ГЛАВА I

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Основные и обобщенные функции

1. Вводные замечания. Уже давно в физике употребляются так называемые сингулярные функции, которые не могут быть корректно определены в рамках классической теории функций.

Простейшей сингулярной функцией является дельта-функция $\delta(x - x_0)$: она, по определению физиков, «равна нулю всюду, кроме одной точки x_0, в этой точке равна бесконечности и обладает интегралом, равным единице». Излишне указывать, что эти условия несовместимы с точки зрения классического определения функции и интеграла.

Но мы можем попробовать проанализировать понятие сингулярной функции с тем, чтобы выявить действительное его содержание.

Прежде всего мы замечаем, что при решении конкретных задач математической физики дельта-функции (и другие сингулярные функции) встречаются, как правило, только на промежуточных этапах; в окончательном ответе сингулярные функции или вовсе отсутствуют или фигурируют под знаком интеграла в произведении с какой-либо достаточно хорошей функцией. Таким образом, нет прямой необходимости отвечать на вопрос, что такое сингулярная функция сама по себе: нам достаточно ответить на вопрос, что означает интеграл от произведения сингулярной функции и «хорошей» функции. Например, вместо того чтобы отвечать на вопрос, что такое дельта-функция, нам достаточно указать, что для любой достаточно хорошей функции $\varphi(x)$

имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)dx = \varphi(x_0).$$

Иными словами, мы связываем с каждой сингулярной функцией функционал, который ставит в соответствие этой сингулярной функции и каждой «достаточно хорошей» функции некоторое число. Например, для дельта-функции $\delta(x - x_0)$ число, которое ставится в соответствие каждой «достаточно хорошей» функции $\varphi(x)$, есть значение $\varphi(x_0)$.

Но если так, то мы можем и не задумываться больше над смыслом понятия «сингулярная функция»: мы можем теперь отождествить «сингулярную функцию» с тем функционалом, о котором конкретно идет речь, это и будет вполне достаточным ее определением (при условии, что точно указан и тот класс «достаточно хороших» функций, на котором задан этот функционал).

Обыкновенные интегрируемые функции, разумеется, также укладываются в эту схему: для каждой такой функции $f(x)$ мы умеем ответить на вопрос, чему равен интеграл от произведения $f(x)$ на «хорошую функцию». Таким образом, представление об обобщенных функциях как о функционалах охватывает как «сингулярные», так и обыкновенные функции.

Перейдем теперь к формулировке точных определений.

2. Основные функции. Прежде всего нужно задать совокупность тех функций, которые мы называли условно «достаточно хорошими», на которых будут действовать в дальнейшем наши функционалы.

В качестве этой совокупности мы рассмотрим множество K всех вещественных функций $\varphi(x)$[1)], каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков и финитна, т.е. обращается в нуль вне некоторой ограниченной области (своей для каждой из функций $\varphi(x)$).

Эти функции будем называть *основными*, а всю совокупность K назовем *основным пространством*.

Основные функции можно складывать друг с другом и умножать на вещественные числа, причем снова будут получаться основные функции; таким образом, совокупность K есть линейное пространство.

Далее, мы будем говорить, что *последовательность* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_\nu(x)$, $\ldots$ основных функций *стремится к нулю в пространстве*

[1)] Как правило, $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ означает точку n-мерного пространства R_n. Читатель может при первом чтении представлять себе точку x на прямой.

K, если все эти функции обращаются в нуль вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю (в обычном смысле) так же, как и их производные любого порядка.

Примером основной функции, обращающейся в нуль при $r \equiv |x| = \sqrt{\sum x_i^2} \geqslant a$, может служить функция

$$\varphi(x,a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-r^2}} & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r \geqslant a. \end{cases} \tag{1}$$

Последовательность функций $\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu}\varphi(x,a)$ $(\nu = 1,2,\ldots)$ стремится к нулю в пространстве K. Последовательность функций $\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{x}{\nu},a\right)$ $(\nu = 1,2,\ldots)$ стремится к нулю равномерно вместе со всеми производными, но не стремится к нулю в пространстве K, поскольку нет общей ограниченной области, вне которой эти функции обращаются в нуль.

Существует много разнообразных основных функций. Например (см. добавление 1 к этой главе, п. 1), для заданной финитной непрерывной функции $f(x)$ всегда можно указать как угодно близкую к ней основную функцию $\varphi(x)$, т.е. такую основную функцию, что при всех x и заданном $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

3. Обобщенные функции. Мы говорим, что нам задан *линейный непрерывный функционал* f на пространстве K, если указано правило, в силу которого с каждой основной функцией $\varphi(x)$ сопоставлено некоторое вещественное число (f,φ), и при этом выполнены следующие условия:

а) для любых двух вещественных чисел α_1, α_2 и любых двух основных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ имеет место равенство $(f,\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f,\varphi_1) + \alpha_2(f,\varphi_2)$ (свойство линейности функционала f);

б) если последовательность основных функций φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_ν, $\ldots$ стремится к нулю в пространстве K, то последовательность чисел (f,φ_1), (f,φ_2), $\ldots$, (f,φ_ν), $\ldots$ сходится к нулю (свойство непрерывности функционала f).

Например, пусть задана некоторая функция $f(x)$. абсолютно интегрируемая в каждой конечной области пространства R_n (такие функции будем в дальнейшем называть *локально интегрируемыми*). С помощью этой функции мы можем каждой основной функции $\varphi(x)$ поставить в соответствие число

$$(f,\varphi) = \int\limits_{R_n} f(x)\varphi(x)dx, \tag{1}$$

где интегрирование фактически совершается по ограниченной области, вне которой функция $\varphi(x)$ обращается в нуль. Легко проверить, что для функционала f условия а) и б) выполнены; в частности, выполнение условия б) вытекает из возможности перехода к пределу под знаком интеграла в случае равномерной сходимости подынтегральных функций в ограниченной области.

Функционал вида (1) есть весьма частный пример линейного непрерывного функционала из пространства K. Легко можно указать и функционалы иного типа. Например, функционал, который ставит в соответствие каждой функции $\varphi(x)$ ее значение в точке $x_0 = 0$, очевидно, линеен и непрерывен. Но легко показать, что он не может быть представлен в виде (1) ни при какой локально интегрируемой функции $f(x)$.

Действительно, предположим, что для некоторой локально интегрируемой функции $f(x)$ и любой основной функции $\varphi(x)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{R_n} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

В частности, для рассмотренной в предыдущем пункте функции $\varphi(x, a)$, равной $e^{-\frac{a^2}{a^2-r^2}}$ при $r < a$ и нулю при $r \geqslant a$,

$$\int\limits_{R_n} f(x)\varphi(x, a)dx = \varphi(0, a) = e^{-1}. \tag{2}$$

Но при $a \to 0$ интеграл слева стремится к нулю, что противоречит равенству (2).

Указанный функционал мы будем называть *дельта-функцией* в соответствии с установившейся терминологией (хотя и не точной, поскольку дельта-функция не есть функция в классическом смысле слова) и обозначать $\delta(x)$; таким образом,

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0).$$

Часто встречается также «сдвинутая» дельта-функция — функционал $\delta(x - x_0)$, определяемый равенством

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0).$$

Обобщенной функцией мы будем теперь называть каждый линейный непрерывный функционал, определенный на основном пространстве K. Обобщенные функции, задаваемые формулами вида (1), будем называть *регулярными*, все остальные (в том числе и дельта-функцию) — *сингулярными*.

Регулярную обобщенную функцию f, действующую по формуле[1)]

$$(f, \varphi) = C\int \varphi(x)dx = \int C\varphi(x)dx,$$

[1)]Условимся при интегрировании по всему пространству значок R_n у знака интеграла опускать.

будем называть *постоянной* C. Например, обобщенная функция *единица* действует по формуле

$$(1,\varphi) = \int \varphi(x)dx.$$

Можно показать (см. вып. 2, гл. II, § 1, п. 5), что значения регулярного функционала на основных функциях позволяют однозначно определить соответствующую функцию $f(x)$ с точностью до ее значений на множестве меры нуль. Это означает, что *различным функциям* $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *соответствуют различные* (т.е. имеющие различные значения на некоторых основных функциях) *обобщенные функции*. Поэтому всю совокупность обычных локально интегрируемых функций можно рассматривать как некоторую часть совокупности всех обобщенных функций.

По этой же причине иногда удобно и для обобщенных функций сохранить обозначение $f(x)$, как для дельта-функции, хотя теперь уже нельзя говорить о значениях обобщенной функции в отдельных точках (так что запись $f(x_0)$ для обобщенной функции, вообще говоря, не имеет смысла). Кроме того, вместо (f,φ) мы иногда будем писать $\int f(x)\varphi(x)dx$, хотя с точки зрения обычного анализа такая запись не имеет, вообще говоря, смысла. Например, мы будем иногда вместо $(\delta(x),\varphi(x))$ писать $\int \delta(x)\varphi(x)dx$. Таким образом, $\int \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$.

Совокупность всех обобщенных функций обозначим через K'.

4. Локальные свойства обобщенных функций. Мы уже знаем, что обобщенные функции не имеют значений в отдельных точках. Нельзя, например, говорить, что обобщенная функция f «равна нулю в точке x_0». Но высказыванию «обобщенная функция f равна нулю в окрестности U точки x_0» можно придать уже вполне четкий смысл: именно, оно означает, что для каждой основной функции $\varphi(x)$, отличной от нуля только в пределах окрестности U, имеет место равенство $(f,\varphi) = 0$.

Так, обобщенная функция f, отвечающая обычной функции $f(x)$, равна нулю в окрестности U точки x_0, если в этой окрестности обращается в нуль (почти всюду) сама функция $f(x)$. Сингулярная обобщенная функция $\delta(x - x_1)$ равна нулю в некоторой окрестности любой точки $x_0 \neq x_1$.

Условимся также говорить, что обобщенная функция f равна нулю в открытой области G, если она равна нулю в некоторой окрестности каждой точки этой области.

Можно доказать (см. добавление 1), что обобщенная функция, равная нулю в окрестности любой точки, и в целом равна нулю, т.е.

для любой основной функции $\varphi(x)$

$$(f,\varphi) = 0.$$

Если обобщенная функция f не равна нулю ни в какой окрестности точки x_0, то x_0 называется *существенной точкой* для функционала f. Так, например, на прямой точка $x_0 = 0$ — существенная точка для функционала $f(x) = x^2$ (хотя в ней сама функция x^2 обращается в нуль!). Конечно, все остальные точки оси x также являются существенными для $f(x) = x^2$. Совокупность всех существенных точек называется *носителем* обобщенной функции f. Носитель обобщенной функции f, отвечающей обычной непрерывной (или кусочно непрерывной) функции $f(x)$, есть замыкание множества, на котором $f(x) \neq 0$. Носитель обобщенной функции $\delta(x - x_0)$ есть одна точка x_0. Если множество F содержит носитель функционала f, то говорят также, что функционал f *сосредоточен на множестве* F.

Название «существенные точки» оправдывается следующим свойством (которое будет доказано в п. 3 добавления 1): если основная функция $\varphi(x)$ обращается в нуль в некоторой окрестности носителя функционала f, то $(f,\varphi) = 0$. Отсюда следует, что произвольное изменение основной функции φ вне окрестности носителя обобщенной функции f не влияет на значение величины (f,φ); действительно, указанное изменение равносильно добавлению к основной функции φ другой основной функции ψ, равной нулю в окрестности носителя функционала f, поэтому $(f,\psi) = 0$ и, следовательно, $(f,\varphi + \psi) = (f,\varphi)$.

Теперь перейдем к локальному сравнению двух произвольных обобщенных функций. Будем говорить, что обобщенные функции f и g *совпадают в открытой области* G, если разность $f - g$ в этой области равна нулю. Можно показать, что если f и g совпадают в окрестности каждой точки, то они совпадают и в целом, т.е. $(f,\varphi) = (g,\varphi)$ при любой φ; отсюда следует, что обобщенная функция f однозначно определяется по своим локальным свойствам. Более того, можно даже построить обобщенную функцию по заданным ее локальным значениям (добавление 1, п. 3).

В частности, мы будем говорить, что обобщенная функция f *регулярна в области* G, если в этой области она совпадает с некоторой обычной локально интегрируемой функцией.

Например, дельта-функция $\delta(x - x_0)$ вне точки x_0 всюду регулярна (и равна нулю).

Одна из важных проблем теории обобщенных функций состоит в следующем: дана (обычная) функция $f(x)$, вообще не являющаяся локально интегрируемой, например $\frac{1}{x}$ на прямой. Существует ли обобщенная функция f, совпадающая с $f(x)$ во всех точках локальной интегрируемости $f(x)$? Можно ли соответствие $f(x) \to f$ устроить таким образом, чтобы обычные операции сложения, умножения на функцию, дифференцирования, которые мы определим ниже и для обобщенных функций, сохранялись бы при этом соответствии? Ясно, что положительный ответ на подобные вопросы весьма существен: он приводит к включению в схему обобщенных функций обычных функций, имеющих неинтегрируемые особенности.

Ответы на эти вопросы имеются пока лишь частичные. См. далее п. 7 § 1, а также § 3.

5. Операции сложения и умножения на число и на функцию. Пусть даны две обобщенные функции f и g; определим их *сумму* $f + g$ как функционал на пространстве K, действующий по формуле

$$(f + g,\varphi) = (f,\varphi) + (g,\varphi).$$

Легко проверить, что определенный по этой формуле функционал $f + g$ снова является линейным непрерывным функционалом. В частности, если f и g — регулярные функционалы, соответствующие функциям $f(x)$ и $g(x)$, то $f + g$ есть также регулярный функционал, соответствующий функции $f(x)+g(x)$. Это подтверждает естественность принятого определения суммы обобщенных функций.

Произведение обобщенной функции f на число α определяется формулой

$$(\alpha f,\varphi) = \alpha(f,\varphi) = (f,\alpha\varphi).$$

Очевидно, что и этот функционал линеен и непрерывен. Для регулярного функционала f, соответствующего локально интегрируемой функции $f(x)$, введенная операция отвечает умножению функции $f(x)$ на число α.

По-видимому, невозможно определить сколько-нибудь естественным образом произведение любых двух обобщенных функций. Но вполне естественно определяется *произведение любой обобщенной функции f на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$*. Заметим вначале, что произведение бесконечно дифференцируемой функции $a(x)$ на основную функцию $\varphi(x)$ есть снова основная функция $\psi(x) = a(x)\varphi(x)$; при этом если последовательность основных функций $\varphi_\nu(x)$ стремится к нулю в пространстве K, то последовательность произведений $a(x)\varphi_\nu(x)$ также стремится к нулю в пространстве K. Пусть теперь дана любая обобщенная функция f; определим функционал af по формуле

$$(af,\varphi) = (f,a\varphi).$$

Функционал af, очевидно, линеен. Он является также и непрерывным функционалом: если $\varphi_\nu(x) \to 0$, то, как было указано, также и $a(x)\varphi_\nu(x) \to 0$, следовательно,

$$(af, \varphi_\nu) = (f, a\varphi_\nu) \to 0.$$

Для регулярного функционала f, отвечающего локально интегрируемой функции $f(x)$, умножение на функцию $a(x)$ соответствует умножению функции $f(x)$ на функцию $a(x)$. Действительно, мы имеем в этом случае

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi) = \int f(x)[a(x)\varphi(x)]dx = \int [a(x)f(x)]\varphi(x)dx,$$

что и требуется.

