать дифференцированию T алгебры $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$, определёному в (6.20). Точно так же отождествим дифференциальные алгебры $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \cong \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{p}[t^{-1}]\big)$.

В силу определения 12.1.3 если элемент $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ лежит в подалгебре $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$, то $\rho\{e_{i\,\lambda}\, P\} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Рассматривая P как элемент $\mathfrak{g}[t]$-модуля $\mathrm{S}(\widehat{\mathfrak{g}})/\mathrm{I} \cong \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$, мы можем записать[2]

$$\{e_{i\,\lambda}\, P\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!}\, e_i[r]\, P.$$

В алгебре Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ выполняются соотношения

$$\big[e_i[r], f_i[-s-1]\big] = h_i[r-s-1] + r\,\delta_{r,\,s+1}\,\epsilon_i\,K,$$

$$\big[e_i[r], h_j[-s-1]\big] = -a_{ji}\, e_i[r-s-1].$$

Кроме того, для каждого положительного корня $\alpha \neq \alpha_i$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$

$$\big[e_i[r], e_{-\alpha}[-s-1]\big] = c_i(\alpha)\, e_{-\alpha+\alpha_i}[r-s-1]$$

[2]Структура этого модуля отличается от определённой в (6.18), так как теперь центральный элемент K принимает в факторе значение 1.

для некоторой константы $c_i(\alpha)$, если $\alpha-\alpha_i$ — это корень; в противном случае коммутатор равен нулю. Поэтому из определения (12.6) гомоморфизма ρ мы можем заключить, что из условия принадлежности элемента P подалгебре $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ вытекают соотношения

$$\widehat{e}_i[r]\,P=0 \qquad \text{для всех}\quad i=1,\ldots,n \quad \text{и} \quad r\geqslant 0, \tag{12.39}$$

где $\widehat{e}_i[r]$ — это оператор в пространстве $\mathrm{S}\bigl(t^{-1}\mathfrak{p}[t^{-1}]\bigr)$:

$$\widehat{e}_i[r]=\sum_{s=r}^{\infty}h_i[r-s-1]\,\frac{\partial}{\partial f_i[-s-1]}+\epsilon_i\,r\,\frac{\partial}{\partial f_i[-r]}-\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\,\frac{\partial}{\partial h_j[-r-1]}$$
$$+\sum_{\alpha\in\Delta^+,\,\alpha\neq\alpha_i}\;\sum_{s=r}^{\infty}c_i(\alpha)\,e_{-\alpha+\alpha_i}[r-s-1]\,\frac{\partial}{\partial\,e_{-\alpha}[-s-1]}$$

и элемент $e_{-\alpha+\alpha_i}$ считается равным нулю, если $\alpha-\alpha_i$ не корень. Обозначим производящую функцию от z, введённую в (12.36), через $V_i^{\circ}(z)$ и заменим $h_i^{(m-1)}/(m-1)!$ на $h_i[-m]$ при $m\geqslant 1$ в соответствии с правилом (12.38). Для её производной справедлива формула

$$V_i^{\circ}{}'(z)=V_i^{\circ}(z)\Bigl(-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{h_i[-m]\,z^{m-1}}{\epsilon_i}\Bigr).$$

Взяв коэффициент при z^{p-1} при $p\geqslant 1$, приходим к соотношениям

$$\epsilon_i\,p\,\frac{V_{i\,p}^{\circ}}{p!}+\sum_{r=0}^{p-1}\frac{V_{i\,r}^{\circ}}{r!}\,h_i[r-p]=0. \tag{12.40}$$

В силу (12.39) элемент P обладает свойством

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{V_{i\,r}^{\circ}}{r!}\,\widehat{e}_i[r]\,P=0. \tag{12.41}$$

Из соотношения (12.40) вытекает, что производные $\partial/\partial f_i[-s-1]$ при всех $s\geqslant 0$ в разложении левой части (12.41) сократятся. Кроме того, элементы вида $e_{-\alpha+\alpha_i}[r-s-1]$, входящие в разложение оператора $\widehat{e}_i[r]$, обратятся в нуль под действием проекции (12.33). Таким образом, из формулы (12.41) следует, что образ $\phi(P)$ относительно этой проекции удовлетворяет соотношению

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{V_{i\,r}^{\circ}}{r!}\;\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\,\frac{\partial}{\partial h_j[-r-1]}\,\phi(P)=0,$$

которое можно записать как

$$\sum_{r=0}^{\infty}V_{i\,r}^{\circ}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\,\frac{\partial}{\partial\,h_j^{(r)}}\,\phi(P)=0,$$

т. е. $V_i^{\circ}\,\phi(P)=0$, как и требовалось. □

Вложение (12.37) в действительности является равенством. Это можно доказать сравнением рядов Гильберта–Пуанкаре обеих алгебр; см. [**46**, Ch. 8]. Мы приведём утверждение без доказательства.

Теорема 12.4.2. *Ограничение гомоморфизма ϕ на подалгебру $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ задаёт изоморфизм*

$$\phi : \mathcal{W}(\mathfrak{g}) \to \widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{g}),$$

где $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{g})$ — это подалгебра в $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$, состоящая из элементов, которые аннулируются всеми скрининговыми операторами V_i°:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{i=1}^{n} \ker V_i^\circ.$$

□

В оставшейся части этого параграфа мы опишем образующие классических $\mathcal{W}$-алгебр и скрининговые операторы, рассматривая $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ как подалгебру в симметрической алгебре $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$ с помощью изоморфизма (12.38).

Серия A_{N-1}. Для $i = 1, \ldots, N$ и для всех $r \geqslant 0$ введём новые переменные

$$\mu_{i'}[-r-1] = \frac{1}{r!}\, E_{i\,i}^{(r)}, \qquad i' = N - i + 1.$$

Тогда

$$h_i^{(r)} = r!\,\big(\mu_{i'}[-r-1] - \mu_{(i+1)'}[-r-1]\big), \qquad i = 1, \ldots, N-1,$$

и для частных производных справедливы формулы

$$\frac{\partial}{\partial \mu_{i'}[-r-1]} = -r!\,\frac{\partial}{\partial h_{i-1}^{(r)}} + r!\,\frac{\partial}{\partial h_i^{(r)}},$$

в которых слагаемые с недопустимыми индексами следует отбросить. Матрица Картана размера $(N-1)\times(N-1)$ имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

а диагональная матрица D в (12.3) — это единичная матрица. Поэтому сумма в (12.35) равна

$$r!\sum_{j=1}^{N-1} a_{ji}\,\frac{\partial}{\partial h_j^{(r)}} = r!\left(-\frac{\partial}{\partial h_{i-1}^{(r)}} + 2\,\frac{\partial}{\partial h_i^{(r)}} - \frac{\partial}{\partial h_{i+1}^{(r)}}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial \mu_{i'}[-r-1]} - \frac{\partial}{\partial \mu_{(i+1)'}[-r-1]},$$

так что скрининговый оператор (12.35) принимает вид $V_i^\circ = -V_{(i+1)'}$, где

$$V_i = \sum_{r=0}^{\infty} V_{i\,r} \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i[-r-1]} - \frac{\partial}{\partial \mu_{i+1}[-r-1]}\right), \qquad i = 1, \dots, N-1, \tag{12.42}$$

а коэффициенты $V_{i\,r}$ находятся из разложения

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{i\,r}\, z^r = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_i[-m] - \mu_{i+1}[-m]}{m}\, z^m. \tag{12.43}$$

В новых переменных элементы $\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_N$ алгебры $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{gl}_N)$ становятся коэффициентами $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$ в разложении в алгебре $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big) \otimes \mathbb{C}[\tau]$:

$$\big(\tau + \mu_N[-1]\big) \dots \big(\tau + \mu_1[-1]\big) = \tau^N + \mathcal{E}_1\, \tau^{N-1} + \dots + \mathcal{E}_N, \tag{12.44}$$

где для элемента τ выполнены соотношения

$$\big[\tau, \mu_i[r]\big] = -r\, \mu_i[r-1], \tag{12.45}$$

вытекающие из (7.1). Нам также понадобится оператор $T = \operatorname{ad} \tau$ — дифференцирование алгебры $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$ со свойствами $T1 = 0$ и

$$T\, \mu_i[r] = -r\, \mu_i[r-1]. \tag{12.46}$$

Чтобы получить более явные формулы для элементов $\mathcal{E}_m$, вспомним стандартные некоммутативные версии симметрических функций. Пусть $x_1, \dots, x_N$ — это переменные, которые мы будем считать элементами ассоциативной алгебры, не обязательно коммутативной. Тогда (некоммутативные) *полные* и *элементарные симметрические функции* от переменных $x_1, \dots, x_N$ определяются соответствующими формулами

$$h_m(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m}, \tag{12.47}$$

$$e_m(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i_1 > \dots > i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \tag{12.48}$$

при $m \geqslant 1$ и $h_0(x_1, \dots, x_N) = e_0(x_1, \dots, x_N) = 1$. Если переменные коммутируют, то это обозначение согласуется с (2.10) и (2.22).

Лемма 12.4.3. *Полные и элементарные симметрические функции связаны соотношениями*

$$h_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \sum_{a_1 + \dots + a_k = m} e_{a_1} \dots e_{a_k}, \tag{12.49}$$

$$e_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \sum_{a_1 + \dots + a_k = m} h_{a_1} \dots h_{a_k}, \tag{12.50}$$

в которых вторые суммы берутся по положительным целым числам a_i и мы положили $h_a = h_a(x_1, \dots, x_N)$ и $e_a = e_a(x_1, \dots, x_N)$.

Доказательство. Записывая определения (12.47) и (12.48) в терминах производящих функций, получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m q^m = (1 - q x_1)^{-1} \dots (1 - q x_N)^{-1},$$
$$\sum_{m=0}^{N} e_m q^m = (1 + q x_N) \dots (1 + q x_1).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m q^m = \Big(1 + \sum_{a=1}^{N} e_a (-q)^a\Big)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Big(\sum_{a=1}^{N} e_a (-q)^a\Big)^k.$$

Взяв коэффициенты при q^m в обеих частях, приходим к формуле (12.49). Меняя местами h_m и e_m, получаем (12.50) таким же рассуждением. □

Возвратимся к разложению (12.44). Рассмотрим специализацию переменных $x_i = \tau + \mu_i[-1]$ при $i = 1, \dots, N$ и запишем элементарную симметрическую функцию как полином от τ.

Предложение 12.4.4. *При $m = 1, \dots, N$ справедливы формулы*

$$e_m\big(\tau + \mu_1[-1], \dots, \tau + \mu_N[-1]\big) = \sum_{k=0}^{m} \binom{N-k}{m-k} \mathcal{E}_k \tau^{m-k}. \tag{12.51}$$

В частности, $\mathcal{E}_m$ совпадает со свободным членом полинома (12.51)*:*

$$\mathcal{E}_m = e_m\big(\tau + \mu_1[-1], \dots, \tau + \mu_N[-1]\big) 1, \tag{12.52}$$

если считать, что $\tau 1 = 0$.

Доказательство. Соотношения (12.45) останутся справедливыми после замены $\tau \mapsto u + \tau$, где u — это (коммутативная) переменная. Тогда из формулы (12.44) вытекает, что

$$\big(u + \tau + \mu_N[-1]\big) \dots \big(u + \tau + \mu_1[-1]\big) = \sum_{k=0}^{N} \mathcal{E}_k (u + \tau)^{N-k}.$$

Поскольку левая часть равна

$$\sum_{m=0}^{N} e_m\big(\tau + \mu_1[-1], \dots, \tau + \mu_N[-1]\big) u^{N-m},$$

остаётся сравнить коэффициенты при u^{N-m} в обеих частях. □

Пример 12.4.5. Справедливы формулы

$$\mathcal{E}_1 = \mu_1[-1] + \dots + \mu_N[-1],$$
$$\mathcal{E}_2 = \sum_{i>j} \mu_i[-1] \mu_j[-1] + \sum_{j=1}^{N} (N - j) \mu_j[-2].$$

□

По аналогии с (12.52) для всех $m \geqslant 0$ введём элементы $\mathcal{H}_m \in \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$, взяв свободные члены полных симметрических функций:

$$\mathcal{H}_m = h_m\big(\tau + \mu_1[-1], \ldots, \tau + \mu_N[-1]\big)1.$$

Пример 12.4.6. Справедливы формулы

$$\mathcal{H}_1 = \mu_1[-1] + \cdots + \mu_N[-1],$$

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{i \leqslant j} \mu_i[-1]\,\mu_j[-1] + \sum_{j=1}^{N} j\,\mu_j[-2].$$

□

Имеет место аналог предложения 12.4.4.

Предложение 12.4.7. *Для всех $m \geqslant 1$ выполнены соотношения*

$$h_m\big(\tau + \mu_1[-1], \ldots, \tau + \mu_N[-1]\big) = \sum_{k=0}^{m} \binom{N+m-1}{m-k} \mathcal{H}_k\,\tau^{m-k}.$$

Доказательство. Пусть u — это переменная, коммутирующая со всеми элементами x_i. Проверим тождество

$$h_m(u + x_1, \ldots, u + x_N) = \sum_{k=0}^{m} \binom{N+m-1}{m-k} h_k(x_1, \ldots, x_N)\,u^{m-k}. \tag{12.53}$$

Вычислим производящую функцию для последовательности в правой части:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{N+m-1}{m-k} h_k(x_1, \ldots, x_N)\,u^{m-k}\,q^m$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x_1, \ldots, x_N)\,q^k \sum_{m=k}^{\infty} \binom{N+m-1}{m-k} u^{m-k}\,q^{m-k}.$$

Это выражение равно

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x_1, \ldots, x_N)\,\frac{q^k}{(1-q\,u)^{N+k}} = (1 - q\,u - q\,x_1)^{-1} \ldots (1 - q\,u - q\,x_N)^{-1};$$

оно совпадает с производящей функцией последовательности в левой части соотношения (12.53).

Рассмотрим снова специализацию переменных $x_i = \tau + \mu_i[-1]$ при всех $i = 1, \ldots, N$ и введём коэффициенты $\mathcal{H}_k^{(m)}$ формулой

$$h_m\big(\tau + \mu_1[-1], \ldots, \tau + \mu_N[-1]\big) = \sum_{k=0}^{m} \mathcal{H}_k^{(m)}\,\tau^{m-k},$$

так что $\mathcal{H}_k^{(k)} = \mathcal{H}_k$. Из соотношения (12.53) следует, что

$$\sum_{k=0}^{m} \mathcal{H}_k^{(m)}\,(u+\tau)^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{N+m-1}{m-k} \sum_{p=0}^{k} \mathcal{H}_p^{(k)}\,\tau^{k-p}\,u^{m-k}.$$

Взяв коэффициенты при мономах $u^{m-k}\tau^0$, получим

$$\mathcal{H}_k^{(m)} = \binom{N+m-1}{m-k}\mathcal{H}_k,$$

как и требовалось. □

Следствие 12.4.8. *Каждое семейство элементов*

$$T^r\,\mathcal{E}_m \qquad и \qquad T^r\,\mathcal{H}_m$$

при $m=1,\ldots,N$ *и* $r=0,1,\ldots$ *алгебраически независимо и порождает классическую* $\mathcal{W}$*-алгебру* $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{gl}_N)\subset \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$.

Доказательство. Утверждение для первого семейства вытекает из части доказательства теоремы 12.3.1, относящейся к типу A. Из соотношений (12.49) и (12.51) следует, что каждый элемент $\mathcal{H}_m$ — это дифференциальный полином от элементов $\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_N$, и поэтому он лежит в подалгебре $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{gl}_N)$. Алгебраическая независимость семейства $T^r\,\mathcal{H}_m$ выводится из леммы 12.3.2 с учётом алгебраической независимости (коммутативных) полных симметрических полиномов $h_1,\ldots,h_N$ от N переменных. □

Отметим, что классическую $\mathcal{W}$-алгебру $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{sl}_N)$, отвечающую специальной линейной алгебре Ли $\mathfrak{sl}_N$, можно получить как фактор алгебры $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{gl}_N)$ по соотношению $\mathcal{E}_1=0$.

Из предложения 12.4.1 следует, что все элементы $\mathcal{E}_m$ аннулируются скрининговыми операторами V_i, определёнными в (12.42). Это свойство можно проверить и непосредственно, опираясь на соотношения для операторов в пространстве $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$.

Лемма 12.4.9. *При* $i=1,\ldots,N-1$ *справедливы соотношения*

$$V_i\,T = \big(T+\mu_i[-1]-\mu_{i+1}[-1]\big)\,V_i.$$

Доказательство. Так как V_i и T — это дифференцирования алгебры $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$, этим же свойством обладает и их коммутатор. Поэтому соотношение $[V_i,T]=\big(\mu_i[-1]-\mu_{i+1}[-1]\big)\,V_i$ достаточно проверить на образующих $\mu_j[-r]$. Оно, очевидно, выполнено при $j\neq i,i+1$, так что возьмём $j=i$ (случай $j=i+1$ будет отличаться только знаком). Используя обозначение (12.43), получаем

$$V_i\,T\,\mu_i[-r] = r\,V_i\,\mu_i[-r-1] = r\,V_{i\,r}.$$

С другой стороны,

$$\big(T+\mu_i[-1]-\mu_{i+1}[-1]\big)\,V_i\,\mu_i[-r] = \big(T+\mu_i[-1]-\mu_{i+1}[-1]\big)\,V_{i\,r-1}.$$

Обозначая производящую функцию (12.43) через $V_i(z)$, приходим к проверке соотношения

$$\partial_z\,V_i(z) = \big(T+\mu_i[-1]-\mu_{i+1}[-1]\big)\,V_i(z).$$

Оно действительно выполнено, так как обе части равны

$$V_i(z)\,\sum_{m=1}^{\infty}\big(\mu_i[-m]-\mu_{i+1}[-m]\big)\,z^{m-1},$$

что и завершает доказательство. $\square$

В качестве следствия леммы 12.4.9 и свойства $T = \operatorname{ad}\tau$ получаем следующие соотношения для операторов в пространстве $\mathrm{S}\bigl(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\bigr) \otimes \mathbb{C}[\tau]$:

$$V_i\,\tau = \bigl(\tau + \mu_i[-1] - \mu_{i+1}[-1]\bigr)\,V_i, \qquad i = 1, \ldots, N-1, \tag{12.54}$$

в которых τ рассматривается как оператор умножения на τ слева, а V_i действует на коэффициенты $c_k \in \mathrm{S}\bigl(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\bigr)$ полиномов от τ вида $\sum c_k \tau^k$. Соотношение

$$V_i\,\bigl(\tau + \mu_N[-1]\bigr) \ldots \bigl(\tau + \mu_1[-1]\bigr) = 0$$

теперь легко проверить. Оно сводится к частному случаю $N = 2$, в котором

$$\begin{aligned} &V_1\,\bigl(\tau + \mu_2[-1]\bigr)\bigl(\tau + \mu_1[-1]\bigr) \\ &\qquad = \Bigl(\bigl(\tau + \mu_1[-1] - \mu_2[-1]\bigr)\,V_1 + \mu_2[-1]\,V_1 - 1\Bigr)\bigl(\tau + \mu_1[-1]\bigr) \\ &\qquad = \bigl(\tau + \mu_1[-1]\bigr)\,V_1\,\bigl(\tau + \mu_1[-1]\bigr) - \bigl(\tau + \mu_1[-1]\bigr) = 0. \end{aligned}$$

Серия B_n. Для $i = 1, \ldots, n$ и всех $r \geqslant 0$ введём новые переменные

$$\mu_i[-r-1] = -\frac{1}{r!}\,F_{i\,i}^{(r)}.$$

Тогда $h_i^{(r)} = r!\,\bigl(-\mu_i[-r-1] + \mu_{i+1}[-r-1]\bigr)$ при $i = 1, \ldots, n-1$, в то время как $h_n^{(r)} = -2\,r!\,\mu_n[-r-1]$. Введём матрицу Картана для типа B_n:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

так что элементы матрицы $D = \operatorname{diag}[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n]$ в (12.3) имеют вид

$$\epsilon_1 = \cdots = \epsilon_{n-1} = 1 \qquad \text{и} \qquad \epsilon_n = 2.$$

Поэтому

$$r!\,\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\,\frac{\partial}{\partial h_j^{(r)}} = -\frac{\partial}{\partial \mu_i[-r-1]} + \frac{\partial}{\partial \mu_{i+1}[-r-1]}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

и

$$r!\,\sum_{j=1}^{n} a_{j\,n}\,\frac{\partial}{\partial h_j^{(r)}} = -\frac{\partial}{\partial \mu_n[-r-1]}.$$

Скрининговые операторы (12.35) принимают вид $V_i^{\circ} = -V_i$, где

$$V_i = \sum_{r=0}^{\infty} V_{i\,r}\,\Bigl(\frac{\partial}{\partial \mu_i[-r-1]} - \frac{\partial}{\partial \mu_{i+1}[-r-1]}\Bigr)$$

при $i=1,\dots,n-1$ и

$$V_n=\sum_{r=0}^{\infty} V_{n\,r}\,\frac{\partial}{\partial\mu_n[-r-1]}. \tag{12.55}$$

Коэффициенты $V_{i\,r}$ находятся из разложений

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{i\,r}\,z^r=\exp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_i[-m]-\mu_{i+1}[-m]}{m}\,z^m,\qquad i=1,\dots,n-1,$$

и

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{n\,r}\,z^r=\exp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_n[-m]}{m}\,z^m.$$

В новых переменных элементы $\widetilde{w}_2,\dots,\widetilde{w}_{2n+1}$ алгебры $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{o}_{2n+1})$ становятся соответствующими коэффициентами $\mathcal{E}_2,\dots,\mathcal{E}_{2n+1}$ в разложении в алгебре $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)\otimes\mathbb{C}[\tau]$:

$$\begin{aligned}\big(\tau-\mu_1[-1]\big)\dots\big(\tau-\mu_n[-1]\big)\,\tau\,\big(\tau+\mu_n[-1]\big)\dots\big(\tau+\mu_1[-1]\big)&\\ =\tau^{2n+1}+\mathcal{E}_2\,\tau^{2n-1}+\mathcal{E}_3\,\tau^{2n-2}+\dots+\mathcal{E}_{2n+1}&.\end{aligned}$$

В силу (12.52) получаем

$$\mathcal{E}_m=e_m\big(\tau+\mu_1[-1],\dots,\tau+\mu_n[-1],\tau,\tau-\mu_n[-1],\dots,\tau-\mu_1[-1]\big)\,1.$$

Соотношение

$$V_i\,\big(\tau-\mu_1[-1]\big)\dots\big(\tau-\mu_n[-1]\big)\,\tau\,\big(\tau+\mu_n[-1]\big)\dots\big(\tau+\mu_1[-1]\big)=0 \tag{12.56}$$

при $i=1,\dots,n-1$ проверяется точно так же, как для $\mathfrak{gl}_N$, с использованием (12.54). Кроме того, справедлива формула

$$V_n\,\tau=\big(\tau+\mu_n[-1]\big)\,V_n,$$

которая выводится таким же рассуждением как (12.54). Поэтому

$$\begin{aligned}V_n\,\big(\tau-\mu_n[-1]\big)\,\tau\,\big(\tau+\mu_n[-1]\big)&=\big(\tau\,V_n-1\big)\,\tau\,\big(\tau+\mu_n[-1]\big)\\ &=\tau\,\big(\tau+\mu_n[-1]\big)\,\big(\tau+2\,\mu_n[-1]\big)\,V_n,\end{aligned}$$

что приводит к соотношению (12.56) для $i=n$.

Как для серии A, из формул (12.49) и (12.51) следует, что при всех $m\geqslant 1$ элементы

$$\mathcal{H}_m=h_m\big(\tau+\mu_1[-1],\dots,\tau+\mu_n[-1],\tau,\tau-\mu_n[-1],\dots,\tau-\mu_1[-1]\big)\,1$$

лежат в алгебре $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{o}_{2n+1})$. Такое же рассуждение, как для следствия 12.4.8, вместе с частью доказательства теоремы 12.3.1 для типа B, приводит к следующему утверждению.

Следствие 12.4.10. *Каждое из семейств*

$$T^r\,\mathcal{E}_m\qquad и\qquad T^r\,\mathcal{H}_m$$

при $m=2,4,\dots,2n$ и $r=0,1,\dots$ алгебраически независимо и порождает классическую $\mathcal{W}$-алгебру $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{o}_{2n+1})\subset\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$. □

Серия D_n. Используя формулу (12.28) для определителя $D = D(\partial)$, введём элементы $e_m \in \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}[\partial]$ как коэффициенты формального ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} e_m\, q^m = q^{2n-1} D(\partial + q^{-1}).$$

Обозначим этот ряд через $e(q)$. Введём элементы $h_m \in \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \otimes \mathbb{C}[\partial]$ как коэффициенты ряда

$$h(q) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m\, q^m, \qquad h(q) = e(-q)^{-1}.$$

По теореме 12.2.5 все коэффициенты дифференциальных операторов e_m и h_m лежат в $\mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n})$. Опишем их образы относительно гомоморфизма (12.33). Полагая $a_{i\,i} = \partial + F_{i\,i}$, получаем

$$\phi : e(q) \mapsto (1 + q\, a_{1\,1}) \ldots (1 + q\, a_{n\,n})\, (1 + q\, \partial)^{-1}\, (1 + q\, a_{n'\,n'}) \ldots (1 + q\, a_{1'\,1'})$$

и, следовательно,

$$\phi : h(q) \mapsto (1 - q\, a_{1'\,1'})^{-1} \ldots (1 - q\, a_{n'\,n'})^{-1}\, (1 - q\, \partial)\, (1 - q\, a_{n\,n})^{-1} \ldots (1 - q\, a_{1\,1})^{-1}.$$

Поскольку $a_{n\,n} + a_{n'\,n'} = 2\partial$, справедливо соотношение

$$(1 - q\, a_{n'\,n'})^{-1}\, (1 - q\, \partial)\, (1 - q\, a_{n\,n})^{-1} = \frac{1}{2}\Big((1 - q\, a_{n\,n})^{-1} + (1 - q\, a_{n'\,n'})^{-1}\Big).$$

Это приводит к явным формулам для образов элементов h_m:

$$\phi(h_m) = \frac{1}{2} \sum_{k_{1'} + \cdots + k_1 = m} a_{1'1'}^{k_{1'}} \ldots a_{n'\,n'}^{k_{n'}}\, a_{n-1\,n-1}^{k_{n-1}} \ldots a_{1\,1}^{k_1} + \frac{1}{2} \sum_{k_{1'} + \cdots + k_1 = m} a_{1'1'}^{k_{1'}} \ldots a_{(n-1)'\,(n-1)'}^{k_{(n-1)'}}\, a_{n\,n}^{k_n} \ldots a_{1\,1}^{k_1}. \tag{12.57}$$

Чтобы вложить классическую $\mathcal{W}$-алгебру в алгебру $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$, для всех $i = 1, \ldots, n$ и всех $r \geqslant 0$ положим

$$\mu_i[-r-1] = -\frac{1}{r!}\, F_{i\,i}^{(r)}.$$

Тогда

$$h_i^{(r)} = r!\,\big(-\mu_i[-r-1] + \mu_{i+1}[-r-1]\big), \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

и

$$h_n^{(r)} = -r!\,\big(\mu_{n-1}[-r-1] + \mu_n[-r-1]\big).$$

Матрица Картана имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

так что

$$r! \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \frac{\partial}{\partial h_j^{(r)}} = -\frac{\partial}{\partial \mu_i[-r-1]} + \frac{\partial}{\partial \mu_{i+1}[-r-1]}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

и

$$r! \sum_{j=1}^{n} a_{j\,n} \frac{\partial}{\partial h_j^{(r)}} = -\frac{\partial}{\partial \mu_{n-1}[-r-1]} - \frac{\partial}{\partial \mu_n[-r-1]}.$$

Диагональная матрица D в (12.3) — это единичная матрица. Скрининговые операторы (12.35) принимают вид $V_i^\circ = -V_i$, где

$$V_i = \sum_{r=0}^{\infty} V_{i\,r} \Big(\frac{\partial}{\partial \mu_i[-r-1]} - \frac{\partial}{\partial \mu_{i+1}[-r-1]} \Big)$$

при $i = 1, \ldots, n-1$ и

$$V_n = \sum_{r=0}^{\infty} V_{n\,r} \Big(\frac{\partial}{\partial \mu_{n-1}[-r-1]} + \frac{\partial}{\partial \mu_n[-r-1]} \Big). \tag{12.58}$$

Коэффициенты $V_{i\,r}$ задаются соотношениями

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{i\,r}\, z^r = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_i[-m] - \mu_{i+1}[-m]}{m}\, z^m, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

и

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{n\,r}\, z^r = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_{n-1}[-m] + \mu_n[-m]}{m}\, z^m.$$

Элементы $\widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3, \ldots, \widetilde{w}_{2n-1}$ и $\widetilde{y}_n$ алгебры $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{o}_{2n})$ принимают вид коэффициентов $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \ldots, \mathcal{E}_{2n-1}$ и $\mathcal{E}_n^\circ$ в разложении псевдодифференциального оператора

$$\begin{aligned}\big(\tau - \mu_1[-1]\big) \ldots \big(\tau - \mu_n[-1]\big)\, \tau^{-1} \big(\tau + \mu_n[-1]\big) \ldots \big(\tau + \mu_1[-1]\big)\\ = \tau^{\,2n-1} + \mathcal{E}_2\, \tau^{\,2n-3} + \mathcal{E}_3\, \tau^{\,2n-4} + \cdots + \mathcal{E}_{2n-1} + (-1)^n\, \mathcal{E}_n^\circ\, \tau^{-1}\, \mathcal{E}_n^\circ.\end{aligned}$$

В частности,

$$\mathcal{E}_n^\circ = \big(\tau - \mu_1[-1]\big) \ldots \big(\tau - \mu_n[-1]\big)\, 1. \tag{12.59}$$

Тождество

$$V_i \big(\tau - \mu_1[-1]\big) \ldots \big(\tau - \mu_n[-1]\big)\, \tau^{-1} \big(\tau + \mu_n[-1]\big) \ldots \big(\tau + \mu_1[-1]\big) = 0 \tag{12.60}$$

проверяется с использованием формул (12.54) и дополнительных соотношений

$$V_i\, \tau^{-1} = \big(\tau + \mu_i[-1] - \mu_{i+1}[-1]\big)^{-1} V_i, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

и

$$V_n\, \tau^{-1} = \big(\tau + \mu_{n-1}[-1] + \mu_n[-1]\big)^{-1} V_n. \tag{12.61}$$

Чтобы провести вычисление при $i = n$ в (12.60), достаточно взять $n = 2$. Тогда

$$\begin{aligned}&V_2\,\big(\tau-\mu_1[-1]\big)\big(\tau-\mu_2[-1]\big)\,\tau^{-1}\,\big(\tau+\mu_2[-1]\big)\big(\tau+\mu_1[-1]\big)\\&\quad=\Big(\big(\tau+\mu_2[-1]\big)\,V_2-1\Big)\big(\tau-\mu_2[-1]\big)\,\tau^{-1}\,\big(\tau+\mu_2[-1]\big)\big(\tau+\mu_1[-1]\big)\\&\quad=\Big(\big(\tau+\mu_2[-1]\big)\big(\tau+\mu_1[-1]\big)\,V_2-2\,\tau\Big)\,\tau^{-1}\,\big(\tau+\mu_2[-1]\big)\big(\tau+\mu_1[-1]\big).\end{aligned}$$

Далее, применяя оператор V_2, получаем

$$\begin{aligned}V_2\,\big(\tau+\mu_2[-1]\big)\big(\tau+\mu_1[-1]\big)&=\Big(\big(\tau+\mu_1[-1]+2\,\mu_2[-1]\big)\,V_2+1\Big)\big(\tau+\mu_1[-1]\big)\\&=2\,\big(\tau+\mu_1[-1]+\mu_2[-1]\big),\end{aligned}$$

так что в силу (12.61):

$$V_2\,\tau^{-1}\,\big(\tau+\mu_2[-1]\big)\big(\tau+\mu_1[-1]\big)=2,$$

что и завершает вычисление. Соотношения

$$V_i\,\big(\tau-\mu_1[-1]\big)\dots\big(\tau-\mu_n[-1]\big)\,1=0,\qquad i=1,\dots,n,$$

проверяются с применением формул (12.54).

