Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Обобщенные функции получают сейчас все более широкое распространение в различных разделах математики. В нестрогой форме обобщенные функции по существу уже давно применялись физиками.

Важную роль в формировании теории обобщенных функций сыграли работы Ж. Адамара, в которых в связи с изучением фундаментальных решений волновых уравнений рассмотрены расходящиеся интегралы, а также работы М. Рисса. Мы не говорим здесь о более ранних математических работах, в которых тоже можно было бы найти элементы будущей теории обобщенных функций.

Впервые обобщенные функции в явной и теперь общепринятой форме ввел С.Л. Соболев в 1936 г. Он применил обобщенные функции к выяснению вопроса о единственности решения задачи Коши для линейных гиперболических уравнений.

С другой стороны, к теории обобщенных функций вплотную подводит теория С. Бохнера преобразований Фурье функций степенного роста. Эти преобразования Фурье являются по существу обобщенными функциями и выступают у С. Бохнера как формальные производные непрерывных функций.

В 1950–1951 гг. появилась монография Л. Шварца «Теория распределений». В этой книге Л. Шварц систематизировал теорию обобщенных функций, связал воедино все прежние подходы, привлек к ее обоснованию теорию линейных топологических пространств и получил ряд существенных и далеко идущих результатов. После выхода в свет «Теории распределений» обобщенные функции необыкновенно быстро, буквально за два-три года, приобрели чрезвычайно широкую популярность. Достаточно указать хотя бы на тот факт, что количество математических работ, в которых встречается дельта-функция, возросло во много раз.

В выпусках этой серии будет дано систематическое изложение теории обобщенных функций и ряда примыкающих к ней вопросов анализа. Авторы не ставили себе при этом целью собрать весь материал, в котором в той или иной мере участвуют обобщенные функции. С другой стороны, очень многие из рассматриваемых здесь проблем можно было бы трактовать и без обобщенных функций. Однако понятие обобщенной функции является удобным связующим звеном для ряда вопросов анализа, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теорий представлений локально компактных групп Ли и теории вероятностей. Поэтому, быть может, название «Обобщенные функции» для данной серии выпусков по функциональному анализу является наиболее подходящим.

Перечислим вкратце содержание первых четырех выпусков серии.

Первый выпуск посвящен в основном алгорифмическим вопросам теории обобщенных функций. Его первые две главы представляют собой элементарное введение в теорию обобщенных функций. В этом выпуске читатель встретится со многими приложениями обобщенных функций к различным вопросам анализа. В нескольких его местах теоремы приведены без доказательств, со ссылками на второй выпуск. Наряду с книгой Шварца в этом выпуске широко использована статья И.М. Гельфанда и З.Я. Шапиро «Однородные функции» (УМН, 1955, №3). З.Я. Шапиро написала также несколько пунктов для настоящего выпуска.

Во втором выпуске развиваются понятия, введенные в первом выпуске, обосновываются при помощи топологических средств теоремы, приведенные в нем без доказательств, а также строится и изучается большое количество конкретных пространств обобщенных функций. Базой для всего этого является изложение в главе I второго выпуска одного из наиболее элементарных и удобных для аналитиков разделов общей теории линейных топологических пространств — теории счетно-нормированных пространств.

Третий выпуск посвящен некоторым приложениям обобщенных функций к теории дифференциальных уравнений, а именно к построению классов единственности и классов корректности решений задачи Коши для уравнений в частных производных и к разложениям по собственным функциям дифференциальных операторов. Здесь систематически используются результаты, полученные во втором выпуске.

В четвертом выпуске рассматриваются связанные с теорией обобщенных функций вопросы теории вероятностей (обобщенные случайные процессы) и теории представлений групп Ли. Объединяющими здесь являются вопросы гармонического анализа (аналога теории интеграла Фурье) обобщенных функций, в частности, вопросы представления положительно определенных функций. В этом же выпуске излагается играющая существенную роль в его построениях теорема Л. Шварца о ядре.