6. Сдвиги, повороты и другие линейные преобразования в области независимых переменных. При $h > 0$ функция $f(x-h)$ на оси называется в анализе *сдвигом вправо функции* $f(x)$ *на величину* h. Обратим внимание на то, что операция, которая производится здесь с независимым переменным, есть *сдвиг влево на величину* h — обратная операция по отношению к операции, произведенной с функцией.

Мы можем следующим образом обобщить эти построения на случай функции n переменных. Пусть u означает некоторое невырожденное линейное преобразование n-мерного пространства R_n и u^{-1} есть обратное преобразование. Тогда соответствующую операцию u в области функций $f(x)$ мы определим формулой

$$uf(x) = f(u^{-1}x). \tag{1}$$

Операцию u можно перенести и на обобщенные функции. Заметим прежде всего, что вместе со всякой основной функцией $\varphi(x)$ функция $\varphi(ux)$ также является основной. Далее, выясним, какому равенству в функционалах отвечает равенство (1). Считая, что $f(x)$ локально интегрируема, и применяя это равенство к основной функции $\varphi(x)$, находим:

$$(uf(x), \varphi(x)) = (f(u^{-1}x), \varphi(x)) = \int f(u^{-1}x)\varphi(x)dx.$$

В полученном интеграле сделаем замену переменных $u^{-1}x = y$, т.е. $x = uy$, $dx = |u|dy$, где $|u|$ означает определитель матрицы преобразования u. Мы получим:

$$(uf, \varphi) = |u| \int f(y)\varphi(uy)dy = |u|(f(x), \varphi(ux)).$$

Это равенство приводит к определению операции u, которую можно применять уже ко всем обобщенным функциям: uf есть функционал, действующий по формуле

$$(uf,\varphi) = |u|(f,\varphi(ux)). \tag{2}$$

Функционал uf можно также обозначить через $f(u^{-1}x)$ (как для обычных функций), что часто делает формулы более прозрачными. В силу нашего соглашения о символике (см. конец п. 3) мы тогда вместо (2) можем написать:

$$\int f(u^{-1}x)\varphi(x)dx = |u|\int f(x)\varphi(ux)dx, \tag{2'}$$

где f — любая обобщенная функция.

Особенно простая формула получается для унимодулярных преобразований ($|u| = 1$), в частности для поворотов:

$$(f(u^{-1}x),\varphi(x)) \equiv (uf,\varphi) = (f,\varphi(ux)). \tag{3}$$

Примеры операций:

1. Сдвиг на вектор h: $ux = x + h$. Сдвиг обобщенной функции f на вектор h задается формулой

$$(uf,\varphi) = (f,\varphi(ux)) = (f,\varphi(x+h)).$$

Можно записать эту формулу также в виде

$$(f(x-h),\varphi) = (f,\varphi(x+h)),$$

или

$$\int f(x-h)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(x+h)dx$$

(f — обобщенная функция).

2. Отражение в начале координат: $ux = -x$. Отражение обобщенной функции f задается формулой

$$(f(-x),\varphi(x)) \equiv (uf,\varphi) = (f,\varphi(-x)),$$

или

$$\int f(-x)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(-x)dx.$$

3. Преобразование подобия: $ux = \alpha x$. Преобразование подобия обобщенной функции f задается формулой

$$(f(u^{-1}x),\varphi(x)) \equiv (uf,\varphi) = \alpha^n(f(x),\varphi(\alpha x)).$$

Обобщенная функция f называется, естественно, *инвариантной относительно операции* u, если $uf = f$.

Например, обобщенная функция может быть инвариантной относительно отражения в начале координат (т.е. удовлетворяющей уравнению $(f,\varphi(-x)) = (f,\varphi)$); ее естественно называть *центрально симметричной*. Обобщенные функции, инвариантные относительно всех поворотов, мы будем называть *сферически симметричными*. Примерами таковых являются все регулярные функционалы, соответствующие функциям, зависящим только от $r = \sqrt{\sum x_j^2}$, а также δ-функция. Функцию, инвариантную относительно сдвига на вектор h, будем называть *периодической* с периодом h. Можно показать, что обобщенная функция, инвариантная относительно всех сдвигов, есть постоянная (см. § 2, п. 6).

Обобщенная функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$f(\alpha x) = \alpha^\lambda f(x) \tag{4}$$

при любом вещественном $\alpha > 0$, называется, естественно, *однородной функцией степени* λ. Условие (4) может быть записано также в виде

$$\alpha^{-n}\left(f(x),\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^\lambda(f(x),\varphi(x)),$$

или, что то же,

$$\left(f(x),\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f(x),\varphi(x)).$$

Так, $\delta(x_1,\ldots,x_n)$ есть однородная функция степени $-n$. Кроме того, разумеется, обычные однородные функции (локально интегрируемые) являются однородными и как обобщенные функции с той же степенью. Подробнее об однородных обобщенных функциях мы будем говорить далее в § 4 и затем в гл. III.

7. Проблема регуляризации расходящихся интегралов. Пусть $f(x)$ — функция, локально интегрируемая всюду, кроме точки x_0, а в этой точке имеющая неинтегрируемую особенность (например, $f(x) = \frac{1}{x}$ на оси). Тогда интеграл

$$\int f(x)\varphi(x)dx, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — основная функция, вообще говоря, расходится. Но он сходится, если $\varphi(x)$ равна нулю в окрестности точки x_0. Поставим вопрос, нельзя ли доопределить возникающий при этом функционал, т.е. построить функционал $f \in K'$, который на основные функции $\varphi(x)$, равные нулю в окрестности точки x_0, действует по формуле (1). Всякий такой функционал f называется *регуляризацией расходящегося интеграла* (1) (или *регуляризацией функции* $f(x)$).

Так, для $f(x) = \frac{1}{x}$ можно положить

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{-a}^{b} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{b}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{2}$$

с любыми a, $b > 0$.

Определение регуляризации можно дать и в несколько иной форме: регуляризация функции $f(x)$ есть линейный непрерывный функционал f, который совпадает с функцией $f(x)$ всюду вне точки x_0 (см. п. 4).

Действительно, если имеется функционал f, который для всех основных функций $\varphi(x)$, равных нулю в окрестности точки x_0, задается интегралом (1), то f совпадает с функцией $f(x)$ в некоторой окрестности любой точки $x_1 \neq x_0$, а именно в окрестности, не содержащей x_0 ни внутри, ни на границе. С другой стороны, если функционал f совпадает с функцией $f(x)$ всюду вне точки x_0, то для любой основной функции, равной нулю в окрестности точки x_0, имеет место формула (1) и, следовательно, f определяет регуляризацию функции $f(x)$.

Приведем некоторые общие соображения, касающиеся разрешимости проблемы регуляризации. Для простоты будем считать, что $x_0 = 0$.

1°. *Если при некотором $m > 0$ функция $f(x) \cdot r^m$ локально интегрируема, то интеграл* (1) *допускает регуляризацию.*

Действительно, в этом случае мы можем построить регуляризацию f по формуле

$$(f, \varphi) = \int f(x) \Bigg\{ \varphi(x) - \\ - \left[\varphi(0) + \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_1} x_1 + \ldots + \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_n^m} \frac{x_n^m}{m!} \right] \theta(1 - r) \Bigg\} dx \tag{3}$$

(из функции $\varphi(x)$ вычитается столько членов ее ряда Тейлора, чтобы остаток имел порядок выше r^m). Функция $\theta(1 - r)$ равна единице при $r < 1$ и равна нулю при $r > 1$.

Очевидно, что интеграл (3) сходится при любой основной функции $\varphi(x)$ и представляет собой линейный непрерывный функционал. Если функция $\varphi(x)$ равна нулю в окрестности начала координат, то выражение (3) превращается в

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx,$$

так что функционал f вне начала координат совпадает с функцией $f(x)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае проблема регуляризации имеет решение.

2°. *Если f_0 — частное решение проблемы регуляризации интеграла* (1), *то общее решение f получается прибавлением к f_0 любого функционала, сосредоточенного в точке $x_0 = 0$.*

Действительно, пусть f_0 — регуляризация, а g — функционал, сосредоточенный в этой точке. Тогда для основных функций $\varphi(x)$, равных нулю в окрестности точки $x_0 = 0$,

$$(f_0 + g, \varphi) = (f_0, \varphi) + (g, \varphi) = (f_0, \varphi),$$

так что и $f_0 + g$ является регуляризацией. Обратно, если f_0 и f_1 — две различные регуляризации, то для таких же $\varphi(x)$

$$(f_1 - f_0, \varphi) = (f_1, \varphi) - (f_0, \varphi) = 0,$$

т.е. разность $f_1 - f_0$ сосредоточена в точке $x_0 = 0$.

Например, в случае $f(x) = \frac{1}{x}$ разность двух любых регуляризаций, определяемых формулой (2), как легко вывести из самой этой формулы, есть просто $C\delta(x)$, где C — постоянный множитель.

Вопросом о выборе среди многочисленных регуляризаций данной функции естественной ее регуляризации мы займемся позднее, в § 3.

3°. *Если в некотором телесном угле с вершиной в начале координат функция $f(x)$ допускает оценку*

$$f(x) \geqslant F(r), \tag{4}$$

где $F(r)$ возрастает при $r \to 0$ быстрее любой степени $\frac{1}{r}$, то интеграл (1) *не допускает регуляризации.*

Для простоты будем считать, что телесный угол, о котором идет речь, содержит область $H = (x_1 > 0, \ldots, x_n > 0)$. В общем случае доказательство проводится аналогично. Рассмотрим основную функцию $\varphi(x)$, неотрицательную, обращающуюся в нуль при $|x| \geqslant 1$ и обладающую интегралом, равным 1. Пусть, далее, $\varepsilon_\nu > 0$ — произвольная последовательность чисел, стремящихся к 0 быстрее любой степени $\frac{1}{\nu}$.

Функция $\psi_\nu(x)$, полученная из функции $\varepsilon_\nu \varphi(\nu x)$ смещением вдоль биссектрисы $x_1 = \ldots = x_n$ на отрезок $\frac{\sqrt{n}}{\nu}$, обращается в нуль вне области H и при достаточно большом ν обращается в нуль вне пересечения этой области с произвольно малым шаром с центром в начале координат. Далее, последовательность функций $\psi_\nu(x)$, как легко видеть, при $\nu \to \infty$ стремится к нулю в пространстве K. Поэтому если бы существовал функционал f, регуляризующий интеграл (1), мы должны были бы иметь

$$(f, \psi_\nu) \to 0. \tag{5}$$

Но так как в окрестности точки $x = 0$ функция $\psi_\nu(x)$ обращается в нуль, а вне начала функционал f совпадает с функцией $f(x)$, удовлетворяющей неравенству (4), то

$$(f, \psi_\nu) = \int f(x)\psi_\nu(x)dx \geqslant \varepsilon_\nu \int F(r)\varphi(\nu x)dx.$$

Интеграл от функции $\varphi(\nu x)$ равен, очевидно, $\frac{1}{\nu^n}$; мы получаем, таким образом, оценку

$$(f, \psi_\nu) > \frac{\varepsilon_\nu}{\nu^n} F\left(\frac{2}{\nu}\sqrt{n}\right). \tag{6}$$

Числа ε_ν мы еще пока не фиксировали. Положим

$$\varepsilon_\nu = \frac{\nu^n}{F(\frac{2}{\nu}\sqrt{n})}; \tag{7}$$

так как $F(r)$ возрастает быстрее любой степени $\frac{1}{r}$, то числа ε_ν, заданные по формуле (7), стремятся к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{\nu}$, что нам и нужно. Но тогда, как показывает неравенство (6), числа (f, ψ_ν) превосходят единицу и, следовательно, не стремятся к нулю в противоречие с соотношением (5).

Поэтому в данном случае интеграл (1) не может быть регуляризован.

Замечание. Этот результат не означает, что в анализе обобщенных функций вообще нужно отказаться от рассмотрения функций с особенностями выше степенных. Мы рассматриваем пока только основные функции специального вида (пространство K). Во втором выпуске будут указаны иные пространства основных функций; среди этих пространств всегда можно будет найти такие, для которых будут иметь смысл, как функционалы, и функции с как угодно сильными особенностями.

В заключение отметим, что определение регуляризации аналогичным образом можно дать тогда, когда $f(x)$ имеет не одну, а несколько или даже счетное число изолированных особых точек, конечное в любом конечном интервале.

Такую функцию $f(x)$ всегда можно представить в виде суммы

$$f(x) = \sum f_k(x),$$

где $f_k(x)$ имеет только одну особую точку (см. добавление 1, п. 2); поэтому случай со счетным числом изолированных особенностей по существу не представляет ничего нового.

8. Предельный переход. Последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$, по определению, *сходится к обобщенной функции* f, если для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\lim_{\nu\to\infty} (f_\nu, \varphi) = (f, \varphi).$$

Можно, разумеется, считать, что индекс ν пробегает и непрерывное множество значений; определение предельного перехода при этом остается таким же.

Аналогично ряд из обобщенных функций $h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu + \ldots$ называется *сходящимся к обобщенной функции* g, если последовательность частичных сумм этого ряда

$$g_1 = h_1, \quad g_2 = h_1 + h_2, \quad \ldots, \quad g_\nu = h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu, \quad \ldots$$

сходится к обобщенной функции g в указанном выше смысле.

Легко проверить, что предел сходящейся последовательности обобщенных функций определен однозначно.

Далее, операция предельного перехода линейна: если $f = \lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu$, а α — число (или бесконечно дифференцируемая функция), то $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha f_\nu$ существует и равен $\alpha \lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu = \alpha f$; если $f = \lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu$, $g = \lim\limits_{\nu\to\infty} g_\nu$, то $\lim\limits_{\nu\to\infty} (f_\nu + g_\nu)$ существует и равен $f + g$.

Если локально интегрируемые функции $f_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) в каждой ограниченной области равномерно сходятся к локально интегрируемой функции $f(x)$, то соответствующие функционалы f_ν сходятся к регулярному функционалу f. Действительно, пусть $\varphi(x)$ — некоторая основная функция и G — та область, вне которой функция $\varphi(x)$ равна нулю; тогда, в силу известной теоремы о предельном переходе под знаком интеграла,

$$(f_\nu, \varphi) = \int\limits_G f_\nu(x)\varphi(x)dx \to \int\limits_G f(x)\varphi(x)dx = (f, \varphi),$$

что и требуется.

Впрочем, требование равномерной сходимости функций $f_\nu(x)$ в каждой ограниченной области можно, конечно, ослабить; возможность предельного перехода под знаком интеграла обеспечивается и менее сильными требованиями, как, например:

а) $f_\nu(x) \to f(x)$ почти всюду, $|f_\nu(x)|$ ограничены фиксированной постоянной (или даже локально интегрируемой функцией);

б) $f_\nu(x) \to f(x)$ монотонно возрастая или убывая, $f(x)$ локально интегрируема.