Используя обозначение (12.47), мы можем записать свободные члены элементов (12.57) в терминах новых переменных в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_m&=\tfrac12\,h_m\big(\tau+\mu_1[-1],\dots,\tau+\mu_{n-1}[-1],\tau-\mu_n[-1],\dots\tau-\mu_1[-1]\big)1\\&\quad+\tfrac12\,h_m\big(\tau+\mu_1[-1],\dots,\tau+\mu_n[-1],\tau-\mu_{n-1}[-1],\dots\tau-\mu_1[-1]\big)1.\end{aligned}\tag{12.62}$$

Таким образом, из части доказательства теоремы 12.3.1, относящейся к типу D, вытекает следующее утверждение.

Следствие 12.4.11. *Каждое из семейств*

$$T^r\mathcal{E}_2,\,T^r\mathcal{E}_4,\dots,T^r\mathcal{E}_{2n-2},\ T^r\mathcal{E}_n^\circ$$

и

$$T^r\mathcal{H}_2,\,T^r\mathcal{H}_4,\dots,T^r\mathcal{H}_{2n-2},\ T^r\mathcal{E}_n^\circ$$

при r, пробегающем множество целых неотрицательных чисел, алгебраически независимо и порождает классическую $\mathcal{W}$-алгебру $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{o}_{2n})\subset \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$. □

Серия C_n. Чтобы вложить классическую $\mathcal{W}$-алгебру в симметрическую алгебру $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$, для всех $i = 1,\dots,n$ и всех $r \geqslant 0$ введём новые переменные

$$\mu_i[-r-1]=-\frac{1}{r!}\,F_{ii}^{(r)}.$$

При $i = 1, \ldots, n-1$ имеем соотношения $h_i^{(r)} = r!\left(-\mu_i[-r-1] + \mu_{i+1}[-r-1]\right)$. Кроме того, $h_n^{(r)} = -r!\,\mu_n[-r-1]$. Матрица Картана имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

так что элементы матрицы $D = \operatorname{diag}[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n]$ даются формулами

$$\epsilon_1 = \cdots = \epsilon_{n-1} = 1 \qquad \text{и} \qquad \epsilon_n = 1/2.$$

Следовательно,

$$r! \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \frac{\partial}{\partial h_j^{(r)}} = -\frac{\partial}{\partial \mu_i[-r-1]} + \frac{\partial}{\partial \mu_{i+1}[-r-1]}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

и

$$r! \sum_{j=1}^{n} a_{j\,n} \frac{\partial}{\partial h_j^{(r)}} = -\frac{2\,\partial}{\partial \mu_n[-r-1]}.$$

Поэтому при $i = 1, \ldots, n-1$ скрининговые операторы (12.35) приобретают вид $V_i^\circ = -V_i$, где

$$V_i = \sum_{r=0}^{\infty} V_{i\,r} \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i[-r-1]} - \frac{\partial}{\partial \mu_{i+1}[-r-1]}\right),$$

и $V_n^\circ = -2\,V_n$, где

$$V_n = \sum_{r=0}^{\infty} V_{n\,r} \frac{\partial}{\partial \mu_n[-r-1]}. \tag{12.63}$$

Коэффициенты $V_{i\,r}$ находятся из формул

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{i\,r}\, z^r = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_i[-m] - \mu_{i+1}[-m]}{m}\, z^m, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

и

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{n\,r}\, z^r = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\,\mu_n[-m]}{m}\, z^m.$$

Элементам $\widetilde{w}_2, \ldots, \widetilde{w}_{2n}$ алгебры $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{sp}_{2n})$ соответствуют коэффициенты $\mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_{2n}$ в разложении в алгебре $\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big) \otimes \mathbb{C}[\tau]$:

$$\begin{aligned}\big(\tau - \mu_1[-1]\big) \ldots \big(\tau - \mu_n[-1]\big)\big(\tau + \mu_n[-1]\big) \ldots \big(\tau + \mu_1[-1]\big)& \\ = \tau^{2n} + \mathcal{E}_2\, \tau^{2n-2} + \mathcal{E}_3\, \tau^{2n-3} + \cdots + \mathcal{E}_{2n}&.\end{aligned}$$

Из формулы (12.52) получаем

$$\mathcal{E}_m = e_m\big(\tau + \mu_1[-1], \ldots, \tau + \mu_n[-1], \tau - \mu_n[-1], \ldots, \tau - \mu_1[-1]\big)1.$$

При $i = 1, \ldots, n-1$ соотношение

$$V_i \big(\tau - \mu_1[-1]\big) \ldots \big(\tau - \mu_n[-1]\big)\big(\tau + \mu_n[-1]\big) \ldots \big(\tau + \mu_1[-1]\big) = 0 \tag{12.64}$$

проверяется, как в случае $\mathfrak{gl}_N$, с использованием формулы (12.54). При $i = n$ имеем

$$V_n \tau = \big(\tau + 2\mu_n[-1]\big) V_n,$$

так что

$$\begin{aligned} V_n \big(\tau - \mu_n[-1]\big)\big(\tau + \mu_n[-1]\big) &= \Big(\big(\tau + \mu_n[-1]\big) V_n - 1\Big)\big(\tau + \mu_n[-1]\big) \\ &= \big(\tau + \mu_n[-1]\big)\big(\tau + 3\mu_n[-1]\big) V_n, \end{aligned}$$

откуда и следует соотношение (12.64).

В силу (12.49) и (12.51) для всех $m \geqslant 1$ элементы

$$\mathcal{H}_m = h_m\big(\tau + \mu_1[-1], \ldots, \tau + \mu_n[-1], \tau - \mu_n[-1], \ldots, \tau - \mu_1[-1]\big) 1 \tag{12.65}$$

лежат в алгебре $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{sp}_{2n})$. Как и для следствия 12.4.8, из доказательства теоремы 12.3.1, относящегося к типу C, вытекает следующее утверждение.

Следствие 12.4.12. *Каждое из семейств*

$$T^r \mathcal{E}_m \qquad \text{и} \qquad T^r \mathcal{H}_m$$

при $m = 2, 4, \ldots, 2n$ *и* $r = 0, 1, \ldots$ *алгебраически независимо и порождает классическую* $\mathcal{W}$*-алгебру* $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{sp}_{2n}) \subset \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$. □

§ 12.5. Библиографические замечания

Классические $\mathcal{W}$-алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ были определены Дринфельдом и Соколовым в работе [**33**] и использовались, чтобы ввести уравнения типа КдФ для произвольных простых алгебр Ли $\mathfrak{g}$. В обзоре Аракавы [**4**] обсуждается их связь с аффинными $\mathcal{W}$-алгебрами. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ алгебра $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ изоморфна алгебре Адлера–Гельфанда–Дикого [**1**], [**56**]. По поводу определения классических $\mathcal{W}$-алгебр с помощью скрининговых операторов см. книгу [**46**, Ch. 8]. В изложении §12.2 мы следовали статье [**115**], в которой также получены образующие алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ для типа G_2. Более общие результаты, описывающие образующие классических $\mathcal{W}$-алгебр $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, f)$ для произвольных нильпотентных элементов f и скобки Пуассона между ними, содержатся в работах Де Соле, Каца и Валери [**27**], [**28**]. Функции (12.47) и (12.48) можно рассматривать как специализации некоммутативных симметрических функций в смысле общей теории, развитой Гельфандом и др. [**57**].

Глава 13

Аффинный изоморфизм Хариш-Чандры

В аффинной версии изоморфизма Хариш-Чандры (4.7) центр $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ заменяется на центр $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ пополненной универсальной обёртывающей алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$ на критическом уровне. Роль алгебры W-инвариантов в $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$ теперь играет пополненная классическая $\mathcal{W}$-алгебра, отвечающая двойственной по Ленглендсу алгебре Ли ${}^L\mathfrak{g}$ (она соответствует транспонированной матрице Картана для $\mathfrak{g}$). Эта версия аффинного изоморфизма Хариш-Чандры оказывается производной от изоморфизма между центром Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ и классической $\mathcal{W}$-алгеброй $\mathcal{W}({}^L\mathfrak{g})$. Сформулированная ниже теорема 13.1.1 восходит к работе [**39**], и её подробное доказательство дано в книге Э. Френкеля [**46**, Theorem 4.3.2]. Вместе с другой теоремой [**46**, Theorem 4.3.6] это основные результаты книги. Эти теоремы устанавливают дополнительные свойства изоморфизмов для центров: классические $\mathcal{W}$-алгебры можно понимать как алгебры функций на геометрических объектах, называемых *операми*, и обе версии аффинного изоморфизма Хариш-Чандры эквивариантны относительно замены переменных. Доказательства в книге [**46**] опираются на свойства *модулей Вакимото* над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ и на тот факт, что элементы центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ действуют в этих модулях как умножения на скаляры.

Мы не будем выходить за рамки алгебраического утверждения, касающегося изоморфизма Хариш-Чандры, и не будем использовать модули Вакимото для доказательства (хотя для вычисления образов векторов Сигала–Сугавары для серии C мы будем полагаться на теорему 13.1.1). Вместо этого для классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$ мы применим более прямой подход, основанный на янгианной версии изоморфизма Хариш-Чандры, которая обсуждалась в гл. 10 и 11; ср. [**51**, Sec. 8]. Тем не менее, мы вернёмся к модулям Вакимото в гл. 15 и вычислим собственные значения операторов Сугавары, построенных в гл. 7 и 8, которые действуют в этих модулях.

§ 13.1. Центры Фейгина–Френкеля и классические $\mathcal{W}$-алгебры

Как в § 4.2, предположим, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ — это треугольное разложение простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отождествим подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ с подалгеброй в $\widehat{\mathfrak{g}}$ с помощью вложения, при котором элемент $H \in \mathfrak{h}$ переходит в $H[0]$. Присоединённое действие алгебры $\mathfrak{h}$ в пространстве $t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$ продолжается на универсальную обёртывающую алгебру, и имеет место естественный аналог гомоморфизма (4.6) для $\mathfrak{h}$-централизатора:

$$\mathfrak{f} : \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{h}} \to \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big). \tag{13.1}$$

Этот гомоморфизм есть проекция на первое слагаемое в разложении в прямую сумму

$$\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{h}} = \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big) \oplus \Big(\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{h}} \cap \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)\, t^{-1}\mathfrak{n}_-[t^{-1}]\Big).$$

Второе слагаемое — это ядро проекции, которое совпадает с пересечением подпространств

$$\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{h}} \cap t^{-1}\mathfrak{n}_+[t^{-1}]\, \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big).$$

Отметим, что подалгебры $\mathfrak{n}_-$ и $\mathfrak{n}_+$ поменялись ролями по сравнению с проекцией (4.6). Это изменение необходимо, чтобы определение гомоморфизма согласовалось с традиционными формулами для модулей Вакимото. Ясно, что дифференцирование T алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$, определённое в (6.13), сохраняет $\mathfrak{h}$-централизатор и что гомоморфизм $\mathfrak{f}$ коммутирует с T.

Вспомним, что центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это центр вертексной алгебры $V_{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ и мы можем рассматривать $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ как коммутативную подалгебру централизатора $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{h}}$; см. §6.2.

Применяя теорему 12.3.1 вместе с изоморфизмом (12.38), будем рассматривать классическую $\mathcal{W}$-алгебру как подалгебру в $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big) \cong \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ и будем писать $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ вместо $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathfrak{g})$. Отождествим подалгебры Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и в алгебре Ли ${}^L\mathfrak{g}$, двойственной к ней по Ленглендсу, с помощью естественного изоморфизма, так что алгебру $\mathcal{W}({}^L\mathfrak{g})$ можно считать подалгеброй в $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$.

Аффинная версия изоморфизма Хариш-Чандры для алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ даётся следующей теоремой.

Теорема 13.1.1. *Ограничение гомоморфизма* (13.1) *на подалгебру* $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ *задаёт изоморфизм*

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \to \mathcal{W}({}^L\mathfrak{g}). \tag{13.2}$$

Для классических серий (за исключением серии C) теорема будет следовать из вычисления образов Хариш-Чандры семейств алгебраически независимых образующих алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, построенных в гл. 7 и 8. Мы проверим отдельно для серий A, B и D, что эти образы совпадают с алгебраически независимыми образующими алгебры $\mathcal{W}({}^L\mathfrak{g})$, описанными в гл. 12. В случае серии C для вычисления образов мы будем опираться на теорему 13.1.1.

Мы будем использовать элемент τ, определённый в (7.1), и рассмотрим естественное продолжение гомоморфизма (13.1) до гомоморфизма

$$\mathfrak{f} : \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{h}} \otimes \mathbb{C}[\tau] \to \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big) \otimes \mathbb{C}[\tau], \tag{13.3}$$

который действует как тождественное отображение на $\mathbb{C}[\tau]$.

Серия A_{N-1}. Возьмём $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ и сохраним обозначения из §7.1. Нам понадобятся некоммутативные полные и элементарные симметрические функции, определённые в (12.47) и (12.48). Положим

$$\mu_i[-r] = E_{ii}[-r], \qquad i = 1, \ldots, N \quad \text{и} \quad r = 1, 2, \ldots$$

Предложение 13.1.2. *Для образов относительно гомоморфизма* (13.3) *справедливы формулы*

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)}\big(\tau + E[-1]_1\big) \ldots \big(\tau + E[-1]_m\big) \mapsto e_m\big(\tau + \mu_1[-1], \ldots, \tau + \mu_N[-1]\big) \tag{13.4}$$

и

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)}\big(\tau + E[-1]_1\big) \ldots \big(\tau + E[-1]_m\big) \mapsto h_m\big(\tau + \mu_1[-1], \ldots, \tau + \mu_N[-1]\big). \tag{13.5}$$

Доказательство. Будем рассуждать, как в доказательстве предложения 4.6.1. Заметим, что $\tau + E[-1]$ — это матрица Манина по лемме 7.1.2. В силу замечания 3.2.3 для матрицы Манина M выполняется соотношение

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)} M_1 \ldots M_m = \sum_{N \geqslant i_1 > \cdots > i_m \geqslant 1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}\sigma \cdot M_{i_{\sigma(1)}\, i_1} \ldots M_{i_{\sigma(m)}\, i_m}.$$

Взяв $M = \tau + E[-1]$, получаем, что образ произведения

$$M_{i_{\sigma(1)}\, i_1} \ldots M_{i_{\sigma(m)}\, i_m}$$

относительно гомоморфизма $\mathfrak{f}$ равен нулю, кроме случая, когда σ — это тождественная перестановка. В этом случае образ равен

$$M_{i_1 i_1} \ldots M_{i_m i_m} = \big(\tau + \mu_{i_1}[-1]\big) \ldots \big(\tau + \mu_{i_m}[-1]\big),$$

что доказывает формулу (13.4). Для проверки формулы (13.5) применим версию соотношения (3.18) из замечания 3.2.3:

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)} M_1 \ldots M_m = \sum_{N \geqslant i_1 \geqslant \cdots \geqslant i_m \geqslant 1} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} M_{i_m\, i_{\sigma(m)}} \ldots M_{i_1\, i_{\sigma(1)}},$$

где α_i — это кратность индекса $i \in \{1, \ldots, N\}$ в мультимножестве $\{i_1, \ldots, i_m\}$. Образ произведения $M_{i_m\, i_{\sigma(m)}} \ldots M_{i_1\, i_{\sigma(1)}}$ относительно гомоморфизма $\mathfrak{f}$ равен нулю, кроме случая, когда перестановка σ оставляет мультимножество $\{i_1, \ldots, i_m\}$ неподвижным. С учётом числа перестановок, стабилизирующих мультимножество, получаем требуемую формулу; ср. доказательство предложения 4.7.1. □

Отметим, что формула (13.5) вытекает также из (13.4), если применить теорему Макмагона (теорема 3.2.1).

Следствие 13.1.3. *Для гомоморфизма* (13.3) *имеем*

$$\mathfrak{f} : \operatorname{cdet}\big(\tau + E[-1]\big) \mapsto \big(\tau + \mu_N[-1]\big) \dots \big(\tau + \mu_1[-1]\big) \tag{13.6}$$

и

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} : \sum_{m=0}^{\infty} q^m \operatorname{tr}\big(\tau + E[-1]\big)^m & \\ \mapsto \sum_{i=1}^{N} \Big(1 - q\left(\tau + \mu_1[-1]\right)\Big)^{-1} & \cdots \Big(1 - q\left(\tau + \mu_i[-1]\right)\Big)^{-1} \\ & \times \Big(1 - q\left(\tau + \mu_{i-1}[-1]\right)\Big) \cdots \Big(1 - q\left(\tau + \mu_1[-1]\right)\Big), \end{aligned} \tag{13.7}$$

где q — это независимая переменная.

Доказательство. Формула (13.6) вытекает из (7.10) и (13.4), в то время как (13.7) — это следствие тождества Ньютона (3.39) для матрицы Манина $M = \tau + E[-1]$. □

Следствие 13.1.4. *Ограничение гомоморфизма* (13.1) *на центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ задаёт изоморфизм*

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N) \to \mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N). \tag{13.8}$$

Следовательно, теорема 13.1.1 выполнена для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$.

Доказательство. По теореме 7.1.4 коэффициенты $\phi_1, \dots, \phi_N$ полинома $\operatorname{cdet}\big(\tau + E[-1]\big)$ образуют полный набор векторов Сигала–Сугавары для $\mathfrak{gl}_N$. Это означает, что элементы $T^r\phi_m$ при $m = 1, \dots, N$ и $r = 0, 1, \dots$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$. По следствию 13.1.3 их образы относительно гомоморфизма $\mathfrak{f}$ — это элементы $T^r\mathcal{E}_m$, определённые в (12.44). Однако по следствию 12.4.8 эти образы — алгебраически независимые образующие классической $\mathcal{W}$-алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$. Следовательно, гомоморфизм $\mathfrak{f}$ индуцирует изоморфизм (13.8). □

Приведём теперь альтернативное доказательство другого варианта формулы (13.4) (и предложения 13.1.2). Это рассуждение опирается на вычисление образов Хариш-Чандры для двойственного янгиана $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$, и именно этот подход мы сможем перенести на другие классические серии. Будем использовать обозначения §10.5.

Предложение 13.1.5. *Для гомоморфизма* (13.3) *имеем*

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} : \operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)} \big(\partial_u + E(u)_{+1}\big) \dots \big(\partial_u + E(u)_{+m}\big) & \\ \mapsto e_m\big(\partial_u + \mu_1(u), \dots, \partial_u + \mu_N(u)\big), & \end{aligned}$$

где

$$\mu_i(u) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu_i[-r-1]\, u^r.$$

Доказательство. В силу определений гомоморфизмов (10.24) и (13.1) и соображений, изложенных в § 10.5, достаточно вычислить классический предел образа Хариш-Чандры элемента (10.40). Поскольку этот элемент совпадает с выражением в (10.42), из следствия 10.2.2 вытекает, что образ можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{N-k}{m-k}\sum_{N\geqslant i_1>\dots>i_k\geqslant 1}\lambda^+_{i_1}(u)\cdots\lambda^+_{i_k}(u-k+1)\,e^{-k\,\partial_u},$$

а это выражение равно

$$\sum_{N\geqslant i_1>\dots>i_m\geqslant 1}\big(1-\lambda^+_{i_1}(u)e^{-\partial_u}\big)\dots\big(1-\lambda^+_{i_m}(u)e^{-\partial_u}\big).$$

Учитывая разложение (10.25), получаем, что классический предел множителя $1-\lambda^+_i(u)e^{-\partial_u}$ совпадает с выражением $\partial_u+\mu_i(u)$. □

Замечание 13.1.6. Отметим, что соотношение (13.4) равносильно предложению 13.1.5. Кроме того, соответствующие аналоги соотношений (13.5), (13.6) и (13.7) получаются заменой элемента τ на ∂_u, матрицы $E[-1]$ — на $E(u)_+$, а $\mu_i[-1]$ — на $\mu_i(u)$. Эта эквивалентность есть следствие структуры вертексной алгебры на вакуумном модуле $V_{-N}(\mathfrak{gl}_N)$; см. § 6.6. Применяя отображение Y (соответствие между состояниями и полями) к элементам алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)\subset V_{-N}(\mathfrak{gl}_N)$, мы получим формальные ряды Лорана от переменной z с коэффициентами в алгебре эндоморфизмов пространства $V_{-N}(\mathfrak{gl}_N)$. Это приводит к тем же самым формулам (7.23), (7.24), (7.25) и (7.26), которые были получены для пополненной универсальной обёртывающей алгебры. В соответствии с вакуумными аксиомами применение, скажем, выражения в (7.23) к вакуумному вектору $1\in V_{-N}(\mathfrak{gl}_N)$ даёт формальный степенной ряд по z из предложения 13.1.5 (с заменой переменной z на u). При этом, взяв значение этого ряда при $u=0$, мы воспроизводим исходные элементы алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ в (13.4), и операция взятия этого значения согласована с гомоморфизмом Хариш-Чандры. □

Серия B_n. Возьмём теперь $\mathfrak{g}=\mathfrak{o}_N$ при $N=2n+1$ и будем использовать обозначения из § 8.1. Рассмотрим векторы Сигала–Сугавары, полученные в теореме 8.1.6. Положим

$$\mu_i[-r]=F_{ii}[-r],\qquad i=1,\dots,n\quad\text{и}\quad r=1,2,\dots,$$

и вспомним обозначение (12.47).

Предложение 13.1.7. *Образ полинома*

$$\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\big(\tau+F[-1]_1\big)\dots\big(\tau+F[-1]_m\big)$$

относительно гомоморфизма (13.3) *равен*

$$h_m\big(\tau+\mu_1[-1],\dots,\tau+\mu_n[-1],\tau-\mu_n[-1],\dots\tau-\mu_1[-1]\big).$$

Доказательство. Применим рассуждение, аналогичное доказательству предложения 13.1.5. Как в §10.5, продолжим возрастающую фильтрацию на двойственном янгиане $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{o}_N)$, заданную по правилу $\deg' t_{ij}^{(-r)} = -r$, на алгебру формальных рядов $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{o}_N)[[u,\partial_u]]$, полагая $\deg u = 1$ и $\deg \partial_u = -1$. Тогда соответствующая градуированная алгебра изоморфна алгебре формальных рядов $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{o}_N[t^{-1}]\big)[[u,\partial_u]]$. Элемент

$$\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\big(1 - T_1^+(u)\,e^{-\partial_u}\big)\dots\big(1 - T_m^+(u)\,e^{-\partial_u}\big) \tag{13.9}$$

имеет степень $-m$, а его образ в градуированной алгебре равен

$$\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\big(\partial_u + F(u)_{+\,1}\big)\dots\big(\partial_u + F(u)_{+\,m}\big), \tag{13.10}$$

где

$$F(u)_+ = \sum_{r=1}^{\infty} F[-r]\,u^{r-1}.$$

Запишем элемент (13.9) в виде

$$\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\sum_{k=0}^{m}\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant m}(-1)^k\,T_{i_1}^+(u)\dots T_{i_k}^+(u-k+1)\,e^{-k\,\partial_u}.$$

Произведение $T_{i_1}^+(u)\dots T_{i_k}^+(u-k+1)$ совпадает с $P\,T_1^+(u)\dots T_k^+(u-k+1)\,P^{-1}$, где P — это образ такой перестановки $p\in\mathfrak{S}_m$, что $p(r)=i_r$ при $r=1,\dots,k$, в алгебре (11.39) (с единичной компонентой в последнем тензорном множителе). Поэтому в силу соотношений (1.31) и свойства цикличности следа мы можем привести выражение к виду

$$\gamma_m(N)\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\,T_1^+(u)\dots T_k^+(u-k+1)\,e^{-k\,\partial_u}. \tag{13.11}$$

Из формулы (5.32) для частичных следов симметризатора $S^{(m)}$ получаем

$$\mathrm{tr}_{k+1,\dots,m}\,S^{(m)} = \frac{\gamma_k(N)}{\gamma_m(N)}\binom{N+m-2}{m-k}\binom{m}{k}^{-1}S^{(k)}.$$

Тогда выражение (13.11) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\,\gamma_k(N)\binom{N+m-2}{m-k}\mathrm{tr}_{1,\dots,k}\,S^{(k)}\,T_1^+(u)\dots T_k^+(u-k+1)\,e^{-k\,\partial_u}.$$

Сопряжение самым длинным элементом в группе $\mathfrak{S}_k$ и свойство цикличности следа приводят к формуле

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,k}\,S^{(k)}\,T_1^+(u)\dots T_k^+(u-k+1) = \mathrm{tr}_{1,\dots,k}\,T_k^+(u)\dots T_1^+(u-k+1)\,S^{(k)}.$$

Это выражение равно

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,k}\,S^{(k)}\,T_1^+(u-k+1)\dots T_k^+(u)$$

в силу формулы (11.11) и определяющих соотношений (11.37) для двойственного янгиана. Таким образом, по теореме 11.2.1 образ Хариш-Чандры выражения (13.9) равен

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\,\gamma_k(N)\binom{N+m-2}{m-k}\sum_{N\geqslant i_1\geqslant\dots\geqslant i_k\geqslant 1}\lambda^+_{i_1}(u-k+1)\dots\lambda^+_{i_k}(u)\,e^{-k\,\partial_u}$$

при условии, что $n+1$ входит в индексы суммирования $i_1,\dots,i_k$ не более одного раза. Эту формулу можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\,\gamma_k(N)\binom{N+m-2}{m-k}\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\dots\leqslant j_k\leqslant N}\lambda^+_{j_1}(u)\,e^{-\partial_u}\dots\lambda^+_{j_k}(u)\,e^{-\partial_u}\tag{13.12}$$

при условии, что $n+1$ входит в индексы $j_1,\dots,j_k$ не более одного раза.

Следующий шаг — записать формулу (13.12) в новых переменных

$$\nu_i(u)=1-\lambda^+_i(u)\,e^{-\partial_u},\qquad i=1,\dots,N.\tag{13.13}$$

Применим для этого комбинаторное рассуждение.

Лемма 13.1.8. *Выражение* (13.12), *умноженное на* $2\,(-1)^{m+1}\binom{N/2-2}{N+m-2}$, *равно*

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{N/2-2}{N+r-3}\sum_{a_1+\dots+a_{1'}=r}\nu_1(u)^{a_1}\dots\nu_n(u)^{a_n}\nu_{n'}(u)^{a_{n'}}\dots\nu_{1'}(u)^{a_{1'}}+$$

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\binom{N/2-2}{N+r-3}\sum_{a_1+\dots+a_{1'}=r-1}\nu_1(u)^{a_1}\dots\nu_n(u)^{a_n}\big(\nu_{n+1}(u)-2\big)\\ \times\nu_{n'}(u)^{a_{n'}}\dots\nu_{1'}(u)^{a_{1'}},$$

где $a_1,\dots,a_{1'}$ *пробегают множество целых неотрицательных чисел.*

Доказательство. Сделаем замену переменных (13.13) в обеих суммах и вычислим коэффициент при сумме

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_k\leqslant N}\lambda^+_{i_1}(u)\,e^{-\partial_u}\dots\lambda^+_{i_k}(u)\,e^{-\partial_u}\tag{13.14}$$

для всех $0\leqslant k\leqslant m$, где $n+1$ входит в индексы $i_1,\dots,i_k$ не более одного раза. Справедлива формула для разложения некоммутативных полных симметрических функций (12.47), вытекающая из (12.53):

$$h_r(1-x_1,\dots,1-x_p)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{p+r-1}{r-k}h_k(x_1,\dots,x_p).\tag{13.15}$$

Положим $x_i=\lambda^+_i(u)\,e^{-\partial_u}$ при $i=1,\dots,n,n'\dots,1'$ и применим разложение (13.15) при $p=2n$ к первой сумме в лемме. Используя такое же разложение для второй суммы, находим, что коэффициент при сумме (13.14) во всём выражении равен

$$\sum_{r=k}^{m}(-1)^{r-k}\binom{N/2-2}{N+r-3}\binom{N+r-3}{r-k}=\binom{N/2-2}{N+k-3}\binom{N/2+m-1}{m-k},$$

а это выражение равно

$$2\,(-1)^{m-k+1}\,\gamma_k(N)\binom{N/2-2}{N+m-2}\binom{N+m-2}{m-k},$$

как и требовалось. □

Обозначим выражение в лемме 13.1.8 через A_m. Поскольку степень элемента (13.9) равна $-m$, его образ Хариш-Чандры (13.12) и выражение A_m тоже имеют степень $-m$. Заметим, что слагаемые в обеих суммах, входящих в A_m, не зависят от m, так что $A_{m+1}=A_m+B_{m+1}$, где

$$\begin{aligned}B_{m+1}=(-1)^{m+1}&\binom{N/2-2}{N+m-2}\\&\times\sum_{a_1+\dots+a_{1'}=m+1}\nu_1(u)^{a_1}\dots\nu_n(u)^{a_n}\nu_{n'}(u)^{a_{n'}}\dots\nu_{1'}(u)^{a_{1'}}\\+(-1)^{m+1}&\binom{N/2-2}{N+m-2}\sum_{a_1+\dots+a_{1'}=m}\nu_1(u)^{a_1}\dots\nu_n(u)^{a_n}\big(\nu_{n+1}(u)-2\big)\\&\times\nu_{n'}(u)^{a_{n'}}\dots\nu_{1'}(u)^{a_{1'}}.\end{aligned}$$

Так как степень элемента A_{m+1} равна $-m-1$, его компонента степени $-m$ равна нулю, а значит, сумма однородных компонент степени $-m$ в A_m и B_{m+1} равна нулю. Однако степень каждого элемента $\nu_i(u)$ равна -1, причём компонента старшей степени совпадает с $\partial_u+\mu_i(u)$, где

$$\mu_i(u)=\sum_{r=0}^{\infty}\mu_i[-r-1]\,u^r. \tag{13.16}$$

Отсюда следует, что компонента в A_m степени $-m$ равна компоненте степени $-m$ в выражении

$$2\,(-1)^{m+1}\binom{N/2-2}{N+m-2}\sum_{a_1+\dots+a_{1'}=m}\nu_1(u)^{a_1}\dots\nu_n(u)^{a_n}\nu_{n'}(u)^{a_{n'}}\dots\nu_{1'}(u)^{a_{1'}}.$$

Учитывая множитель, использованный в лемме 13.1.8, мы можем заключить, что образ Хариш-Чандры элемента (13.10) — это некоммутативная полная симметрическая функция

$$h_m\big(\partial_u+\mu_1(u),\dots,\partial_u+\mu_n(u),\partial_u+\mu_{n'}(u),\dots,\partial_u+\mu_{1'}(u)\big). \tag{13.17}$$

Остаётся только положить $u=0$ в коэффициентах полиномов по ∂_u в (13.10) и (13.17); ср. замечание 13.1.6. □

Следствие 13.1.9. *Ограничение гомоморфизма* (13.1) *на центр Фейгина–Френкеля* $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n+1})$ *задаёт изоморфизм*

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n+1}) \to \mathcal{W}(\mathfrak{sp}_{2n}). \tag{13.18}$$

Следовательно, теорема 13.1.1 выполнена для $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n+1}$.