Выпуски 1–3 написаны Г.Е. Шиловым и мною, выпуск 4 — Н.Я. Виленкиным и мною.

В конце первого выпуска для ориентации читателя приводится краткое оглавление выпусков 2–4. В конце каждого следующего выпуска также будет дано оглавление написанных к этому времени остальных выпусков.

В разделе «Примечания и литературные указания» даются исторические сведения, указания на первоисточники и библиография. По ходу же изложения никаких ссылок на первоисточники не делается; указания на учебную литературу даются в подстрочных примечаниях.

Пятый выпуск, по-видимому, будет посвящен дальнейшему развитию методов теории функций комплексного переменного в теории обобщенных функций. Уже в первом выпуске намечено рассмотрение обобщенных функций как функционалов над аналитическими функциями; в пятом выпуске предполагается подробно развить эту точку зрения и рассмотреть ее связь с работами Ж. Лерея.

Конечно, все это далеко не исчерпывает всех возможностей применений обобщенных функций. Несомненно, чувствуется потребность в углублении связей с дифференциальными уравнениями (краевые задачи, уравнения с переменными коэффициентами, ряд вопросов квазилинейных уравнений). Кроме того, теория обобщенных функций является наиболее удобной базой для построения общей теории представлений групп Ли и, в частности, общей теории сферических и обобщенных автоморфных функций. Мы надеемся, что эти вопросы можно будет также впоследствии осветить.

Авторы первого выпуска выражают признательность своим сотрудникам и ученикам, в той или иной мере принимавшим участие в создании этого выпуска, в особенности В.А. Боровикову, Н.Я. Виленкину, М.И. Граеву и З.Я. Шапиро. Авторы благодарны также М.С. Аграновичу, который отредактировал всю рукопись и внес в нее ряд улучшений.

И. М. Гельфанд

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ ПЕРВОГО ВЫПУСКА

Во втором издании первого выпуска произведена некоторая перестановка материала для облегчения чтения. Две первые главы «Определения и простейшие свойства обобщенных функций» и «Преобразования Фурье обобщенных функций» можно рекомендовать при первоначальном ознакомлении; они содержат стандартный минимум, который необходим всем математикам и физикам, имеющим дело с обобщенными функциями.

План дальнейшего чтения зависит от интересов читателя. Читатели, интересующиеся алгорифмической стороной, могут обращаться к главе III этого выпуска, которая посвящена рассмотрению специальных классов обобщенных функций: дельта-функций на поверхностях различного числа измерений, обобщенных функций, связанных с многомерной квадратичной формой (любой сигнатуры), однородных функций и функций, эквивалентных однородным, а также к началу главы IV вып. 4, в которой рассмотрены однородные обобщенные функции в комплексной области. Читателю, интересующемуся общей теорией, мы рекомендуем после первых двух глав этого выпуска перейти к чтению первых трех глав вып. 2, которые содержат, в частности, необходимые сведения из теории линейных топологических пространств, и затем к главе I вып. 4, где описываются ядерные пространства и меры в них. Читатели, желающие поближе ознакомиться с применениями обобщенных функций к теории уравнений в частных производных, могут обратиться к главам II и III вып. 3, просмотрев предварительно главы о пространствах типа S и типа W (гл. IV вып. 2 и гл. I вып. 3). Спектральной теории и ее применениям посвящены глава IV вып. 3 и глава I вып. 4; они требуют предварительного ознакомления с двумя первыми главами вып. 2. Возможны и иные планы чтения; например, вопросы, концентрирующиеся вокруг применений преобразования Фурье обобщенных функций, развиваются после главы II вып. 1 в главах III и IV вып. 2, в первых трех главах вып. 3, во второй и четвертой главах вып. 4; как работают обобщенные функции в теории представлений и преобразования Фурье на группах, рассказано в трех последних главах вып. 4, для чтения которых достаточно знакомства с первыми двумя главами вып. 1.

В конце первого выпуска для удобства пользования им дана сводка основных определений и формул и сводная таблица преобразований Фурье обобщенных функций.

Авторы