Пример. Последовательность регулярных функционалов может иметь пределом сингулярный функционал. Так, функционал

$$(f, \varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

совпадает при $x \neq 0$ с обычной функцией $\frac{1}{x}$, не интегрируемой в любой окрестности начала координат, и потому не является регулярным. Но из самого построения видно, что этот функционал есть предел (при $\varepsilon \to 0$) регулярных функционалов, отвечающих функциям, равным $\frac{1}{x}$ при $|x| > \varepsilon$ и равным нулю при $|x| < \varepsilon$.

Вообще можно показать (это будет доказано во втором выпуске), что *каждый сингулярный функционал есть предел регулярных.*

Легко проверить, что *каждая обобщенная функция есть предел обобщенных функций, сосредоточенных в ограниченных множествах.*

Рассмотрим для доказательства бесконечно дифференцируемую функцию $g_\nu(x)$, равную единице в шаре $|x| \leqslant \nu$ и нулю вне шара $|x| \leqslant 2\nu$. Для любой основной функции φ очевидно, что $g_\nu\varphi = \varphi$, начиная с некоторого ν. Отсюда следует, что для любого функционала f произведения $g_\nu f$ стремятся к f; действительно, для любой основной функции φ мы имеем $(g_\nu f,\varphi) = (f,g_\nu\varphi) = (f,\varphi)$, начиная с некоторого ν, т.е. условие $(g_\nu f,\varphi) \to (f,\varphi)$ заведомо выполняется. Функционал $g_\nu f$, как легко видеть, равен нулю в области $|x| > 2\nu$ и, следовательно, сосредоточен на ограниченном множестве $|x| \leqslant 2\nu$. Итак, обобщенная функция f является пределом обобщенных функций $g_\nu f$, сосредоточенных на ограниченных множествах, что и утверждалось.

Важным фактом является полнота пространства обобщенных функций относительно введенной сходимости. Иными словами, если последовательность функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ такова, что для каждой основной функции φ существует предел числовой последовательности (f_ν,φ), то этот предел определяет снова линейный непрерывный функционал на пространстве K.

Доказательство этого предложения дано в добавлении в конце этого выпуска.

9. Комплексные основные и обобщенные функции. В предыдущем изложении предполагалось, что основные функции $\varphi(x)$ принимают только вещественные значения и что значения функционалов (f,φ) также вещественны.

Можно определить и комплексные обобщенные функции. Для этого мы перейдем от пространства вещественных основных функций к пространству комплексных основных (т.е. бесконечно дифференцируемых и финитных) функций с прежним определением операций.

Комплексной обобщенной функцией мы будем теперь называть всякий линейный непрерывный функционал на этом новом пространстве, принимающий, возможно, и комплексные значения.

Каждой комплекснозначной локально интегрируемой функции $f(x)$ мы поставим в соответствие функционал

$$(f,\varphi) = \int \overline{f(x)}\varphi(x)dx, \tag{1}$$

где черта сверху означает переход к комплексно сопряженной величине.

Обозначения для пространств комплексных основных и обобщенных функций мы оставим прежние: K и K'.

Действия сложения и умножения на (комплексное) число в пространстве комплексных обобщенных функций задаются формулами

$$\left.\begin{aligned} (f_1 + f_2,\varphi) &= (f_1,\varphi) + (f_2,\varphi), \\ (\alpha f,\varphi) &= \overline{\alpha}(f,\varphi) = (f,\overline{\alpha}\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Умножение на комплексную бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ производится по формуле

$$(a(x)f,\varphi) = (f,\overline{a(x)}\varphi(x)). \tag{3}$$

Каждой обобщенной функции f можно сопоставить комплексно сопряженную обобщенную функцию $\overline{f}$ по формуле

$$(\overline{f},\varphi) = \overline{(f,\overline{\varphi})}. \tag{4}$$

Легко проверить, что для обычной функции $f(x)$, рассматриваемой в качестве обобщенной, операция комплексного сопряжения отвечает переходу к обычной комплексно сопряженной функции. В дальнейшем мы будем, как правило, рассматривать вещественный случай. Впрочем, результаты, полученные для вещественных обобщенных функций, большей частью автоматически переносятся на комплексный случай с очевидными изменениями, вытекающими из формул (1)–(4).

10. Другие основные пространства. Функционалы, определенные на основном пространстве K, во многих случаях удобно распространять на более широкие пространства функций и изучать уже на этих пространствах.

Одним из наиболее часто встречающихся в применениях является пространство S, образованное из таких бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, которые при $|x| \to \infty$ стремятся к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$, так же как и их производные любого порядка (например, e^{-x^2}). Таким образом, на оси $-\infty < x < \infty$ функции $\varphi(x) \in S$ удовлетворяют неравенствам вида

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq} \tag{1}$$

при любых k, $q = 0,1,2,\ldots$

Для случая нескольких независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ неравенства (1) заменяются неравенствами

$$\left|x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_n^{q_n}}\right| \leqslant C_{k_1,\ldots,k_n,q_1,\ldots,q_n}$$
$$(k_1,\ldots,q_n = 0,1,2,\ldots),$$

что можно символически записать в более простой форме:

$$|x^kD^q\varphi(x)| \leqslant C_{kq},$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$,

$$D^q = \frac{\partial^{q_1 + \ldots + q_n}}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}}.$$

Сходимость в пространстве S вводится следующим образом. Последовательность $\varphi_\nu(x)$ называется *сходящейся к функции* $\varphi(x)$, если производные любого порядка от функции $\varphi_\nu(x)$ в любой ограниченной области равномерно сходятся к соответствующей производной от функции $\varphi(x)$ и в оценках

$$|x^k D^q \varphi_\nu(x)| \leqslant C_{kq} \tag{2}$$

постоянные C_{kq} можно выбрать не зависящими от ν. В этом случае предельная функция $\varphi(x)$ также принадлежит к пространству S, что вытекает из неравенства (2) в результате предельного перехода при $\nu \to \infty$.

Очевидно, что каждая финитная бесконечно дифференцируемая функция, т.е. основная функция из пространства K, принадлежит и к пространству S. Более того, *финитные функции образуют в пространстве S плотное множество.* Для доказательства построим функцию $e_\nu(x) \in K$, равную единице в кубе $|x_j| \leqslant \nu$, равную нулю вне куба $|x_j| \leqslant 2\nu$ и такую, чтобы производные любого фиксированного порядка у всех функций $e_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ были бы ограничены одним и тем же числом, не зависящим от ν[1].

Если теперь $\varphi(x)$ — любая функция из пространства S, то произведения $\varphi_\nu(x) = \varphi(x) e_\nu(x)$ финитны и, как легко убедиться, сходятся к функции $\varphi(x)$ в пространстве S, что и утверждается.

Отметим еще, что если $\varphi_\nu, \varphi \in K$ и $\varphi_\nu \to \varphi$ в K, то, очевидно, $\varphi_\nu \to \varphi$ и в смысле сходимости в S; иными словами, сходимость в пространстве K более сильная, чем сходимость в пространстве S.

Совокупность линейных непрерывных функционалов на пространстве S обозначается через S'. Очевидно, что каждый непрерывный линейный функционал на пространстве S есть тем самым и линейный непрерывный функционал на пространстве K, так что $S' \subset K'$. Но, конечно, далеко не все линейные непрерывные функционалы на K могут быть распространены на пространство S. (Заметим, во всяком случае, что если такое распространение для данного функционала f возможно, то оно единственно в силу плотности K в S.) Однако на пространство S распространяются все финитные функционалы (сосредоточенные в ограниченной области), все регулярные функционалы, отвечающие функциям $f(x)$, растущим не быстрее какой-нибудь степени $|x|$ при $|x| \to \infty$, и некоторые другие.

[1] Например, можно как угодно построить $e_1(x)$ и затем положить $e_\nu(x) = e_1(\frac{x}{\nu})$.

Очевидно, что S' есть линейное пространство: если $f,\ g \in S'$, то $\alpha f + \beta g \in S'$ для любых чисел α и β. Следовательно, S' — линейное подпространство в пространстве K'.

В пространстве S' можно определить сходимость аналогично тому, как это было сделано в K': будем говорить, что последовательность функционалов f_ν из S' *сходится* к функционалу f из S', если для любой функции $\varphi(x) \in S$

$$(f_\nu, \varphi) \to (f, \varphi).$$

Так как S содержит K, то ясно, что если f_ν, f принадлежат S' и $f_\nu \to f$ в S', то $f_\nu \to f$ в K'. Таким образом, пространство S' вложено в пространство K' вместе со своей сходимостью.

Кроме пространства S, существует много иных типов основных пространств, определяемых разными типами условий убывания основных функций на бесконечности. Мы будем рассматривать такие пространства во втором выпуске.

В этом выпуске пространства S и S' будут играть второстепенную роль. Как правило, мы будем рассматривать пространства K и K'; в тех случаях, когда нам понадобятся другие пространства, это будет специально оговариваться.

§ 2. Дифференцирование и интегрирование обобщенных функций

1. Основные определения. Известно, что операция дифференцирования не всегда выполнима для обычных функций: существует большое количество функций, не имеющих производных в обычном смысле слова. В противоположность этому мы покажем, что *обобщенные функции имеют производные* (и притом всех порядков), *которые представляют собой также обобщенные функции.*

Для того чтобы подойти к определению производной обобщенной функции, рассмотрим вначале случай обычных функций одного переменного.

Если функция $f(x)$ непрерывна и обладает непрерывной производной (в обычном смысле), то мы можем построить функционал

$$(f', \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что функция $\varphi(x)$ обращается в нуль вне некоторого отрезка $[a,b]$, мы получаем:

$$(f',\varphi) = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = (f,-\varphi'). \tag{1}$$

Это равенство мы и положим в основу общего определения производной от обобщенной функции. Пусть f — произвольный линейный непрерывный функционал на основном пространстве K. Тогда *функционал g, заданный формулой*

$$(g,\varphi) = (f,-\varphi'), \tag{2}$$

мы будем называть производной от функционала f и обозначать через f' или $\frac{df}{dx}$.

В силу нашего соглашения о символике (§ 1, конец п. 3) определение производной f' обобщенной функции f можно записать очень наглядной формулой:

$$\int f'(x)\varphi(x)dx = -\int f(x)\varphi'(x)dx. \tag{2'}$$

Чтобы убедиться в корректности определения производной, покажем, что функционал g также является линейным непрерывным функционалом на основном пространстве K. Проверим это утверждение.

Во-первых, функционал g определен *на всех функциях* $\varphi(x)$, поскольку $-\varphi'(x)$ вместе с $\varphi(x)$ есть основная функция. Очевидно, что функционал g линеен. Остается проверить, что он непрерывен.

Пусть дана последовательность основных функций $\varphi_\nu(x)$ $(\nu = 1,2,\ldots)$, стремящаяся к нулю в пространстве K. Тогда, согласно определению сходимости в пространстве K, последовательность производных $-\varphi'_\nu(x)$ также стремится к нулю в пространстве K. Поэтому, в силу непрерывности функционала f,

$$(g,\varphi_\nu) = (f,-\varphi'_\nu) \to 0,$$

что и требуется.

Итак, каждая обобщенная функция f имеет производную.

Легко проверить, что выполняются обычные правила дифференцирования: производная суммы равна сумме производных, и постоянный множитель выносится за знак производной.

Для произведения бесконечно дифференцируемой функции $a(x)$ на обобщенную функцию f остается справедливой классическая формула дифференцирования

$$(af)' = a'f + af'. \tag{3}$$

Действительно, мы имеем:

$$\begin{aligned}\big((af)',\varphi\big) &= -(af,\varphi') = -(f,a\varphi') = -(f,(a\varphi)' - a'\varphi) = \\ &= -(f,(a\varphi)') + (f,a'\varphi) = (f',a\varphi) + (a'f,\varphi) = \\ &= (af',\varphi) + (a'f,\varphi) = (af' + a'f,\varphi),\end{aligned}$$

что и требуется.

Переходим теперь к случаю нескольких независимых переменных. В этом случае мы можем определить для каждой обобщенной функции f ее частные производные по каждому из независимых переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$ по формулам вида

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j},\varphi\right) = \left(f,-\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) \qquad (j = 1,2,\dots,n). \tag{4}$$

Так же, как и выше, легко проверяется корректность этого определения: если функционал f регулярен и соответствующая функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ непрерывна и обладает непрерывной производной по переменному x_j, то интегрирование по частям, как и выше, приводит нас к выводу, что функционал $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ есть функционал типа функции $\dfrac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j}$.

Поскольку результат дифференцирования обобщенной функции есть снова обобщенная функция, мы можем продолжать дифференцирование и определить производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ и т.д. любого порядка.

Таким образом, *все обобщенные функции бесконечно дифференцируемы.*

В частности, каждая локально интегрируемая функция имеет производные в обобщенном смысле всех порядков. (При этом, если функция f имеет обычную производную, то определяемый последней функционал не обязан совпадать с производной от f в смысле обобщенных функций.)

Во втором выпуске (гл. II, § 4) будет доказана обратная теорема: *каждая обобщенная функция является производной некоторого порядка в обобщенном смысле от некоторой локально интегрируемой функции (и даже от непрерывной функции), или, может быть, конечной суммой таких производных.*

Смешанные производные обобщенных функций не зависят от порядка дифференцирования: так, например,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \varphi\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}\right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \varphi\right).$$

Замечание. Можно определить производную обобщенной функции и как предел некоторого отношения — это ближе к обычному определению производной. Ограничимся для простоты случаем функций одного переменного.

Напомним, что для всякой обобщенной функции f можно построить ее сдвиг, например на величину Δx, по формуле (см. § 1, п. 6)

$$(f(x + \Delta x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x - \Delta x)). \tag{5}$$

Покажем теперь, что для всякой обобщенной функции существует предел (в смысле обобщенных функций) отношения

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{6}$$

при $\Delta x \to 0$, и этот предел совпадает с определенной выше производной $\frac{df}{dx}$. Действительно, применяя (6) к основной функции $\varphi(x)$ и используя формулу (5), находим:

$$\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \varphi(x)\right) = \left(f(x), \frac{\varphi(x - \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}\right).$$

Но отношение $\frac{\varphi(x-\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$ имеет при $\Delta x \to 0$ своим пределом основную функцию $-\varphi'(x)$ в смысле сходимости, установленной в пространстве K. Так как функционал f непрерывен, то

$$\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \varphi(x)\right) \to (f(x), -\varphi'(x)) = (f', \varphi),$$

где f' — определенная выше производная обобщенной функции f. Таким образом, отношение $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ действительно имеет пределом в пространстве K' функционал $f'(x)$, что и утверждалось.