Доказательство. По теореме 8.1.9 элементы $\phi_{2\,2}, \phi_{4\,4}, \ldots, \phi_{2n\,2n}$ образуют полный набор векторов Сигала–Сугавары для $\mathfrak{o}_{2n+1}$. Поэтому элементы $T^r\phi_{m\,m}$ при $m = 2, 4, \ldots, 2n$ и $r = 0, 1, \ldots$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n+1})$. В силу предложения 13.1.7 их образы относительно гомоморфизма $\mathfrak{f}$ — это элементы $T^r\mathcal{H}_m$ определённые в (12.65). По следствию 12.4.12 эти образы — алгебраически независимые образующие классической $\mathcal{W}$-алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{sp}_{2n})$. Следовательно, гомоморфизм $\mathfrak{f}$ индуцирует изоморфизм (13.18). □

Серия D_n. Пусть теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_N$ при $N = 2n$. Мы будем использовать обозначения из §8.1. Рассмотрим векторы Сигала–Сугавары, полученные в теореме 8.1.6. Положим

$$\mu_i[-r] = F_{ii}[-r], \qquad i = 1, \ldots, n \quad \text{и} \quad r = 1, 2, \ldots$$

Предложение 13.1.10. *Образ полинома*

$$\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S^{(m)}\big(\tau + F[-1]_1\big)\ldots\big(\tau + F[-1]_m\big)$$

относительно гомоморфизма (13.3) *равен*

$$\tfrac{1}{2}\, h_m\big(\tau + \mu_1[-1], \ldots, \tau + \mu_{n-1}[-1], \tau - \mu_n[-1], \ldots \tau - \mu_1[-1]\big)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, h_m\big(\tau + \mu_1[-1], \ldots, \tau + \mu_n[-1], \tau - \mu_{n-1}[-1], \ldots \tau - \mu_1[-1]\big).$$

Доказательство. Повторим рассуждение из доказательства предложения 13.1.7 для $N = 2n$ до использования формулы для янгианного характера. Теперь применим теорему 11.2.2, из которой следует, что образ Хариш-Чандры выражения (13.9) равен

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k\, \gamma_k(2n) \binom{2n+m-2}{m-k} \sum_{2n \geqslant i_1 \geqslant \cdots \geqslant i_k \geqslant 1} \lambda^+_{i_1}(u-k+1)\ldots\lambda^+_{i_k}(u)\, e^{-k\,\partial_u}$$

при условии, что n и n' не встречаются одновременно среди индексов суммирования $i_1, \ldots, i_k$. Запишем образ в виде

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k\, \gamma_k(2n) \binom{2n+m-2}{m-k} \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_k \leqslant 2n} \lambda^+_{j_1}(u)\, e^{-\partial_u}\ldots\lambda^+_{j_k}(u)\, e^{-\partial_u} \tag{13.19}$$

при условии, что n и n' не встречаются одновременно среди индексов суммирования $j_1, \ldots, j_k$. Вводя новые переменные по формулам (13.13), приходим к соответствующему варианту леммы 13.1.8, где мы используем обозначение

$$c_r = -\binom{2n+r-2}{n-1}^{-1}.$$

Лемма 13.1.11. *Выражение (13.19), умноженное на $2c_m$, равно*

$$2c_m \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{1'}=m \\ a_n=a_{n'}=0}} \nu_1(u)^{a_1}\dots\nu_{1'}(u)^{a_{1'}}$$

$$+\, c_m \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{1'}=m \\ \text{только один из } a_n \text{ и } a_{n'} \text{ равен нулю}}} \nu_1(u)^{a_1}\dots\nu_{1'}(u)^{a_{1'}}$$

$$-\sum_{r=1}^{m}\frac{r\,c_r}{n+r-1} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{1'}=r \\ a_n=a_{n'}=0}} \nu_1(u)^{a_1}\dots\nu_{1'}(u)^{a_{1'}}$$

$$+\sum_{r=1}^{m}\frac{(n-1)\,c_r}{n+r-1} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{1'}=r \\ \text{только один из } a_n \text{ и } a_{n'} \text{ равен нулю}}} \nu_1(u)^{a_1}\dots\nu_{1'}(u)^{a_{1'}},$$

где индексы $a_1,\dots,a_{1'}$ пробегают целые неотрицательные числа.

Доказательство. Сделаем подстановку (13.13) в выражение в лемме и вычислим коэффициент при сумме

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_k\leqslant 2n} \lambda^+_{i_1}(u)\,e^{-\partial_u}\dots\lambda^+_{i_k}(u)\,e^{-\partial_u}. \tag{13.20}$$

Рассуждение разбивается на два случая: либо ни одно из чисел n и n' не входит в индексы суммирования в (13.20), либо входит только одно из них. Применяя разложение (13.15), приходим к простому, но длинному вычислению с биномиальными коэффициентами, которое мы опустим. □

Обозначим через A_m выражение в лемме 13.1.11. Это выражение равно произведению $2c_m$ и образа Хариш-Чандры элемента (13.9), так что A_m имеет степень $-m$. Поэтому компонента степени $-m$ в выражении A_{m+1} равна нулю. С другой стороны, каждый элемент $\nu_i(u)$ имеет степень -1, а его старшая компонента равна $\partial_u+\mu_i(u)$, где ряд $\mu_i(u)$ определён формулой (13.16). Отсюда следует, что компонента степени $-m$ в сумме третьей и четвёртой частей выражения A_m равна нулю. Таким образом, компонента выражения A_m степени $-m$ равна компоненте степени $-m$ в сумме первой и второй частей выражения. Учитывая множитель $2c_m$, мы можем заключить, что образ Хариш-Чандры элемента (13.10) равен компоненте степени $-m$ в сумме

$$\sum_{\substack{a_1+\dots+a_{1'}=m \\ a_n=a_{n'}=0}} \nu_1(u)^{a_1}\dots\nu_{1'}(u)^{a_{1'}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{1'}=m \\ \text{только один из } a_n \text{ и } a_{n'}\,=\,0}} \nu_1(u)^{a_1}\dots\nu_{1'}(u)^{a_{1'}}$$

и, следовательно, равен

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\,h_m\big(\partial_u+\mu_1(u),\dots,\partial_u+\mu_{n-1}(u),\partial_u-\mu_n(u),\dots\partial_u-\mu_1(u)\big) \\ &\qquad+\tfrac{1}{2}\,h_m\big(\partial_u+\mu_1(u),\dots,\partial_u+\mu_n(u),\partial_u-\mu_{n-1}(u),\dots\partial_u-\mu_1(u)\big). \end{aligned} \tag{13.21}$$

Чтобы завершить доказательство, положим $u = 0$ в коэффициентах полиномов (13.10) и (13.21) при степенях ∂_u; ср. замечание 13.1.6. □

Вспомним, что центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n})$ имеет дополнительный образующий — пфаффиан $\operatorname{Pf} F[-1]$, определённый в (8.6).

Предложение 13.1.12. *Образ пфаффиана* $\operatorname{Pf} F[-1]$ *относительно гомоморфизма* (13.1) *находится по формуле*

$$\mathfrak{f} : \operatorname{Pf} F[-1] \mapsto \big(\mu_1[-1] - \tau\big) \dots \big(\mu_n[-1] - \tau\big) 1.$$

Доказательство. Используя обозначение (12.59), мы можем сформулировать предложение в виде $\mathfrak{f} : \operatorname{Pf} F[-1] \mapsto (-1)^n \mathcal{E}_n^{\circ}$. Рассмотрим такой автоморфизм алгебры Ли $t^{-1}\mathfrak{o}_{2n}[t^{-1}]$, что

$$F_{k\,l}[r] \mapsto F_{\tilde{k}\,\tilde{l}}[r], \tag{13.22}$$

где $k \mapsto \tilde{k}$ — это такая инволюция множества $\{1, \dots, 2n\}$, что $n \mapsto n'$, $n' \mapsto n$ и $k \mapsto k$ при $k \neq n, n'$. Заметим, что этот автоморфизм переводит пфаффиан $\operatorname{Pf} F[-1]$ в $-\operatorname{Pf} F[-1]$. Аналогично $\mathcal{E}_n^{\circ} \mapsto -\mathcal{E}_n^{\circ}$ относительно автоморфизма алгебры $t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]$, индуцированного автоморфизмом (13.22).

Применим теперь следствие 12.4.11 и заметим, что элементы $T^r\mathcal{H}_{2k}$ при $r \geqslant 0$ и $k = 1, \dots, n-1$ неподвижны относительно автоморфизма (13.22). Образ Хариш-Чандры $\mathfrak{f}\big(\operatorname{Pf} F[-1]\big)$ — это полином от образующих алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n})$, и его степень относительно переменных $\mu_1[-1], \dots, \mu_n[-1]$ не превосходит n. Поэтому образ $\mathfrak{f}\big(\operatorname{Pf} F[-1]\big)$ должен быть пропорционален элементу $\mathcal{E}_n^{\circ}$. Сравнивая коэффициенты при произведении $\mu_1[-1] \dots \mu_n[-1]$ в каждом из двух полиномов, получаем, что $\mathfrak{f} : \operatorname{Pf} F[-1] \mapsto (-1)^n \mathcal{E}_n^{\circ}$, как и требовалось. □

Как и для типов A и B, приходим к следующему утверждению.

Следствие 13.1.13. *Ограничение гомоморфизма, определённого в* (13.1), *на подалгебру* $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n})$ *задаёт изоморфизм*

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n}) \to \mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n}). \tag{13.23}$$

Следовательно, теорема 13.1.1 справедлива для $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$.

Доказательство. Из теоремы 8.1.9 известно, что элементы $T^r\phi_{m\,m}$ при $m = 2, 4, \dots, 2n-2$ вместе с $T^r\operatorname{Pf} F[-1]$ при $r = 0, 1, \dots$ — это алгебраически независимые образующие алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{o}}_{2n})$. В силу предложений 13.1.10 и 13.1.12 их образы относительно гомоморфизма $\mathfrak{f}$ совпадают с элементами $T^r\mathcal{H}_m$, определёнными в (12.62), и $(-1)^n T^r\mathcal{E}_n^{\circ}$ соответственно. По следствию 12.4.11 эти образы — алгебраически независимые образующие классической $\mathcal{W}$-алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n})$. Следовательно, гомоморфизм $\mathfrak{f}$ индуцирует изоморфизм (13.23). □

Серия C_n. Возьмём теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_N$ при $N = 2n$ и сохраним обозначения из §8.3. Рассмотрим векторы Сигала–Сугавары, полученные в теореме 8.3.2. Положим

$$\mu_i[-r] = F_{ii}[-r], \qquad i = 1, \dots, n \quad \text{и} \quad r = 1, 2, \dots,$$

и вспомним некоммутативные элементарные симметрические функции, заданные формулой (12.48). По предложению 8.3.7 выражение (8.36) допускает эквивалентную форму, которая корректно определена при всех $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$. Сохраним обозначение (8.36) для всех этих значений, считая, что при $m > n$ применяется корректно определённая эквивалентная форма.

Предложение 13.1.14. *При* $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$ *образ полинома*

$$\gamma_m(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)}\big(\tau + F[-1]_1\big)\dots\big(\tau + F[-1]_m\big) \tag{13.24}$$

относительно гомоморфизма (13.3) *равен*

$$e_m\big(\tau + \mu_1[-1], \dots, \tau + \mu_n[-1], \tau, \tau - \mu_n[-1], \dots \tau - \mu_1[-1]\big).$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение в предположении, что $m \leqslant n$. Затем мы распространим его на все значения $m \leqslant 2n+1$, рассуждая, как в §5.5.

Как для типа B, продолжим возрастающую фильтрацию на двойственном янгиане $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{sp}_{2n})$, определённую по правилу $\deg' t_{ij}^{(-r)} = -r$, на алгебру формальных рядов $\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{sp}_{2n})[[u, \partial_u]]$, полагая $\deg u = 1$ и $\deg \partial_u = -1$. Соответствующая градуированная алгебра изоморфна алгебре $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)[[u, \partial_u]]$. Элемент

$$\gamma_m(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)}\big(1 - T_1^+(u)\, e^{-\partial_u}\big)\dots\big(1 - T_m^+(u)\, e^{-\partial_u}\big) \tag{13.25}$$

имеет степень $-m$, и его образ в градуированной алгебре равен

$$\gamma_m(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)}\big(\partial_u + F(u)_{+\,1}\big)\dots\big(\partial_u + F(u)_{+\,m}\big), \tag{13.26}$$

где

$$F(u)_+ = \sum_{r=1}^{\infty} F[-r]\, u^{r-1}.$$

Запишем элемент (13.25) в виде

$$\gamma_m(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)} \sum_{k=0}^{m} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m} (-1)^k\, T_{i_1}^+(u)\dots T_{i_k}^+(u-k+1)\, e^{-k\,\partial_u}.$$

Применяя сопряжения подходящими перестановками, как в доказательстве предложения 13.1.7, мы можем привести его к виду

$$\gamma_m(-2n) \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)}\, T_1^+(u)\dots T_k^+(u-k+1)\, e^{-k\,\partial_u}. \tag{13.27}$$

Вычисляя частичные следы симметризатора $S^{(m)}$ с помощью формулы (5.43), получим

$$\mathrm{tr}_{k+1,\dots,m}\, S^{(m)} = \frac{\gamma_k(-2n)}{\gamma_m(-2n)} \binom{2n-k+1}{m-k} \binom{m}{k}^{-1} S^{(k)}.$$

Следовательно, выражение (13.27) равно

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k\, \gamma_k(-2n) \binom{2n-k+1}{m-k}\, \mathrm{tr}_{1,\dots,k}\, S^{(k)}\, T_1^+(u)\dots T_k^+(u-k+1)\, e^{-k\,\partial_u}.$$

По следствию 11.2.4 образ Хариш-Чандры выражения (13.25) равен

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\,\gamma_k(-2n)\binom{2n-k+1}{m-k} \times \sum_{2n+2\geqslant i_1>\dots>i_k\geqslant 1} \varkappa_{i_1}^{+}(u)\,e^{-\partial_u}\dots\varkappa_{i_k}^{+}(u)\,e^{-\partial_u}. \tag{13.28}$$

Лемма 13.1.15. *Предположим, что $m\leqslant n$. Тогда выражение* (13.28), *умноженное на* $2(-1)^m\binom{2n-m+1}{n+1}$, *равно*

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{2n-r+2}{n+1} \times \sum_{2n+2\geqslant i_1>\dots>i_r\geqslant 1}\big(1-\varkappa_{i_1}^{+}(u)\,e^{-\partial_u}\big)\dots\big(1-\varkappa_{i_r}^{+}(u)\,e^{-\partial_u}\big). \tag{13.29}$$

Доказательство. Применим формулу разложения для некоммутативных элементарных симметрических функций (12.48):

$$e_r(1-x_1,\dots,1-x_p)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{p-k}{r-k}\,e_k(x_1,\dots,x_p).$$

Взяв $x_i=\varkappa_i^{+}(u)\,e^{-\partial_u}$ при $i=1,\dots,2n+2$ и упрощая выражения с биномиальными коэффициентами, получаем, что коэффициент при сумме

$$\sum_{2n+2\geqslant i_1>\dots>i_k\geqslant 1}\varkappa_{i_1}^{+}(u)\,e^{-\partial_u}\dots\varkappa_{i_k}^{+}(u)\,e^{-\partial_u} \tag{13.30}$$

в (13.29) равен

$$(-1)^{m-k}\binom{n-k}{m-k}\binom{2n-k+2}{n+1},$$

а это выражение совпадает с

$$2(-1)^{m-k}\,\gamma_k(-2n)\binom{2n-m+1}{n+1}\binom{2n-k+1}{m-k}$$

как и требовалось. □

Выражение (13.29) корректно определено при $m\leqslant n+1$, и мы обозначим его через A_m. Доказательство леммы 13.1.15 показывает, что если $m=n+1$, то коэффициент при сумме (13.30) в выражении A_{n+1} равен нулю при всех $0\leqslant k\leqslant n$. Кроме того, в силу второй части следствия 11.2.4 сумма (13.30) равна нулю при $k=n+1$. Поэтому $A_{n+1}=0$.

Степень элемента (13.25) равна $-m$, так что при $m\leqslant n$ выражение A_m тоже имеет степень $-m$. Следовательно, компонента степени $-m$ в выражении A_{m+1} равна нулю; это верно и для $m=n$, так как $A_{n+1}=0$. Справедлива формула $A_{m+1} = A_m + B_{m+1}$, где

$$B_{m+1} = (-1)^{m+1} \binom{2n-m+1}{n+1} \times \sum_{2n+2 \geqslant i_1 > \dots > i_{m+1} \geqslant 1} \big(1 - \varkappa^+_{i_1}(u)\, e^{-\partial_u}\big) \dots \big(1 - \varkappa^+_{i_{m+1}}(u)\, e^{-\partial_u}\big).$$

Сумма однородных компонент степени $-m$ в выражениях A_m и B_{m+1} равна нулю. Однако каждый множитель $1 - \varkappa^+_i(u)\, e^{-\partial_u}$ при $i \neq n+1, n+2$ имеет степень -1, а его старшая компонента равна $\partial_u + \mu_i(u)$, где ряд $\mu_i(u)$ определён формулой (13.16). Поэтому компоненты степени $-m$ в B_{m+1} могут возникать только из слагаемых, соответствующих множествам $i_1 > \dots > i_{m+1}$, содержащих индексы $n+1$ или $n+2$. В тех случаях, когда содержится только один из этих индексов, сумма упрощается благодаря соотношениям (11.42), так как

$$1 - \varkappa^+_{n+1}(u)\, e^{-\partial_u} + 1 - \varkappa^+_{n+2}(u)\, e^{-\partial_u} = 2.$$

Если содержатся оба индекса, то в силу (11.42) имеем

$$\big(1 - \varkappa^+_{n+2}(u)\, e^{-\partial_u}\big)\big(1 - \varkappa^+_{n+1}(u)\, e^{-\partial_u}\big) = 1 - \lambda^+_{n'}(u)\, \lambda^+_n(u-1)\, e^{-2\,\partial_u}. \tag{13.31}$$

Применяя соотношения (11.50), мы можем выразить $\lambda^+_{n'}(u) = \lambda^+_{n+1}(u)$ в виде дроби

$$\lambda^+_{n+1}(u) = \frac{\lambda^+_1(u-n)\, \lambda^+_2(u-n+1) \dots \lambda^+_{n-1}(u-2)}{\lambda^+_1(u-n-1)\, \lambda^+_2(u-n) \dots \lambda^+_n(u-2)}. \tag{13.32}$$

Таким образом, произведение (13.31) имеет степень -1, а его старшая компонента равна $2\,\partial_u$. Принимая в расчёт лемму 13.1.15, мы можем заключить, что образ Хариш-Чандры элемента (13.26) равен

$$e_m\big(\partial_u + \mu_1(u), \dots, \partial_u + \mu_n(u), \partial_u, \partial_u - \mu_n(u), \dots \partial_u - \mu_1(u)\big). \tag{13.33}$$

Остаётся положить $u = 0$ в коэффициентах полиномов от ∂_u в (13.26) и (13.33); ср. замечание 13.1.6.

Чтобы завершить доказательство предложения, будем предполагать выполненной теорему 13.1.1 для типа C (см. [**46**, Theorem 8.1.5]), которая утверждает, что ограничение гомоморфизма (13.1) на подалгебру $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$ задаёт изоморфизм

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}) \to \mathcal{W}(\mathfrak{o}_{2n+1}). \tag{13.34}$$

При $a \in \{0, 1, \dots, m\}$ коэффициент ϕ_{ma} в выражении (8.36) — это однородный элемент алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)$ степени a относительно градуировки, заданной по правилу $\deg F_{ij}[-r] = r$. Так как гомоморфизм (13.1) сохраняет градуировку, из следствия 12.4.10 находим, что образ коэффициента ϕ_{ma} при изоморфизме (13.34) — это полином от образующих $T^{\,r}\, \mathcal{E}_m$ при $m = 2, 4, \dots, 2n$ и $r = 0, 1, \dots$ при условии $r + m \leqslant a$. Для фиксированного значения m и переменных значений n коэффициенты полинома — рациональные функции от n. Поэтому они однозначно определяются своими значениями, когда аргумент n пробегает бесконечное множество точек $n \geqslant m$. Это позволяет нам заключить, что формула для образа Хариш-Чандры элемента (13.24) справедлива для всех значений $n \geqslant (m-1)/2$, для которых этот элемент корректно определён. $\square$

§ 13.2. Янгианные характеры и классические $\mathcal{W}$-алгебры

Здесь мы обсудим ещё один способ доказать, что образ ограничения гомоморфизма (13.1) на центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ содержится в классической $\mathcal{W}$-алгебре $\mathcal{W}({}^L\mathfrak{g})$. Этот способ подсказан альтернативным доказательством теоремы 7.1.3 в §10.5. А именно, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ образующие алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ возникают в результате процедуры перехода к классическому пределу, применённой к некоторым элементам подалгебры инвариантов $\mathfrak{z}(\widehat{\mathcal{V}}_{\text{cri}})$. Образы Хариш-Чандры этих элементов — это полиномы от переменных $\lambda_i^+(u+a)$, вычисленные в следствии 10.2.2, в то время как предложение 10.6.3 утверждает, что образы лежат в пересечении ядер скрининговых операторов. Поэтому, чтобы увидеть, что образы Хариш-Чандры элементов алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ лежат в $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$, достаточно убедиться, что классические пределы полиномов от $\lambda_i^+(u+a)$ аннулируются скрининговыми операторами V_i, определёнными в §12.2. В этом смысле операторы V_i возникают как классические пределы скрининговых операторов S_i^+.

Серия A**.** Рассмотрим алгебру $\mathcal{L}^+$, введённую в (10.49), и вложим её в алгебру формальных степенных рядов от переменны $\mu_i[-r-1]$ при $i = 1, \ldots, N$ и $r = 0, 1, \ldots$, с помощью гомоморфизма

$$\lambda_i^+(a) \mapsto 1 - \sum_{r=0}^{\infty} \mu_i[-r-1]\, a^r. \tag{13.35}$$

Зададим степени переменных по правилу $\deg \mu_i[-r-1] = -r-1$. Для произвольного элемента $A \in \mathcal{L}^+$ рассмотрим соответствующий формальный степенной ряд от переменных $\mu_i[-r-1]$ и возьмём его однородную компоненту $\overline{A}$ максимальной степени. Эта компонента — полином, что позволяет определить отображение

$$\mathrm{gr} : \mathcal{L}^+ \to \mathbb{C}\big[\mu_i[-r-1] \mid i = 1, \ldots, N, \quad r = 0, 1, \ldots\big], \qquad A \mapsto \overline{A}. \tag{13.36}$$

Отметим его свойство, вытекающее из определения:

$$\mathrm{gr}\,(AB) = \mathrm{gr}\,(A)\,\mathrm{gr}\,(B). \tag{13.37}$$

Вспомним подалгебру $\mathrm{Rep}\,\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$, введённую в (10.53).

Предложение 13.2.1. *Образ ограничения отображения* (13.36) *на подалгебру* $\mathrm{Rep}\,\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$ *содержится в классической* $\mathcal{W}$*-алгебре* $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ *и тем самым задаёт отображение*

$$\mathrm{gr} : \mathrm{Rep}\,\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N) \to \mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N).$$

Доказательство. По аналогии с (13.35) введём переменные $\sigma_i[-r-1]$ с помощью разложения

$$\sigma_i^+(a) \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \sigma_i[-r-1]\, a^r \tag{13.38}$$

и положим $\deg \sigma_i[-r-1] = -r-1$. Считая a формальной переменной в формулах (10.50) и (10.51), запишем скрининговые операторы в терминах новых переменных. При $i = 1, \ldots, N-1$ получаем операторы

$$S_i^\circ : \mu_j[-1] \mapsto \begin{cases} \bigl(1-\mu_i[-1]\bigr) \sum\limits_{k\geqslant 0} \sigma_i[-k-1] & \text{при} \quad j = i, \\ -\bigl(1-\mu_{i+1}[-1]\bigr)\, \sigma_i[-1] & \text{при} \quad j = i+1, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq i, i+1 \end{cases} \tag{13.39}$$

и

$$S_i^\circ : \mu_j[-r-1] \mapsto \frac{T^{\,r}}{r!} \Bigl(S_i^\circ\bigl(\mu_j[-1]\bigr)\Bigr), \qquad r \geqslant 1, \tag{13.40}$$

где T — это дифференцирование, определённое в (12.46). Действие оператора S_i° продолжается на всю алгебру формальных степенных рядов от переменных $\mu_i[-r-1]$ по правилу Лейбница, как в (10.52).

Пусть теперь $A \in \operatorname{Rep} \mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_N)$, так что $S_i^+ A = 0$ при всех $i = 1, \ldots, N-1$. Обозначим через A° соответствующий формальный степенной ряд от переменных $\mu_i[-r-1]$. По определению операторов S_i° их ограничение на подалгебру $\mathcal{L}^+$ совпадает с действием соответствующих операторов S_i^+. Поэтому $S_i^\circ A^\circ = 0$. Взяв компоненту старшей степени $\overline{A}$ ряда A°, мы можем записать

$$S_i^\circ A^\circ = \overline{S}_i\, \overline{A} + \text{члены меньшей степени},$$

где оператор $\overline{S}_i$ задан формулой

$$\overline{S}_i : \mu_j[-r-1] \mapsto \begin{cases} \sigma_i[-r-1] & \text{при} \quad j = i, \\ -\sigma_i[-r-1] & \text{при} \quad j = i+1, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq i, i+1. \end{cases} \tag{13.41}$$

С другой стороны, перепишем соотношения (10.50) в виде

$$\bigl(1-\mu_i(z)\bigr)\, e^{\partial_z}\, \sigma_i^+(z) - \bigl(1-\mu_{i+1}(z)\bigr)\, \sigma_i^+(z) = 0, \tag{13.42}$$

где

$$\mu_j(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu_j[-r-1]\, z^r$$

и мы заменили a формальной переменной z. Полагая $\deg z = 1$ и $\deg \partial_z = -1$, возьмём компоненты старшей степени в этих соотношениях:

$$\sigma_i^{+\,\prime}(z) = \bigl(\mu_i(z) - \mu_{i+1}(z)\bigr)\, \sigma_i^+(z).$$

Следовательно,

$$\overline{S}_i : \mu_i(z) \mapsto \exp \int \bigl(\mu_i(z) - \mu_{i+1}(z)\bigr)\, dz, \quad \mu_{i+1}(z) \mapsto -\exp \int \bigl(\mu_i(z) - \mu_{i+1}(z)\bigr)\, dz,$$

и $\overline{S}_i : \mu_j(z) \mapsto 0$ при $j \neq i, i+1$. Однако в силу (12.42) и (12.43) это отображение совпадает с действием оператора V_i на формальный ряд $\mu_k(z)$.

Таким образом, мы можем заключить, что если элемент $A \in \mathcal{L}^+$ аннулируется всеми операторами S_i^+, то его образ $\overline{A}$ относительно отображения (13.36) аннулируется всеми операторами V_i. Применение теоремы 12.4.2 завершает доказательство. □

Серии B, C **и** D. Возьмём теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_N$ и будем использовать обозначения из §11.3. Мы построим отображение $\mathrm{gr} : \mathrm{Rep}\,\mathrm{Y}^+(\mathfrak{g}_N) \to \mathcal{W}({}^L\mathfrak{g}_N)$ и опишем его свойства. Сначала вложим алгебру $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+(\mathfrak{g}_N)$ в алгебру формальных степенных рядов от переменных $\mu_i[-r-1]$ при $i = 1, \dots, N$ и $r = 0, 1, \dots$ по формулам (13.35) и возьмём фактор по соотношениям (11.50). Зададим степени переменных по правилу $\deg \mu_i[-r-1] = -r-1$. Для $A \in \mathcal{L}^+$ рассмотрим соответствующий формальный степенной ряд от переменных $\mu_i[-r-1]$ и возьмём его однородную компоненту $\overline{A}$ старшей степени. Эта компонента — полином, и мы получаем отображение

$$\mathrm{gr} : \mathcal{L}^+ \to \mathbb{C}\big[\mu_i[-r-1] \mid i = 1, \dots, N, \quad r = 0, 1, \dots\big], \qquad A \mapsto \overline{A}. \tag{13.43}$$

Отметим его свойство (13.37). Вспомним, что подалгебра $\mathrm{Rep}\,\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)$ была определена в (11.53).

Предложение 13.2.2. *Образ ограничения отображения* (13.43) *на подалгебру* $\mathrm{Rep}\,\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N)$ *содержится в алгебре* $\mathcal{W}({}^L\mathfrak{g}_N)$*. Тем самым определено отображение*

$$\mathrm{gr} : \mathrm{Rep}\,\widehat{\mathrm{Y}}^+(\mathfrak{g}_N) \to \mathcal{W}({}^L\mathfrak{g}_N).$$

Доказательство. Рассуждение аналогично доказательству предложения 13.2.1, поэтому мы только отметим необходимые изменения. Введём переменные $\sigma_i[-r-1]$ по формулам (13.38) и положим $\deg \sigma_i[-r-1] = -r-1$. Определим операторы S_i° при $i = 1, \dots, n$, как в (13.39) и (13.40), где фактор теперь берётся по соотношениям (11.51) и (11.52), записанным в терминах переменных $\mu_i[-r-1]$, и a считается независимой переменной. Поскольку соотношения (11.51) совпадают с (10.50), рассуждение для операторов S_i° при $i = 1, \dots, n-1$ ничем не отличается от случая серии A. Теперь рассмотрим оператор S_n° отдельно для каждого из трёх случаев.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n+1}$. Как в формулах (13.41), соответствующий оператор $\overline{S}_n$ принимает вид

$$\overline{S}_n : \mu_j[-r-1] \mapsto \begin{cases} 2\,\sigma_n[-r-1] & \text{при} \quad j = n, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq n. \end{cases} \tag{13.44}$$

Из соотношений (11.50) следует, что

$$\lambda_{n+1}^+(a) = \frac{\lambda_1^+(a-n+1)\,\lambda_2^+(a-n+2)\dots\lambda_n^+(a)}{\lambda_1^+(a-n+1/2)\,\lambda_2^+(a-n+3/2)\dots\lambda_n^+(a-1/2)}.$$

Применяя формулы (11.52) и записывая $\lambda_i^+(a) = 1 - \mu_i(a)$ при $i = 1, \dots, n$, получим соответствующую версию соотношения (13.42) и уравнение

$$\sigma_n^{+\,\prime}(z) = 2\,\mu_n(z)\,\sigma_n^+(z),$$

так что оператор $\overline{S}_n$ действует по правилу

$$\overline{S}_n : \mu_n(z) \mapsto 2\exp 2\int \mu_n(z)\,dz$$

и $\overline{S}_n : \mu_j(z) \mapsto 0$ при $j \neq n$. Это совпадает с действием оператора $2V_n$, отвечающего $\mathfrak{sp}_{2n}$, на формальный ряд $\mu_n(z)$, определённый в (12.63). Таким образом, если элемент $A \in \mathcal{L}^+$ аннулируется всеми операторами S_i^+, то его образ $\overline{A}$ относительно отображения (13.43) аннулируется всеми операторами V_i, отвечающими алгебре Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$, двойственной по Ленглендсу к $\mathfrak{o}_{2n+1}$.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$. Как в (13.44), справедливы формулы

$$\overline{S}_n : \mu_j[-r-1] \mapsto \begin{cases} \sigma_n[-r-1] & \text{при} \quad j = n, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq n. \end{cases}$$

В силу (13.32)

$$\lambda_{n+1}^+(a) = \frac{\lambda_1^+(a-n)\,\lambda_2^+(a-n+1)\ldots\lambda_{n-1}^+(a-2)}{\lambda_1^+(a-n-1)\,\lambda_2^+(a-n)\ldots\lambda_n^+(a-2)}.$$

Запишем $\lambda_i^+(a) = 1 - \mu_i(a)$ при $i = 1, \ldots, n$ и, применяя (11.52), получим уравнение

$$\sigma_n^{+\,\prime}(z) = \mu_n(z)\,\sigma_n^+(z).$$

Следовательно, для оператора $\overline{S}_n$ справедливы формулы

$$\overline{S}_n : \mu_n(z) \mapsto \exp\int \mu_n(z)\,dz$$

и $\overline{S}_n : \mu_j(z) \mapsto 0$ при $j \neq n$. Это отображение совпадает с действием оператора V_n, отвечающего $\mathfrak{o}_{2n+1}$, на формальный ряд $\mu_n(z)$; см. (12.55). Поэтому, если элемент $A \in \mathcal{L}^+$ аннулируется всеми операторами S_i^+, то его образ $\overline{A}$ относительно отображения (13.43) аннулируется всеми операторами V_i, отвечающими алгебре Ли $\mathfrak{o}_{2n+1}$, двойственной по Ленглендсу к $\mathfrak{sp}_{2n}$.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$. Так же как в (13.41), имеют место формулы

$$\overline{S}_n : \mu_j[-r-1] \mapsto \begin{cases} \sigma_n[-r-1] & \text{при} \quad j = n-1, n \\ 0 & \text{при} \quad j \neq n-1, n. \end{cases}$$

Из соотношений (11.50) следует, что

$$\lambda_{n+1}^+(a) = \frac{\lambda_1^+(a-n+2)\,\lambda_2^+(a-n+3)\ldots\lambda_{n-1}^+(a)}{\lambda_1^+(a-n+1)\,\lambda_2^+(a-n+2)\ldots\lambda_n^+(a)}.$$

Записывая $\lambda_i^+(a) = 1 - \mu_i(a)$ при $i = 1, \ldots, n$ и применяя (11.52), получим

$$\sigma_n^{+\,\prime}(z) = \big(\mu_{n-1}(z) + \mu_n(z)\big)\,\sigma_n^+(z).$$

Следовательно, оператор $\overline{S}_n$ действует по правилу

$$\mu_{n-1}(z) \mapsto \exp\int \big(\mu_{n-1}(z) + \mu_n(z)\big)\,dz, \quad \mu_n(z) \mapsto \exp\int \big(\mu_{n-1}(z) + \mu_n(z)\big)\,dz,$$

и $\overline{S}_n : \mu_j(z) \mapsto 0$ при $j \neq n-1, n$. Это совпадает с действием оператора V_n, отвечающего $\mathfrak{o}_{2n}$, на ряды $\mu_{n-1}(z)$ и $\mu_n(z)$; см. (12.58). Таким образом, если элемент $A \in \mathcal{L}^+$ аннулируется всеми операторами S_i^+, то его образ $\overline{A}$ относительно отображения (13.43) аннулируется всеми операторами V_i, отвечающими самодвойственной по Ленглендсу алгебре Ли $\mathfrak{o}_{2n}$. $\square$

§ 13.3. Образы Хариш-Чандры операторов Сугавары

В силу предложения 6.6.1 образующие центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ пополненной универсальной обёртывающей алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$ на критическом уровне получаются применением соответствия между состояниями и полями (6.35) к полному набору векторов Сигала–Сугавары. Мы будем использовать этот факт, чтобы вычислить образы образующих алгебры $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, построенных в §7.2 и §8.5, относительно аффинной версии изоморфизма Хариш-Чандры, связанной с центром $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$.

Возьмём треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ и выберем базис в подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ и базисы из корневых векторов в подалгебрах $\mathfrak{n}_-$ и $\mathfrak{n}_+$. Рассмотрим соответствующий базис аффинной алгебры Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{g}}$ (см. (6.5)), состоящий из K и элементов вида $X[r]$ при $r \in \mathbb{Z}$, где X пробегает базисные векторы в $\mathfrak{g}$. Введём произвольное линейное упорядочение $\prec$ на базисных элементах, удовлетворяющее следующим условиям. Во-первых, каждый базисный элемент из подалгебры $t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$ должен предшествовать каждому базисному элементу из $\mathfrak{g}[t]$. Во-вторых, упорядочение на базисных элементах алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ должно удовлетворять условиям

$$\mathfrak{n}_-[t] \prec \mathfrak{h}[t] \prec \mathfrak{n}_+[t] \qquad \text{и} \qquad t^{-1}\mathfrak{n}_+[t^{-1}] \prec t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}] \prec t^{-1}\mathfrak{n}_-[t^{-1}],$$

указывающим на упорядочение между базисными элементами, лежащими в подпространствах в $\widehat{\mathfrak{g}}$.

По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта любой элемент $x \in \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$ можно записать в виде однозначно определённой линейной комбинации упорядоченных мономов из базисных элементов алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$. Положим

$$\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$$

и обозначим через $x_0 \in \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{h}})$ такую компоненту линейной комбинации, представляющей элемент x, что каждый моном в ней не содержит базисных элементов вида $X[r]$ при $X \in \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+$. Линейное отображение $\theta : x \mapsto x_0$ задаёт проекцию $\theta : \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) \to \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{h}})$.

Рассмотрим теперь универсальную обёртывающую алгебру на критическом уровне (т. е. возьмём фактор алгебры $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$ по идеалу, порождённому элементом $K + h^\vee$) и продолжим отображение θ по непрерывности до проекции

$$\theta : \widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}}) \to \widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{h}}),$$

где $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{h}})$ обозначает пополнение алгебры $\mathrm{U}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{h}})$ на критическом уровне, определённое в (6.33).

Положим $\Pi = \mathrm{S}\big(\mathfrak{h}[t, t^{-1}]\big)$ и определим пополнение $\widetilde{\Pi}$ коммутативной алгебры Π как обратный предел

$$\widetilde{\Pi} = \varprojlim \Pi / I_p, \qquad p > 0, \tag{13.45}$$

где I_p обозначает идеал в Π, порождённый всеми элементами $H[r]$ при $H \in \mathfrak{h}$ и $r \geqslant p$. Линейное отображение $\eta : \mathrm{U}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{h}}) \to \Pi$, переводящее каждый упорядоченный моном в тот же самый моном, рассматриваемый как элемент коммутативной алгебры Π, задаёт изоморфизм векторных пространств. Он продолжается по непрерывности до изоморфизма соответствующих пополненных пространств

$$\eta : \widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{h}}) \to \widetilde{\Pi}.$$

Таким образом, мы получаем линейное отображение

$$\mathfrak{f} : \widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}}) \to \widetilde{\Pi}, \tag{13.46}$$

определённое как композиция $\mathfrak{f} = \eta \circ \theta$. Оно приводит к аналогу гомоморфизма Хариш-Чандры для пополненной универсальной обёртывающей алгебры.

Предложение 13.3.1. *Ограничение отображения* (13.46) *на центр* $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ *алгебры* $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$ *— это гомоморфизм коммутативных алгебр*

$$\mathfrak{f} : \mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \to \widetilde{\Pi}. \tag{13.47}$$

Доказательство. Для произвольных элементов $x, y \in \mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ положим $x_0 = \mathfrak{f}(x)$ и $y_0 = \mathfrak{f}(y)$. Запишем y как (возможно, бесконечную) линейную комбинацию упорядоченных мономов из базисных элементов алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$. Пусть

$$m = \prod_a X_{i_a}[-r_a - 1] \prod_b Y_{j_b}[r_b], \qquad r_a, r_b \geqslant 0,$$

— это упорядоченный моном, входящий в эту линейную комбинацию. Отметим его весовое свойство

$$\sum_a \mathrm{wt}\, X_{i_a} + \sum_b \mathrm{wt}\, Y_{j_b} = 0, \tag{13.48}$$

вытекающее из условия, что y лежит в центре, где вес $\alpha = \mathrm{wt}\, X \in \mathfrak{h}^*$ базисного элемента $X \in \mathfrak{g}$ определяется обычным способом: $[H, X] = \alpha(H)\, X$ для всех $H \in \mathfrak{h}$. Предположим, что $m \in \ker \mathfrak{f}$. Так как x лежит в центре,

$$xm = \prod_a X_{i_a}[-r_a - 1]\, x \prod_b Y_{j_b}[r_b].$$

Чтобы записать xm в виде линейной комбинации упорядоченных мономов, нам будет достаточно использовать только коммутационные соотношения в подалгебре $\mathfrak{g}[t]$ и в подалгебре $t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$. Поскольку коммутационные соотношения сохраняют вес, мы можем заключить, что $xm \in \ker \mathfrak{f}$. Следовательно, ненулевой вклад в образ $\mathfrak{f}(xy)$ может возникнуть только из компоненты $\mathfrak{f}(xy_0)$, т. е. из выражений вида

$$\prod_a H_{i_a}[-r_a - 1]\, x \prod_b H_{j_b}[r_b], \qquad r_a, r_b \geqslant 0,$$

где $H_{i_a}, H_{j_b} \in \mathfrak{h}$. Если p — это упорядоченный моном, входящий в линейную комбинацию, представляющую элемент x, и $\mathfrak{f}(p) = 0$, то, применяя свойство

(13.48) к моному p, получаем

$$\mathfrak{f}: \prod_a H_{i_a}[-r_a - 1]\, p \prod_b H_{j_b}[r_b] \mapsto 0.$$

Поскольку подалгебры Ли $\mathfrak{h}[t]$ и $t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]$ в $\widehat{\mathfrak{h}}$ абелевы, мы приходим к требуемому соотношению $\mathfrak{f}(xy) = x_0 y_0$. □

Гомоморфизм (13.47) позволяет получить аналог изоморфизма Хариш-Чандры следующим образом. Зададим линейное отображение

$$\mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big) \to \widetilde{\Pi}\,[[z, z^{-1}]],$$

полагая

$$H[-r-1] \mapsto \frac{\partial_z^r}{r!}\, H(z), \qquad H \in \mathfrak{h}, \quad r \geqslant 0,$$

где

$$H(z) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} H[p]\, z^{-p-1},$$

и продолжим его на всю алгебру по мультипликативности. В частности, для любого элемента $w \in \mathcal{W}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{S}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$ классической $\mathcal{W}$-алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ получаем формальный ряд Лорана

$$w \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_{[n]}\, z^{-n-1}, \qquad w_{[n]} \in \widetilde{\Pi}. \tag{13.49}$$

Пусть $\{T^r w_i\}$ — это семейство алгебраически независимых образующих алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$; см. гл. 12. Определим подалгебру $\widehat{\mathcal{W}}(\mathfrak{g}) \subset \widetilde{\Pi}$ как пополнение алгебры полиномов от всех переменных $w_{i\,[n]}$ относительно топологии, которая определяет пополнение $\widetilde{\Pi}$ в (13.45). Иначе говоря, топология задаётся системой окрестностей нуля, образованной идеалами I_p. Это приводит к соответствующей версии изоморфизма Хариш-Чандры; см. [**46**, Theorem 4.3.6].

Теорема 13.3.2. *Гомоморфизм* (13.47) *инъективен. Его образ совпадает с подалгеброй* $\widehat{\mathcal{W}}({}^L\mathfrak{g})$*, тем самым определяя изоморфизм*

$$\mathfrak{f}: \mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \to \widehat{\mathcal{W}}({}^L\mathfrak{g}) \tag{13.50}$$

коммутативных алгебр. □

Из определения изоморфизмов, описанных в теоремах 13.1.1 и 13.3.2, ясно, что они согласованы посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{W}({}^L\mathfrak{g}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{\cong} & \widehat{\mathcal{W}}({}^L\mathfrak{g}), \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки соответствуют отображениям, построенным в §6.6 и в (13.49). Это позволяет нам вычислить образы Хариш-Чандры образующих центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ для классических серий. Приведённые ниже формулы для серии A_{N-1} вытекают из предложения 13.1.2 и следствия 13.1.3.

Серия A_{N-1}. Рассмотрим образующие центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$, полученные в §7.2. Мы будем использовать некоммутативные полные и элементарные симметрические функции, определённые в (12.47) и (12.48). Положим

$$\mu_i[r] = E_{ii}[r] \qquad \text{и} \qquad \mu_i(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \mu_i[r]\, z^{-r-1}$$

для $i = 1, \ldots, N$.

Предложение 13.3.3. *Для образов относительно изоморфизма, определённого в* (13.50), *справедливы формулы*

$$:\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, A^{(m)}\big(\partial_z + E(z)_1\big)\ldots\big(\partial_z + E(z)_m\big): \\ \mapsto e_m\big(\partial_z + \mu_1(z), \ldots, \partial_z + \mu_N(z)\big),$$

$$:\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, H^{(m)}\big(\partial_z + E(z)_1\big)\ldots\big(\partial_z + E(z)_m\big): \\ \mapsto h_m\big(\partial_z + \mu_1(z), \ldots, \partial_z + \mu_N(z)\big),$$

$$:\mathrm{cdet}\,\big(\partial_z + E(z)\big): \mapsto \big(\partial_z + \mu_N(z)\big)\ldots\big(\partial_z + \mu_1(z)\big),$$

и

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m \ :\mathrm{tr}\,\big(\partial_z + E(z)\big)^m: \\ \mapsto \sum_{i=1}^{N} \Big(1 - q\,\big(\partial_z + \mu_1(z)\big)\Big)^{-1} \cdots \Big(1 - q\,\big(\partial_z + \mu_i(z)\big)\Big)^{-1} \\ \times \Big(1 - q\,\big(\partial_z + \mu_{i-1}(z)\big)\Big) \cdots \Big(1 - q\,\big(\partial_z + \mu_1(z)\big)\Big).$$

□

Пусть теперь $\mathfrak{g}_N$ — это классическая алгебра Ли типа B_n, C_n или D_n. Образующие центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}}_N)$ были построены в §8.5. Образы Хариш-Чандры операторов Сугавары вытекают из соответствующих формул из предложений 13.1.7, 13.1.10, 13.1.12 и 13.1.14.

Серия B_n. Положим

$$\mu_i[r] = F_{ii}[r] \qquad \text{и} \qquad \mu_i(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \mu_i[r]\, z^{-r-1} \tag{13.51}$$

при $i = 1, \ldots, N$. Пусть $N = 2n + 1$.

Предложение 13.3.4. *Для образа ряда*

$$:\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}\, S^{(m)}\big(\partial_z + F(z)_1\big)\ldots\big(\partial_z + F(z)_m\big):$$

относительно изоморфизма (13.50) *справедлива формула*

$$h_m\big(\partial_z + \mu_1(z), \ldots, \partial_z + \mu_n(z), \partial_z - \mu_n(z), \ldots\, \partial_z - \mu_1(z)\big).$$

□

Серия D_n. Возьмём теперь $N = 2n$ и будем использовать обозначения (13.51).

Предложение 13.3.5. *Для образа ряда*

$$:\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\big(\partial_z + F(z)_1\big)\dots\big(\partial_z + F(z)_m\big):$$

относительно изоморфизма (13.50) *справедлива формула*

$$\frac{1}{2}\,h_m\big(\partial_z + \mu_1(z),\dots,\partial_z + \mu_{n-1}(z), \partial_z - \mu_n(z),\dots \partial_z - \mu_1(z)\big)$$

$$+\frac{1}{2}\,h_m\big(\partial_z + \mu_1(z),\dots,\partial_z + \mu_n(z), \partial_z - \mu_{n-1}(z),\dots \partial_z - \mu_1(z)\big).$$

□

Вспомним некоммутативный пфаффиан, определённый в (8.51).

Предложение 13.3.6. *Для изоморфизма* (13.50) *имеем*

$$\mathrm{Pf}\,F(z) \mapsto \big(\mu_1(z) - \partial_z\big)\dots\big(\mu_n(z) - \partial_z\big)\,1,$$

где мы предполагаем, что $\partial_z\,1 = 0$. □

Серия C_n. Возьмём $N = 2n$ и применим обозначения (13.51).

Предложение 13.3.7. *Для всех $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$ образ ряда*

$$:\gamma_m(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\big(\partial_z + F(z)_1\big)\dots\big(\partial_z + F(z)_m\big):$$

относительно изоморфизма (13.50) *равен*

$$e_m\big(\partial_z + \mu_1(z),\dots,\partial_z + \mu_n(z), \partial_z, \partial_z - \mu_n(z),\dots \partial_z - \mu_1(z)\big).$$

□

§ 13.4. Образы Хариш-Чандры элементов Казимира

Как мы отметили в §6.5, образующие центра универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ можно получить из полных наборов векторов Сигала–Сугавары с помощью точечных гомоморфизмов; см. предложение 6.5.2. Кроме того, гомоморфизм (13.1) индуцирует гомоморфизм Хариш-Чандры

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \to \mathrm{U}(\mathfrak{h}). \tag{13.52}$$

Это проекция, ядро которой — двусторонний идеал $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \cap \mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_-$. Точнее, для произвольного ненулевого $z \in \mathbb{C}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)^{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\ \mathfrak{f}\ } & \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big) \\
{\scriptstyle \varrho_z}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varrho_z} \\
\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} & \longrightarrow & \mathrm{U}(\mathfrak{h})
\end{array}.$$

Отметим, что для фиксированного треугольного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ подалгебры $\mathfrak{n}_-$ и $\mathfrak{n}_+$ в (4.6) и (13.52) поменялись ролями.

Один способ применить результаты §13.1 к вычислению образов Хариш-Чандры элементов Казимира относительно изоморфизма (4.7) состоит в том, чтобы подкрутить гомоморфизм (13.52), взяв его композицию с *инволюцией Шевалле*, которая представляет собой инволютивный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, определённый в терминах реализации Шевалле по правилу

$$e_i \mapsto -f_i, \qquad f_i \mapsto -e_i, \qquad h_i \mapsto -h_i;$$

см. §12.1. Альтернативный способ — интерпретировать образы элементов Казимира относительно гомоморфизма (13.52) как их собственные значения в *представлениях младшего веса* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по аналогии с (4.15) и (5.9). Мы применим второй способ и рассмотрим классические серии отдельно.

Серия A_{N-1}. Для данного набора комплексных чисел $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ соответствующее *неприводимое представление младшего веса* $L^\circ(\mu)$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ порождается таким ненулевым вектором $\zeta \in L^\circ(\mu)$ (*младшим вектором*), что

$$\begin{aligned} &E_{ij}\,\zeta = 0 &&\text{при}\quad N \geqslant i > j \geqslant 1 \qquad \text{и}\\ &E_{ii}\,\zeta = \mu_i\,\zeta &&\text{при}\quad N \geqslant i \geqslant 1. \end{aligned}$$

Любой элемент $z \in \mathrm{Z}(\mathfrak{gl}_N)$ действует в $L^\circ(\mu)$ умножением каждого вектора на скаляр $\mathfrak{f}(z)$, который совпадает с образом элемента z при гомоморфизме (13.52) для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$, где μ_i отождествляется с элементом $E_{ii} \in \mathfrak{h}$.

Представление $L^\circ(\mu)$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ конечномерно тогда и только тогда, когда

$$\mu_{i+1} - \mu_i \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{при} \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Если эти условия выполнены, то $L^\circ(\mu)$ изоморфно представлению старшего веса, определённому в §4.2, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, а $\lambda_i = \mu_{N-i+1}$ при всех $i = 1, \dots, N$:

$$L^\circ(\mu) \cong L(\lambda). \tag{13.53}$$

Теперь мы можем вывести следующие версии предложений 4.6.1 и 4.7.1, в которых мы рассматриваем z как переменную и вкладываем универсальную обёртывающую алгебру в тензорное произведение $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N) \otimes \mathbb{C}[z^{-1}, \partial_z]$.

Следствие 13.4.1. *Для изоморфизма Хариш-Чандры* (4.15) *имеем*

$$\chi : \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, A^{(m)} \big({-\partial_z} + E_1\, z^{-1}\big) \dots \big({-\partial_z} + E_m\, z^{-1}\big) \\ \mapsto \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant N} \big({-\partial_z} + \lambda_{i_1} z^{-1}\big) \cdots \big({-\partial_z} + \lambda_{i_m} z^{-1}\big)$$

и

$$\chi : \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, H^{(m)} \big({-\partial_z} + E_1\, z^{-1}\big) \dots \big({-\partial_z} + E_m\, z^{-1}\big) \\ \mapsto \sum_{N \geqslant i_1 \geqslant \dots \geqslant i_m \geqslant 1} \big({-\partial_z} + \lambda_{i_1} z^{-1}\big) \cdots \big({-\partial_z} + \lambda_{i_m} z^{-1}\big).$$

Доказательство. Используя гомоморфизм (6.30) и принимая в расчёт свойство (6.31), мы получаем из предложения 13.1.2, что для гомоморфизма (13.52) выполнены соотношения

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)}\big(-\partial_z + E_1\, z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z + E_m\, z^{-1}\big) \mapsto e_m\big(-\partial_z + \mu_1 z^{-1},\dots,-\partial_z + \mu_N z^{-1}\big),$$

и

$$\operatorname{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)}\big(-\partial_z + E_1\, z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z + E_m\, z^{-1}\big) \mapsto h_m\big(-\partial_z + \mu_1 z^{-1},\dots,-\partial_z + \mu_N z^{-1}\big).$$

Будем рассматривать эти образы как собственные значения элементов Казимира в конечномерных представлениях младшего веса $L^{\circ}(\mu)$. Следовательно, в силу (13.53) их собственные значения в представлении $L(\lambda)$ находятся с помощью замены μ_i на λ_{N-i+1} для всех $i = 1,\dots,N$. Так как образ Хариш-Чандры любого элемента Казимира полностью определяется его собственными значениями в конечномерных неприводимых представлениях, тем самым утверждение доказано. □

Отметим, что формулы из следствия 13.4.1 эквивалентны соответствующим формулам из предложений 4.6.1 и 4.7.1. Это следует из соотношений

$$z^m\,(-\partial_z + E_1\, z^{-1})\dots(-\partial_z + E_m\, z^{-1}) = (u + E_1 + m - 1)\dots(u + E_m) \tag{13.54}$$

и

$$z^m\,(-\partial_z + \lambda_{i_1} z^{-1})\cdots(-\partial_z + \lambda_{i_m} z^{-1}) = (u + \lambda_{i_1} + m - 1)\cdots(u + \lambda_{i_m}), \tag{13.55}$$

где $u = -z\,\partial_z$, так что $z\,u = (u+1)z$. Для второй формулы мы применяем лемму 4.5.4.

Такое же рассуждение, как в доказательстве следствия 13.4.1, приводит к соответствующей версии первой формулы из следствия 13.1.3.

Следствие 13.4.2. *Для изоморфизма Хариш-Чандры* (4.15) *имеем*

$$\chi : \operatorname{cdet}\big(-\partial_z + E z^{-1}\big) \mapsto \big(-\partial_z + \lambda_1 z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z + \lambda_N z^{-1}\big).$$

□

Равносильная форма этого утверждения была получена в следствии 4.6.2. Докажем теперь альтернативный вариант следствия 4.8.2, в котором рассматривается модифицированное семейство инвариантов Гельфанда.

Следствие 13.4.3. *Пусть m — целое положительное число. Для изоморфизма Хариш-Чандры* (4.15) *выполнены соотношения*

$$\chi : \operatorname{tr}\big(-\partial_z + E z^{-1}\big)^m \mapsto \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i_1\geqslant\dots\geqslant i_k\geqslant i<j_1<\dots<j_{m-k}} \big(-\partial_z + \lambda_{i_1} z^{-1}\big)\cdots\big(-\partial_z + \lambda_{i_k} z^{-1}\big) \times \big(\partial_z - \lambda_{j_1} z^{-1}\big)\cdots\big(\partial_z - \lambda_{j_{m-k}} z^{-1}\big)$$

и

$$\chi : \operatorname{tr} E(E-1)\dots(E-m+1)$$
$$\mapsto \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i_1\geqslant\dots\geqslant i_k\geqslant i<j_1<\dots<j_{m-k}} \lambda_{i_1}\big(\lambda_{i_2}-1\big)\cdots\big(\lambda_{i_k}-k+1\big)$$
$$\times\big(-\lambda_{j_1}+k\big)\cdots\big(-\lambda_{j_{m-k}}+m-1\big).$$

Доказательство. Чтобы получить первую формулу, возьмём коэффициенты при q^m в соотношении (13.7) и применим такое же рассуждение, как в доказательстве следствия 13.4.1. Затем умножим выражения в обеих частях слева на z^m, воспользуемся формулами (13.54) и (13.55) и положим $u=-m+1$. Это даст второе соотношение. □

Пусть теперь $\mathfrak{g}_N$ — это ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{o}_N$ или симплектическая алгебра Ли $\mathfrak{sp}_N$. В обозначениях § 5.1 для любого n-набора комплексных чисел $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ соответствующее *неприводимое представление младшего веса* $L^{\circ}(\mu)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_N$ порождается таким ненулевым вектором $\zeta\in L^{\circ}(\mu)$ (*младшим вектором*), что

$$F_{ij}\,\zeta=0 \quad \text{при} \quad N\geqslant i>j\geqslant 1 \quad \text{и} \tag{13.56}$$

$$F_{ii}\,\zeta=\lambda_i\,\zeta \quad \text{при} \quad n\geqslant i\geqslant 1. \tag{13.57}$$

Серия B_n. Если представление $L^{\circ}(\mu)$ конечномерно, то оно изоморфно представлению старшего веса, определённому в § 5.1, где $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, а $\lambda_i=-\mu_i$ при $i=1,\dots,n$:

$$L^{\circ}(\mu)\cong L(\lambda).$$

Расширим область определения индексов, полагая $\lambda_{i'}=-\lambda_i$ при $i=1,\dots,n$. Обсудим теперь альтернативный способ вычислить образы Хариш-Чандры элементов Казимира, построенных в § 5.4.

Следствие 13.4.4. *Для изоморфизма Хариш-Чандры* (5.9) *имеем*

$$\chi : \gamma_m(N)\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\big(-\partial_z+F_1 z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z+F_m z^{-1}\big)$$
$$\mapsto h_m\big(-\partial_z-\lambda_1 z^{-1},\dots,-\partial_z-\lambda_n z^{-1},-\partial_z+\lambda_n z^{-1},\dots-\partial_z+\lambda_1 z^{-1}\big).$$

Кроме того, при $k\geqslant 1$ образ элемента Казимира

$$\gamma_{2k}(N)\operatorname{tr}_{1,\dots,2k} S^{(2k)}\,(F_1+k-1)\dots(F_{2k}-k)$$

относительно изоморфизма Хариш-Чандры равен

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_{2k}\leqslant 1'}(\lambda_{i_1}-k)(\lambda_{i_2}-k+1)\dots(\lambda_{i_{2k}}+k-1), \tag{13.58}$$

где суммирование производится по мультимножествам $\{i_1,\dots,i_{2k}\}$ с элементами из множества $\{1,\dots,n,n',\dots,1'\}$.

Доказательство. Как в доказательстве следствия 13.4.1, первая часть следует из предложения 13.1.7, если применить гомоморфизм (6.30) и заменить μ_i на $-\lambda_i$. Кроме того, используя соответствующие аналоги формул (13.54) и (13.55), находим, что образ Хариш-Чандры полинома

$$\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)}\big(u+F_1+m-1\big)\dots\big(u+F_m\big)$$

равен

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_m\leqslant 1'}(u-\lambda_{i_1}+m-1)\dots(u-\lambda_{i_m}),$$

что можно переписать как

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_m\leqslant 1'}(u+\lambda_{i_1})\dots(u+\lambda_{i_m}+m-1).$$

Чтобы получить вторую часть следствия, при $m=2k$ положим $u=-k$. □

Сравнивая этот результат с предложением 5.4.1, мы видим, что полином (13.58) совпадает с факториальным полным симметрическим полиномом $h_k(l_1^2,\dots,l_n^2\,|\,a)$. Это совпадение можно проверить непосредственно с использованием теоремы характеризации для факториальных симметрических функций (предложение 4.3.2). А именно, оба элемента — симметрическме полиномы от переменных $l_1^2,\dots,l_n^2$ степени k, а их компоненты старшей степени совпадают и равны полному симметрическому полиному $h_k(l_1^2,\dots,l_n^2)$. Остаётся проверить с помощью простого вычисления, что каждый из элементов (13.58) и $h_k(l_1^2,\dots,l_n^2\,|\,a)$ обращается в нуль, если набор $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ рассматривается как разбиение, удовлетворяющее условию $\lambda_1+\dots+\lambda_n<k$.

Более общие тождества можно получить, сравнивая формулы из следствий 5.4.2 и 13.4.4.

Серия D_n. Конечномерное представление младшего веса $L^\circ(\mu)$ изоморфно представлению старшего веса, определённому в §5.1, где $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ и $\lambda_i=-\mu_i$ при $i=1,\dots,n-1$, а $\lambda_n=(-1)^{n-1}\mu_n$:

$$L^\circ(\mu)\cong L(\lambda).$$

Положим $\lambda_{i'}=-\lambda_i$ при $i=1,\dots,n$.

Следствие 13.4.5. *Образ дифференциального оператора*

$$\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, S^{(m)}\big(-\partial_z+F_1\,z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z+F_m\,z^{-1}\big)$$

относительно изоморфизма Хариш-Чандры (5.9) *равен*

$$\frac{1}{2}\,h_m\big(-\partial_z-\lambda_1 z^{-1},\dots,-\partial_z-\lambda_{n-1}z^{-1},-\partial_z+\lambda_n z^{-1},\dots-\partial_z+\lambda_1 z^{-1}\big)$$

$$+\frac{1}{2}\,h_m\big(-\partial_z-\lambda_1 z^{-1},\dots,-\partial_z-\lambda_n z^{-1},-\partial_z+\lambda_{n-1}z^{-1},\dots-\partial_z+\lambda_1 z^{-1}\big).$$

Кроме того, при $k\geqslant 1$ образ элемента Казимира

$$\gamma_{2k}(N)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,2k}\, S^{(2k)}\,(F_1+k-1)\dots(F_{2k}-k)$$

относительно изоморфизма Хариш-Чандры равен

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_{2k}\leqslant 2n\\ i_s\neq n}}(\lambda_{i_1}-k)\dots(\lambda_{i_{2k}}+k-1)\\ +\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_{2k}\leqslant 2n\\ i_s\neq n'}}(\lambda_{i_1}-k)\dots(\lambda_{i_{2k}}+k-1), \tag{13.59}$$

где суммирование производится по мультимножествам $\{i_1,\dots,i_{2k}\}$ *с элементами из множества* $\{1,\dots,n,n',\dots,1'\}$.

Доказательство. Эти формулы выводятся из предложения 13.1.10 точно так же, как в доказательстве следствия 13.4.4. □

Полином (13.59) совпадает с факториальным полным симметрическим полиномом $h_k(l_1^2,\dots,l_n^2\,|\,a)$, который возникает как образ Хариш-Чандры в предложении 5.4.1. Это равенство можно также проверить непосредственно с использованием предложения 4.3.2. Более общие тождества можно получить, сравнивая формулы из следствий 5.4.2 и 13.4.5.

Серия C_n. Будем использовать определение представления младшего веса $L^\circ(\mu)$ алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$; см. соотношения (13.56) и (13.57). Если это представление конечномерно, то оно изоморфно представлению старшего веса, определённому в §5.1, где $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ и $\lambda_i=-\mu_i$ при $i=1,\dots,n$:

$$L^\circ(\mu)\cong L(\lambda).$$

Расширим множество значений индексов, полагая $\lambda_0=0$ и $\lambda_{i'}=-\lambda_i$ при $i=1,\dots,n$.

В силу результатов §5.5 выражение (5.37) допускает эквивалентную форму, которая корректно определена при всех $1\leqslant m\leqslant 2n+1$. Мы по-прежнему используем общее обозначение для этого выражения.

Следствие 13.4.6. *При* $1\leqslant m\leqslant 2n+1$ *образ дифференциального оператора*

$$\gamma_m(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\,S^{(m)}\big(-\partial_z+F_1\,z^{-1}\big)\dots\big(-\partial_z+F_m\,z^{-1}\big)$$

относительно изоморфизма Хариш-Чандры (5.9) *равен*

$$e_m\big(-\partial_z-\lambda_1z^{-1},\dots,-\partial_z-\lambda_nz^{-1},-\partial_z,-\partial_z+\lambda_nz^{-1},\dots-\partial_z+\lambda_1z^{-1}\big).$$

Кроме того, если $m=2k$ чётно, то образ элемента Казимира

$$\gamma_{2k}(-2n)\,\mathrm{tr}_{1,\dots,2k}\,S^{(2k)}\,(F_1+k)\dots(F_{2k}-k+1)$$

относительно изоморфизма Хариш-Чандры равен

$$\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_{2k}\leqslant 1'}(\lambda_{i_1}+k)\dots(\lambda_{i_{2k}}-k+1), \tag{13.60}$$

где суммирование производится по подмножествам $\{i_1,\dots,i_{2k}\}$ *множества* $\{1,\dots,n,0,n',\dots,1'\}$ *с упорядочением* $1<\dots<n<0<n'<\dots<1'$.