2. Примеры для случая функций одного независимого переменного. Выше мы видели, что функционал f' соответствует функции $f'(x)$, если функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны. Нетрудно убедиться, что это верно и тогда, когда $f(x)$ непрерывна, а $f'(x)$ только кусочно непрерывна (и может отсутствовать в конечном числе точек). Действительно, в этом случае остается справедливым равенство (1) предыдущего пункта.

Еще более общим условием, при котором сохраняется равенство (1) п. 1, является абсолютная непрерывность $f(x)$, которая, как известно, влечет существование $f'(x)$ почти всюду, локальную интегрируемость ее и выполнение формулы интегрирования по частям, соответствующей равенству (1) п. 1.

Перейдем к рассмотрению примеров.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Отвечающий ей функционал будем также обозначать через $\theta(x)$. Согласно общей формуле (2) из п. 1, функционал $\theta'(x)$ действует на основную функцию $\varphi(x)$ так:

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = (\theta(x), -\varphi'(x)) = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0);$$

таким образом, в силу определения дельта-функции (§ 1, п. 3),

$$\theta'(x) = \delta(x).$$

Аналогично, как легко проверить,

$$\theta'(x-h) = \delta(x-h).$$

Пример 2. Пусть теперь $f(x)$ — кусочно непрерывная функция с кусочно непрерывной производной $f'(x)$, имеющая в точках $x_1, x_2, \ldots$ разрывы 1-го рода со скачками $h_1, h_2, \ldots$ (рис. 1). Производная $f'(x)$ определена всюду, кроме конечного числа точек. Найдем производную от функционала f, соответствующего функции $f(x)$.

Введем функцию

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k). \tag{1}$$

Очевидно, что она всюду непрерывна и имеет, исключая конечное число точек, производную, равную $f'(x)$. Производная от регулярного функционала f_1, соответствующего функции $f_1(x)$, в силу сказанного

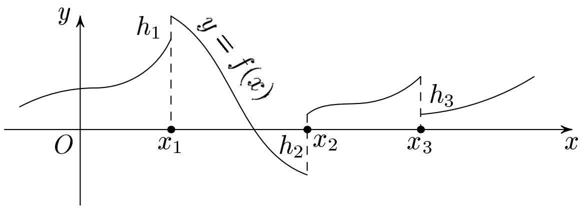

Рис. 1.

в начале этого пункта, совпадает с регулярным функционалом, определяемым функцией $f'(x)$. Таким образом, дифференцируя равенство (1), мы находим:

$$f_1' = f' - \sum_k h_k \delta(x - x_k),$$

откуда

$$f' = f_1' + \sum_k h_k \delta(x - x_k).$$

Итак, *если $f(x)$ — кусочно непрерывная функция с кусочно непрерывной производной, то при дифференцировании каждая точка разрыва 1-го рода x_k функции $f(x)$ со скачком h_k добавляет в выражение производной слагаемое $h_k\delta(x - x_k)$.*

Своеобразное положение возникает, когда дифференцированию подлежит обычная функция $f(x)$, производная которой $f'(x)$ существует в обычном смысле, за исключением, возможно, отдельных точек, но не является локально интегрируемой функцией $\Big($например, $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ или $f(x) = \ln|x|\Big)$. Здесь обобщенная функция f' формально должна быть задана интегралом

$$(f', \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx. \qquad (2)$$

Но этот интеграл, вообще говоря, расходится и тем самым не определяет функционала.

В п. 4 добавления 1 будет показано, что искомый функционал f' должен совпадать с функцией $f'(x)$ во всех точках, где $f'(x)$ локально интегрируема. Таким образом, искомый функционал f' представляет собой одну из возможных регуляризаций (см. § 1, п. 7) интеграла (2), а именно регуляризацию, определяемую формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = (f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx. \tag{3}$$

В п. 7 § 1 мы видели, что регуляризация f функции $f(x)$ с неинтегрируемыми особенностями в отдельных точках определена (если она существует) лишь с точностью до прибавления произвольного функционала, сосредоточенного в этих точках. Формула же (3) определяет одну конкретную регуляризацию. Можно показать, что именно эта регуляризация является в известном смысле естественной. Ср. § 3, пп. 1 и 7.

Желательно упростить формулу (3) так, чтобы в окончательном результате фигурировала сама функция $\varphi(x)$, а не ее производная. Такое упрощение часто удается проделать, используя конкретный вид функции $f(x)$ и соответственно преобразуя правую часть равенства (3).

Пример 3. Найдем производную от обобщенной функции

$$x_+^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x^\lambda & \text{при } x \geqslant 0, \end{cases} \qquad -1 < \lambda < 0.$$

Эта функция локально интегрируема, но ее производная в обычном смысле $\lambda x^{\lambda-1}$ не является локально интегрируемой, и мы приходим к задаче о регуляризации расходящегося интеграла

$$\int_0^{\infty} \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)dx. \tag{4}$$

Согласно общему правилу дифференцирования обобщенной функции,

$$\left((x_+^\lambda)', \varphi\right) = -\left(x_+^\lambda, \varphi'\right) = -\int_0^{\infty} x^\lambda \varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\infty} x^\lambda\varphi'(x)dx.$$

Интегрируем по частям, полагая $\varphi'(x)dx = du$, $x^\lambda = v$, $u = \varphi(x) + C$; мы получим:

$$\left((x_+^\lambda)', \varphi\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[x^\lambda(\varphi(x) + C)\Big|_\varepsilon^{\infty} - \int_\varepsilon^{\infty} \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x) + C]dx\right].$$

Первое слагаемое под знаком предела само имеет предел при $\varepsilon \to 0$, и притом равный нулю, если C положить равным $-\varphi(0)$. Будем считать, что C выбрано именно так; тогда мы имеем:

$$\left(\left(x_+^\lambda\right)', \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x) - \varphi(0)]dx =$$

$$= \int_0^\infty [\varphi(x) - \varphi(0)]\lambda x^{\lambda-1} dx, \quad (5)$$

что и представляет собой искомое правило для придания смысла расходящемуся интегралу (4). Это правило, как мы видим, в данном случае состоит в том, что функция $\varphi(x)$ под знаком интеграла (4) заменяется на $\varphi(x) - \varphi(0)$, что обеспечивает сходимость интеграла при $x = 0$ (и не нарушает его сходимости на бесконечности). Определяемую равенством (5) обобщенную функцию естественно обозначить через $\lambda x_+^{\lambda-1}$; таким образом,

$$\left(x_+^\lambda\right)' = \lambda x_+^{\lambda-1}.$$

Функционал $\lambda x_+^{\lambda-1}$ уже не является регулярным. Но все же при $x \neq 0$ он совпадает с регулярным функционалом: из формулы (5) ясно, что на основные функции $\varphi(x)$, отличные от нуля только при $x \neq 0$, он действует как обычная функция $\lambda x_+^{\lambda-1}$.

Пример 4. Несколько сложнее подсчитывается производная от обобщенной функции

$$\ln x_+ = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \ln x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Здесь формальное дифференцирование

$$((\ln x_+)', \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (6)$$

приводит снова к расходящемуся интегралу. Этот расходящийся интеграл уже не регуляризуется заменой $\varphi(x)$ на $\varphi(x) - \varphi(0)$, так как полученный после этой замены интеграл становится расходящимся на бесконечности.

Действуя по схеме предыдущего примера, мы получаем:

$$((\ln x_+)', \varphi) = -(\ln x_+, \varphi') = -\int_0^\infty \ln x \varphi'(x) dx =$$
$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \ln x \varphi'(x) dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln x \varphi(x)|_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] =$$
$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\varphi(\varepsilon) \ln \varepsilon - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx \right].$$

Выражение $-\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon$ можно заменить более простым выражением $-\varphi(0)\ln\varepsilon$, поскольку разность между ними $[\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)]\ln\varepsilon$ имеет пределом нуль. Далее, можно написать:

$$-\varphi(0)\ln\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(0)}{x} dx = \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(0)\theta(1-x)}{x} dx,$$

где, как и выше,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

В результате мы получаем:

$$((\ln x_+)', \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(1-x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(1-x)}{x} dx,$$

что и представляет собой искомое правило придания смысла расходящемуся интегралу (6). Мы видим, что оно обеспечивает сходимость интеграла при $x = 0$ и не нарушает его сходимости на бесконечности.

Так же, как и в предыдущем примере, полученный функционал не является регулярным в целом; при $x > 0$ он совпадает с функцией $\frac{1}{x}$.

Пример 5. Найдем производную обобщенной функции $\ln|x|$. Здесь мы встречаемся с необходимостью регуляризации расходящегося интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$.

Можно было бы получить правило регуляризации, комбинируя уже известные правила для дифференцирования обобщенных функций $\ln x_+$

и $\ln(-x)_+$. Но проще дать прямое построение:

$$\left(\frac{d\ln|x|}{dx},\varphi(x)\right) = (\ln|x|, -\varphi'(x)) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \ln|x|\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\ln|x|\varphi(x)|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \ln|x|\varphi(x)|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

Как известно, полученный предел называется *главным значением по Коши* интеграла от $\frac{\varphi(x)}{x}$; мы сохраним для него обозначение $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$. Соответствующую обобщенную функцию мы будем обозначать $\frac{1}{x}$. Итак,

$$\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Функционал $\frac{1}{x}$ не регулярный, но совпадает с функцией $\frac{1}{x}$ всюду при $x \neq 0$.

Можно определить этот функционал также и другой формулой, очевидным образом совпадающей по результату с полученной выше, но содержащей только сходящийся интеграл:

$$\left(\frac{d\ln|x|}{dx},\varphi\right) = \int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx.$$

Пример 6. Найдем производную от обобщенной функции $\ln(x+i0)$, определяемой равенством

$$\ln(x+i0) = \lim_{y\to +0}\ln(x+iy).$$

Записывая $\ln(x+iy)$ в виде $\ln|x+iy| + i\arg(x+iy)$ и переходя к пределу, мы видим, что

$$\ln(x+i0) = \ln|x| + i\pi\theta(-x).$$

Согласно примеру 2, $\theta'(x) = \delta(x)$; так как $\theta(x) + \theta(-x) = 1$, то $\theta'(-x) = -\delta(x)$. Поэтому

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0) = \frac{d}{dx}\ln|x| + i\pi\frac{d}{dx}\theta(-x) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x),$$

где обобщенная функция $\frac{1}{x}$ определена в примере 5. Ср. также ниже пример 4 в п. 4.

Пример 7. В заключение этого пункта построим производные от дельта-функции. Мы имеем, очевидно,

$$(\delta'(x-h),\varphi) = (\delta(x-h),-\varphi') = -\varphi'(h)$$

и вообще

$$\left(\delta^{(k)}(x-h),\varphi\right) = (-1)^k\varphi^{(k)}(h) \qquad (k=1,2,\ldots),$$

или в символике, принятой в п. 3 § 1,

$$\int \delta^{(k)}(x-h)\varphi(x)dx = (-1)^k\varphi^{(k)}(h).$$

3. Примеры для случая функций нескольких независимых переменных. Отметим прежде всего, что для непрерывных функций $f(x)$ с кусочно непрерывными частными производными дифференцирование соответствующих регулярных функционалов приводит снова к регулярным функционалам, соответствующим указанным производным.

Пример 1. Пусть $f(x)$ — функция с непрерывными производными в области G, ограниченной кусочно-гладким контуром Γ, на плоскости x_1, x_2. Вне области G функция $f(x)$ предполагается равной нулю; при переходе через границу Γ она испытывает скачок. Найдем функционал $\frac{\partial f}{\partial x_1}$. По общему правилу для любой основной функции φ имеем:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\varphi\right) = \left(f,-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = -\iint\limits_G f(x_1,x_2)\frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1dx_2.$$

Интегрируя по частям по переменному x_1, находим:

$$\iint\limits_G f(x_1,x_2)\frac{\partial\varphi(x_1x_2)}{\partial x_1}dx_1dx_2 =$$

$$= \int\limits_{x_2}\left\{ f(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)\Big|_{x_1^0}^{x_1^1} - \int\limits_{x_1^0}^{x_1^1}\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\varphi(x_1,x_2)dx_1\right\}dx_2 =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} f(x_1,x_2)\cos(n,x_2)\varphi(x_1,x_2)d\gamma - \iint\limits_G \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2,$$

где (n,x_2) — угол в точке (x_1,x_2) на границе Γ области G между внешней нормалью n и осью x_2. Таким образом, функционал $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ составляется из суммы регулярного функционала, соответствующего функции $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, и сингулярного, отвечающего скачку функции $f(x_1,x_2)$ при переходе через границу Γ области G. Аналогичный результат имеет место в пространстве любого числа измерений.

Известная формула Грина (Δ — оператор Лапласа)

$$\iint\limits_G f(x_1,x_2)\Delta\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \iint\limits_G \Delta f(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2 + \int\limits_{\Gamma}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}\varphi\right)d\gamma$$

с учетом равенства $(\Delta f,\varphi) = (f,\Delta\varphi)$ может быть истолкована следующим образом: *если f есть обобщенная функция, совпадающая в области G с обычной локально интегрируемой функцией $f(x_1,x_2)$ и с нулем вне G, то обобщенная функция Δf есть сумма регулярного функционала, соответствующего функции $\Delta f(x_1,x_2)$ внутри G, и двух сингулярных функционалов, отвечающих скачкам функций f и $\frac{\partial f}{\partial n}$ при переходе через граничную линию.* Аналогичный результат имеет место в пространстве любого числа измерений.

В гл. III (§ 1, п. 4) будет дан непосредственный вывод такого рода соотношений, опирающийся на символику обобщенных функций $\delta(P)$ и аналогичных ей.

Пример 2. Найдем в трехмерном пространстве результат применения оператора Лапласа Δ к регулярному функционалу, определяемому функцией $\frac{1}{r}$ $\left(r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$.

Заметим, что функция $\frac{1}{r}$ — гармоническая в любой области, не содержащей начала координат, так что выражение $\Delta\frac{1}{r}$ при $r \neq 0$ обращается в нуль (в обычном смысле). Рассматривая операцию Δ в пространстве обобщенных функций, мы находим:

$$\left(\Delta\frac{1}{r}, \varphi\right) = \left(\frac{1}{r}, \Delta\varphi\right) = \iiint \frac{\Delta\varphi}{r} dv = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{r \geqslant \varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{r} dv.$$

К полученному интегралу применим формулу Грина (пример 1), беря в качестве области G шаровой слой $\varepsilon \leqslant r \leqslant a$, где a настолько велико, что вне шара $r \leqslant a$ функция $\varphi(x)$ тождественно равна нулю:

$$\iiint\limits_{r \geqslant \varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{r} dv = \iiint\limits_{r \geqslant \varepsilon} \varphi \cdot \Delta\frac{1}{r} dv - \iint\limits_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} ds + \iint\limits_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} ds,$$

где ds есть элемент сферы $r = \varepsilon$. Мы имеем, далее,

$$\iiint\limits_{r \geqslant \varepsilon} \varphi \Delta\frac{1}{r} dv = 0,$$

так как $\frac{1}{r}$ вне шара $r \leqslant \varepsilon$ есть гармоническая функция;

$$\iint\limits_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{1}{r} ds = \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r} ds = O(\varepsilon)^{1)},$$

$$\iint\limits_{r=\varepsilon} \varphi\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} ds = -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{r=\varepsilon} \varphi ds = -4\pi S_\varepsilon(\varphi),$$

где $S_\varepsilon(\varphi)$ — среднее значение функции $\varphi(x)$ на сфере радиуса ε. В пределе при $\varepsilon \to 0$ мы находим $S_\varepsilon(\varphi) \to \varphi(0)$, и, следовательно,

$$\left(\Delta\frac{1}{r}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{r \geqslant \varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{r} dv = -4\pi\varphi(0) = -4\pi(\delta(x), \varphi(x)).$$

Отсюда

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(x). \tag{1}$$

[1)] Здесь $y = O(x)$ означает, что отношение $\frac{y}{x}$ ограничено.