Доказательство. Как в доказательстве следствия 13.4.4, формулы вытекают из предложения 13.1.14 с применением гомоморфизма (6.30). □

Из предложения 5.5.4 следует, что полином (13.60) совпадает с факториальным элементарным симметрическим полиномом $(-1)^k\, e_k(l_1^2, \ldots, l_n^2 \,|\, a)$. Это следует также из теоремы характеризации для факториальных симметрических полиномов (предложение 4.3.2). Из следствия 5.5.5 вытекают также более общие тождества, которые возникают из сравнения образов Хариш-Чандры одного и того же выражения.

§ 13.5. Библиографические замечания

Образы Хариш-Чандры образующих алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ были вычислены в работе [**23**] для типа A и в работе [**111**] для типов B, C и D. Прямое доказательство предложения 13.1.12 было дано в статье Н. Рожковской [**138**]. В вычислениях со скрининговыми операторами мы следовали работе [**113**] с некоторыми изменениями для двойственных янгианов.

Глава 14

Высшие гамильтонианы в модели Годена

Основополагающая работа Б. Фейгина, Э. Френкеля и Н. Решетихина [**40**] установила связь между центром $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ аффинной вертексной алгебры на критическом уровне и высшими гамильтонианами в модели Годена. Как было показано в работе, каждому элементу $S \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ можно сопоставить гамильтониан, а его собственные значения на векторах Бете можно вычислить с помощью модулей Вакимото над алгеброй Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{g}}$. В этой главе мы применим эти результаты и их обобщения из работы [**42**], чтобы получить формулы для действия высших гамильтонианов Годена в тензорных произведениях некоторых представлений классической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и вычислить собственные значения векторов Бете. Мы будем опираться на конструкции образующих алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$, полученные в §7.1, §8.1 и §8.3, а также на формулы для их образов Хариш-Чандры из §13.1.

§ 14.1. Уравнения анзаца Бете

Рассмотрим стандартные образующие Шевалле e_i, h_i, f_i при $i = 1, \dots, n$ простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ранга n. Элементы h_i образуют базис подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, а семейства $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$ порождают нильпотентные подалгебры $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ соответственно. Пусть $A = [a_{ij}]$ — это матрица Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, так что определяющие соотношения для $\mathfrak{g}$ принимают вид

$$\begin{aligned} [e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_i, \qquad & [h_i, h_j] &= 0, \\ [h_i, e_j] &= a_{ij}\, e_j, \qquad & [h_i, f_j] &= -a_{ij}\, f_j, \end{aligned}$$

вместе с соотношениями Серра

$$(\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}}\, e_j = 0, \qquad (\operatorname{ad} f_i)^{1-a_{ij}}\, f_j = 0, \qquad i \neq j.$$

Для произвольного элемента $\chi \in \mathfrak{g}^*$ и ненулевого $z \in \mathbb{C}$ отображение

$$\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}), \qquad X[r] \mapsto X\, z^r + \delta_{r,-1}\, \chi(X), \tag{14.1}$$

при $X \in \mathfrak{g}$ и $r < 0$ задаёт гомоморфизм алгебр; ср. (9.29). Используя коассоциативность стандартного копроизведения в $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$, определённого по правилу

$$\Delta : Y \mapsto Y \otimes 1 + 1 \otimes Y, \qquad Y \in t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}],$$

для любого $\ell \geqslant 1$ получаем гомоморфизм

$$\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big) \to \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)^{\otimes \ell} \tag{14.2}$$

как итерированное отображение копроизведения. Теперь зафиксируем различные комплексные числа $z_1, \ldots, z_\ell$ и будем считать u комплексным параметром. Применяя гомоморфизмы вида (14.1) к тензорным множителям в (14.2), получаем гомоморфизм

$$\Psi : \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes \ell}, \tag{14.3}$$

заданный формулой

$$\Psi : X[r] \mapsto \sum_{a=1}^{\ell} X_a (z_a - u)^r + \delta_{r,-1}\, \chi(X) \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes \ell},$$

где $X_a = 1^{\otimes(a-1)} \otimes X \otimes 1^{\otimes(\ell-a)}$. Подкрутим этот гомоморфизм с помощью инволютивного антиавтоморфизма

$$\varsigma : \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big) \to \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big), \qquad X[r] \mapsto -X[r], \quad X \in \mathfrak{g}, \tag{14.4}$$

и тем самым определим антигомоморфизм

$$\Phi : \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes \ell}, \tag{14.5}$$

заданный как композиция $\Phi = \Psi \circ \varsigma$. Поскольку $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это коммутативная подалгебра в $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]\big)$, образ подалгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ относительно Φ — это коммутативная подалгебра $\mathcal{A}(\mathfrak{g})_\chi$ алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes \ell}$, зависящая от выбранных параметров $z_1, \ldots, z_\ell$, но не зависящая от u; ср. § 9.2.

Для любого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ модуль Верма M_λ — это фактор алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ по левому идеалу, порождённому подпространством $\mathfrak{n}_+$ и элементами $h_i - \lambda(h_i)$ при $i = 1, \ldots, n$. Обозначим образ элемента $1 \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ в M_λ через 1_λ. Для произвольных весов $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in \mathfrak{h}^*$ рассмотрим тензорное произведение модулей Верма $M_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes M_{\lambda_\ell}$. Опишем теперь общие собственные векторы коммутативной подалгебры $\mathcal{A}(\mathfrak{g})_\chi$ в этом тензорном произведении. Пусть $w_1, \ldots, w_m$ — это такие различные комплексные числа, что $w_i \neq z_j$, а $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$ — это набор (мультимножество) элементов (меток). Введём соответствующий *вектор Бете*

$$\phi(w_1^{i_1}, \ldots, w_m^{i_m}) \in M_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes M_{\lambda_\ell}$$

по формуле

$$\phi(w_1^{i_1}, \ldots, w_m^{i_m}) = \sum_{(I^1, \ldots, I^\ell)} \bigotimes_{k=1}^{\ell} \prod_{s=1}^{a_k} \frac{1}{w_{j_s^k} - w_{j_{s+1}^k}} \prod_{r \in I^k} f_{i_r}\, 1_{\lambda_k}, \tag{14.6}$$

с суммированием по всем упорядоченным разбиениям $I^1 \cup I^2 \cup \cdots \cup I^\ell$ множества $\{1, \ldots, m\}$ на упорядоченные подмножества $I^k = \{j_1^k, j_2^k, \ldots, j_{a_k}^k\}$. Произведение берётся слева направо, и мы полагаем $w_{j_{s+1}^k} := z_k$ при $s = a_k$.

Теперь будем предполагать, что $\chi \in \mathfrak{h}^*$, и рассматривать χ как функционал на $\mathfrak{g}$, который обращается в нуль на $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$. Система *уравнений анзаца Бете* имеет вид

$$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\lambda_i(\check{\alpha}_{i_j})}{w_j - z_i} - \sum_{s \neq j} \frac{\alpha_{i_s}(\check{\alpha}_{i_j})}{w_j - w_s} = \chi(\check{\alpha}_{i_j}), \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{14.7}$$

где $\alpha_l \in \mathfrak{h}^*$ и $\check{\alpha}_l \in \mathfrak{h}$ при $l = 1, \ldots, n$ обозначают простые корни и дуальные простые корни соответственно.

Введём гомоморфизм из алгебры $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]\big)$ в алгебру рациональных функций от u по правилу:

$$\varrho : H[-r-1] \mapsto \frac{\partial_u^r}{r!}\,\mathcal{H}(u), \qquad H \in \mathfrak{h}, \quad r \geqslant 0,$$

где

$$\mathcal{H}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{\lambda_a(H)}{u - z_a} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_{i_j}(H)}{u - w_j} - \chi(H). \tag{14.8}$$

Пусть $S \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ — это вектор Сигала–Сугавары. Композиция $\varrho \circ \mathfrak{f}$ этого гомоморфизма с изоморфизмом (13.2) переводит вектор S в рациональную функцию $\varrho\big(\mathfrak{f}(S)\big)$ от u. Будем рассматривать образ $\Phi(S)$ вектора S относительно антигомоморфизма (14.5) как оператор в тензорном произведении модулей Верма $M_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes M_{\lambda_\ell}$. Следующая теорема — это фактически переформулировка теорем 6.5 и 6.7 из статьи [**42**]; в случае $\chi = 0$ результат восходит к работе [**40**, Theorem 3].

Теорема 14.1.1. *Предположим, что уравнения анзаца Бете* (14.7) *выполнены. Если вектор Бете $\phi(w_1^{i_1}, \ldots, w_m^{i_m})$ ненулевой, то он является собственным вектором оператора $\Phi(S)$ с собственным значением $\varrho\big(\mathfrak{f}(S)\big)$.* □

Возьмём теперь полные наборы векторов Сигала–Сугавары $S_1, \ldots, S_n$ для классических серий и, опираясь на результаты гл. 13, получим явные формулы для операторов $\Phi(S_i)$ и их собственных значений $\varrho\big(\mathfrak{f}(S_i)\big)$ на векторах Бете.

§ 14.2. Гамильтонианы Годена и собственные значения

Серия A_{N-1}. Нам необходимо найти образы векторов Сигала–Сугавары, построенных в § 7.1, относительно инволюции (14.4). Продолжим её на алгебру $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\big) \otimes \mathbb{C}[\tau]$, считая, что она действует на компоненте $\mathbb{C}[\tau]$ как тождественное отображение.

Лемма 14.2.1. *Образы относительно инволюции ς даются формулами*

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)}\big(\tau + E[-1]_1\big)\ldots\big(\tau + E[-1]_m\big) \\ \mapsto \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)}\big(\tau - E[-1]_1\big)\ldots\big(\tau - E[-1]_m\big),$$

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)}\big(\tau + E[-1]_1\big)\ldots\big(\tau + E[-1]_m\big) \\ \mapsto \operatorname{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)}\big(\tau - E[-1]_1\big)\ldots\big(\tau - E[-1]_m\big),$$

$$\operatorname{tr}\big(\tau + E[-1]\big)^m \mapsto \operatorname{tr}\big(\tau - E^t[-1]\big)^m, \tag{14.9}$$

и

$$\operatorname{cdet}\big(\tau + E[-1]\big) \mapsto \operatorname{cdet}\big(\tau - E^t[-1]\big), \tag{14.10}$$

где t — это стандартное матричное транспонирование.

Доказательство. Левую часть первого соотношения можно представить в виде линейной комбинации выражений

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, A^{(m)} E[r_1]_{a_1} \dots E[r_p]_{a_p}\, \tau^k, \tag{14.11}$$

где $1 \leqslant a_1 < \dots < a_p \leqslant m$ и $r_i < 0$. Проверим, что такое выражение не изменяется при любых перестановках множителей $E[r_i]_{a_i}$. Действительно, из определяющих соотношений (7.6) следует, что

$$E[r]_a\, E[s]_b - E[s]_b\, E[r]_a = P_{a\,b}\, E[r+s]_b - E[r+s]_b\, P_{a\,b}$$

при $a < b$. Теперь достаточно учесть тождества $A^{(m)} P_{a\,b} = P_{a\,b} A^{(m)} = -A^{(m)}$ и применить свойство цикличности следа. Следовательно, образ выражения (14.11) относительно ς равен

$$(-1)^p\, \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, A^{(m)} E[r_1]_{a_1} \dots E[r_p]_{a_p}\, \tau^k,$$

как и требовалось. Такое же рассуждение доказывает второе соотношение. Чтобы проверить соотношение (14.10), будем использовать формулу (7.10) и тот факт, что $\tau + E[-1]$ — это матрица Манина; см. лемму 7.1.2. Образ выражения из (7.10) относительно инволюции ς равен

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,N}\, A^{(N)} \big(\tau - E[-1]_1\big) \dots \big(\tau - E[-1]_N\big) \\ = \mathrm{tr}_{1,\dots,N}\, A^{(N)} \big(\tau - E^t[-1]_1\big) \dots \big(\tau - E^t[-1]_N\big),$$

где мы применили транспонирование $t_1 \dots t_N$, отвечающее всем копиям алгебры $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$, и использовали инвариантность антисимметризатора $A^{(N)}$ относительно этого транспонирования. Поскольку $\tau - E^t[-1]$ — это тоже матрица Манина, окончательное выражение совпадает со столбцовым определителем $\mathrm{cdet}\,\big(\tau - E^t[-1]\big)$. Наконец, соотношение (14.9) вытекает из теоремы 3.2.10, связывающей коэффициенты полиномов в (7.9) и (7.11). □

Сохраняя параметры, выбранные в §14.1, предположим, что функционал χ аннулируется на подпространстве $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$, так что χ можно считать элементом пространства $\mathfrak{h}^*$. Положим

$$E_{ij}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{(E_{ij})_a}{u - z_a} - \chi(E_{ij}) \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes \ell}.$$

Рассмотрим строчный определитель $\mathrm{rdet}\big(\partial_u + E(u)\big)$ матрицы

$$\partial_u + E(u) = \big[\delta_{ij}\, \partial_u + E_{ij}(u)\big]$$

как дифференциальный оператор с коэффициентами в алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes \ell}$; см. (3.25). Кроме того, в соответствии с формулой (14.8) положим

$$\mathcal{E}_{ii}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{\lambda_a(E_{ii})}{u - z_a} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_{i_j}(E_{ii})}{u - w_j} - \chi(E_{ii}).$$

В формулах для собственных значений гамильтонианов Годена мы будем предполагать, что выполнены уравнения анзаца Бете (14.7).

Теорема 14.2.2. *Собственное значение оператора* $\operatorname{rdet}\bigl(\partial_u+E(u)\bigr)$ *на векторе Бете* (14.6) *даётся формулой*

$$\operatorname{rdet}\bigl(\partial_u+E(u)\bigr)\,\phi(w_1^{i_1},\ldots,w_m^{i_m})=\bigl(\partial_u+\mathcal{E}_{NN}(u)\bigr)\ldots\bigl(\partial_u+\mathcal{E}_{11}(u)\bigr)\,\phi(w_1^{i_1},\ldots,w_m^{i_m}).$$

Доказательство. Чтобы применить теорему 14.1.1, найдём образ полинома $\operatorname{cdet}\bigl(\tau+E[-1]\bigr)$ относительно антигомоморфизма Φ. Продолжим Φ до отображения

$$\Phi:\mathrm{U}\bigl(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]\bigr)\otimes\mathbb{C}[\tau]\to\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes\ell}\otimes\mathbb{C}[\partial_u],$$

полагая $\tau\mapsto\partial_u$. По определению гомоморфизма (14.3)

$$\Psi: E[-1]\mapsto -E(u),$$

так что в силу (14.10)

$$\Phi:\operatorname{cdet}\bigl(\tau+E[-1]\bigr)\mapsto\operatorname{cdet}\bigl(\partial_u+E^t(u)\bigr)=\operatorname{rdet}\bigl(\partial_u+E(u)\bigr).$$

С другой стороны, из формулы (13.6) следует, что

$$\varrho\circ\mathfrak{f}:\operatorname{cdet}\bigl(\tau+E[-1]\bigr)\mapsto\bigl(\partial_u+\mathcal{E}_{NN}(u)\bigr)\ldots\bigl(\partial_u+\mathcal{E}_{11}(u)\bigr),$$

и тем самым доказательство завершено. □

Приведённые ниже следствия можно вывести из теоремы 14.2.2 или проверить непосредственно с использованием леммы 14.2.1 и формул для образов Хариш-Чандры, полученных в § 13.1.

Следствие 14.2.3. *Собственные значения операторов*

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m}A^{(m)}\bigl(\partial_u+E(u)_1\bigr)\ldots\bigl(\partial_u+E(u)_m\bigr)$$

и

$$\operatorname{tr}_{1,\ldots,m}H^{(m)}\bigl(\partial_u+E(u)_1\bigr)\ldots\bigl(\partial_u+E(u)_m\bigr)$$

на векторе Бете (14.6) *даются соответствующими формулами*

$$e_m\bigl(\partial_u+\mathcal{E}_{11}(u),\ldots,\partial_u+\mathcal{E}_{NN}(u)\bigr)$$

и

$$h_m\bigl(\partial_u+\mathcal{E}_{11}(u),\ldots,\partial_u+\mathcal{E}_{NN}(u)\bigr).$$

Следствие 14.2.4. *Собственное значение формального ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty}q^k\operatorname{tr}\bigl(\partial_u+E^t(u)\bigr)^k$$

на векторе Бете (14.6) *даётся формулой*

$$\sum_{i=1}^{N}\Bigl(1-q\bigl(\partial_u+\mathcal{E}_{11}(u)\bigr)\Bigr)^{-1}\cdots\Bigl(1-q\bigl(\partial_u+\mathcal{E}_{i\,i}(u)\bigr)\Bigr)^{-1}\\ \times\Bigl(1-q\bigl(\partial_u+\mathcal{E}_{i-1\,i-1}(u)\bigr)\Bigr)\cdots\Bigl(1-q\bigl(\partial_u+\mathcal{E}_{11}(u)\bigr)\Bigr).$$

Серии B_n и D_n. Рассмотрим векторы Сигала–Сугавары для алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$, построенные в §8.1. Продолжим инволюцию (14.4) на алгебру

$$\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{o}_N[t^{-1}]\big) \otimes \mathbb{C}[\tau]$$

так, чтобы она действовала на компоненте $\mathbb{C}[\tau]$ как тождественное отображение.

Лемма 14.2.5. *Элемент* (8.15) *инвариантен относительно* ς. *Кроме того для серии* D_n,

$$\varsigma : \operatorname{Pf} F[-1] \mapsto (-1)^n \operatorname{Pf} F[-1]. \tag{14.12}$$

Доказательство. Рассуждая, как в доказательстве леммы 14.2.1, получаем, что образ выражения (8.15) относительно инволюции ς равен

$$\gamma_m(N)\operatorname{tr}_{1,\dots,m} S^{(m)}\big(\tau - F[-1]_1\big)\dots\big(\tau - F[-1]_m\big). \tag{14.13}$$

Это следует из определяющих соотношений

$$F[r]_a\,F[s]_b - F[s]_b\,F[r]_a = (P_{a\,b} - Q_{a\,b})\,F[r+s]_b - F[r+s]_b\,(P_{a\,b} - Q_{a\,b})$$

при $a < b$; см. (8.5). Применяя транспозиции $e_{ij} \mapsto e_{j'i'}$ одновременно ко всем m копиям алгебры $\operatorname{End}\mathbb{C}^N$, мы можем заключить, что выражение (14.13) совпадает с (8.15), так как это преобразование переводит множитель $\tau - F[-1]_a$ в $\tau + F[-1]_a$, оставляя оператор $S^{(m)}$ без изменения. Последнее свойство вытекает из того, что применение этих транспозиций к правой части в соотношении (11.11) даёт то же самое произведение, записанное в обратном порядке; а это выражение совпадает с $S^{(m)}$ (ср. с аналогичным свойством стандартной транспозиции, использованным в §11.2). Соотношение (14.12) следует из формулы (8.6) для пфаффиана. □

Выберем параметры, как в §14.1, и предположим, что функционал χ аннулируется на подпространстве $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+$ алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$, так что мы можем считать χ элементом пространства $\mathfrak{h}^*$. Положим

$$F_{ij}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{(F_{ij})_a}{u - z_a} - \chi(F_{ij}) \in \mathrm{U}(\mathfrak{o}_N)^{\otimes \ell}.$$

Следуя (14.8), определим рациональные функции от u формулой

$$\mathcal{F}_{ii}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{\lambda_a(F_{ii})}{u - z_a} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_{i_j}(F_{ii})}{u - w_j} - \chi(F_{ii}).$$

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$ введём оператор

$$\operatorname{Pf} F(u) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \operatorname{sgn}\sigma \cdot F_{\sigma(1)\,\sigma(2)'}(u)\dots F_{\sigma(2n-1)\,\sigma(2n)'}(u).$$

Будем предполагать выполненными уравнения анзаца Бете (14.7).

Теорема 14.2.6. *Собственное значение оператора*

$$\gamma_m(N)\,\mathrm{tr}\,S^{(m)}\big(\partial_u + F(u)_1\big)\dots\big(\partial_u + F(u)_m\big) \tag{14.14}$$

на векторе Бете (14.6) *равно*

$$h_m\big(\partial_u + \mathcal{F}_{11}(u),\dots,\partial_u + \mathcal{F}_{n\,n}(u),\partial_u - \mathcal{F}_{n\,n}(u),\dots\partial_u - \mathcal{F}_{11}(u)\big)$$

для серии B_n *и равно*

$$\frac{1}{2}\,h_m\big(\partial_u + \mathcal{F}_{11}(u),\dots,\partial_u + \mathcal{F}_{n-1\,n-1}(u),\partial_u - \mathcal{F}_{n\,n}(u),\dots\partial_u - \mathcal{F}_{11}(u)\big)$$

$$+\frac{1}{2}\,h_m\big(\partial_u + \mathcal{F}_{11}(u),\dots,\partial_u + \mathcal{F}_{n\,n}(u),\partial_u - \mathcal{F}_{n-1\,n-1}(u),\dots\partial_u - \mathcal{F}_{11}(u)\big)$$

для серии D_n. *Кроме того для серии* D_n *собственное значение оператора* $\mathrm{Pf}\,F(u)$ *равно*

$$\big(\mathcal{F}_{11}(u) - \partial_u\big)\dots\big(\mathcal{F}_{n\,n}(u) - \partial_u\big)\,1.$$

Доказательство. Применим снова теорему 14.1.1 и рассмотрим Φ как такое отображение

$$\Phi : \mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{o}_N[t^{-1}]\big)\otimes\mathbb{C}[\tau] \to \mathrm{U}(\mathfrak{o}_N)^{\otimes\ell}\otimes\mathbb{C}[\partial_u],$$

что $\tau \mapsto \partial_u$. По определению гомоморфизма (14.3) имеем

$$\Psi : F[-1] \mapsto -F(u).$$

Поэтому, используя эквивалентную формулу (14.13) для полинома (8.15), мы находим, что его образ относительно отображения Φ совпадает с оператором (14.14). Доказательство первой части теоремы завершается применением формул для образов Хариш-Чандры элемента (8.15), полученных в предложениях 13.1.7 и 13.1.10. Наконец, по лемме 14.2.5, для серии D_n имеем

$$\Phi : \mathrm{Pf}\,F[-1] \mapsto \mathrm{Pf}\,F(u),$$

так что последнее утверждение вытекает из предложения 13.1.12. □

Серия C_n. Теперь будем использовать векторы Сигала–Сугавары для алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$, построенные в §8.3. Продолжим инволюцию (14.4) на алгебру $\mathrm{U}\big(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]\big)\otimes\mathbb{C}[\tau]$ так, чтобы она действовала на компоненте $\mathbb{C}[\tau]$ как тождественное отображение.

Лемма 14.2.7. *Элемент* (8.36) *инвариантен относительно* ς.

Доказательство. Рассуждение точно такое же, как для леммы 14.2.5. Из него также вытекает эквивалентная формула

$$\gamma_m(-2n)\,\mathrm{tr}\,S^{(m)}\big(\tau - F[-1]_1\big)\dots\big(\tau - F[-1]_m\big)$$

для полинома (8.36). □

Выберем параметры, как в §14.1, и предположим, что функционал χ аннулируется на подпространстве $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+$ алгебры $\mathfrak{sp}_{2n}$, так что χ можно считать элементом пространства $\mathfrak{h}^*$. Положим

$$F_{ij}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{(F_{ij})_a}{u - z_a} - \chi(F_{ij}) \in \mathrm{U}(\mathfrak{sp}_{2n})^{\otimes \ell}.$$

В соответствии с (14.8) определим рациональные функции от u по формуле

$$\mathcal{F}_{ii}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{\lambda_a(F_{ii})}{u - z_a} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_{i_j}(F_{ii})}{u - w_j} - \chi(F_{ii}).$$

Как и выше, будем считать, что уравнения анзаца Бете (14.7) выполнены.

Теорема 14.2.8. *Для всех* $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$ *собственное значение оператора*

$$\gamma_m(-2n) \operatorname{tr} S^{(m)} \big(\partial_u + F(u)_1\big) \dots \big(\partial_u + F(u)_m\big)$$

на векторе Бете (14.6) *равно*

$$e_m\big(\partial_u + \mathcal{F}_{11}(u), \dots, \partial_u + \mathcal{F}_{n\,n}(u), \partial_u, \partial_u - \mathcal{F}_{n\,n}(u), \dots \partial_u - \mathcal{F}_{11}(u)\big).$$

Доказательство. Рассуждение опирается на предложение 13.1.14, так что утверждение выводится из теоремы 14.1.1 и леммы 14.2.7, как в доказательстве теоремы 14.2.6. □

§ 14.3. Библиографические замечания

По поводу истоков формулы (14.6) для векторов Бете см. работы [**9**], [**40**], [**143**]. Теорема 14.2.2 была впервые доказана в статье [**119**] другим способом. Наше изложение следует работе [**113**]. Алгебры Бете для классических серий рассматривались в недавней работе Лу, Мухина и Варченко [**102**] в связи со стратификациями самодвойственных грассманианов.

Глава 15

Модули Вакимото

Модули Вакимото — это представления аффинных алгебр Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{g}}$ в пространствах Фока $M(\mathfrak{g})$, отвечающих алгебрам Гейзенберга. Их конструкция основана на существовании гомоморфизма вертексных алгебр

$$V_{-h^\vee}(\mathfrak{g}) \to M(\mathfrak{g})$$

из вакуумного модуля на критическом уровне в пространство Фока $M(\mathfrak{g})$. Этот гомоморфизм можно «деформировать» и перенести его на произвольный вакуумный модуль $V_\kappa(\mathfrak{g})$, что приводит к определению модулей Вакимото на любом уровне $\kappa \in \mathbb{C}$; см. книгу Э. Френкеля [**46**, Ch. 6]. Однако мы будем рассматривать только модули на критическом уровне $\kappa = -h^\vee$.

В книге [**46**] модули Вакимото играют важную роль в доказательстве основной теоремы, описывающей центр аффинной вертексной алгебры на критическом уровне. Это объясняется тем фактом, что элементы центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ пополненной универсальной обёртывающей алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$ (т. е. операторы Сугавары, построенные в § 6.6) действуют в модулях Вакимото на критическом уровне как умножения на скаляры. Наша цель в этой главе — установить связь между собственными значениями операторов Сугавары и их образами Хариш-Чандры, вычисленными в § 13.3. Мы приведём формулы для скаляров и опишем модули Вакимото для всех классических серий в явном виде.

Формулы для действия образующих аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ в модулях Вакимото тесно связаны со *свободно-полевой реализацией* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Мы начнём с этих реализаций и приведём их для всех классических серий, следуя общей конструкции из книги [**46**, Ch. 5]. Отметим, что аналогичные реализации конечномерных неприводимых представлений классических групп подробно рассматривались в книге Д. П. Желобенко [**157**].

§ 15.1. Свободно-полевая реализация $\mathfrak{gl}_N$

Рассмотрим группу GL_N всех матриц размера $N \times N$ над $\mathbb{C}$ с ненулевым определителем. Обозначим через $\mathcal{B}_-$ подгруппу всех нижнетреугольных матриц, а через $\mathcal{N}_+$ — подгруппу верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали. Элементы алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ будут действовать на пространстве полиномиальных функций $\mathrm{Fun}\,\mathcal{N}_+$ дифференциальными операторами первого порядка. Отождествим $\mathrm{Fun}\,\mathcal{N}_+$ с пространством полиномов

$$\mathrm{Fun}\,\mathcal{N}_+ \cong \mathbb{C}[y_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant N]$$

от переменных y_{ij}, которые можно рассматривать как координатные функции на группе $\mathcal{N}_+$. Зафиксируем N-набор $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_N) \in \mathbb{C}^N$ и отождествим его с функционалом на подалгебре Картана $\mathfrak{h}$; ср. § 4.2.

Мы будем использовать обозначение ∂_{ij} для оператора дифференцирования $\partial/\partial y_{ij}$.

Предложение 15.1.1. *Формулы*

$$E_{ii} \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} y_{ri}\,\partial_{ri} - \sum_{s=i+1}^{N} y_{is}\,\partial_{is} + \chi_i$$

при $i = 1, \ldots, N$ *и*

$$\begin{aligned} E_{i\,i+1} &\mapsto \partial_{i\,i+1} + \sum_{s=i+2}^{N} y_{i+1\,s}\,\partial_{is}, \\ E_{i+1\,i} &\mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \bigl(y_{ri}\,y_{i\,i+1} - y_{r\,i+1}\bigr)\,\partial_{ri} \;\; - \sum_{r=1}^{i} y_{r\,i+1}\,y_{i\,i+1}\,\partial_{r\,i+1} \\ &\qquad\qquad\qquad + \sum_{s=i+2}^{N} y_{is}\,\partial_{i+1\,s} + \bigl(\chi_i - \chi_{i+1}\bigr)\,y_{i\,i+1} \end{aligned}$$

при $i = 1, \ldots, N-1$ *задают представление алгебры Ли* $\mathfrak{gl}_N$ *на пространстве полиномов* $\mathbb{C}[y_{ij}]$.

Доказательство. По определению действие элемента $A \in \mathfrak{gl}_N$ в пространстве $\operatorname{Fun} \mathcal{N}_+$ задаётся формулой

$$(Af)(Y) = \frac{d}{dt}\, f\bigl(X(t)\bigr)\Big|_{t=0}, \qquad Y \in \mathcal{N}_+, \quad f \in \operatorname{Fun} \mathcal{N}_+, \tag{15.1}$$

где $X(t) \in \mathcal{N}_+$ однозначно определяется из разложения

$$e^{-tA}\, Y = X(t)\, Z(t), \qquad Z(t) \in \mathcal{B}_-, \tag{15.2}$$

которое справедливо для всех значений t в некоторой окрестности нуля. Элементы матрицы $X(t)$ можно найти из хорошо известных формул для разложения Гаусса.

Лемма 15.1.2. *Пусть* $C = XZ$ *— это разложение матрицы* $C = [c_{ij}]$ *размера* $N \times N$ *в произведение матриц* $X \in \mathcal{N}_+$ *и* $Z \in \mathcal{B}_-$. *Тогда матричные элементы матрицы* $X = [x_{ij}]$ *даются формулами*

$$x_{ij} = \begin{vmatrix} c_{i\,j} & c_{i\,j+1} & \ldots & c_{i\,N} \\ c_{j+1\,j} & c_{j+1\,j+1} & \ldots & c_{j+1\,N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{N\,j} & c_{N\,j+1} & \ldots & c_{NN} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{j\,j} & c_{j\,j+1} & \ldots & c_{j\,N} \\ c_{j+1\,j} & c_{j+1\,j+1} & \ldots & c_{j+1\,N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{N\,j} & c_{N\,j+1} & \ldots & c_{NN} \end{vmatrix}^{-1}$$

для всех $1 \leqslant i < j \leqslant N$. $\square$

Возьмём теперь $A = E_{ii}$ и применим лемму 15.1.2 к матрице $C = e^{-tA}Y$, где $Y \in \mathcal{N}_+$ и (i,j)-й матричный элемент матрицы Y — это координата y_{ij} при $i < j$. Ясно, что элементы матрицы X совпадут с соответствующими элементами матрицы Y, кроме $x_{ri} = e^t y_{ri}$ при $r = 1, \ldots, i-1$ и $x_{is} = e^{-t} y_{is}$ при $s = i+1, \ldots, N$. Следовательно, элемент E_{ii} будет представлен оператором

$$E_{ii} \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} y_{ri}\,\partial_{ri} - \sum_{s=i+1}^{N} y_{is}\,\partial_{is}.$$

Далее, возьмём $A = E_{i\,i+1}$ и заметим, что $e^{-tA} = 1 - t\,E_{i\,i+1}$. Поэтому, применяя лемму 15.1.2, мы находим, что элементы матрицы X, отличающиеся от соответствующих элементов матрицы Y, лежат в строке i и имеют вид $x_{i\,i+1} = y_{i\,i+1} - t$ и $x_{i\,s} = y_{i\,s} - t y_{i+1\,s}$ при $s = i+2, \ldots, N$. Следовательно, образующий $E_{i\,i+1}$ представлен оператором

$$E_{i\,i+1} \mapsto -\partial_{i\,i+1} - \sum_{s=i+2}^{N} y_{i+1\,s}\,\partial_{is}.$$

Аналогично, взяв $A = E_{i+1\,i}$ и применяя лемму 15.1.2, получаем, что элементы матрицы X, отличающиеся от соответствующих элементов матрицы Y, лежат в строке $i+1$ и столбцах i и $i+1$. Они задаются выражениями

$$x_{r\,i} = y_{ri}\,(1 - t y_{i\,i+1}) + t y_{r\,i+1} \qquad \text{при} \quad r = 1, \ldots, i-1,$$

$$x_{r\,i+1} = \frac{y_{r\,i+1}}{1 - t y_{i\,i+1}} \qquad \text{при} \quad r = 1, \ldots, i$$

и

$$x_{i+1\,s} = y_{i+1\,s} - t y_{i\,s} \qquad \text{при} \quad s = i+2, \ldots, N.$$

Отсюда следует, что $E_{i+1\,i}$ действует как оператор

$$E_{i+1\,i} \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \big(-y_{ri}\,y_{i\,i+1} + y_{r\,i+1}\big)\,\partial_{ri} + \sum_{r=1}^{i} y_{r\,i+1}\,y_{i\,i+1}\,\partial_{r\,i+1} - \sum_{s=i+2}^{N} y_{is}\,\partial_{i+1\,s}.$$

Полученные выше формулы определяют представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ в пространстве полиномов $\mathbb{C}[y_{ij}]$. Подкрутим это представление на автоморфизм $\mathfrak{gl}_N$, который меняет знаки перед образующими $E_{i\,i+1}$ и $E_{i+1\,i}$ для всех $i = 1, \ldots, N-1$ и оставляет все E_{ii} без изменения. Это приводит к формулам в формулировке предложения при $\chi = 0$. Как показано в книге [**46**, Sec. 5.2], для любого $\chi \in \mathfrak{h}^*$ это представление можно продолжить таким образом, что каждый элемент $H \in \mathfrak{h}$ действует на вектор 1 как умножение на скаляр $\chi(H)$, откуда и следуют требуемые формулы. $\square$

Отметим, что представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ в пространстве полиномов $\mathbb{C}[y_{ij}]$, заданное формулами предложения 15.1.1, изоморфно контрагредиентному модулю Верма M_χ^*; см. [**46**, Sec. 5.2].

Пример 15.1.3. При $N = 2$ формулы из предложения 15.1.1 задают представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_2$ в пространстве полиномов от одной переменной $\mathbb{C}[y_{12}]$:

$$E_{11} \mapsto -y_{12}\,\partial_{12} + \chi_1, \qquad E_{22} \mapsto y_{12}\,\partial_{12} + \chi_2,$$

$$E_{12} \mapsto \partial_{12}, \qquad E_{21} \mapsto -y_{12}^2\,\partial_{12} + (\chi_1 - \chi_2)\,y_{12}.$$

Если $\chi_1 - \chi_2 \notin \mathbb{Z}_+$, то это представление неприводимо. Если $\chi_1 - \chi_2 = k \in \mathbb{Z}_+$, то полиномы от y_{12} степени не больше k образуют подмодуль размерности $k+1$. □

Пример 15.1.4. Представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_3$ в пространстве полиномов $\mathbb{C}[y_{12}, y_{13}, y_{23}]$ задаётся формулами

$$E_{11} \mapsto -y_{12}\,\partial_{12} - y_{13}\,\partial_{13} + \chi_1,$$

$$E_{22} \mapsto y_{12}\,\partial_{12} - y_{23}\,\partial_{23} + \chi_2,$$

$$E_{33} \mapsto y_{13}\,\partial_{13} + y_{23}\,\partial_{23} + \chi_3,$$

а также

$$E_{12} \mapsto \partial_{12} + y_{23}\,\partial_{13}, \qquad E_{21} \mapsto -y_{12}^2\,\partial_{12} + y_{13}\,\partial_{23} + (\chi_1 - \chi_2)\,y_{12}$$

и

$$E_{23} \mapsto \partial_{23}, \qquad E_{32} \mapsto (y_{12}\,y_{23} - y_{13})\,\partial_{12} - y_{13}\,y_{23}\,\partial_{13} - y_{23}^2\,\partial_{23} + (\chi_2 - \chi_3)\,y_{23}.$$

§ 15.2. Свободно-полевая реализация $\mathfrak{o}_N$

Вспомним определение (2.29) классической группы G_N. Отметим важное свойство реализации этой группы, связанной с формой (2.26).

Лемма 15.2.1. *Предположим, что матрица $C \in \mathrm{G}_N$ записана как произведение $C = X\,Z$ верхнетреугольной матрицы X с единицами на диагонали и нижнетреугольной матрицы Z. Тогда обе матрицы X и Z лежат в G_N.*

Доказательство. По определению $1 = C'C = (X\,Z)'X\,Z = Z'X'X Z$. Поэтому $X'X = (Z')^{-1}Z^{-1}$. Матрица X' верхнетреугольная с единицами на диагонали, а Z' — нижнетреугольная, следовательно, $X'X = 1$ и $Z'Z = 1$. □

Рассмотрим специальную ортогональную группу SO_N. Это подгруппа в O_N, элементы которой — такие матрицы C, что $\det C = 1$. Теперь $\mathcal{B}_-$ будет обозначать подгруппу всех нижнетреугольных матриц в SO_N, а $\mathcal{N}_+$ — подгруппу в SO_N, состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали. В силу соотношения $X'X = 1$, которому удовлетворяют элементы $X \in \mathcal{N}_+$, мы можем отождествить $\operatorname{Fun}\mathcal{N}_+$ с пространством полиномов

$$\operatorname{Fun}\mathcal{N}_+ \cong \mathbb{C}[y_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant N \quad \text{и} \quad i + j \leqslant N],$$

считая переменные y_{ij} координатами на $\mathcal{N}_+$.

Будем использовать реализацию ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$ из § 5.1 и сохраним обозначение $\mathfrak{h}$ для подалгебры Картана в $\mathfrak{o}_N$, линейно порождённой базисными элементами $F_{11}, \ldots, F_{nn}$.

Предположим, что $N = 2n$, и зафиксируем элемент $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n) \in \mathbb{C}^n$, который мы отождествляем с функционалом на подалгебре Картана $\mathfrak{h}$. Как и прежде, мы используем обозначение $i' = N - i + 1$.

Предложение 15.2.2. *Формулы*

$$F_{ii} \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \big(y_{ri}\,\partial_{ri} - y_{ri'}\,\partial_{ri'}\big) - \sum_{s=i+1}^{i'-1} y_{is}\,\partial_{is} + \chi_i$$

при $i = 1, \ldots, n$,

$$F_{i\,i+1} \mapsto \partial_{i\,i+1} + \sum_{s=i+2}^{i'-2} y_{i+1\,s}\,\partial_{is} - \sum_{s=i+2}^{n} y_{i+1\,s}\,y_{i+1\,s'}\,\partial_{i\,i'-1}$$

при $i = 1, \ldots, n-1$ *и* $F_{n-1\,n'} \mapsto \partial_{n-1\,n'}$, *а также*

$$F_{i+1\,i} \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \Big(\big(y_{ri}\,y_{i\,i+1} - y_{r\,i+1}\big)\,\partial_{ri} + \big(y_{r\,i'-1}\,y_{i\,i+1} + y_{r\,i'}\big)\,\partial_{r\,i'-1} - y_{ri'}\,y_{i\,i+1}\,\partial_{ri'}\Big)$$
$$- \sum_{r=1}^{i} y_{r\,i+1}\,y_{i\,i+1}\,\partial_{r\,i+1} + \sum_{s=i+2}^{i'-2} y_{is}\,\partial_{i+1\,s} - \sum_{s=i+2}^{n} y_{i\,s}\,y_{i\,s'}\,\partial_{i\,i'-1} + \big(\chi_i - \chi_{i+1}\big)\,y_{i\,i+1}$$

при $i = 1, \ldots, n-1$ *и*

$$F_{n'\,n-1} \mapsto \sum_{r=1}^{n-2} \Big(\big(y_{r\,n-1}\,y_{n-1\,n'} - y_{r\,n'}\big)\,\partial_{r\,n-1} + \big(y_{r\,n}\,y_{n-1\,n'} + y_{r\,n+2}\big)\,\partial_{r\,n}$$
$$- y_{r\,n+2}\,y_{n-1\,n'}\,\partial_{r\,n+2}\Big) - \sum_{r=1}^{n-1} y_{r\,n'}\,y_{n-1\,n'}\,\partial_{r\,n'} + \big(\chi_{n-1} + \chi_n\big)\,y_{n-1\,n'}$$

задают представление ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$ *в пространстве полиномов* $\mathbb{C}\big[y_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 2n, \quad i + j \leqslant 2n\big]$.

Доказательство. Действие произвольного элемента $A \in \mathfrak{o}_{2n}$ в пространстве $\operatorname{Fun} \mathcal{N}_+$ задаётся общими формулами (15.1) и (15.2). Применим лемму 15.1.2 к матрице $C = e^{-tA}\,Y$. Здесь $Y \in \mathcal{N}_+$, и мы считаем, что y_{ij} — это (i,j)-й матричный элемент матрицы Y для $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$. Нас будут интересовать (i,j)-е матричные элементы матрицы X только при $i < j'$. Возьмём сначала $A = F_{ii}$ при $i \in \{1, \ldots, n\}$. В этом случае нужные нам элементы матрицы X совпадут с соответствующими элементами матрицы Y, кроме $x_{ri} = e^{t}\,y_{ri}$ и $x_{ri'} = e^{-t}\,y_{ri'}$ при $r = 1, \ldots, i-1$, а также $x_{is} = e^{-t}\,y_{is}$ при $s = i+1, \ldots, i'-1$. Поэтому F_{ii} действует по правилу

$$F_{ii} \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \big(y_{ri}\,\partial_{ri} - y_{ri'}\,\partial_{ri'}\big) - \sum_{s=i+1}^{i'-1} y_{is}\,\partial_{is}.$$

Положим теперь $A = F_{i\,i+1}$ при $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ и снова применим лемму 15.1.2. Элементы матрицы X, отличающиеся от соответствующих элементов матрицы Y, имеют вид $x_{i\,i+1} = y_{i\,i+1} - t$ и $x_{i\,s} = y_{i\,s} - t y_{i+1\,s}$ при

$s = i+2, \dots, i'-1$. Следовательно, $F_{i\,i+1}$ действует как оператор

$$F_{i\,i+1} \mapsto -\partial_{i\,i+1} - \sum_{s=i+2}^{i'-1} y_{i+1\,s}\,\partial_{is}.$$

Нам нужно выразить переменную $y_{i+1\,i'-1}$ в терминах допустимых координат на $\mathcal{N}_+$. Взяв матричные элементы (i, i') в обеих частях формулы $YY' = 1$, получим

$$2y_{i\,i'} + \sum_{s=i+1}^{i'-1} y_{i\,s}\,y_{i\,s'} = 0, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{15.3}$$

Таким образом,

$$F_{i\,i+1} \mapsto -\partial_{i\,i+1} - \sum_{s=i+2}^{i'-2} y_{i+1\,s}\,\partial_{is} + \sum_{s=i+2}^{n} y_{i+1\,s}\,y_{i+1\,s'}\,\partial_{i\,i'-1}.$$

Аналогично при $A = F_{n-1\,n'}$ получаем $e^{-tA} = 1 - t\,F_{n-1\,n'}$, так что единственный матричный элемент матрицы X, отличающийся от соответствующего элемента матрицы Y — это $x_{n-1\,n'} = y_{n-1\,n'} - t$. Поэтому $F_{n-1\,n'} \mapsto -\partial_{n-1\,n'}$. Теперь рассмотрим образующие $A = F_{i+1\,i}$ при $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Из леммы 15.1.2 находим, что элементы матрицы X, отличающиеся от соответствующих элементов матрицы Y, задаются выражениями

$$x_{r\,i} = y_{ri}\,(1 - t\,y_{i\,i+1}) + t\,y_{r\,i+1}, \qquad x_{r\,i'} = \frac{y_{r\,i'}}{1 + t\,y_{i'-1\,i'}}$$

при $r = 1, \dots, i-1$,

$$x_{r\,i'-1} = y_{r\,i'-1}\,(1 + t\,y_{i'-1\,i'}) - t\,y_{r\,i'}, \qquad x_{r\,i+1} = \frac{y_{r\,i+1}}{1 - t\,y_{i\,i+1}}$$

при $r = 1, \dots, i$ и

$$x_{i+1\,s} = y_{i+1\,s} - t\,y_{i\,s} \qquad \text{при} \quad s = i+2, \dots, i'-2.$$

Принимая в расчёт формулу (15.3), мы можем заключить, что $F_{i+1\,i}$ действует как оператор

$$-\sum_{r=1}^{i-1} \Big(\big(y_{ri}\,y_{i\,i+1} - y_{r\,i+1}\big)\,\partial_{ri} + \big(y_{r\,i'-1}\,y_{i\,i+1} + y_{r\,i'}\big)\,\partial_{r\,i'-1} - y_{ri'}\,y_{i\,i+1}\,\partial_{ri'} \Big)$$
$$+ \sum_{r=1}^{i} y_{r\,i+1}\,y_{i\,i+1}\,\partial_{r\,i+1} - \sum_{s=i+2}^{i'-2} y_{is}\,\partial_{i+1\,s} + \sum_{s=i+2}^{n} y_{i\,s}\,y_{i\,s'}\,\partial_{i\,i'-1}.$$

Вычисление действия оператора $F_{n'\,n-1}$, по существу, не отличается от предыдущего. Формулы для этого оператора и для $F_{n\,n-1}$ получаются друг из друга перестановкой индексов n и n'.

Наконец, подкрутим это представление алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$ на автоморфизм, который меняет знаки образующих $F_{i\,i+1}$ и $F_{i+1\,i}$ при $i = 1, \dots, n-1$, а также $F_{n'\,n-1}$ и $F_{n-1\,n'}$, но оставляет все F_{ii} без изменения. Требуемые формулы получаются перенесением реализации на произвольный элемент $\chi \in \mathfrak{h}^*$; см. [**46**, Sec. 5.2]. □

Пример 15.2.3. Действие алгебры Ли $\mathfrak{o}_4$ в пространстве $\mathbb{C}[y_{12}, y_{13}]$ из предложения 15.2.2 имеет вид

$$F_{11} \mapsto -y_{12}\,\partial_{12} - y_{13}\,\partial_{13} + \chi_1, \qquad F_{22} \mapsto y_{12}\,\partial_{12} - y_{13}\,\partial_{13} + \chi_2,$$

$$F_{12} \mapsto \partial_{12}, \qquad F_{13} \mapsto \partial_{13},$$

$$F_{21} \mapsto -y_{12}^2\,\partial_{12} + (\chi_1 - \chi_2)\,y_{12}, \qquad F_{31} \mapsto -y_{13}^2\,\partial_{13} + (\chi_1 + \chi_2)\,y_{13}.$$

Это представление изоморфно тензорному произведению двух представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, полученных ограничением действия $\mathfrak{gl}_2$ из примера 15.1.3. □

Пример 15.2.4. Представление алгебры Ли $\mathfrak{o}_6$ в пространстве полиномов $\mathbb{C}[y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{23}, y_{24}]$ задаётся формулами

$$F_{11} \mapsto -y_{12}\,\partial_{12} - y_{13}\,\partial_{13} - y_{14}\,\partial_{14} - y_{15}\,\partial_{15} + \chi_1,$$

$$F_{22} \mapsto y_{12}\,\partial_{12} - y_{15}\,\partial_{15} - y_{23}\,\partial_{23} - y_{24}\,\partial_{24} + \chi_2,$$

$$F_{33} \mapsto y_{13}\,\partial_{13} - y_{14}\,\partial_{14} + y_{23}\,\partial_{23} - y_{24}\,\partial_{24} + \chi_3$$

для элементов подалгебры Картана, а также

$$F_{23} \mapsto \partial_{23}, \qquad F_{24} \mapsto \partial_{24}, \qquad F_{12} \mapsto \partial_{12} + y_{23}\,\partial_{13} + y_{24}\,\partial_{14} - y_{23}\,y_{24}\,\partial_{15}$$

и

$$F_{21} \mapsto -y_{12}^2\,\partial_{12} - y_{13}\,y_{14}\,\partial_{15} + y_{13}\,\partial_{23} + y_{14}\,\partial_{24} + (\chi_1 - \chi_2)\,y_{12},$$

$$F_{32} \mapsto \big(y_{12}\,y_{23} - y_{13}\big)\,\partial_{12} - y_{13}\,y_{23}\,\partial_{13} + \big(y_{14}\,y_{23} + y_{15}\big)\,\partial_{14} - y_{15}\,y_{23}\,\partial_{15} - y_{23}^2\,\partial_{23} + (\chi_2 - \chi_3)\,y_{23},$$

$$F_{42} \mapsto \big(y_{12}\,y_{24} - y_{14}\big)\,\partial_{12} - y_{14}\,y_{24}\,\partial_{14} + \big(y_{13}\,y_{24} + y_{15}\big)\,\partial_{13} - y_{15}\,y_{24}\,\partial_{15} - y_{24}^2\,\partial_{24} + (\chi_2 + \chi_3)\,y_{24}.$$

□

Предположим теперь, что $N = 2n + 1$, и зафиксируем произвольный элемент $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ пространства $\mathbb{C}^n$, который мы будем отождествлять с функционалом на подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{o}_{2n+1}$, линейно порождённой базисными элементами $F_{11}, \ldots, F_{nn}$.

Предложение 15.2.5. *Формулы*

$$F_{ii} \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \big(y_{ri}\,\partial_{ri} - y_{ri'}\,\partial_{ri'}\big) - \sum_{s=i+1}^{i'-1} y_{is}\,\partial_{is} + \chi_i,$$

$$F_{i\,i+1} \mapsto \partial_{i\,i+1} + \sum_{s=i+2}^{i'-2} y_{i+1\,s}\,\partial_{is} - \frac{1}{2} \sum_{s=i+2}^{i'-2} y_{i+1\,s}\,y_{i+1\,s'}\,\partial_{i\,i'-1}$$

при $i = 1, \ldots, n$, *а также*

$$F_{i+1\,i} \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \Big(\big(y_{ri}\, y_{i\,i+1} - y_{r\,i+1}\big)\, \partial_{ri} + \big(y_{r\,i'-1}\, y_{i\,i+1} + y_{r\,i'}\big)\, \partial_{r\,i'-1} - y_{ri'}\, y_{i\,i+1}\, \partial_{ri'} \Big)$$

$$- \sum_{r=1}^{i} y_{r\,i+1}\, y_{i\,i+1}\, \partial_{r\,i+1} + \sum_{s=i+2}^{i'-2} y_{is}\, \partial_{i+1\,s} - \frac{1}{2} \sum_{s=i+2}^{i'-2} y_{i\,s}\, y_{i\,s'}\, \partial_{i\,i'-1} + \big(\chi_i - \chi_{i+1}\big)\, y_{i\,i+1}$$

при $i = 1, \ldots, n-1$ *и*

$$F_{n+1\,n} \mapsto \sum_{r=1}^{n-1} \Big(\big(y_{r\,n}\, y_{n\,n+1} - y_{r\,n+1}\big)\, \partial_{r\,n} - y_{r\,n+2}\, y_{n\,n+1}\, \partial_{r\,n+2} + y_{r\,n+2}\, \partial_{r\,n+1} \Big)$$

$$- \frac{1}{2}\, y_{n\,n+1}^2\, \partial_{n\,n+1} + \chi_n\, y_{n\,n+1}$$

задают представление алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n+1}$ *в пространстве полиномов*

$$\mathbb{C}\big[y_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1, \quad i + j \leqslant 2n+1\big].$$

Доказательство. Почти все формулы выводятся с помощью такого же вычисления, как в доказательстве предложения 15.2.2, с использованием соотношения (15.3), которое выполняется в том же виде. Дополнительные соображения требуются только для действия образующих $F_{n\,n+1}$ и $F_{n+1\,n}$. При $A = F_{n\,n+1}$ получаем $e^{-tA} = 1 - t F_{n\,n+1} - t^2/2\, E_{n\,n+2}$, считая элементы E_{ij} матричными единицами. Следовательно, единственный матричный элемент матрицы X, отличающийся от соответствующего элемента матрицы Y, — это $x_{n\,n+1} = y_{n\,n+1} - t$. Это приводит к формуле $F_{n\,n+1} \mapsto -\partial_{n\,n+1}$. При $A = F_{n+1\,n}$ справедливо соотношение $e^{-tA} = 1 - t F_{n+1\,n} - t^2/2\, E_{n+2\,n}$. Поэтому из леммы 15.1.2 вытекают формулы

$$x_{r\,n} = y_{r\,n} \left(1 - t y_{n\,n+1} + \frac{t^2}{4}\, y_{n\,n+1}^2\right) + y_{r\,n+1} \left(t - \frac{t^2}{2}\, y_{n\,n+1}\right) - \frac{t^2}{2}\, y_{r\,n+2}$$

при $r = 1, \ldots, n-1$, где мы применили соотношения $y_{n+1\,n+2} = -y_{n\,n+1}$ и $y_{n\,n+2} = -1/2\, y_{n\,n+1}^2$. Первое соотношение получается, если взять матричные элементы $(n, n+1)$ в обеих частях равенства $YY' = 1$, а второе — из формулы (15.3) при $i = n$, которая справедлива и в случае B_n. Аналогично

$$x_{r\,n+1} = y_{r\,n+1} - \frac{t\, y_{r\,n+2}}{1 - t\, y_{n\,n+1}/2} \qquad \text{при} \quad r = 1, \ldots, n,$$

и

$$x_{r\,n+2} = \frac{y_{r\,n+2}}{\big(1 - t\, y_{n\,n+1}/2\big)^2} \qquad \text{при} \quad r = 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом, для действия оператора $F_{n+1\,n}$ получаем формулу

$$F_{n+1\,n} \mapsto \sum_{r=1}^{n-1} \Big(\big(y_{r\,n+1} - y_{r\,n}\, y_{n\,n+1}\big)\, \partial_{r\,n} + y_{r\,n+2}\, y_{n\,n+1}\, \partial_{r\,n+2} - y_{r\,n+2}\, \partial_{r\,n+1} \Big)$$

$$- y_{n\,n+2}\, \partial_{n\,n+1}.$$

Доказательство завершается точно так же, как для предложения 15.2.2. □

Пример 15.2.6. Алгебра Ли $\mathfrak{o}_3$ действует в пространстве полиномов $\mathbb{C}[y_{12}]$ по правилу

$$F_{11} \mapsto -y_{12}\,\partial_{12} + \chi_1, \qquad F_{12} \mapsto \partial_{12}, \qquad F_{21} \mapsto -\frac{1}{2}\,y_{12}^2\,\partial_{12} + \chi_1\,y_{12}.$$

Это представление изоморфно представлению алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, полученному ограничением представления $\mathfrak{gl}_2$ из примера 15.1.3, так что χ_1 соответствует функционалу $(\chi_1 - \chi_2)/2$. □

Пример 15.2.7. Действие алгебры Ли $\mathfrak{o}_5$ в пространстве $\mathbb{C}[y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{23}]$ задаётся формулами

$$F_{11} \mapsto -y_{12}\,\partial_{12} - y_{13}\,\partial_{13} - y_{14}\,\partial_{14} + \chi_1, \quad F_{22} \mapsto y_{12}\,\partial_{12} - y_{14}\,\partial_{14} - y_{23}\,\partial_{23} + \chi_2,$$

а также

$$F_{12} \mapsto \partial_{12} + y_{23}\,\partial_{13} + \frac{1}{2}\,y_{23}^2\,\partial_{14}, \quad F_{21} \mapsto -y_{12}^2\,\partial_{12} + y_{13}\,\partial_{23} - \frac{1}{2}\,y_{13}^2\,\partial_{14} + (\chi_1 - \chi_2)\,y_{12}$$

и

$$F_{23} \mapsto \partial_{23}, \quad F_{32} \mapsto \big(y_{12}\,y_{23} - y_{13}\big)\,\partial_{12} - y_{14}\,y_{23}\,\partial_{14} + y_{14}\,\partial_{13} - \frac{1}{2}\,y_{23}^2\,\partial_{23} + \chi_2\,y_{23}.$$

§ 15.3. Свободно-полевая реализация $\mathfrak{sp}_{2n}$

Рассмотрим симплектическую группу Sp_{2n}, определённую в (2.29). Через $\mathcal{B}_-$ будем обозначать подгруппу всех нижнетреугольных матриц в Sp_{2n}, а через $\mathcal{N}_+$ — подгруппу всех верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали. Соотношение $X'X = 1$ при $X \in \mathcal{N}_+$ позволяет нам отождествить $\operatorname{Fun}\mathcal{N}_+$ с пространством полиномов

$$\operatorname{Fun}\mathcal{N}_+ \cong \mathbb{C}[y_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 2n \quad \text{и} \quad i + j \leqslant 2n + 1],$$

считая переменные y_{ij} координатами на $\mathcal{N}_+$. Как в ортогональном случае, мы будем использовать леммы 15.1.2 и 15.2.1, а также определения (15.1) и (15.2) действия симплектической алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$ в пространстве $\operatorname{Fun}\mathcal{N}_+$. Вспомним реализацию $\mathfrak{sp}_{2n}$ из § 5.1. Зафиксируем элемент $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n) \in \mathbb{C}^n$, который мы будем отождествлять с функционалом на подалгебре Картана $\mathfrak{h}$, линейно порождённой базисными элементами $F_{11}, \ldots, F_{nn}$.

Предложение 15.3.1. *Формулы*

$$F_{ii} \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \big(y_{ri}\,\partial_{ri} - y_{ri'}\,\partial_{ri'}\big) - \sum_{s=i+1}^{i'-1} y_{is}\,\partial_{is} - 2\,y_{i\,i'}\,\partial_{i\,i'} + \chi_i$$

при $i = 1, \ldots, n$,

$$F_{i\,i+1} \mapsto \partial_{i\,i+1} + \sum_{s=i+2}^{i'-1} y_{i+1\,s}\,\partial_{is} + \Big(y_{i\,i'-1} - \sum_{s=i+1}^{i'-2} \varepsilon_s\,y_{i\,s}\,y_{i+1\,s'}\Big)\partial_{i\,i'}$$

при $i = 1, \dots, n-1$, *и* $F_{n\,n+1} \mapsto 2\partial_{n\,n+1}$, *а также*

$$F_{i+1\,i} \mapsto \sum_{r=1}^{i} \Big(\big(y_{r\,i'-1}\, y_{i\,i+1} + y_{r\,i'} \big)\, \partial_{r\,i'-1} - y_{ri'}\, y_{i\,i+1}\, \partial_{ri'} - y_{r\,i+1}\, y_{i\,i+1}\, \partial_{r\,i+1} \Big)$$
$$+ \sum_{s=i+2}^{i'-2} y_{is}\, \partial_{i+1\,s} + \sum_{r=1}^{i-1} \big(y_{ri}\, y_{i\,i+1} - y_{r\,i+1} \big)\, \partial_{ri}$$
$$+ \Big(2\, y_{i\,i'-1} - \sum_{s=i+2}^{i'-2} \varepsilon_s\, y_{is}\, y_{i+1\,s'} \Big) \partial_{i+1\,i'-1} + \big(\chi_i - \chi_{i+1} \big)\, y_{i\,i+1}$$

при $i = 1, \dots, n-1$ *и*

$$F_{n+1\,n} \mapsto 2 \sum_{r=1}^{n-1} \big(y_{r\,n}\, y_{n\,n+1} - y_{r\,n+1} \big)\, \partial_{r\,n} - 2 \sum_{r=1}^{n} y_{r\,n+1}\, y_{n\,n+1}\, \partial_{r\,n+1} + 2\chi_n\, y_{n\,n+1}$$

задают представление симплектической алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$ *в пространстве полиномов* $\mathbb{C}\big[y_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 2n, \quad i + j \leqslant 2n + 1\big]$.

Доказательство. Будем рассуждать, как в доказательстве предложения 15.2.2, и для данного элемента $A \in \mathfrak{sp}_{2n}$ применять лемму 15.1.2 к матрице $C = e^{-tA}\, Y$. Здесь $Y \in \mathcal{N}_+$ и мы считаем, что y_{ij} — это матричный элемент (i, j) матрицы Y при $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$. В качестве координат на подгруппе $\mathcal{N}_+$ выберем элементы y_{ij} с условием $i \leqslant j'$. Возьмём сначала $A = F_{ii}$ при $i \in \{1, \dots, n\}$. В этом случае нужные нам элементы матрицы X совпадут с соответствующими элементами матрицы Y, кроме $x_{ri} = e^{t}\, y_{ri}$ и $x_{ri'} = e^{-t}\, y_{ri'}$ при $r = 1, \dots, i-1$, а также $x_{is} = e^{-t}\, y_{is}$ при $s = i+1, \dots, i'-1$, и $x_{i\,i'} = e^{-2\,t}\, y_{i\,i'}$. Следовательно, F_{ii} будет действовать по правилу

$$F_{ii} \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \big(y_{ri}\, \partial_{ri} - y_{ri'}\, \partial_{ri'} \big) - \sum_{s=i+1}^{i'-1} y_{is}\, \partial_{is} - 2\, y_{i\,i'}\, \partial_{i\,i'}.$$

Применим теперь лемму 15.1.2 для элемента $A = F_{i\,i+1}$ при $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Элементы матрицы X, отличающиеся от соответствующих элементов матрицы Y, имеют вид $x_{i\,i+1} = y_{i\,i+1} - t$ и $x_{i\,s} = y_{i\,s} - t\, y_{i+1\,s}$ при $s = i+2, \dots, i'$. Для действия элемента $F_{i\,i+1}$ получаем

$$F_{i\,i+1} \mapsto -\partial_{i\,i+1} - \sum_{s=i+2}^{i'} y_{i+1\,s}\, \partial_{is}.$$

Чтобы выразить переменную $y_{i+1\,i'}$ в терминах допустимых координат на группе $\mathcal{N}_+$, возьмём матричные элементы $(i+1, i')$ в обеих частях соотношения $YY' = 1$:

$$y_{i+1\,i'} - y_{i\,i'-1} + \sum_{s=i+1}^{i'-2} \varepsilon_s\, y_{i\,s}\, y_{i+1\,s'} = 0, \qquad i = 1, \dots, n-1. \tag{15.4}$$

Следовательно,

$$F_{i\,i+1} \mapsto -\partial_{i\,i+1} - \sum_{s=i+2}^{i'-1} y_{i+1\,s}\,\partial_{is} + \Big(y_{i\,i'-1} - \sum_{s=i+1}^{i'-2} \varepsilon_s\, y_{i\,s}\, y_{i+1\,s'}\Big)\partial_{i\,i'}.$$

При $A = F_{n\,n+1}$ получаем $e^{-tA} = 1 - 2t\,E_{n\,n+1}$, откуда следует, что единственный матричный элемент матрицы X, отличающийся от соответствующего элемента матрицы Y, — это $x_{n\,n+1} = y_{n\,n+1} - 2t$, так что $F_{n\,n+1} \mapsto -2\,\partial_{n\,n+1}$.