Аналогичное вычисление при любом числе измерений $n \geqslant 3$ приводит к результату

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)\Omega_n \delta(x),$$

где Ω_n — поверхность сферы радиуса 1 в n-мерном пространстве. При $n = 2$

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = -2\pi\delta(x).$$

В дальнейшем (гл. III, § 3, п. 3) будут даны некоторые общие правила для дифференцирования функций в случае локально не интегрируемых производных. С помощью этих правил формулы, подобные формуле (1), можно будет получать автоматически, т.е. подсчетом $\Delta \frac{1}{r}$ как суммы вторых производных от $\frac{1}{r}$.

4. Дифференцирование как непрерывная операция. Пусть дана последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots,$ сходящаяся к обобщенной функции f; мы утверждаем, что *последовательность производных* $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j}$ *сходится к производной* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Действительно, для любой основной функции $\varphi(x)$ имеем:

$$\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j}, \varphi\right) = \left(f_\nu, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \to \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right),$$

что и требуется.

Аналогично *ряд обобщенных функций* $h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu + \ldots,$ *сходящийся к обобщенной функции* g, *допускает почленное дифференцирование;* иными словами, *имеет место равенство*

$$h_1' + h_2' + \ldots + h_\nu' + \ldots = g'.$$

В классическом анализе подобные теоремы не имеют места: сходящуюся последовательность дифференцируемых функций, вообще говоря, нельзя почленно дифференцировать. Рассмотрим, например, последовательность функций $f_\nu(x) = \frac{1}{\nu}\sin \nu x$ на оси, равномерно сходящуюся к нулю; производные $f_\nu'(x) = \cos \nu x$ в классическом смысле ни к чему не сходятся, в частности, не сходятся к производной от предельной функции. Но в нашем смысле функционалы $f_\nu'(x)$ сходятся, и именно к нулю; это, помимо общих соображений, получается и прямой выкладкой:

$$(f_\nu', \varphi) = \int_{-a}^{a} \cos \nu x \, \varphi(x) dx = \frac{1}{\nu} \int_{-a}^{a} \sin \nu x \, \varphi'(x) dx \to 0,$$

где $[-a,a]$ — отрезок, вне которого функция $\varphi(x)$ равна нулю. Более того, последовательности $f_\nu'' = -\nu\sin\nu x$, $f_\nu''' = -\nu^2\cos\nu x$ $(\nu = 1,2,\dots)$ и т.д. также сходятся к нулю в нашем смысле.

Пример 1. Разложение периодической функции в ряд Фурье. Пусть $f(x)$ — периодическая (с периодом 2π) локально интегрируемая функция и числа c_n (коэффициенты Фурье) определены классическими формулами

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Мы утверждаем, что *ряд Фурье* $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ *имеет своей суммой* (в смысле обобщенных функций) *функцию* $f(x)$. В самом деле, по хорошо известной теореме анализа[1)] формально проинтегрированный ряд

$$\sum_{-\infty}^{-1}\frac{c_n}{in}e^{inx} + c_0x + \sum_1^{\infty}\frac{c_n}{in}e^{inx}$$

равномерно сходится к абсолютно непрерывной функции $F(x)$, производная которой почти всюду совпадает с $f(x)$. Дифференцируя почленно равенство

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{-1}\frac{c_n}{in}e^{inx} + c_0x + \sum_1^{\infty}\frac{c_n}{in}e^{inx},$$

находим $f(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, что и требовалось.

Пример 2. *Любой ряд вида* $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, *коэффициенты которого возрастают при* $|n| \to \infty$ *не быстрее некоторой степени* n, *является сходящимся в совокупности обобщенных функций*, так как он получается почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{(in)^k}e^{inx}$, который заведомо равномерно сходится при достаточно большом k.

Пример 3. Хорошо известно, что ряд $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$ сходится к функции $f(x)$, равной $\frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$ и продолженной с периодом 2π на всю ось, причем частичные суммы этого ряда равномерно

[1)] А.Зигмунд, Тригонометрические ряды. Гостехиздат, 1939, 2.621, стр. 33.

ограничены[1]). Таким образом, ряд сходится и в смысле обобщенных функций (см. § 1, п. 8, а). Дифференцируя этот ряд, находим следующие суммы:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots = -\tfrac{1}{2} + \pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n),\\
&\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n \sin nx + \ldots = -\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - 2\pi n),\\
&\cos x + 4\cos 2x + \ldots + n^2 \cos nx + \ldots = -\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta''(x - 2\pi n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Раскрывая в первой из этих формул косинусы по формуле Эйлера, мы получим также равенство

$$1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{-ix} + e^{-2ix} + \ldots = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n). \qquad (2)$$

Применяя его к основной функции $\varphi(x)$ и используя тот факт, что

$$(e^{inx}, \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-inx}\, dx = \psi(-n)^{2)}$$

есть значение в точке $-n$ преобразования Фурье функции $\varphi(x)$, мы получаем равенство

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \psi(n) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n),$$

которое называется *формулой суммирования Пуассона* [3]). Оно доказано у нас для функций $\varphi(x)$, принадлежащих к пространству K; но с помощью предельного перехода его можно перенести на более широкий класс функций, например на функции $\varphi(x)$, абсолютно интегрируемые вместе со своей производной.

---

[1]) Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III (Гостехиздат, 1949), п. 664, стр. 539. В дальнейших ссылках мы будем называть эту книгу кратко: «Г. М. Фихтенгольц, Курс».

[2]) Так как e^{inx} — комплексная функция, то она применяется к основной функции $\varphi(x)$ по формуле (1) п. 9 § 1.

[3]) См., например, Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье (Гостехиздат, 1948), стр. 82.

Аналогично известное равенство[1)]

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \ldots = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| \tag{3}$$

позволяет вычислить путем дифференцирования новые тригонометрические суммы. Дифференцируя формально, находим

$$\left.\begin{aligned} &\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2},\\ &\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)' = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}},\\ &\sin x + 4\sin 2x + 9\sin 3x + \ldots = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)'' = \frac{1}{4}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin^3\frac{x}{2}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Однако уже функция $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ не является локально интегрируемой в интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\varphi(x)dx,$$

вообще говоря, расходится. В п. 7 § 3 будут построены обобщенные функции, отвечающие обычным функциям, стоящим справа в (4). При этом обобщенная функция, отвечающая обычной функции $-\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$, будет производной обобщенной функции $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ и т.д. Другими словами, равенствам (4) будет придан смысл с точки зрения теории обобщенных функций.

Формулы (1) и (4) позволяют выделять особенности у суммы тригонометрического ряда $\sum(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$, коэффициенты которого устроены, например, следующим образом:

$$a_n = \alpha_k n^k + \alpha_{k-1}n^{k-1} + \ldots + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2},$$
$$b_n = \beta_j n^j + \beta_{j-1}n^{j-1} + \ldots + \beta_0 + \frac{\beta_{-1}}{n} + \frac{\delta_n}{n^2},$$

где α_i и β_i — постоянные, а $\{\gamma_n\}$ и $\{\delta_n\}$ — ограниченные последовательности чисел[2)].

[1)] Г. М. Фихтенгольц, Курс, т. III (1949), п. 664, стр. 550.

[2)] Ср. В. И. Смирнов, курс высшей математики, т. II (Гостехиздат, 1957), п. 158, стр. 461. В дальнейшем будем писать: «В. И. Смирнов, Курс».

Пример 4. Рассмотрим функционал f, определяемый функцией

$$\ln(x+i0)=\begin{cases}\ln|x|+i\pi & \text{при } x<0,\\ \ln x & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Как видно из определения, это предельные значения аналитической в верхней полуплоскости функции $\ln(x+iy)$ при $y\to 0$. Проверим, что

$$\ln(x+i0)=\lim_{y\to 0}\ln(x+iy)$$

в смысле сходимости обобщенных функций. Действительно, при фиксированном $y>0$

$$\ln(x+iy)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

при $y\to 0$ эта функция стремится к $\ln(x+i0)$, причем:

а) первое слагаемое $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, монотонно убывая, стремится к $\ln|x|$;

б) второе слагаемое $i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, оставаясь по модулю ограниченным (числом π), стремится к функции

$$h(x)=\begin{cases}i\pi & \text{при } x<0,\\ 0 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Поэтому сходимость $\ln(x+iy)\to\ln(x+i0)$ в смысле обобщенных функций имеет место в силу условий, отмеченных в п. 8 § 1.

Производная от $\ln|x|$, как мы знаем, есть $\frac{1}{x}$ (п. 2, пример 5); производная от функции $h(x)$ равна $-i\pi\delta(x)$ (там же, пример 2). Таким образом, заново получается результат примера 6 п. 2:

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0)=\frac{1}{x}-i\pi\delta(x).$$

С другой стороны, в силу непрерывности операции дифференцирования,

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0)=\lim_{y\to+0}\frac{d}{dx}\ln(x+iy)=\lim_{y\to+0}\frac{1}{x+iy}.$$

Мы получаем интересную формулу:

$$\lim_{y\to+0}\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x}-i\pi\delta(x), \tag{5}$$

которая имеет следующий смысл: для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\lim_{y\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+iy}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx-i\pi\varphi(0),$$

где интеграл справа нужно понимать в смысле главного значения по Коши (см. п. 2, пример 5).

5. Дельта-образные последовательности. Можно многими способами строить последовательности регулярных функционалов, сходящихся к δ-функции. Для этого нужно только, чтобы соответствующие функции $f_\nu(x)$, как говорят, имели «дельта-образный вид».

Точно это выражается следующими условиями:

а) каково бы ни было $M>0$, при $|a|\leqslant M$, $|b|\leqslant M$ величины

$$\left|\int_a^b f_\nu(\xi)d\xi\right|$$

ограничены постоянной, не зависящей от a, b, ν (зависящей только от M);

б) при любых фиксированных a и b, отличных от нуля,

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f_\nu(\xi)d\xi=\begin{cases}0 & \text{при } a<b<0 \text{ и } 0<a<b,\\ 1 & \text{при } a<0<b.\end{cases}$$

Пусть $f_\nu(x)$ — такая дельта-образная последовательность. Рассмотрим последовательность первообразных функций

$$F_\nu(x)=\int_{-1}^{x}f_\nu(\xi)d\xi.$$

Как легко получается из определения дельта-образной последовательности, с возрастанием ν функция $F_\nu(x)$ имеет пределом постоянную, равную нулю при $x<0$, и постоянную, равную единице при $x>0$, и в то же время равномерно (по ν) ограничена в каждом промежутке. Отсюда следует, что функции $F_\nu(x)$ в смысле обобщенных функций имеют пределом функцию $\theta(x)$, равную 0 при $x<0$ и 1 при $x>0$. А тогда функции $f_\nu(x)=F'_\nu(x)$ имеют в смысле обобщенных функций пределом функцию $\theta'(x)=\delta(x)$, что и требуется.

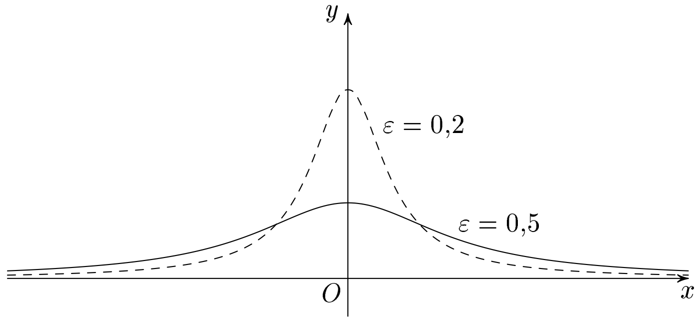

Рис. 2.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\ (\varepsilon > 0).$$

График ее показан на рис. 2. Равенство

$$\int\limits_a^b f_\varepsilon(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{b}{\varepsilon} - \operatorname{arctg}\frac{a}{\varepsilon}\right]$$

при различных a и b позволяет легко проверить, что при $\varepsilon \to 0$ функции $f_\varepsilon(x)$ образуют дельта-образную последовательность. Поэтому при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \delta(x). \tag{1}$$

Тот же результат получается, если вспомнить, что

$$\frac{1}{\pi} - \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{x+i\varepsilon};$$

тогда, в силу формулы (5) предыдущего пункта,

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{x+i\varepsilon} \to \delta(x),$$

как и выше.

Дифференцируя по x дельта-образную последовательность, будем получать последовательности, сходящиеся к производным от

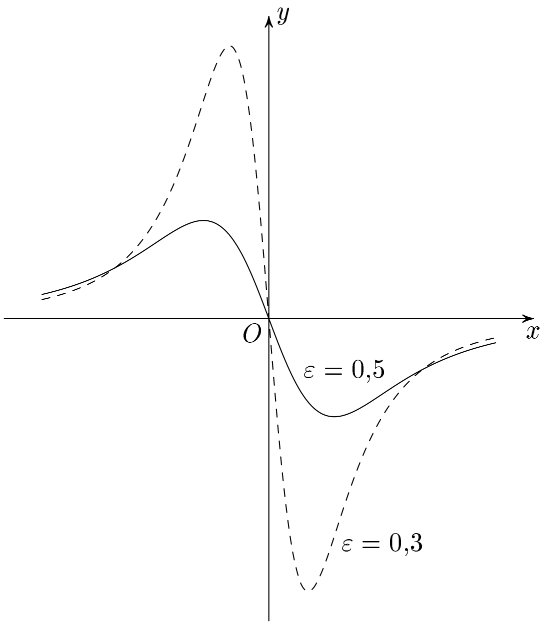

Рис. 3.

дельта-функции. Например, из соотношения (1) следует предельное соотношение

$$-\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon x}{(x^2+\varepsilon^2)^2} \to \delta'(x) \tag{2}$$

и т.д. На рис. 3 представлены функции, стоящие слева в (2).

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (t > 0).$$

Покажем, что при $t \to 0$ эта функция стремится к δ-функции.

Заметим прежде всего, что $f_t(x) > 0$; поэтому при любых a и b

$$\int\limits_a^b f_t(x)dx \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = 1^{1)}.$$

[1] Г. М. Фихтенгольц, Курс, т. II (1948), п. 455, стр. 624–625.

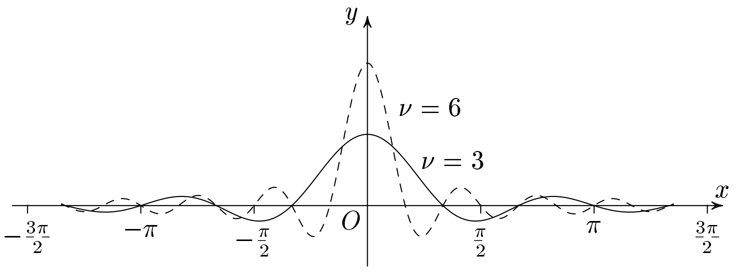

Рис. 4.

Сделав замену $\frac{x}{\sqrt{t}} = y$, мы видим, что при $a < 0 < b$

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b f_t(x)dx = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\frac{b}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{4}}dy = 1.$$

Далее, для любого $b > 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_b^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}dx < \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_b^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}\frac{x}{2t}\frac{2t}{b}dx = \frac{\sqrt{t}}{b\sqrt{\pi}}e^{-\frac{b^2}{4t}} \to 0$$

при $t \to 0$, так что интегралы по любому промежутку (b,∞), $b > 0$, стремятся к нулю. Аналогичный факт имеет место для промежутков $(-\infty, a)$, $a < 0$. Таким образом, $f_t(x)$ есть дельта-образная последовательность, и, значит,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \to \delta(x). \tag{3}$$

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\nu x}{x} \quad (0 < \nu < \infty)$$

(рис. 4). Покажем, что при $\nu \to \infty$ эта функция стремится к δ-функции.

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{x}dx = 1^{1)}.$$

[1] Г. М. Фихтенгольц, Курс, т. II (1948), п. 455, стр. 625–627.

Далее, для любых $b > a > 0$

$$\int_a^b f_\nu(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin\nu x}{x}dx = \frac{1}{\pi}\int_{a\nu}^{b\nu}\frac{\sin y}{y}dy \to 0 \text{ при } \nu\to\infty;$$

такая же картина, очевидно, имеет место для интеграла от a до b при $a < b < 0$. Наконец, величина

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sin\nu x}{x}dx\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{a\nu}^{b\nu}\frac{\sin y}{y}dy\right|$$

ограничена равномерно по a и b для всех ν. Отсюда следует, что при $\nu\to\infty$ функции $f_\nu(x)$ образуют дельта-образную последовательность, так что

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin\nu x}{x} = \delta(x). \qquad (4)$$

Функция $\frac{1}{\pi}\frac{\sin\nu x}{x}$ в свою очередь может быть представлена как результат интегрирования функции $\frac{1}{2\pi}e^{i\xi x}$ по параметру ξ в пределах от $-\nu$ до ν. Поэтому наш результат может быть сформулирован еще и так: имеет место предельное соотношение в смысле сходимости в пространстве K':

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu} e^{i\xi x}d\xi = 2\pi\delta(x). \qquad (5)$$

Слева стоит преобразование Фурье единицы. (Подробнее и с другой точки зрения о преобразовании Фурье мы будем говорить в гл. II. Ср. замечание в конце § 3 гл. II)

Дифференцируя по x полученное соотношение, мы приходим к новым, еще более интересным равенствам:

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu} i\xi e^{i\xi x}d\xi = 2\pi\delta'(x), \qquad (6)$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu} (i\xi)^2 e^{i\xi x}d\xi = 2\pi\delta''(x) \qquad (7)$$

и т.д. Можно утверждать вообще, что *для любой локально интегрируемой функции $f(x)$, растущей при $|x| \to \infty$ не быстрее некоторой степени $|x|$, существует в смысле обобщенных функций преобразование Фурье — предел выражения*

$$\int_{-\nu}^{\nu} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

при $\nu \to \infty$. Действительно, запишем функцию $f(\xi)$ в форме $(\xi^2+1)^m f_0(\xi)$, где $f_0(\xi)$ — интегрируемая функция. Так как функция $f_0(\xi)$ обладает обычным преобразованием Фурье, то существует предел

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{-\nu}^{\nu} f_0(\xi) e^{i\xi x} d\xi = G_0(x).$$

При этом сходимость равномерна по x в любой конечной области; следовательно, сходимость имеет место в смысле обобщенных функций. Применяя к обеим частям равенства операцию $\left(-\frac{d^2}{dx^2}+1\right)^m$ и используя непрерывность операции дифференцирования, заключаем, что существует предел

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{-\nu}^{\nu} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \left(-\frac{d^2}{dx^2}+1\right)^m G_0(x),$$

что и утверждалось.

6. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями. Операции, которые установлены для обобщенных функций — дифференцирование, умножение на функцию, сложение, — позволяют строить дифференциальные выражения вида

$$a_0(x) y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) y(x) - b(x),$$

где $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ — заданные бесконечно дифференцируемые функции, а $y(x)$ и $b(x)$ — обобщенные функции. Приравнивая такое выражение нулю, мы получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка относительно обобщенной функции $y(x)$. Возникает вопрос о том, как описывается совокупность всех решений такого уравнения.

Рассмотрим сначала простейшее уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1}$$

Покажем, что *это уравнение в классе обобщенных функций имеет своим общим решением* $y = C$ ($C = \text{const}$).

Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = 0 \tag{2}$$

для любой основной функции $\varphi(x)$. Но тем самым функционал y уже задан на совокупности Φ_0 тех основных функций, которые могут быть представлены как производные от других основных функций. Нам необходимо выяснить, какими способами функционал y может быть распространен с совокупности Φ_0 на все основное пространство K.

Легко проверить, что основная функция $\varphi_0(x)$ может быть представлена как производная от некоторой основной функции тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)dx = 0. \tag{3}$$

Действительно, если $\varphi_0(x) = \varphi_1'(x)$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)dx = \varphi_1(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0;$$

с другой стороны, при выполнении условия (3) мы полагаем

$$\varphi_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_0(\xi)d\xi,$$

и остается только проверить, что $\varphi_1(x)$ есть основная функция; но это очевидно, поскольку $\varphi_1(x)$ вместе с $\varphi_0(x)$ бесконечно дифференцируема и, в силу условия (3), финитна.

Пусть теперь $\varphi_1(x)$ — фиксированная основная функция, обладающая свойством

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)dx = 1.$$

Для любой основной функции $\varphi(x)$ можно написать равенство

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx + \varphi_0(x),$$

где функция $\varphi_0(x)$, очевидно, удовлетворяет условию (3). Отсюда видно, что если задать значение искомого функционала y на основной функции $\varphi_1(x)$, то значение его на любой функции $\varphi(x)$ будет однозначно определено:

$$(y,\varphi) = (y,\varphi_1) \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx. \tag{4}$$

Пусть, например, $(y,\varphi_1) = C_1$ — произвольное фиксированное число. Тогда равенство (4) дает

$$(y,\varphi) = C_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_1\varphi(x)dx,$$

т.е. обобщенная функция y есть постоянная C_1, что и утверждалось. Мы видим, что дифференциальное уравнение (1) не имеет иных решений в классе обобщенных функций, кроме классических.

Пример. Покажем, что на прямой *обобщенная функция f, инвариантная относительно сдвигов, сводится к постоянной.* Мы имеем в этом случае

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 0,$$

откуда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0;$$

по доказанному, $f(x) = \mathrm{const}$, что и требуется.

Можно показать, что и любая однородная система уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1m}y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_m}{dx} = a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mm}y_m, \end{array}\right\} \tag{5}$$

где $a_{11}, \ldots, a_{mm}$ — бесконечно дифференцируемые функции от x, также не имеет иных решений $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ в обобщенных функциях, кроме классических решений. Аналогично обстоит дело для одного уравнения высшего порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, а также для системы уравнений.

Наметим доказательство этих утверждений. Систему (5) для удобства запишем в векторном виде[1)]

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \quad A = ||a_{ij}||.$$

Рассмотрим матрицу $U = ||u_j^k(x)||$ фундаментальной системы (обычных) решений системы (5); известно, что матрица U обратима. Перейдем от неизвестных y к неизвестным z по формуле $y = Uz$; подставляя это выражение в систему (5), получаем:

$$\frac{dU}{dx}z + U\frac{dz}{dx} = AUz$$

или, поскольку $\frac{dU}{dx} = AU$,

$$U\frac{dz}{dx} = 0.$$

Умножение на U^{-1} приводит к системе распавшихся уравнений

$$\frac{dz}{dx} = 0;$$

по доказанному, $z = \text{const}$, откуда следует, что $y = Uz$ есть вектор, являющийся линейной комбинацией векторов фундаментальной системы.

Остальные утверждения вытекают из доказанного, так как любое уравнение высшего порядка и систему таких уравнений можно заменить эквивалентной системой первого порядка.

Замечание. В отличии от рассмотренного случая для уравнений с особенностями в коэффициентах могут появляться новые решения в обобщенных функциях, а также могут исчезать классические решения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение 1-го порядка

$$x\frac{dy}{dx} = 0.$$

Его решение должно совпадать с постоянной как при $x > 0$, так и при $x < 0$. Отсюда следует, что это уравнение имеет два линейно независимых решения:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \theta(x).$$

[1)] См. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, 1954, стр. 371 и дальше.

Пример 2. Уравнение

$$-2x^3y' = y$$

имеет единственное решение в обобщенных функциях:

$$y = 0.$$

Действительно, при $x \neq 0$ обобщенное решение должно совпадать с классическим решением $y = Ce^{\frac{1}{x^2}}$, где $C \neq 0$ или $C = 0$. Но первое невозможно, так как, согласно п. 7 § 1, интеграл

$$\int e^{\frac{1}{x^2}}\varphi(x)dx$$

не допускает регуляризации.

Существование первообразной. Рассмотрим простейшее неоднородное уравнение

$$\frac{dg}{dx} = f, \tag{6}$$

где f — данная обобщенная функция, а g — искомая.

Покажем, что *уравнение* (6) *при любой правой части* f *имеет решение в классе обобщенных функций.* Естественно называть это решение *первообразной* или *неопределенным интегралом* от обобщенной функции f:

$$g = \int f dx.$$

Уравнение (6) эквивалентно уравнению

$$(g, -\varphi') = (f, \varphi)$$

для любой основной функции φ. Но тем самым функционал g задан на любой основной функции ψ, являющейся производной от какой-либо другой основной функции φ, т.е. он задан на многообразии Φ_0, рассмотренном в начале этого пункта. Мы должны продолжить функционал g на все пространство K. Это можно осуществить, например, так: рассмотрим основную функцию $\varphi_1(x)$, для которой $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)dx = 1$, и снова представим любую основную функцию φ в форме

$$\varphi = \varphi_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi dx + \varphi_0,$$

где φ_0 принадлежит Φ_0. Тем самым мы с каждой основной функцией φ однозначно сопоставим ее «проекцию» φ_0 на подпространство Φ_0. Полагаем теперь

$$(g_0,\varphi) = (g,\varphi_0). \tag{7}$$

Легко проверить, что построенный функционал g_0 линеен и непрерывен. Общее решение уравнения (7) получается прибавлением к найденному частному решению общего решения однородного уравнения, которым, в силу сказанного в начале этого пункта, является $g_1 = C = \mathrm{const}$.

Итак, все решения уравнения (6) описываются формулой

$$g = g_0 + C,$$

где функционал g_0 задан формулой (7).

Отыскание общего решения неоднородной системы

$$\frac{dy_i}{dx} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j = f_i \quad (i = 1,2,\ldots,m), \tag{8}$$

где f_i — обобщенные, а a_{ij} — обычные бесконечно дифференцируемые функции, сводится к решению уравнений вида (6).

Действительно, если выполнить уже применявшуюся выше подстановку $y = Uz$, где U — матрица фундаментальных решений соответствующей однородной системы ($f_i = 0$), то мы получим $U\frac{dz}{dx} = f$, или $\frac{dz}{dx} = U^{-1}f$. В этой системе неизвестные «разделились»: каждое ее уравнение имеет вид (6).

Наконец, неоднородное уравнение высшего порядка

$$y^{(m)} + a_1y^{(m-1)} + \ldots + a_my = f, \tag{9}$$

где a_i — бесконечно дифференцируемые функции, а f — произвольная обобщенная функция, сводится к системе вида (8) при помощи подстановки

$$y_1 = y,\ y_2 = \frac{dy_1}{dx},\ \ldots,\ y_{m-1} = \frac{dy_{m-2}}{dx}.$$

Следовательно, отыскание общего решения уравнения вида (9) также сводится к решению уравнений вида (6).

7. Дифференцирование в пространстве S. Мы ввели в конце первого параграфа новое основное пространство S. Это пространство состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам вида

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq} \quad (k,q = 0,1,2,\ldots).$$

Мы видели, что совокупность линейных непрерывных функционалов S', определенных на пространстве S, есть подпространство пространства K' линейных непрерывных функционалов на пространстве K.

Покажем, что *операция дифференцирования не выводит функционал $f \in S'$ из этого подпространства.* Ограничимся для простоты случаем одного независимого переменного. Заметим сначала, что для всякой функции $\varphi(x) \in S$ ее производная $\varphi'(x)$ также лежит в S и из сходимости $\varphi_\nu \to 0$ в S следует также сходимость $\varphi'_\nu \to 0$ в S. Поэтому функционал f', определенный по формуле

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'),$$

снова является линейным непрерывным функционалом на S.

Но очевидно, что в пределах основного пространства K он совпадает с производной функционала f в указанном выше (п. 1) смысле. Иными словами, производная f' функционала f, понимаемая как функционал на K, распространяется на пространство S вместе с функционалом f, что и утверждалось. Распространение этого результата на высшие производные и на случай нескольких переменных не требует особых пояснений.

Мы указали выше, что все регулярные функционалы, отвечающие функциям степенного роста, распространяются с пространства K на пространство S. Теперь мы видим, что тем же свойством обладают и производные таких функционалов. Во втором выпуске (гл. II, § 4) мы увидим, что всякий линейный непрерывный функционал на S есть результат применения некоторой дифференциальной операции к функции степенного роста.

§ 3. Регуляризация функций со степенными особенностями

1. Постановка вопроса. Из функций, имеющих неинтегрируемые особенности в отдельных точках, наиболее важны функции *со степенными особенностями,* т.е. растущие при приближении x к особой точке x_0 не быстрее некоторой степени $\frac{1}{|x-x_0|}$. В этом параграфе для широкого класса таких функций будут построены отвечающие им обобщенные функции.

Напомним определение регуляризации, данное в п. 7 § 1. Регуляризацией интеграла

$$\int f(x)\varphi(x)dx, \tag{1}$$

или регуляризацией функции $f(x)$, имеющей, вообще говоря, точки локальной неинтегрируемости, мы назвали функционал f, который для основных функций $\varphi(x)$, равных нулю в окрестности особых точек функции $f(x)$, выражается интегралом (1). В п. 7 § 1 было показано, что функция $f(x)$ со степенными особенностями (в точках, число которых конечно в каждой конечной области) обладает регуляризацией. При этом регуляризация определена с точностью до прибавления функционала, сосредоточенного в особых точках функции $f(x)$.