Вычисление элементов матрицы X для $A = F_{i+1\,i}$ при $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ приводит к такому же результату, как для алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$, дополненному формулами

$$x_{i\,i'} = \frac{y_{i\,i'}}{1 + t\,y_{i'-1\,i'}} \qquad \text{и}$$

$$x_{i+1\,i'-1} = y_{i+1\,i'-1} + t\left(y_{i+1\,i'-1}\,y_{i'-1\,i'} - y_{i\,i'-1} - y_{i+1\,i'}\right) + t^2\left(y_{i\,i'} - y_{i\,i'-1}y_{i'-1\,i'}\right).$$

Поэтому, используя соотношение (15.4) и формулу $y_{i\,i+1} + y_{i'-1\,i'} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} F_{i+1\,i} \mapsto \sum_{r=1}^{i} \Big(-\left(y_{r\,i'-1}\,y_{i\,i+1} + y_{r\,i'}\right)\partial_{r\,i'-1} + y_{ri'}\,y_{i\,i+1}\,\partial_{ri'} + y_{r\,i+1}\,y_{i\,i+1}\,\partial_{r\,i+1}\Big) \\ - \sum_{s=i+2}^{i'-2} y_{is}\,\partial_{i+1\,s} + \sum_{r=1}^{i-1}\left(y_{r\,i+1} - y_{ri}\,y_{i\,i+1}\right)\partial_{ri} \\ - \Big(2\,y_{i\,i'-1} - \sum_{s=i+2}^{i'-2} \varepsilon_s\, y_{is}\, y_{i+1\,s'}\Big)\partial_{i+1\,i'-1}. \end{aligned}$$

Наконец, для $A = F_{n+1\,n}$ справедливо соотношение $e^{-tA} = 1 - 2t\,E_{n+1\,n}$, так что для элементов матрицы X из леммы 15.1.2 выводим формулы

$$x_{r\,n} = y_{r\,n}\left(1 - 2t\,y_{n\,n+1}\right) + 2t\,y_{r\,n+1} \qquad \text{при} \quad r = 1, \ldots, n-1$$

и

$$x_{r\,n+1} = \frac{y_{r\,n+1}}{1 - 2t\,y_{n\,n+1}} \qquad \text{при} \quad r = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, образующий $F_{n+1\,n}$ действует как оператор

$$F_{n+1\,n} \mapsto 2\sum_{r=1}^{n-1}\left(y_{r\,n+1} - y_{r\,n}\,y_{n\,n+1}\right)\partial_{r\,n} + 2\sum_{r=1}^{n} y_{r\,n+1}\,y_{n\,n+1}\,\partial_{r\,n+1}.$$

Чтобы получить требуемые формулы, подкрутим это представление на автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$, который меняет знаки образующих, соответствующих простым корням, затем перенесём реализацию этого представления на произвольный вес χ; ср. предложение 15.2.2. □

Пример 15.3.2. Представление алгебры Ли $\mathfrak{sp}_2$ в пространстве полиномов $\mathbb{C}[y_{12}]$ имеет вид

$$F_{11} \mapsto -2\,y_{12}\,\partial_{12} + \chi_1, \qquad F_{12} \mapsto 2\,\partial_{12}, \qquad F_{21} \mapsto -2\,y_{12}^2\,\partial_{12} + 2\,\chi_1\,y_{12}.$$

Оно изоморфно представлению алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, полученному ограничением представления $\mathfrak{gl}_2$ из примера 15.1.3, и χ_1 соответствует весу $\chi_1 - \chi_2$. □

Пример 15.3.3. Представление алгебры Ли $\mathfrak{sp}_4$ в пространстве полиномов $\mathbb{C}[y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{23}]$ даётся формулами

$$F_{11} \mapsto -y_{12}\,\partial_{12} - y_{13}\,\partial_{13} - 2\,y_{14}\,\partial_{14} + \chi_1, \quad F_{22} \mapsto y_{12}\,\partial_{12} - y_{13}\,\partial_{13} - 2\,y_{23}\,\partial_{23} + \chi_2,$$

а также

$$F_{12} \mapsto \partial_{12} + y_{23}\,\partial_{13} + (y_{13} - y_{12}\,y_{23})\,\partial_{14}, \qquad F_{23} \mapsto 2\,\partial_{23}$$

и

$$F_{21} \mapsto -y_{12}^2\,\partial_{12} + (y_{14} + y_{12}\,y_{13})\,\partial_{13} - y_{12}\,y_{14}\,\partial_{14} + 2\,y_{13}\,\partial_{23} + (\chi_1 - \chi_2)\,y_{12},$$

$$F_{32} \mapsto 2\big(y_{12}\,y_{23} - y_{13}\big)\,\partial_{12} - 2\,y_{13}\,y_{23}\,\partial_{13} - 2\,y_{23}^2\,\partial_{23} + 2\,\chi_2\,y_{23}.$$

§ 15.4. Модули Вакимото для серии A

Мы будем опираться на общие результаты, подробно объяснённые в книге [**46**, Sec. 6.1], чтобы вывести формулы, задающие действие аффинной алгебры Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{gl}}_N$ в модулях Вакимото на критическом уровне.

Алгебра Вейля $\mathcal{A}(\mathfrak{gl}_N)$ порождается двумя семействами элементов $a_{ij}[r]$ и $a_{ij}^*[r]$ при $1 \leqslant i < j \leqslant N$ и $r \in \mathbb{Z}$ с определяющими соотношениями

$$\big[a_{ij}[r], a_{kl}^*[s]\big] = \delta_{ik}\,\delta_{jl}\,\delta_{r,-s}, \qquad \big[a_{ij}[r], a_{kl}[s]\big] = \big[a_{ij}^*[r], a_{kl}^*[s]\big] = 0.$$

Обозначим через $M(\mathfrak{gl}_N)$ *представление Фока* алгебры $\mathcal{A}(\mathfrak{gl}_N)$, порождённое таким вектором $|0\rangle$, что

$$a_{ij}[r]\,|0\rangle = 0 \qquad \text{при} \quad r \geqslant 0 \qquad \text{и} \qquad a_{ij}^*[r]\,|0\rangle = 0 \qquad \text{при} \quad r > 0.$$

Соответственно, образующие $a_{ij}[r]$ при $r \geqslant 0$ и $a_{ij}^*[r]$ при $r > 0$ называются *операторами уничтожения*, в то время как образующие $a_{ij}[r]$ при $r < 0$ и $a_{ij}^*[r]$ при $r \leqslant 0$ называются *операторами рождения*. Мы можем рассматривать элементы пространства $M(\mathfrak{gl}_N)$ как полиномы от операторов рождения, применённые к вектору $|0\rangle$.

Введём формальные ряды Лорана

$$a_{ij}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_{ij}[r]\,z^{-r-1} \qquad \text{и} \qquad a_{ij}^*(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_{ij}^*[r]\,z^{-r} \tag{15.5}$$

с коэффициентами в алгебре $\mathcal{A}(\mathfrak{gl}_N)$. Нормально упорядоченные произведения таких рядов определяются с помощью общего правила (6.9). Оно эквивалентно тому, что для любого монома P от образующих алгебры Вейля соответствующий нормально упорядоченный моном $:P:$ получается, если его множители переписать в таком порядке, что все операторы уничтожения будут справа от операторов рождения. Нормальное упорядочение продолжается по линейности на произвольные линейные комбинации мономов. Его применение к произведениям рядов вида (15.5) означает применение ко всем коэффициентам рядов по z.

Вспомним формальные ряды Лорана $E_{ij}(z)$, введённые формулой (7.22), и зафиксируем N-набор рядов Лорана $\chi(z) = \big(\chi_1(z), \dots, \chi_N(z)\big)$ с компонентами $\chi_i(z) \in \mathbb{C}((z))$. *Модуль Вакимото* $W_{\chi(z)}$ на критическом уровне определяется следующими формулами.

Предложение 15.4.1. *Следующие соотношения задают представление алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{gl}}_N$ на критическом уровне в векторном пространстве $M(\mathfrak{gl}_N)$:*

$$E_{ii}(z) \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} : a^*_{ri}(z)\, a_{ri}(z) : - \sum_{s=i+1}^{N} : a^*_{is}(z)\, a_{is}(z) : \; + \chi_i(z)$$

при $i = 1, \dots, N$, а также

$$E_{i\,i+1}(z) \mapsto a_{i\,i+1}(z) + \sum_{s=i+2}^{N} : a^*_{i+1\,s}(z)\, a_{is}(z) :$$

и

$$\begin{aligned} E_{i+1\,i}(z) \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} &: \big(a^*_{ri}(z)\, a^*_{i\,i+1}(z) - a^*_{r\,i+1}(z)\big)\, a_{ri}(z) : \\ &- \sum_{r=1}^{i} : a^*_{r\,i+1}(z)\, a^*_{i\,i+1}(z)\, a_{r\,i+1}(z) : + \sum_{s=i+2}^{N} : a^*_{is}(z)\, a_{i+1\,s}(z) : \\ &\qquad + \big(\chi_i(z) - \chi_{i+1}(z)\big)\, a^*_{i\,i+1}(z) - (i+1)\, \partial_z\, a^*_{i\,i+1}(z) \end{aligned}$$

при $i = 1, \dots, N-1$.

Доказательство. Все формулы вытекают из предложения 15.1.1, в котором построена свободно-полевая реализация $\mathfrak{gl}_N$, и из общих результатов в [**46**, Sec. 6.1]. Дополнительное вычисление необходимо только, чтобы получить значение $c_i = -i - 1$ для коэффициента c_i при слагаемом $\partial_z\, a^*_{i\,i+1}(z)$, существование которого обеспечивается общими результатами. Чтобы найти это значение, заметим, что, поскольку $K = -N$, из (7.3) вытекает формула

$$\big[E_{i\,i+1}[1], E_{i+1\,i}[-1]\big] = E_{i\,i}[0] - E_{i+1\,i+1}[0] - N. \tag{15.6}$$

Запишем

$$\chi_i(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \chi_i[r]\, z^{-r-1}, \qquad \chi_i[r] \in \mathbb{C}, \tag{15.7}$$

так что $\chi_i[r] = 0$ для достаточно больших положительных значений r. Применим обе части соотношения (15.6) к вектору $|0\rangle$ и заметим, что $E_{i\,i+1}[1]\,|0\rangle = 0$, в то время как $E_{i\,i}[0]\,|0\rangle = \chi_i[0]\,|0\rangle$ для всех i. Кроме того, взяв свободный член в формуле для действия ряда $E_{i+1\,i}(z)$, получаем

$$E_{i+1\,i}[-1]\,|0\rangle = \sum_{r=1}^{i-1} \bigl(a^*_{ri}[0]\,a^*_{i\,i+1}[0] - a^*_{r\,i+1}[0]\bigr)\,a_{ri}[-1]\,|0\rangle \\ - \sum_{r=1}^{i} a^*_{r\,i+1}[0]\,a^*_{i\,i+1}[0]\,a_{r\,i+1}[-1]\,|0\rangle + \sum_{s=i+2}^{N} a^*_{is}[0]\,a_{i+1\,s}[-1]\,|0\rangle \\ + \sum_{p\geqslant 0} \bigl(\chi_i[p-1] - \chi_{i+1}[p-1]\bigr)\,a^*_{i\,i+1}[-p]\,|0\rangle + c_i\,a^*_{i\,i+1}[-1]\,|0\rangle.$$

Теперь подействуем на этот вектор оператором

$$E_{i\,i+1}[1] = a_{i\,i+1}[1] + \sum_{s=i+2}^{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^*_{i+1\,s}[-k+1]\,a_{is}[k].$$

Это приводит к формуле

$$E_{i\,i+1}[1]\,E_{i+1\,i}[-1]\,|0\rangle = \bigl(-N + i + 1 + c_i + \chi_i[0] - \chi_{i+1}[0]\bigr)\,|0\rangle.$$

Сравнивая её с результатом действия оператора в правой части соотношения (15.6) на вектор $|0\rangle$, заключаем, что $c_i = -i - 1$. □

Пример 15.4.2. Формулы для модуля Вакимото $W_{\chi(z)}$ над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{gl}}_2$ для $\chi(z) = \bigl(\chi_1(z), \chi_2(z)\bigr)$ имеют вид

$$E_{11}(z) \mapsto -:a^*_{12}(z)\,a_{12}(z): + \chi_1(z),$$
$$E_{22}(z) \mapsto\ :a^*_{12}(z)\,a_{12}(z): + \chi_2(z),$$

а также

$$E_{12}(z) \mapsto a_{1\,2}(z),$$
$$E_{21}(z) \mapsto -:a^*_{12}(z)^2\,a_{12}(z): + \bigl(\chi_1(z) - \chi_2(z)\bigr)\,a^*_{12}(z) - 2\,\partial_z\,a^*_{12}(z). \qquad □$$

Из общих результатов в [**46**, Sec. 8.3.3] известно, что элементы центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ пополненной универсальной обёртывающей алгебры $\widetilde{\mathrm{U}}_{-N}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ действуют в модулях Вакимото $W_{\chi(z)}$ умножением на скаляры. Более того, как показывает следующее предложение, собственные значения центральных элементов фактически совпадают с их образами Хариш-Чандры, определёнными в (13.47) и вычисленными в §13.3.

Предложение 15.4.3. *Собственное значение произвольного элемента $S \in \mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ при действии в модуле Вакимото $W_{\chi(z)}$ совпадает с образом Хариш-Чандры $\mathfrak{f}(S)$, если образующие алгебры $\Pi = \mathrm{S}\bigl(\mathfrak{h}[t, t^{-1}]\bigr)$ заменить по правилу $E_{ii}[r] \mapsto \chi_i[r]$.*

Доказательство. Достаточно вычислить собственное значение вектора $|0\rangle \in W_{\chi(z)}$ относительно действия оператора S. Запишем элемент S в виде (возможно, бесконечной) линейной комбинации упорядоченных мономов, с упорядочением, определённым в §13.3. Возьмём такой моном, входящий в эту линейную комбинацию, что его самый правый множитель — это элемент вида $E_{ij}[r] \in \mathfrak{n}_+[t]$ при $i < j$ и $r \geqslant 0$. Из формул предложения 15.4.1 следует, что $E_{i\,i+1}[r]\,|0\rangle = 0$ при $r \geqslant 0$ для всех i, поэтому $E_{ij}[r]\,|0\rangle = 0$. Предположим теперь, что самый левый множитель монома, входящего в линейную комбинацию, имеет вид $E_{ij}[r] \in t^{-1}\mathfrak{n}_+[t^{-1}]$ при $i < j$ и $r < 0$. Результатом применения этого монома к вектору $|0\rangle$ будет линейная комбинация базисных векторов пространства Фока $M(\mathfrak{gl}_N)$, которая не содержит вектора $|0\rangle$. Следовательно, такие мономы вносят нулевой вклад в собственное значение оператора S. В силу весового свойства (13.48) элемента S ненулевой вклад может возникнуть только из упорядоченных мономов от образующих $E_{ii}[r]$. Из предложения 15.4.1 вытекает, что $E_{ii}[r]\,|0\rangle = \chi_i[r]\,|0\rangle$ для всех $r \geqslant 0$. Кроме того, при $r < 0$ вклад в коэффициент при $|0\rangle$ в разложении вектора $E_{ii}[r]\,|0\rangle$ в линейную комбинацию базисных векторов пространства $M(\mathfrak{gl}_N)$ равен $\chi_i[r]\,|0\rangle$. Таким образом, собственное значение оператора S получается заменой элементов $E_{ii}[r]$ на $\chi_i[r]$ соответственно в образе Хариш-Чандры $\mathfrak{f}(S)$. □

Следствие 15.4.4. *Формулы из предложения 13.3.3 с заменами рядов $\mu_i(z) \mapsto \chi_i(z)$ при $i = 1, \ldots, N$ дают собственные значения для действия элементов центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ в модуле Вакимото $W_{\chi(z)}$.* □

§ 15.5. Модули Вакимото для серий B и D

Рассмотрим *алгебру Вейля* $\mathcal{A}(\mathfrak{o}_N)$, порождённую элементами $a_{ij}[r]$ и $a^*_{ij}[r]$ при $1 \leqslant i < j \leqslant N$ при условиях $i+j \leqslant N$ и $r \in \mathbb{Z}$. Определяющие соотношения имеют вид

$$\big[a_{ij}[r], a^*_{kl}[s]\big] = \delta_{ik}\,\delta_{jl}\,\delta_{r,-s}, \qquad \big[a_{ij}[r], a_{kl}[s]\big] = \big[a^*_{ij}[r], a^*_{kl}[s]\big] = 0.$$

Представление Фока $M(\mathfrak{o}_N)$ алгебры $\mathcal{A}(\mathfrak{o}_N)$ порождается таким вектором $|0\rangle$, что

$$a_{ij}[r]\,|0\rangle = 0 \quad \text{при} \quad r \geqslant 0 \quad \text{и} \quad a^*_{ij}[r]\,|0\rangle = 0 \quad \text{при} \quad r > 0.$$

Ряды Лорана $a_{ij}(z)$ и $a^*_{ij}(z)$ вводятся по тем же формулам (15.5), что и для серии A. Их нормально упорядоченные произведения определяются по правилу (6.9), которое можно переформулировать в терминах нормально упорядоченных мономов, как для серии A.

Предположим теперь, что $N = 2n$, и рассмотрим формальный ряд Лорана $F_{ij}(z)$, введённый в (8.50). Зафиксируем n-набор рядов Лорана

$$\chi(z) = \big(\chi_1(z), \ldots, \chi_n(z)\big), \qquad \chi_i(z) \in \mathbb{C}((z)). \tag{15.8}$$

Модуль Вакимото $W_{\chi(z)}$ на критическом уровне задаётся следующими формулами.

Предложение 15.5.1. *Следующие соотношения задают представление алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{o}}_{2n}$ на критическом уровне в векторном пространстве $M(\mathfrak{o}_{2n})$:*

$$F_{ii}(z) \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \Big(:a^*_{ri}(z)\,a_{ri}(z): - :a^*_{ri'}(z)\,a_{ri'}(z): \Big) - \sum_{s=i+1}^{i'-1} :a^*_{is}(z)\,a_{is}(z): \,+ \chi_i(z)$$

при $i = 1, \ldots, n$,

$$F_{i\,i+1}(z) \mapsto a_{i\,i+1}(z) + \sum_{s=i+2}^{i'-2} :a^*_{i+1\,s}(z) a_{is}(z): - \sum_{s=i+2}^{n} :a^*_{i+1\,s}(z) a^*_{i+1\,s'}(z) a_{i\,i'-1}(z):$$

при $i = 1, \ldots, n-1$ *и* $F_{n-1\,n'}(z) \mapsto a_{n-1\,n'}(z)$, *а также*

$$F_{i+1\,i}(z) \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \Big(:\big(a^*_{ri}(z)\, a^*_{i\,i+1}(z) - a^*_{r\,i+1}(z)\big)\, a_{ri}(z):$$

$$+ :\big(a^*_{r\,i'-1}(z)\, a^*_{i\,i+1}(z) + a^*_{r\,i'}(z)\big)\, a_{r\,i'-1}(z): - :a^*_{ri'}(z)\, a^*_{i\,i+1}(z)\, a_{ri'}(z):\Big)$$

$$- \sum_{r=1}^{i} :a^*_{r\,i+1}(z)\, a^*_{i\,i+1}(z)\, a_{r\,i+1}(z): + \sum_{s=i+2}^{i'-2} :a^*_{is}(z)\, a_{i+1\,s}(z):$$

$$- \sum_{s=i+2}^{n} :a^*_{i\,s}(z)\, a^*_{i\,s'}(z)\, a_{i\,i'-1}(z): + \big(\chi_i(z) - \chi_{i+1}(z)\big)\, a^*_{i\,i+1}(z) - 2i\, \partial_z\, a^*_{i\,i+1}(z)$$

при $i = 1, \ldots, n-1$ *и*

$$F_{n'\,n-1}(z) \mapsto \sum_{r=1}^{n-2} \Big(:\big(a^*_{r\,n-1}(z)\, a^*_{n-1\,n'}(z) - a^*_{r\,n'}(z)\big)\, a_{r\,n-1}(z):$$

$$+ :\big(a^*_{r\,n}(z)\, a^*_{n-1\,n'}(z) + a^*_{r\,n+2}(z)\big)\, a_{r\,n}(z): - :a^*_{r\,n+2}(z)\, a^*_{n-1\,n'}(z)\, a_{r\,n+2}(z):\Big)$$

$$- \sum_{r=1}^{n-1} :a^*_{r\,n'}(z)\, a^*_{n-1\,n'}(z)\, a_{r\,n'}(z):$$

$$+ \big(\chi_{n-1}(z) + \chi_n(z)\big)\, a^*_{n-1\,n'}(z) - (2n-2)\, \partial_z\, a^*_{n-1\,n'}(z).$$

Доказательство. Все формулы вытекают из предложения 15.2.2, в котором построена свободно-полевая реализация алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$, и из общих результатов в [**46**, Sec. 6.1]. Нам нужно только проверить значения $c_i = -2i$ для коэффициента c_i при слагаемом $\partial_z\, a^*_{i\,i+1}(z)$ и значение $c_n = -2n+2$ для коэффициента c_n при слагаемом $\partial_z\, a^*_{n-1\,n'}(z)$. Эти значения существуют в силу общих результатов. Так как на критическом уровне $K = -2n+2$, из формулы (8.2) находим

$$\big[F_{i\,i+1}[1], F_{i+1\,i}[-1]\big] = F_{i\,i}[0] - F_{i+1\,i+1}[0] - 2n + 2$$

при $i = 1, \ldots, n-1$. Записывая $\chi_i(z)$, как в (15.7), и применяя оператор в правой части к вектору $|0\rangle$, получаем $\big(\chi_i[0] - \chi_{i+1}[0] - 2n + 2\big)\,|0\rangle$. Кроме того,

$$F_{i\,i+1}[1] = a_{i\,i+1}[1] + \sum_{s=i+2}^{N} \sum_{k+l=1} :a^*_{i+1\,s}[k]\, a_{is}[l]:$$

$$- \sum_{s=i+2}^{n} \sum_{k+l+m=1} :a^*_{i+1\,s}[k]\, a^*_{i+1\,s'}[l]\, a_{i\,i'-1}[m]:,$$

так что $F_{i\,i+1}[1]\,|0\rangle = 0$ и все компоненты вектора $F_{i+1\,i}[-1]\,|0\rangle$ аннулируются оператором $F_{i\,i+1}[1]$, за исключением

$$\sum_{s=i+2}^{i'-2} a^*_{is}[0]\,a_{i+1\,s}[-1]\,|0\rangle + \bigl(\chi_i[0]-\chi_{i+1}[0]\bigr)\,a^*_{i\,i+1}[-1]\,|0\rangle + c_i\,a^*_{i\,i+1}[-1]\,|0\rangle.$$

Применяя оператор $F_{i\,i+1}[1]$ к этой компоненте, получаем

$$F_{i\,i+1}[1]\,F_{i+1\,i}[-1]\,|0\rangle = \bigl(-2n+2+2i+c_i+\chi_i[0]-\chi_{i+1}[0]\bigr)\,|0\rangle,$$

так что $c_i = -2i$. Коэффициент c_n вычисляется таким же образом: мы применяем операторы в обеих частях соотношения

$$\bigl[F_{n-1\,n'}[1], F_{n'\,n-1}[-1]\bigr] = F_{n-1\,n-1}[0] + F_{n\,n}[0] - 2n + 2$$

к вектору $|0\rangle$, откуда следует, что $c_n = -2n+2$. $\square$

Пусть теперь $N = 2n+1$. Зафиксируем n-набор рядов Лорана $\chi(z)$, как в (15.8), и будем использовать ряды Лорана $F_{ij}(z)$, введённые в (8.50). *Модуль Вакимото* $W_{\chi(z)}$ на критическом уровне задаётся следующими формулами.

Предложение 15.5.2. *Следующие соотношения задают представление алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{o}}_{2n+1}$ на критическом уровне в пространстве $M(\mathfrak{o}_{2n+1})$:*

$$F_{ii}(z) \mapsto \sum_{r=1}^{i-1}\Bigl(:a^*_{ri}(z)\,a_{ri}(z): - :a^*_{ri'}(z)\,a_{ri'}(z):\Bigr) - \sum_{s=i+1}^{i'-1} :a^*_{is}(z)\,a_{is}(z): \; + \chi_i(z)$$

$$F_{i\,i+1}(z) \mapsto a_{i\,i+1}(z) + \sum_{s=i+2}^{i'-2} :a^*_{i+1\,s}(z)\,a_{is}(z):$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{s=i+2}^{i'-2} :a^*_{i+1\,s}(z)\,a^*_{i+1\,s'}(z)\,a_{i\,i'-1}(z):$$

при $i = 1,\dots,n$, а также

$$F_{i+1\,i}(z) \mapsto \sum_{r=1}^{i-1}\Bigl(:\bigl(a^*_{ri}(z)\,a^*_{i\,i+1}(z) - a^*_{r\,i+1}(z)\bigr)\,a_{ri}(z):$$
$$+ :\bigl(a^*_{r\,i'-1}(z)\,a^*_{i\,i+1}(z) + a^*_{r\,i'}(z)\bigr)\,a_{r\,i'-1}(z): - :a^*_{ri'}(z)\,a^*_{i\,i+1}(z)\,a_{ri'}(z):\Bigr)$$
$$- \sum_{r=1}^{i} :a^*_{r\,i+1}(z)\,a^*_{i\,i+1}(z)\,a_{r\,i+1}(z): + \sum_{s=i+2}^{i'-2} :a^*_{is}(z)\,a_{i+1\,s}(z):$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{s=i+2}^{i'-2} :a^*_{i\,s}(z)\,a^*_{i\,s'}(z)\,a_{i\,i'-1}(z): \; + \bigl(\chi_i(z)-\chi_{i+1}(z)\bigr)\,a^*_{i\,i+1}(z) - 2i\,\partial_z\,a^*_{i\,i+1}(z)$$

при $i = 1, \ldots, n-1$ *и*

$$F_{n+1\,n}(z) \mapsto \sum_{r=1}^{n-1} \Big(: \big(a^*_{r\,n}(z)\, a^*_{n\,n+1}(z) - a^*_{r\,n+1}(z)\big)\, a_{r\,n}(z) : \\ - : a^*_{r\,n+2}(z)\, a^*_{n\,n+1}(z)\, a_{r\,n+2}(z) : + : a^*_{r\,n+2}(z)\, a_{r\,n}(z) : \Big) \\ - \frac{1}{2}\; : a^*_{n\,n+1}(z)^2\, a_{n\,n+1}(z) : \; + \chi_n(z)\, a^*_{n\,n+1}(z) - (2n-1)\, \partial_z\, a^*_{n\,n+1}(z).$$

Доказательство. Как в предложении 15.5.1, нам нужно только вычислить коэффициенты c_i при слагаемых $\partial_z\, a^*_{i\,i+1}(z)$ и коэффициент c_n при слагаемом $\partial_z\, a^*_{n\,n+1}(z)$. Здесь критический уровень — $K = -2n+1$, так что из (8.2) находим

$$\big[F_{i\,i+1}[1], F_{i+1\,i}[-1]\big] = F_{i\,i}[0] - F_{i+1\,i+1}[0] - 2n + 1$$

при $i = 1, \ldots, n$. Такое же рассуждение, как в случае алгебры Ли $\mathfrak{o}_{2n}$, позволяет получить значения $c_i = -2i$ при $i = 1, \ldots, n-1$ и $c_n = -2n+1$. □

Аналог предложения 15.4.3 для ортогональных алгебр Ли $\mathfrak{o}_N$ выполняется в том же виде. Доказательство следует из таких же рассуждений и опирается на формулы из предложений 15.5.1 и 15.5.2. Мы используем гомоморфизм (13.47).

Предложение 15.5.3. *Собственное значение произвольного элемента* $S \in \mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{o}}_N)$ *при действии в модуле Вакимото* $W_{\chi(z)}$ *совпадает с образом Хариш-Чандры* $\mathfrak{f}(S)$, *если образующие алгебры* $\Pi = \mathrm{S}\big(\mathfrak{h}[t, t^{-1}]\big)$ *заменить по правилу* $F_{ii}[r] \mapsto \chi_i[r]$ *при* $i = 1, \ldots, n$ *и* $r \in \mathbb{Z}$. □

Следствие 15.5.4. *Формулы из предложений 13.3.4, 13.3.5 и 13.3.6 с заменами рядов* $\mu_i(z) \mapsto \chi_i(z)$ *при* $i = 1, \ldots, n$ *дают собственные значения для действия элементов центра* $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{o}}_N)$ *в модуле Вакимото* $W_{\chi(z)}$. □

§ 15.6. Модули Вакимото для серии C

Алгебра Вейля $\mathcal{A}(\mathfrak{sp}_{2n})$ порождается элементами $a_{ij}[r]$ и $a^*_{ij}[r]$ при $r \in \mathbb{Z}$ с условиями на индексы $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$ и $i + j \leqslant 2n + 1$. Определяющие соотношения имеют вид

$$\big[a_{ij}[r], a^*_{kl}[s]\big] = \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \delta_{r,-s}, \qquad \big[a_{ij}[r], a_{kl}[s]\big] = \big[a^*_{ij}[r], a^*_{kl}[s]\big] = 0.$$

Представление Фока $M(\mathfrak{sp}_{2n})$ алгебры Вейля $\mathcal{A}(\mathfrak{sp}_{2n})$ порождается таким вектором $|0\rangle$, что

$$a_{ij}[r]\,|0\rangle = 0 \qquad \text{при} \quad r \geqslant 0 \qquad \text{и} \qquad a^*_{ij}[r]\,|0\rangle = 0 \qquad \text{при} \quad r > 0.$$

Будем использовать те же формулы (15.5), что и для серии A, чтобы ввести ряды Лорана $a_{ij}(z)$ и $a^*_{ij}(z)$. Нормально упорядоченное произведение таких рядов определяется по правилу (6.9).

Зафиксируем n-набор рядов Лорана $\chi(z)$, как в (15.8), и будем использовать ряды Лорана $F_{ij}(z)$ введённые в (8.50). *Модуль Вакимото* $W_{\chi(z)}$ на критическом уровне задаётся следующими формулами.