С этой точки зрения содержание большей части этого параграфа можно описать следующим образом. Для широкого класса функций одного переменного со степенными особенностями будет указана регуляризация, *естественная* в следующем смысле: сумме двух обычных функций отвечает сумма их регуляризаций; обычной производной функции — производная ее регуляризации; произведению функции на бесконечно дифференцируемую функцию $h(x)$ — произведение ее регуляризации на $h(x)$.

Но начнем мы с регуляризации конкретных, наиболее важных функций, откладывая более общие определения и полную проверку указанных свойств регуляризации до п. 7.

Примером функции со степенной особенностью может служить функция

$$x_+^{-3/2} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x^{-3/2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Соответствующую ей обобщенную функцию мы фактически уже построили в примере 3 п. 2 § 2:

$$(x_+^{-3/2}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{3/2}} dx. \tag{2}$$

При этом мы исходили из того, что *обобщенная функция* $-\frac{3}{2}x_+^{-3/2}$ *должна быть производной обобщенной функции* $x_+^{-1/2}$, т.е. регулярного функционала, определяемого обычной функцией

$$x_+^{-1/2} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x^{-1/2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

В § 2 мы и на других примерах видели, что аналогичные соображения часто позволяют построить обобщенную функцию, отвечающую данной обычной функции со степенной особенностью.

Другой метод получения определений типа (2) — это *метод аналитического продолжения.* Им мы и будем преимущественно пользоваться. Прежде чем объяснить его идею, введем следующее определение. Рассмотрим обобщенную функцию f_λ, зависящую от параметра λ, пробегающего открытую область Λ в плоскости комплексного переменного λ. Эта обобщенная функция f_λ называется *аналитической функцией от* λ в области Λ, если в этой области аналитичны все числовые функции (f_λ, φ) при любой основной функции φ.

Обобщенные аналитические функции от λ по своим свойствам аналогичны обычным аналитическим функциям от λ. Так, если определить *производную* $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}$ *функционала* f_λ *по параметру* λ как предел

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{f_{\lambda+\Delta\lambda} - f_\lambda}{\Delta\lambda}$$

(в смысле п. 8 § 1), то можно утверждать, что обобщенная функция f_λ аналитична по λ в области Λ тогда и только тогда, когда в каждой точке этой области существует производная $\frac{df_\lambda}{d\lambda}$. Имеют также место аналоги классических теорем о разложениях в ряд Тейлора и в ряд Лорана, об аналитическом продолжении и т.д.; они собраны в добавлении 2 к этой главе.

Идея метода аналитического продолжения состоит в следующем. Пусть дана функция $f_\lambda(x)$, которая локально интегрируема, когда λ пробегает некоторую область Λ в комплексной плоскости, и, вообще, не является таковой, когда λ находится вне области Λ. Пусть, далее, при $\lambda \in \Lambda$ и любой основной функции $\varphi(x)$ числовая функция (f_λ, φ) аналитична в области Λ и может быть аналитически продолжена в некоторую более широкую область Λ_1, не зависящую от выбора $\varphi(x)$. Тогда с функцией $f_{\lambda_0}(x)$ при $\lambda_0 \in \Lambda_1 - \Lambda$ мы можем сопоставить функционал (f_λ, φ), получаемый аналитическим продолжением функционала (f_λ, φ) из области Λ; иными словами, мы полагаем

$$\int f_{\lambda_0}(x)\varphi(x)dx = \underset{\lambda\to\lambda_0}{\text{анал. прод.}} \int f_\lambda(x)\varphi(x)dx.$$

Например, чтобы определить обобщенную функцию $x_+^{-3/2}$, мы рассматриваем функцию

$$x_+^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x^\lambda & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Для $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ она определяет регулярный функционал

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx. \qquad (3)$$

Числовая функция (3), очевидно, аналитична по λ: она имеет производную по λ, равную

$$\int_0^\infty x^\lambda \ln x \varphi(x) dx.$$

Правую часть формулы (3) перепишем в виде

$$\int_0^1 x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}.$$

Первое слагаемое определено для $\operatorname{Re}\lambda > -2$, второе — для любых λ, третье — для $\lambda \neq -1$. Следовательно, функционал (3) аналитически продолжается на область $\operatorname{Re}\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$. В частности, при $\lambda = -3/2$ получаем:

$$\left(x_+^{-3/2}, \varphi(x)\right) = \int_0^1 x^{-3/2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int_1^\infty x^{-3/2} \varphi(x) dx - 2\varphi(0). \quad (4)$$

Правая часть формулы (4) совпадает с правой частью формулы (2), так как вообще

$$-\frac{1}{\lambda+1} = \int_1^\infty x^\lambda dx.$$

Разумеется, при ином вводе параметра аналитическое продолжение может привести к совершенно иному результату. Например,

$$x_+^\lambda + \frac{1}{\pi} \frac{(\lambda+3/2)}{x^2 + (\lambda+3/2)} \to x_+^{-3/2} + \delta(x) \text{ при } \lambda \to -3/2$$

(см. § 2, п. 5).

Подчеркнем, что тот или иной метод, приводящий к определениям типа (2) или (4), играет для нас второстепенную, вспомогательную роль; он представляет собой лишь *средство*, тогда как *цель* — это сами определения, которые, как формулы (2) или (4), имеют смысл и вне всякой связи с этим методом.

2. Обобщенные функции x_+^λ и x_-^λ. Рассмотрим функцию x_+^λ, равную x^λ при $x > 0$ и 0 при $x \leqslant 0$. Мы хотим построить и изучить отвечающую ей обобщенную функцию. Как уже сказано в предыдущем пункте, регулярный функционал

$$\left(x_+^\lambda, \varphi\right) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx, \tag{1}$$

определяемый функцией x_+^λ при $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$, продолжается на область $\mathrm{Re}\,\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$ при помощи справедливого для $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ тождества

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^1 x^\lambda[\varphi(x) - \varphi(0)]dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}. \tag{2}$$

А именно, при $\mathrm{Re}\,\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$ правая часть существует и определяет регуляризацию интеграла, стоящего слева: если $-2 < \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -1$, $\lambda \neq -1$ и если основная функция равна нулю в окрестности начала, то справа остается интеграл $\int\limits_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx$.

Аналогичным способом строится продолжение функционала x_+^λ на область $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$:

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx + \\ + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}. \tag{3}$$

И здесь правая часть дает регуляризованное значение интеграла, стоящего слева. Тем самым обобщенная функция x_+^λ определяется для всех $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

В полосе $-n-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < -n$ формула (3) может быть преобразована к более простому виду:

$$\left(x_+^\lambda, \varphi\right) = \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx \tag{4}$$

в силу того, что в этом случае при $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\int_1^\infty x^{\lambda+k-1}dx = -\frac{1}{\lambda+k}. \tag{5}$$

Формула (3) показывает, что (x_+^λ, φ) как функция от λ имеет полюсы 1-го порядка в точках $\lambda = -1, -2, \ldots$, причем ее вычет в точке $\lambda = -k$ равен $\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$. Так как $\varphi^{(k-1)}(0) = (-1)^{(k-1)}(\delta^{(k-1)}(x), \varphi(x))$, то, следовательно, сам *функционал x_+^λ имеет при $\lambda = -k$ полюс 1-го порядка с вычетом* $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Подсчитаем производную $\frac{dx_+^\lambda}{dx}$. При $\operatorname{Re}\lambda > 0$ мы имеем очевидное равенство $\frac{dx_+^\lambda}{dx} = \lambda x_+^{\lambda-1}$, т.е. $\left(x_+^\lambda, \varphi'(x)\right) = -\left(\lambda x_+^{\lambda-1}, \varphi(x)\right)$. Так как обе части последнего равенства аналитически продолжаются в плоскость (с исключенными точками $-1, -2, \ldots$), то, в силу свойства единственности, равенство будет справедливо и во всей плоскости. Таким образом,

$$\frac{dx_+^\lambda}{dx} = \lambda x_+^{\lambda-1} \quad (\lambda \neq -1, -2, \ldots).$$

Например, при $-1 < \lambda < 0$ мы имеем:

$$\left(\frac{d}{dx}x_+^\lambda, \varphi\right) = \left(\lambda x_+^{\lambda-1}, \varphi\right) = \int\limits_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x) - \varphi(0)]dx.$$

Эту формулу мы вывели иным путем в п. 2 § 2.

В § 4 будет построено разложение функции x_+^λ в ряд Тейлора в окрестности регулярной точки и в ряд Лорана в окрестности полюса.

Перейдем теперь к построению и изучению обобщенной функции, отвечающей функции

$$x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Для $\operatorname{Re}\lambda > -1$ эта функция определяет регулярный функционал

$$\left(x_-^\lambda, \varphi\right) = \int\limits_{-\infty}^0 |x|^\lambda \varphi(x)dx. \tag{6}$$

Этот функционал можно продолжить в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -1$ таким же образом, как x_+^λ. При этом проще всего, заменив x на $-x$, представить $\left(x_-^\lambda, \varphi\right)$ в виде

$$\left(x_-^\lambda, \varphi(x)\right) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)dx = \left(x_+^\lambda, \varphi(-x)\right).$$

Это позволяет немедленно перенести все результаты, полученные для функционала x_+^λ, на функционал x_-^λ, заменив в соответствующих формулах функцию $\varphi(x)$ на $\varphi(-x)$. При этом фигурирующие в формулах выражения $\varphi^{(j)}(0)$ заменятся на $(-1)^j\varphi^j(0)$.

В частности, мы видим, что обобщенная функция x_-^λ, так же как и x_+^λ, существует и аналитична во всей плоскости λ, за исключением точек $\lambda = -1, -2, \ldots$; в точке $\lambda = -k$ обобщенная функция x_-^λ имеет простой полюс с вычетом $\frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$.

Формула для регуляризованного значения интеграла

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} |x|^\lambda \varphi(x)dx$$

в полосе $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$ приводится к виду

$$\int\limits_{-\infty}^{0} |x|^\lambda \varphi(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} x^\lambda \varphi(-x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} x^\lambda \Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + \\ + x\varphi'(0) - \ldots - \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]dx. \quad (7)$$

В § 4 будут приведены разложения функции x_-^λ в ряд Тейлора и ряд Лорана.

3. Четная и нечетная комбинации функций x_+^λ и x_-^λ. Обобщенная функция f называется *четной,* если

$$(f(x), \varphi(-x)) = (f(x), \varphi(x)),$$

и *нечетной*, если

$$(f(x), \varphi(-x)) = -(f(x), \varphi(x)).$$

Из введенных в п. 2 обобщенных функций составим следующую четную и нечетную комбинации:

$$|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda, \quad (1)$$

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = x_+^\lambda - x_-^\lambda. \quad (2)$$

Изучим особенности обобщенных функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Так как обобщенная функция x_+^λ имеет при $\lambda = -k$ полюс с вычетом

$\frac{(-1)^{(k-1)}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x)$, а функция x_-^λ — полюс с вычетом $\frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$, то обобщенная функция $|x|^\lambda$ имеет полюсы только при $\lambda = -1, -3, -5, \ldots, -2m-1, \ldots$ Вычет $|x|^\lambda$ при $\lambda = -2m-1$ равен $2\frac{\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}$. В точках $\lambda = -2m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ обобщенная функция $|x|^\lambda$ *определена*; при этих λ мы, естественно, будем вместо $|x|^{-2m}$ писать x^{-2m}.

Аналогично обобщенная функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ имеет полюсы в точках $\lambda = -2, -4, \ldots, -2m, \ldots$ с вычетом при $\lambda = -2m$, равным $-2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}$. При $\lambda = -2m-1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ обобщенная функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ определена, и мы вместо $|x|^{-2m-1} \operatorname{sgn} x$ будем писать x^{-2m-1}. Таким образом, обобщенные функции x^{-n} определены у нас для всех $n = 1, 2, \ldots$

Дадим непосредственные определения обобщенных функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Для этого воспользуемся регуляризованными значениями интегралов $\int\limits_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^0 |x|^\lambda \varphi(x)dx$, т.е. формулами (4) и (7) п. 2: в полосе $-n-1 < \operatorname{Re} \lambda < -n$

$$\left(x_+^\lambda, \varphi\right) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx,$$

$$\left(x_-^\lambda, \varphi\right) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \Bigg[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \\ \ldots - \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Bigg] dx.$$

Заменяя здесь n на $2m$, складывая и вычитая, находим:

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \Bigg\{\varphi(x) + \varphi(-x) - \\ - 2\left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\right]\Bigg\} dx; \tag{3}$$

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn}(x), \varphi) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \Bigg\{\varphi(x) - \varphi(-x) - \\ - 2\left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\right]\Bigg\} dx. \tag{4}$$

Первое разложение сходится при $-2m-1<\operatorname{Re}\lambda<-2m+1$, второе — при $-2m-2<\operatorname{Re}\lambda<-2m$. В частности,

$$(x^{-2m},\varphi)=\int_0^\infty x^{-2m}\Big\{\varphi(x)+\varphi(-x)-\\ -2\left[\varphi(0)+\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\right]\Big\}dx, \tag{5}$$

$$(x^{-2m-1},\varphi)=\int_0^\infty x^{-2m-1}\Big\{\varphi(x)-\varphi(-x)-\\ -2\left[x\varphi'(0)+\frac{x^3}{3!}\varphi'''(0)+\ldots+\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\right]\Big\}dx, \tag{6}$$

так что, например,

$$(x^{-2},\varphi)=\int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx, \tag{7}$$

$$(x^{-1},\varphi)=\int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx; \tag{8}$$

последнее выражение совпадает с главным значением по Коши интеграла от $\frac{\varphi(x)}{x}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right\}.$$

Приведем еще формулы дифференцирования обобщенных функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda\operatorname{sgn}x$. Мы имеем:

$$\frac{d}{dx}|x|^\lambda=\frac{d}{dx}\left(x_+^\lambda+x_-^\lambda\right)=\lambda x_+^{\lambda-1}-\lambda x_-^{\lambda-1}=\lambda|x|^{\lambda-1}\operatorname{sgn}x; \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}|x|^\lambda\operatorname{sgn}x=\frac{d}{dx}\left(x_+^\lambda-x_-^\lambda\right)=\lambda x_+^{\lambda-1}+\lambda x_-^{\lambda-1}=\lambda|x|^{\lambda-1}. \tag{10}$$

В частности, при $\lambda=-n$ получаем:

$$\frac{d}{dx}x^{-n}=-nx^{-n-1}. \tag{11}$$

В § 4 будут приведены разложения функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ в ряд Тейлора и в ряд Лорана.

Заметим в заключение, что функционалы $x_+^\lambda, x_-^\lambda, |x|^\lambda, |x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ при $\mathrm{Re}\ \lambda > -1$ как регулярные функционалы, отвечающие функциям степенного роста, продолжаются на пространство S бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, убывающих при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$ вместе со всеми производными (§ 1, п. 10). Функционалы $x_+^\lambda, \ldots$ при прочих значениях λ, полученные аналитическим продолжением предыдущих, также продолжаются на пространство S; это следует как из самих формул аналитического продолжения, так и из формул дифференцирования $\frac{d}{dx}\left(x_+^\lambda\right) = \lambda x_+^{\lambda-1}$ и замечания в конце § 2 о том, что функционалы на S допускают дифференцирование. Поэтому функционалы $x_+^\lambda, \ldots$ можно применять по обычным формулам не только к финитным функциям, но и ко всем функциям пространства S, например e^{-x^2} и т.п.