Предложение 15.6.1. *Следующие соотношения задают представление алгебры Ли* $\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}$ *на критическом уровне в пространстве* $M(\mathfrak{sp}_{2n})$:

$$F_{ii}(z) \mapsto \sum_{r=1}^{i-1} \Big(: a^*_{ri}(z)\, a_{ri}(z) : - : a^*_{ri'}(z)\, a_{ri'}(z) : \Big) \\ - \sum_{s=i+1}^{i'-1} : a^*_{is}(z)\, a_{is}(z) : \; - 2 : a^*_{i\,i'}(z)\, a_{i\,i'}(z) : \; + \chi_i(z)$$

при $i = 1, \ldots, n$,

$$F_{i\,i+1}(z) \mapsto a_{i\,i+1}(z) + \sum_{s=i+2}^{i'-1} : a^*_{i+1\,s}(z)\, a_{is}(z) : \\ + : \Big(a^*_{i\,i'-1}(z) - \sum_{s=i+1}^{i'-2} \varepsilon_s\, a^*_{i\,s}(z)\, a^*_{i+1\,s'}(z) \Big) a_{i\,i'}(z) :$$

при $i = 1, \ldots, n-1$ *и* $F_{n\,n+1}(z) \mapsto 2\, a_{n\,n+1}(z)$, *а также*

$$F_{i+1\,i}(z) \mapsto \sum_{r=1}^{i} \Big(: \big(a^*_{r\,i'-1}(z)\, a^*_{i\,i+1}(z) + a^*_{r\,i'}(z) \big)\, a_{r\,i'-1}(z) : \\ - : a^*_{ri'}(z)\, a^*_{i\,i+1}(z)\, a_{ri'}(z) : - : a^*_{r\,i+1}(z)\, a^*_{i\,i+1}(z)\, a_{r\,i+1}(z) : \Big) \\ + \sum_{s=i+2}^{i'-2} : a^*_{i\,s}(z)\, a_{i+1\,s}(z) : + \sum_{r=1}^{i-1} : \big(a^*_{ri}(z)\, a^*_{i\,i+1}(z) - a^*_{r\,i+1}(z) \big)\, a_{ri}(z) : \\ + : \Big(2\, a^*_{i\,i'-1}(z) - \sum_{s=i+2}^{i'-2} \varepsilon_s\, a^*_{i\,s}(z)\, a^*_{i+1\,s'}(z) \Big)\, a_{i+1\,i'-1}(z) : \\ - (2i+1)\, \partial_z\, a^*_{i\,i+1}(z) + \big(\chi_i(z) - \chi_{i+1}(z) \big)\, a^*_{i\,i+1}(z)$$

при $i = 1, \ldots, n-1$ *и*

$$F_{n+1\,n}(z) \mapsto 2 \sum_{r=1}^{n-1} : \big(a^*_{r\,n}(z)\, a^*_{n\,n+1}(z) - a^*_{r\,n+1}(z) \big)\, a_{r\,n}(z) :$$

$$-2 \sum_{r=1}^{n} : a^*_{r\,n+1}(z)\, a^*_{n\,n+1}(z)\, a_{r\,n+1}(z) : + 2\, \chi_n(z)\, a^*_{n\,n+1}(z) - 2\,(n+1)\, \partial_z\, a^*_{n\,n+1}(z).$$

Доказательство. Здесь мы снова применим общие результаты из книги [**46**, Sec. 6.1], так что формулы вытекают из предложения 15.3.1. Мы только проверим значения коэффициентов c_i при слагаемых $\partial_z a^*_{i\,i+1}(z)$ и коэффициент c_n при слагаемом $\partial_z a^*_{n\,n+1}(z)$. На критическом уровне $K = -n-1$, так что из соотношений (8.32) находим

$$\big[F_{i\,i+1}[1], F_{i+1\,i}[-1]\big] = F_{i\,i}[0] - F_{i+1\,i+1}[0] - 2n - 2$$

при $i = 1, \dots, n-1$. Записывая ряд Лорана $\chi_i(z)$, как в (15.7), и применяя оператор в правой части к вектору $|0\rangle$, получим $\big(\chi_i[0] - \chi_{i+1}[0] - 2n - 2\big)\,|0\rangle$. Заметим, что все компоненты вектора $F_{i+1\,i}[-1]\,|0\rangle$ аннулируются оператором $F_{i\,i+1}[1]$, за исключением

$$a^*_{i\,i'}[0]\,a_{i\,i'-1}[-1]\,|0\rangle + \sum_{s=i+2}^{i'-2} a^*_{is}[0]\,a_{i+1\,s}[-1]\,|0\rangle + 2\,a^*_{i\,i'-1}[0]\,a_{i+1\,i'-1}[-1]\,|0\rangle \\ + \big(\chi_i[0] - \chi_{i+1}[0]\big)\,a^*_{i\,i+1}[-1]\,|0\rangle + c_i\,a^*_{i\,i+1}[-1]\,|0\rangle.$$

Применяя оператор $F_{i\,i+1}[1]$ к этой компоненте, получим

$$F_{i\,i+1}[1]\,F_{i+1\,i}[-1]\,|0\rangle = \big(-2n + 1 + 2i + c_i + \chi_i[0] - \chi_{i+1}[0]\big)\,|0\rangle,$$

так что $c_i = -2i - 1$. Коэффициент c_n вычисляется таким же способом: мы применяем операторы в обеих частях соотношения

$$\big[F_{n\,n+1}[1], F_{n+1\,n}[-1]\big] = 4\,F_{n\,n}[0] - 4n - 4$$

к вектору $|0\rangle$ и получаем $c_n = -2n - 2$. □

Симплектическая версия предложения 15.4.3 проверяется таким же рассуждением, опирающимся на формулы из предложения 15.6.1. Мы будем использовать гомоморфизм $\mathfrak{f}$, определённый в (13.47).

Предложение 15.6.2. *Собственное значение произвольного элемента $S \in \mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$ при действии в модуле Вакимото $W_{\chi(z)}$ совпадает с образом Хариш-Чандры $\mathfrak{f}(S)$, если образующие алгебры $\Pi = \mathrm{S}\big(\mathfrak{h}[t, t^{-1}]\big)$ заменить по правилу $F_{ii}[r] \mapsto \chi_i[r]$ при $i = 1, \dots, n$ и $r \in \mathbb{Z}$.* □

Следствие 15.6.3. *Формулы из предложения 13.3.7 с заменами рядов $\mu_i(z) \mapsto \chi_i(z)$ при $i = 1, \dots, n$ дают собственные значения для действия элементов центра $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n})$ в модуле Вакимото $W_{\chi(z)}$.* □

§ 15.7. Библиографические замечания

Модули Вакимото были первоначально определены М. Вакимото [**152**] для алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$, затем Б. Фейгиным и Э. Френкелем [**38**] для произвольных аффинных алгебр Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{g}}$. Их конструкция и её обобщения подробно объяснены в книге Э. Френкеля [**46**, Ch. 6]. Предложения 15.4.3, 15.5.3 и 15.6.2 — это частные случаи общих результатов, которые справедливы для произвольной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$; см. [**46**, Sec. 8.3.3].

Литература

[1] M. Adler, *On a trace functional for formal pseudo differential operators and the symplectic structure of the Korteweg–de Vries type equations*, Invent. Math. **50** (1978/79), 219–248.

[2] H. H. Andersen, C. Stroppel and D. Tubbenhauer, *Semisimplicity of Hecke and* (*walled*) *Brauer algebras*, J. Aust. Math. Soc., to appear; `arXiv:1507.07676`.

[3] T. Arakawa, *Drinfeld functor and finite-dimensional representations of Yangian*, Comm. Math. Phys. **205** (1999), 1–18.

[4] T. Arakawa, *Introduction to W-algebras and their representation theory*, in «Perspectives in Lie Theory», (F. Callegaro, G. Carnovale, F. Caselli, C. De Concini, A. De Sole, Eds), Springer INdAM Series, vol 19. Springer, to appear; `arXiv:1605.00138`.

[5] T. Arakawa, *W-algebras at the critical level*, in «Algebraic groups and quantum groups», 1–13, Contemp. Math., **565**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[6] D. Arnaudon, J. Avan, N. Crampé, L. Frappat and E. Ragoucy, *R-matrix presentation for super-Yangians $Y(\mathrm{osp}(m|2n))$*, J. Math. Phys. **44** (2003), 302–308.

[7] D. Arnaudon, A. Molev and E. Ragoucy, *On the R-matrix realization of Yangians and their representations*, Annales Henri Poincaré **7** (2006), 1269–1325.

[8] R. M. Asherova, Yu. F. Smirnov and V. N. Tolstoy, *Projection operators for simple Lie groups*, Theor. Math. Phys. **8** (1971), 813–825. На русском языке: Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, *Проекционные операторы для простых групп Ли*, ТМФ **8**:2 (1971), 255–271.

[9] H. M. Babujian and R. Flume, *Off-shell Bethe ansatz equation for Gaudin magnets and solutions of Knizhnik–Zamolodchikov equations*, Modern Phys. Lett. A **9** (1994), 2029–2039.

[10] J. Birman and H. Wenzl, *Braids, link polynomials and a new algebra*, Trans. AMS **313** (1989), 249–273.

[11] A. V. Bolsinov, *Commutative families of functions related to consistent Poisson brackets*, Acta Appl. Math. **24** (1991), 253–274.

[12] A. V. Bolsinov, *Compatible Poisson brackets on Lie algebras and the completeness of families of functions in involution*, Math. USSR-Izv. **38** (1992), 69–90. На русском языке: А. В. Болсинов, *Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **55**:1 (1991), 68–92.

[13] A. V. Bolsinov and P. Zhang, *Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras*, Transform. Groups **21** (2016), 51–86.

[14] R. Brauer, *On algebras which are connected with the semisimple continuous groups*, Ann. Math. **38** (1937), 854–872.

[15] J. Brown and J. Brundan, *Elementary invariants for centralizers of nilpotent matrices*, J. Aust. Math. Soc. **86** (2009), 1–15.

[16] J. Brundan and A. Kleshchev, *Representations of shifted Yangians and finite W-algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **196** (2008), no. 918.

[17] J.-Y. Charbonnel and A. Moreau, *The index of centralizers of elements of reductive Lie algebras*, Doc. Math. **15** (2010), 387–421.

[18] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[19] I. V. Cherednik, *Special bases of irreducible representations of a degenerate affine Hecke algebra*, Funct. Analysis Appl. **20** (1986), 76–78. На русском языке: И. В. Чередник, *О специальных базисах неприводимых представлений вырожденной аффинной алгебры Гекке*, Функц. анализ и его прил. **20**:1 (1986), 87–88.

[20] A. Chervov and G. Falqui, *Manin matrices and Talalaev's formula*, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 194006 (28pp).

[21] A. Chervov, G. Falqui and V. Rubtsov, *Algebraic properties of Manin matrices 1*, Adv. Appl. Math. **43** (2009), 239–315.

[22] A. Chervov, G. Falqui, V. Rubtsov and A. Silantyev, *Algebraic properties of Manin matrices II: q-analogues and integrable systems*, Adv. in Appl. Math. **60** (2014), 25–89.

[23] A. V. Chervov and A. I. Molev, *On higher order Sugawara operators*, Int. Math. Res. Not. (2009), 1612–1635.

[24] A. Chervov and D. Talalaev, *Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence*, `arXiv:hep-th/0604128`.

[25] Z. Daugherty, A. Ram and R. Virk, *Affine and degenerate affine BMW algebras: actions on tensor space*, Selecta Math. (N.S.) **19** (2013), 611–653.

[26] A. De Sole, V. G. Kac and D. Valeri, *Classical $\mathcal{W}$-algebras and generalized Drinfeld–Sokolov bi-Hamiltonian systems within the theory of Poisson vertex algebras*, Comm. Math. Phys. **323** (2013), 663–711.

[27] A. De Sole, V. G. Kac and D. Valeri, *Structure of classical (finite and affine) $\mathcal{W}$-algebras*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **18** (2016), 1873–1908.

[28] A. De Sole, V. G. Kac and D. Valeri, *Classical $\mathcal{W}$-algebras for $\mathfrak{gl}_N$ and associated integrable Hamiltonian hierarchies*, Commun. Math. Phys. **348** (2016), 265–319.

[29] J. Dixmier, *Algèbres Enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974. На русском языке: Ж. Диксмье, *Универсальные обертывающие алгебры*, М.: Мир, 1978.

[30] V. G. Drinfeld, *Hopf algebras and the quantum Yang–Baxter equation*, Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 254–258. На русском языке: В. Г. Дринфельд, *Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера*, Докл. АН СССР **283**:5 (1985), 1060–1064.

[31] V. G. Drinfeld, *Degenerate affine Hecke algebras and Yangians*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 56–58. На русском языке: В. Г. Дринфельд, *Вырожденные аффинные алгебры Гекке и янгианы*, Функц. анализ и его прил. **20**:1 (1986), 69–70.

[32] V. G. Drinfeld, *Quantum Groups*, in «International Congress of Mathematicians (Berkeley, 1986)», Amer. Math. Soc., Providence RI, 1987, pp. 798–820. На русском языке: В. Г. Дринфельд, *Квантовые группы*, Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VIII. Записки науч. семинаров ЛОМИ **155** (1986), 18–49.

[33] V. G. Drinfeld and V. V. Sokolov, *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type*, J. Sov. Math. **30** (1985), 1975–2036. На русском языке: В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, *Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. **24** (1984), 81–180.

[34] N. El Samra and R. C. King, *Dimensions of irreducible representations of the classical Lie groups*, J. Phys. A **12** (1979), 2317–2328.

[35] P. Etingof and D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras. III*, Selecta Math. (N.S.) **4** (1998), 233–269.

[36] P. Etingof and D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras, Part IV: The coinvariant construction and the quantum KZ equations*, Selecta Math. (N.S.) **6** (2000), 79–104.

[37] P. Etingof and D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras. V. Quantum vertex operator algebras*, Selecta Math. (N.S.) **6** (2000), 105–130.

[38] B. Feigin and E. Frenkel, *A family of representations of affine Lie algebras*, Russ. Math. Surv. **43** (1988), 221–222. На русском языке: Б. Л. Фейгин, Э. В. Френкель, *Семейство представлений аффинных алгебр Ли*, УМН **43**:5(263) (1988), 227–228.

[39] B. Feigin and E. Frenkel, *Affine Kac–Moody algebras at the critical level and Gelfand–Dikii algebras*, Int. J. Mod. Phys. A**7**, Suppl. 1A (1992), 197–215.

[40] B. Feigin, E. Frenkel and N. Reshetikhin, *Gaudin model, Bethe ansatz and critical level*, Comm. Math. Phys. **166** (1994), 27–62.

[41] B. Feigin, E. Frenkel and L. Rybnikov, *Opers with irregular singularity and spectra of the shift of argument subalgebra*, Duke Math. J. **155** (2010), 337–363.

[42] B. Feigin, E. Frenkel and V. Toledano Laredo, *Gaudin models with irregular singularities*, Adv. Math. **223** (2010), 873–948.

[43] D. Foata and G.-N. Han, *A new proof of the Garoufalidis–Lê–Zeilberger quantum MacMahon Master Theorem*, J. Algebra **307** (2007), 424–431.

[44] D. Foata and G.-N. Han, *A basis for the right quantum algebra and the "$1 = q$" principle*, J. Algebraic Combin. **27** (2008), 163–172.

[45] L. Frappat, N. Jing, A. Molev and E. Ragoucy, *Higher Sugawara operators for the quantum affine algebras of type A*, Commun. Math. Phys. **345** (2016), 631–657.

[46] E. Frenkel, *Langlands correspondence for loop groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 103. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[47] E. Frenkel and D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 88. AMS, Providence, RI, 2004.

[48] E. Frenkel and E. Mukhin, *Combinatorics of q-characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **216** (2001), 23–57.

[49] E. Frenkel and E. Mukhin, *The Hopf algebra* $\mathrm{Rep}\, U_q\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty$, Selecta Math. **8** (2002), 537–635.

[50] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *Quantum affine algebras and deformations of Virasoro and $\mathcal{W}$-algebras*, Comm. Math. Phys. **178** (1996), 237–264.

[51] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of W-algebras*, in «Recent developments in quantum affine algebras and related topics» (Raleigh, NC, 1998), 163–205, Contemp. Math., **248**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[52] I. B. Frenkel, *Two constructions of affine Lie algebra representations and boson-fermion correspondence in quantum field theory*, J. Funct. Anal. **44** (1981), 259–327.

[53] V. Futorny and A. Molev, *Quantization of the shift of argument subalgebras in type A*, Adv. Math. **285** (2015), 1358–1375.

[54] S. Garoufalidis, Thang T. Q. Lê and D. Zeilberger, *The quantum MacMahon master theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **103** (2006), 13928–13931.

[55] I. M. Gelfand, *Center of the infinitesimal group ring*, in «Collected Papers of I. M. Gelfand», vol. II, Berlin: Springer-Verlag, 1988, pp. 22–30. На русском языке: И. М. Гельфанд, *Центр инфинитезимального группового кольца*, Мат. Сборник **26**:1 (1950), 103–112.

[56] I. M. Gelfand and L. A. Dickey, *Family of Hamiltonian structures connected with integrable non-linear equations*, in: «Collected papers of I. M. Gelfand», vol. 1, Springer-Verlag (1987), 625–646.

[57] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh and J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, Adv. Math. **112** (1995), 218–348.

[58] R. Goodman and N. Wallach, *Higher-order Sugawara operators for affine Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), 1–55.

[59] R. Goodman and N. R. Wallach, *Representations and invariants of the classical groups*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 68. Cambridge University Press, 1998.

[60] M. D. Gould, *Characteristic identities for semisimple Lie algebras*, J. Austral. Math. Soc. B **26** (1985), 257–283.

[61] N. Guay and V. Regelskis, *Twisted Yangians for symmetric pairs of types B, C, D*, Math. Z. **284** (2016), 131–166.

[62] N. Guay, V. Regelskis and C. Wendlandt, *Representations of twisted Yangians of types B, C, D: I*, Selecta Math. (N.S.) **23** (2017), 2071–2156.

[63] N. Guay, V. Regelskis and C. Wendlandt, *Equivalences between three presentations of orthogonal and symplectic Yangians*, `arXiv:1706.05176`.

[64] P. H. Hai and M. Lorenz, *Koszul algebras and the quantum MacMahon master theorem*, Bull. London Math. Soc. **277** (2007), 667–676.

[65] T. Hayashi, *Sugawara operators and Kac–Kazhdan conjecture*, Invent. Math. **94** (1988), 13–52.

[66] D. Hernandez, *The Kirillov–Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems*, J. Reine Angew. Math. **596** (2006), 63–87.

[67] R. Howe, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond*, Israel Math. Conf. Proc. **8** (1995), 1–182.

[68] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 569–619.

[69] J. Hu and Z. Xiao, *On tensor spaces for Birman–Murakami–Wenzl algebras*, J. Algebra **324** (2010), 2893–2922.

[70] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Math. **9**, Springer, Berlin, 1972. На русском языке: Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, М.: МЦНМО, 2003.

[71] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Adv. Math., **29**, Cambridge University Press, 1990.

[72] K. Iohara, *Bosonic representations of Yangian double $DY_\hbar(\mathfrak{g})$ with $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N, \mathfrak{sl}_N$*, J. Phys. A **29** (1996), 4593–4621.

[73] N. Iorgov, A. I. Molev and E. Ragoucy, *Casimir elements from the Brauer–Schur–Weyl duality*, J. Algebra **387** (2013), 144–159.

[74] A. P. Isaev and A. I. Molev, *Fusion procedure for the Brauer algebra*, St. Petersburg Math. J. **22** (2011), 437–446.

[75] A. P. Isaev, A. I. Molev and O. V. Ogievetsky, *A new fusion procedure for the Brauer algebra and evaluation homomorphisms*, Int. Math. Res. Not. (2012), 2571–2606.

[76] M. Itoh, *Explicit Newton's formulas for $\mathfrak{gl}_n$*, J. Algebra **208** (1998), 687–697.

[77] M. Itoh, *Two determinants in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras* J. Algebra **314** (2007), 479–506.

[78] M. Itoh, *Two permanents in the universal enveloping algebras of the symplectic Lie algebras*, Internat. J. Math. **20** (2009), 339–368.

[79] G. James and A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **16**, Reading, MA/London, Addison–Wesley, 1981.

[80] J. C. Jantzen, *Nilpotent orbits in representation theory*, in: «Lie theory» (J.-P. Anker, B. Orsted, Eds), Progr. Math., vol. 228, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, pp. 1–211.

[81] M. Jimbo, *A q-difference analogue of* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *and the Yang–Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.

[82] N. Jing, S. Kožić, A. Molev and F. Yang, *Center of the quantum affine vertex algebra in type A*, J. Algebra **496** (2018), 138–186.

[83] N. Jing, M. Liu and A. Molev, *Isomorphism between the R-matrix and Drinfeld presentations of Yangian in types B, C and D*, Commun. Math. Phys., to appear; `arXiv:1705.08155`.

[84] А. А. Юцис (A. A. Jucys), *Об операторах Юнга симметрических групп*, Литовский физический сборник **6** (1966), 163–180.

[85] А. А. Юцис (A. A. Jucys), *Факторизация проекционных операторов Юнга симметрических групп*, Литовский физический сборник **11**:1 (1971), 5–10.

[86] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. На русском языке: В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, М.: Мир, 1993.

[87] V. Kac, *Vertex algebras for beginners*, University Lecture Series, 10. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. На русском языке: В. Г. Кац, *Вертексные алгебры для начинающих*, М.: МЦНМО, 2005.

[88] V. Kac, *Introduction to vertex algebras, Poisson vertex algebras, and integrable Hamiltonian PDE*, `arXiv:1512.00821`.

[89] V. G. Kac and D. A. Kazhdan, *Structure of representations with highest weight of infinite-dimensional Lie algebras*, Adv. Math. **34** (1979), 97–108.

[90] M. Kamgarpour, *On the notion of conductor in the local geometric Langlands correspondence*, Canad. J. Math. **69** (2017), 107–129.

[91] H. Knight, *Spectra of tensor products of finite-dimensional representations of Yangians*, J. Algebra **174** (1995), 187–196.

[92] M. Konvalinka and I. Pak, *Non-commutative extensions of the MacMahon Master Theorem*, Adv. Math. **216** (2007), 29–61.

[93] B. Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, Amer. J. Math. **81** (1959), 973–1032.

[94] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. **85** (1963), 327–404.

[95] B. Kostant, *Fomenko-Mischenko theory, Hessenberg varieties, and polarizations*, Lett. Math. Phys. **90** (2009), 253–285.

[96] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method: recent developments*, in: «Integrable Quantum Field Theories», Lecture Notes in Phys. **151**, Springer, Berlin, 1982, pp. 61–119.

[97] S. Kumar, *A complete set of intertwiners for arbitrary tensor product representations via current algebras*, `arXiv:1607.06115`.

[98] A. Kuniba and J. Suzuki, *Analytic Bethe ansatz for fundamental representations of Yangians*, Commun. Math. Phys. **173** (1995), 225–264.

[99] A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, *T-systems and Y-systems in integrable systems*, J. Phys. A **44** (2011), no. 10, 103001, 146 pp.

[100] A. Kuniba, M. Okado, J. Suzuki and Y. Yamada, *Difference L operators related to q-characters*, J. Phys. A **35** (2002), 1415–1435.

[101] R. Leduc and A. Ram, *A ribbon Hopf algebra approach to the irreducible representations of centralizer algebras: The Brauer, Birman-Wenzl and type A Iwahori-Hecke algebras*, Adv. Math. **125** (1997), 1–94.

[102] K. Lu, E. Mukhin and A. Varchenko, *Self-dual Grassmannian, Wronski map, and representations of $\mathfrak{gl}_N$, $\mathfrak{sp}_{2r}$, $\mathfrak{so}_{2r+1}$*, `arXiv:1705.02048`.

[103] I. G. Macdonald, *Schur functions: theme and variations*, in: «Actes 28-e Séminaire Lotharingien», pp. 5–39, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1992, 498/S–27.

[104] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, Oxford, 1995. На русском языке: И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, М.: Мир, 1984.

[105] S. V. Manakov, *A remark on the integration of the Eulerian equations of the dynamics of an n-dimensional rigid body*, Functional Anal. Appl. **10** (1976), 328–329 (1977). На русском языке: С. В. Манаков, *Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела*, Функц. анализ и его прил. **10**:4 (1976), 93–94.

[106] Yu. I. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **37** (1987), 191–205.

[107] Yu. I. Manin, *Quantum groups and noncommutative geometry*, Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, QC, 1988.

[108] A. S. Mishchenko and A. T. Fomenko, *Euler equation on finite-dimensional Lie groups*, Math. USSR-Izv. **12** (1978), 371–389. На русском языке: А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко, *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **42**:2 (1978), 396–415.

[109] A. Molev, *Yangians and classical Lie algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, 143. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. На русском языке: А. И. Молев, *Янгианы и классические алгебры Ли*, М.: МЦНМО, 2009.

[110] A. I. Molev, *Feigin–Frenkel center in types B, C and D*, Invent. Math. **191** (2013), 1–34.

[111] A. I. Molev and E. E. Mukhin, *Yangian characters and classical $\mathcal{W}$-algebras*, in «Conformal Field Theory, Automorphic Forms and Related Topics» (W. Kohnen, R. Weissauer, Eds), Springer, 2014, pp. 287–334.

[112] A. I. Molev and E. E. Mukhin, *Invariants of the vacuum module associated with the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(1|1)$*, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015), 314001.

[113] A. I. Molev and E. E. Mukhin, *Eigenvalues of Bethe vectors in the Gaudin model*, Theor. Math. Phys. **192** (2017), 1258–1281. На русском языке: А. И. Молев, Е. Е. Мухин, *Собственные значения векторов Бете в модели Годена*, ТМФ **192**:3 (2017), 369–394.
[114] A. I. Molev and E. Ragoucy, *The MacMahon Master Theorem for right quantum superalgebras and higher Sugawara operators for* $\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n}$, Moscow Math. J. **14** (2014), 83–119.
[115] A. I. Molev and E. Ragoucy, *Classical W-algebras in types* A, B, C, D *and* G, Comm. Math. Phys. **336** (2015), 1053–1084.
[116] A. I. Molev, E. Ragoucy and N. Rozhkovskaya, *Segal–Sugawara vectors for the Lie algebra of type* G_2, J. Algebra **455** (2016), 386–401.
[117] A. I. Molev and N. Rozhkovskaya, *Characteristic maps for the Brauer algebra*, J. Alg. Comb. **38** (2013), 15–35.
[118] A. Molev and O. Yakimova, *Quantisation and nilpotent limits of Mishchenko-Fomenko subalgebras*, `arXiv:1711.03917`.
[119] E. Mukhin, V. Tarasov and A. Varchenko, *Bethe eigenvectors of higher transfer matrices*, J. Stat. Mech. Theory Exp. 2006, no. 8, P08002, 44 pp.
[120] M. Mustaţă, *Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities*. With an appendix by D. Eisenbud and E. Frenkel. Invent. Math. **145** (2001), 397–424.
[121] G. E. Murphy, *A new construction of Young's seminormal representation of the symmetric group*, J. Algebra **69** (1981), 287–291.
[122] W. Nakai and T. Nakanishi, *Paths, tableaux and q-characters of quantum affine algebras: The* C_n *case*, J. Phys. A **39** (2006), 2083–2115.
[123] H. Nakajima, *t-analogs of q-characters of Kirillov–Reshetikhin modules of quantum affine algebras*, Represent. Theory **7** (2003), 259–274.
[124] M. Nazarov, *Young's orthogonal form for Brauer's centralizer algebra*, J. Algebra **182** (1996), 664–693.
[125] M. Nazarov, *Yangians and Capelli identities*, in: «Kirillov's Seminar on Representation Theory» (G. I. Olshanski, Ed.), Amer. Math. Soc. Transl. **181**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 139–163.
[126] M. Nazarov, *Yangian of the queer Lie superalgebra*, Comm. Math. Phys. **208** (1999), 195–223.
[127] M. Nazarov and G. Olshanski, *Bethe subalgebras in twisted Yangians*, Comm. Math. Phys. **178** (1996), 483–506.
[128] M. Nazarov and V. Tarasov, *Representations of Yangians with Gelfand–Zetlin bases*, J. Reine Angew. Math. **496** (1998), 181–212.
[129] A. Okounkov, *Quantum immanants and higher Capelli identities*, Transform. Groups **1** (1996), 99–126.
[130] A. Okounkov and G. Olshanski, *Shifted Schur functions*, St. Petersburg Math. J. **9** (1998), 239–300.
[131] D. Panyushev, *The index of a Lie algebra, the centralizer of a nilpotent element, and the normalizer of the centralizer*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **134** (2003), 41–59.
[132] D. Panyushev, A. Premet and O. Yakimova, *On symmetric invariants of centralisers in reductive Lie algebras*, J. Algebra **313** (2007), 343–391.
[133] D. I. Panyushev and O. S. Yakimova, *The argument shift method and maximal commutative subalgebras of Poisson algebras*, Math. Res. Lett. **15** (2008), 239–249.
[134] A. M. Perelomov and V. S. Popov, *Casimir operators for* $U(n)$ *and* $SU(n)$, Soviet J. Nucl. Phys. **3** (1966), 676–680. На русском языке: А. М. Переломов и В. С. Попов, *Операторы Казимира для* $U(n)$ $SU(n)$, Ядерная физика **3** (1966), 924–931.
[135] M. Raïs and P. Tauvel, *Indice et polynômes invariants pour certaines algèbres de Lie*, J. Reine Angew. Math. **425** (1992), 123–140.
[136] S. Raskin, *A geometric proof of the Feigin–Frenkel theorem*, Represent. Theory **16** (2012), 489–512.

[137] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, *Quantization of Lie Groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 193–225. На русском языке: Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян и Л. Д. Фаддеев, *Квантование групп Ли и алгебр Ли*, Алгебра и анализ **1**:1 (1989), 178–206.

[138] N. Rozhkovskaya, *A new formula for the Pfaffian-type Segal–Sugawara vector*, J. Lie Theory **24** (2014), 529–543.

[139] H. Rui, *A criterion on the semisimple Brauer algebras*, J. Comb. Theor., A **111** (2005), 78–88.

[140] L. G. Rybnikov, *The shift of invariants method and the Gaudin model*, Funct. Anal. Appl. **40** (2006), 188–199. На русском языке: Л. Г. Рыбников, *Метод сдвига инвариантов и модель Годена*, Функц. анализ и его прил. **40**:3 (2006), 30–43.

[141] L. G. Rybnikov, *Uniqueness of higher Gaudin Hamiltonians*, Rep. Math. Phys. **61** (2008), 247–252.

[142] B. E. Sagan, *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, 2nd edition, Grad. Texts in Math., 203, Springer-Verlag, New York, 2001.

[143] V. V. Schechtman and A. N. Varchenko, *Arrangements of hyperplanes and Lie algebra homology*, Invent. Math. **106** (1991), 139–194.

[144] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Birkhäuser, Boston, 2nd edition, 1998.

[145] H. Sugawara, *A field theory of currents*, Phys. Review **170** (1968), 1659–1662.

[146] D. V. Talalaev, *The quantum Gaudin system*, Funct. Anal. Appl. **40** (2006), 73–77. На русском языке: Д. В. Талалаев, *Квантовая система Годена*, Функц. анализ и его прил. **40**:1 (2006), 86–91.

[147] A. A. Tarasov, *On some commutative subalgebras in the universal enveloping algebra of the Lie algebra* $\mathfrak{gl}(n,C)$, Sb. Math. **191** (2000), 1375–1382. На русском языке: А. А. Тарасов, *О некоторых коммутативных подалгебрах в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(n,C)$, Матем. сб. **191**:9 (2000), 115–122.

[148] A. A. Tarasov, *The maximality of some commutative subalgebras in Poisson algebras of semisimple Lie algebras*, Russian Math. Surveys **57** (2002), 1013–1014. На русском языке: А. А. Тарасов, *Максимальность некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли*, УМН **57**:5(347) (2002), 165–166.

[149] T. Umeda, *Newton's formula for* $\mathfrak{gl}_n$, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3169–3175.

[150] E. B. Vinberg, *Some commutative subalgebras of a universal enveloping algebra*, Math. USSR-Izv. **36** (1991), 1–22. На русском языке: Э. Б. Винберг, *О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **54**:1 (1990), 3–25.

[151] A. Wachi, *Central elements in the universal enveloping algebras for the split realization of the orthogonal Lie algebras*, Lett. Math. Phys. **77** (2006), 155–168.

[152] M. Wakimoto, *Fock representations of the affine Lie algebra* $A_1^{(1)}$, Comm. Math. Phys. **104** (1986), 605–609.

[153] H. Wenzl, *On the structure of Brauer's centralizer algebras*, Ann. of Math. (2) **128** (1988), 173–193.

[154] H. Weyl, *Classical groups, their invariants and representations*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1946.

[155] O. S. Yakimova, *The index of centralizers of elements in classical Lie algebras*, Funct. Anal. Appl. **40** (2006), 42–51. На русском языке: О. С. Якимова, *Индекс централизаторов элементов в классических алгебрах Ли*, Функц. анализ и его прил. **40**:1 (2006), 52–64.

[156] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field models*, Ann. Phys. **120** (1979), 253–291.

[157] D. P. Želobenko, *Compact Lie groups and their representations*, Transl. of Math. Monographs **40**, AMS, Providence, RI, 1973. На русском языке: Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, М.: Наука, 1970.

[158] D. P. Zhelobenko, *An introduction to the theory of S-algebras over reductive Lie algebras*, in: «Representations of Lie Groups and Related Topics» (A. M. Vershik and D. P. Zhelobenko, Eds.), Adv. Studies in Contemp. Math. **7**, New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1990, pp. 155–221.

[159] D. P. Zhelobenko, *Constructive modules and extremal projectors over Chevalley algebras*, Funct. Anal. Appl. **27** (1993), 158–165. На русском языке: Д. П. Желобенко, *Конструктивные модули и экстремальные проекторы над алгебрами Шевалле*, Функц. анализ и его прил. **27**:3 (1993), 5–14.

[160] Д. П. Желобенко (D. P. Zhelobenko), *Представления редуктивных алгебр Ли*, М.: Наука, 1994.

Предметный указатель