Пример 1. Гамма-функция определяется интегралом

$$\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx,$$

сходящимся при $\mathrm{Re}\ \lambda > -1$. Мы можем рассматривать этот интеграл как результат применения функционала $x_+^{\lambda-1}$ к основной функции, равной e^{-x} при $0 \leqslant x < \infty$ (такая основная функция заведомо имеется в пространстве S). Применяя регуляризационные формулы п. 2, получаем выражение гамма-функции в области, где $\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant -1$: при $\mathrm{Re}\ \lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, \ldots, -n$,

$$\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^1 x^{\lambda-1} \left[e^{-x} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right] dx + \int\limits_1^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(k+\lambda)},$$

при $-n-1 < \mathrm{Re}\ \lambda < -n$

$$\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^\infty x^{\lambda-1} \left[e^{-x} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right] dx.$$

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^\infty x^\lambda [e^{-ax} - e^{-bx}] dx.$$

Заметим, что он является сходящимся при $\operatorname{Re}\lambda > -2$. Его можно трактовать как результат применения функционала x_+^λ к основной функции $e^{-ax} - e^{-bx}$; поэтому

$$\int\limits_0^\infty x^\lambda [e^{-ax} - e^{-bx}]dx = \int\limits_0^\infty x^\lambda e^{-ax}dx - \int\limits_0^\infty x^\lambda e^{-bx}dx,$$

где каждое из слагаемых справа также есть результат применения функционала к соответствующей основной функции. Но при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ можно совершить замену переменной $ax = \xi$, что дает

$$\int\limits_0^\infty x^\lambda e^{-ax}dx = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\xi}{a}\right)^\lambda e^{-\xi}\frac{d\xi}{a} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{a^{\lambda+1}};$$

эта формула остается справедливой при всех λ в силу единственности аналитического продолжения. В результате мы получаем

$$\int\limits_0^\infty x^\lambda [e^{-ax} - e^{-bx}]dx = \left(\frac{1}{a^{\lambda+1}} - \frac{1}{b^{\lambda+1}}\right)\Gamma(\lambda+1).$$

При $\operatorname{Re}\lambda > -2$ эта формула дает величину сходящегося интеграла в левой части. Любопытно, что мы получили ее с помощью расходящихся интегралов. Можно было бы, конечно, ее найти и обычными приемами (например, дифференцированием по параметрам a и b).

4. Неопределенные интегралы от функций x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Так как операция неопределенного интегрирования обратна к операции дифференцирования (§ 2, п. 6), то при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$\int x_+^\lambda dx = \frac{x_+^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C_1(\lambda);$$

$$\int x_-^\lambda dx = -\frac{x_-^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C_2(\lambda);$$

далее, при $\lambda \neq -1, -3, -5, \ldots$

$$\int |x|^\lambda dx = \frac{|x|^{\lambda+1}\operatorname{sgn} x}{\lambda+1} + C_3(\lambda)$$

и при $\lambda \neq -2, -4, -6, \ldots$ (а также при $\lambda \neq -1$, поскольку при $\lambda = -1$ у нас нет соответствующей формулы для производной)

$$\int |x|^\lambda \operatorname{sgn} x\, dx = \frac{|x|^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C_4(\lambda). \tag{1}$$

Функции $C_1(\lambda),\ldots,C_4(\lambda)$ могут быть взяты произвольно.

Пользуясь этой свободой выбора, мы можем найти и результат неопределенного интегрирования $x^{-1}=|x|^{-1}\operatorname{sgn}x$ предельным переходом. Первое слагаемое правой части формулы (1) имеет при $\lambda=-1$ полюс с вычетом 1. Положим $C_4(\lambda)=-\frac{1}{\lambda+1}+C$; тогда правая часть будет допускать аналитическое продолжение в точку $\lambda=-1$ и по непрерывности формула интегрирования сохранит свой смысл. Таким образом,

$$\int |x|^{\lambda}\operatorname{sgn}x\,dx=\frac{|x|^{\lambda+1}-1}{\lambda+1}+C;$$

при $\lambda\to-1$

$$\lim_{\lambda\to-1}\frac{|x|^{\lambda+1}-1}{\lambda+1}=\ln|x|$$

и следовательно,

$$\int x^{-1}dx=\ln|x|+C. \tag{2}$$

Можно сосчитать также и повторные интегралы от указанных функций. Так, q-кратный интеграл от $|x|^{\lambda}$ имеет вид

$$\underbrace{\int\ldots\int}_{q}|x|^{\lambda}dx^q=\frac{|x|^{\lambda+q}(\operatorname{sgn}x)^q}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+q)}+Q_\lambda(x), \tag{3}$$

где $Q_\lambda(x)$ — произвольный полином от x степени $<q$.

Подынтегральная функция слева имеет полюсы в точках $\lambda=-1$, -3, ... Функция $\frac{|x|^{\lambda+q}(\operatorname{sgn}x)^q}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+q)}$, кроме них, имеет полюсы в точках $\lambda=-2,-4,\ldots$, $|\lambda|\leqslant q$. Естественно устранить последние за счет специального выбора полинома $Q_\lambda(x)$. Так как вычет первого слагаемого правой части при $\lambda=-2k$ $(2k<q)$ равен, очевидно,

$$\frac{|x|^{-2k+q}(\operatorname{sgn}x)^q}{(-2k+1)(-2k+2)\ldots(-1)\cdot1\cdot2\ldots(-2k+q)}=\frac{-x^{q-2k}}{(2k-1)!(q-2k)!},$$

то для этого можно положить

$$Q_\lambda(x)=\sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]}\frac{x^{-2k+q}}{(2k-1)!(q-2k)!}\frac{1}{\lambda+2k}$$

(можно было бы еще добавить к $Q_\lambda(x)$ произвольный полином от x степени $< q$, аналитически зависящий от λ). Итак,

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{q} |x|^\lambda dx^q = \frac{|x|^{\lambda+q}(\operatorname{sgn} x)^q}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+q)} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{x^{-2k+q}}{(2k-1)!(q-2k)!}\frac{1}{\lambda+2k}. \quad (4)$$

В частности, двукратный интеграл записывается в виде

$$\iint |x|^\lambda dx^2 = \frac{|x|^{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + \frac{1}{\lambda+2}.$$

5. Нормировка функций $x_+^\lambda, x_-^\lambda, |x|^\lambda, |x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Функции x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, как мы видели, имеют в λ-плоскости полюсы 1-го порядка. Естественно попытаться устранить их, разделив каждую из этих функций на обычную функцию от λ, имеющую полюсы 1-го порядка в тех же точках. Такую функцию от λ проще всего построить, применив интересующую нас обобщенную функцию $\left(x_+^\lambda \text{ и т.д.}\right)$ к фиксированной основной функции $\varphi_0(x)$. При этом мы воспользуемся тем, что, как сказано в п. 3, функционалы $x_+^\lambda, x_-^\lambda, |x|^\lambda, |x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ продолжаются на пространство S; это позволяет брать в качестве $\varphi_0(x)$ функции из S.

Рассмотрим функцию x_+^λ. Она имеет полюсы в точках $-1, -2, \ldots$ с вычетом в точке $-n$, равным $\frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}$. Основная функция $\varphi_0(x)$ должна быть такой, чтобы вычеты функции $\left(x_+^\lambda, \varphi_0(x)\right)$ от λ в точках $-1, -2, \ldots$ были отличными от нуля. Это значит, что у функции $\varphi_0(x)$ должны быть отличны от нуля все производные при $x = 0$.

В качестве такой функции $\varphi_0(x)$ естественно взять e^{-x}, что приводит к нормирующему знаменателю

$$\left(x_+^\lambda, e^{-x}\right) = \int\limits_0^\infty x^\lambda e^{-x} dx = \Gamma(\lambda+1).$$

Аналогично подбираем нормирующие знаменатели для обобщенных функций $x_-^\lambda, |x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Для функции x_-^λ нужно функцию $\varphi_0(x)$ взять снова такой, чтобы ее производные при $x = 0$ были отличными от нуля; естественно положить $\varphi_0(x) = e^x$, так что

$$\left(x_-^\lambda, e^x\right) = \int\limits_{-\infty}^0 |x|^\lambda e^x dx = \int\limits_0^\infty x^\lambda e^{-x} dx = \Gamma(\lambda+1).$$

Функция $|x|^\lambda$ имеет полюсы в точках $-1, -3, \ldots$, и ее вычет в точке $\lambda = -2m-1$ равен $\frac{2\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}$; поэтому функцию $\varphi_0(x)$ следует выбрать так, чтобы ее четные производные при $x = 0$ были отличными от нуля. Естественно положить $\varphi_0(x) = e^{-x^2}$, так что нормирующий знаменатель приобретает вид

$$\left(|x|^\lambda, e^{-x^2}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^\lambda e^{-x^2} dx = 2\int\limits_0^\infty x^\lambda e^{-x^2} dx = \\ = \int\limits_0^\infty t^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right).$$

Наконец, функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ имеет полюсы в точках $-2, -4, \ldots$, и ее вычет в точке $-2m$ равен $-2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}$. Таким образом, функция $\varphi_0(x)$ должна быть выбрана с таким расчетом, чтобы ее нечетные производные при $x = 0$ были отличными от нуля. Можно принять для этого $\varphi_0(x) = xe^{-x^2}$; мы получим нормирующий знаменатель

$$\left(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, xe^{-x^2}\right) = 2\int\limits_0^\infty x^{\lambda+1} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right).$$

Итак, мы можем построить целые функции от λ:

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}, \quad \frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}.$$

Значения этих функций в особых точках числителя и знаменателя можно найти как отношение соответствующих вычетов. Таким образом, мы получаем:

$$\left.\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-n} = \frac{\underset{\lambda=-n}{\text{выч.}}\, x_+^\lambda}{\underset{\lambda=-n}{\text{выч.}}\left(x_+^\lambda, e^{-x}\right)} = \\ = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)(n-1)!}{(-1)^{n-1}(\delta^{(n-1)}(x), e^{-x})(n-1)!} = \delta^{(n-1)}(x); \tag{1}$$

$$\left.\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-n} = \frac{\underset{\lambda=-n}{\text{выч.}}\, x_-^\lambda}{\underset{\lambda=-n}{\text{выч.}}\left(x_-^\lambda, e^x\right)} = \\ = \frac{\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}}{\frac{(\delta^{(n-1)}(x), e^x)}{(n-1)!}} = (-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x); \tag{2}$$

$$\left.\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-2m-1} = \frac{\underset{\lambda=-2m-1}{\text{выч.}}\, |x|^\lambda}{\underset{\lambda=-2m-1}{\text{выч.}}\left(|x|^\lambda, e^{-x^2}\right)} = \frac{\frac{2}{(2m)!}\delta^{(2m)}(x)}{\frac{2}{(2m)!}\left(\delta^{(2m)}(x), e^{-x^2}\right)}.$$

Результат применения функционала $\delta^{(2m)}(x)$ к e^{-x^2} равен $(e^{-x^2})^{(2m)}\,\big|_{x=0}$. Так как

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{m!} + \ldots = \\ = \sum_{m=0}^{\infty}\left.\left(e^{-x^2}\right)^{(2m)}\right|_{x=0}\frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

то очевидно,

$$\left.\left(e^{-x^2}\right)^{(2m)}\right|_{x=0} = \frac{(-1)^m(2m)!}{m!}.$$

Таким образом,

$$\left.\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-2m-1} = \frac{(-1)^m\delta^{(2m)}(x)m!}{(2m)!}. \tag{3}$$

Наконец,

$$\left.\frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}\right|_{\lambda=-2m} = \frac{\underset{\lambda=-2m}{\text{выч.}}\, |x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\underset{\lambda=-2m}{\text{выч.}}\left(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, xe^{-x^2}\right)} = \\ = \frac{-\frac{2}{(2m-1)!}\delta^{(2m-1)}(x)}{-\frac{2}{(2m-1)!}\left(\delta^{(2m-1)}(x), xe^{-x^2}\right)}.$$

Результат применения функционала $\delta^{(2m-1)}(x)$ к xe^{-x^2} равен $-\left(xe^{-x^2}\right)^{(2m-1)}\Big|_{x=0}$. Так как

$$xe^{-x^2} = x - x^3 + \frac{x^5}{2!} - \frac{x^7}{3!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(m-1)!} + \ldots = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \left(xe^{-x^2}\right)^{(2m-1)}\Big|_{x=0} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

то, очевидно,

$$\left(xe^{-x^2}\right)^{(2m-1)}\Big|_{x=0} = (-1)^{m-1}\frac{(2m-1)!}{(m-1)!};$$

поэтому

$$\frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-2m} = (-1)^m \frac{\delta^{(2m-1)}(x)(m-1)!}{(2m-1)!}. \tag{4}$$

Формулы (1)–(4) можно было бы получить и иначе, используя известные вычеты гамма-функции в соответствующих точках.

Формула дифференцирования по x для функционала

$$f_+^\lambda = \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

проще, чем для функционала x_+^λ; действительно,

$$\frac{d}{dx} f_+^\lambda = \frac{d}{dx}\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{\lambda x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = f_+^{\lambda-1}; \tag{5}$$

таким образом, дифференцирование функционала

$$f_+^\lambda = \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

равносильно уменьшению индекса λ на 1. Аналогично для функционала

$$f_-^\lambda = \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

получается следующая формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dx} f_-^\lambda = -f_-^{\lambda-1}; \tag{6}$$

иными словами дифференцирование функционала

$$f_-^\lambda = \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

равносильно уменьшению индекса λ на 1 с изменением знака.

Функция $\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$ при дифференцировании переходит в функцию $\frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$ с индексом, на 1 меньшим, и с некоторым числовым множителем. При двукратном дифференцировании функция $\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$ воспроизводится с индексом, на две единицы меньшим:

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} = 2\lambda\frac{|x|^{\lambda-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)}. \tag{7}$$

Формулу

$$\frac{|x|^{\lambda-2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)} = \frac{1}{2\lambda}\frac{d^2}{dx^2}\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \tag{8}$$

можно было бы положить в основу аналитического продолжения функции $\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$.

6. Обобщенные функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$. Определим теперь новые обобщенные функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$. В отличии от обобщенных функций x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, определенных в пп. 2 и 3, эти новые обобщенные функции не будут нуждаться в нормировке: они будут *целыми аналитическими функциями от* λ. Другие преимущества обобщенных функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ выяснятся в главе о преобразованиях Фурье (гл. II).

Как известно, выражение $(x+iy)^\lambda$ определяется следующим образом:

$$(x+iy)^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Ln}(x+iy)} = e^{\lambda[\ln|x+iy| + i\operatorname{Arg}(x+iy)]}.$$

Возьмем здесь

$$\operatorname{Arg}(x+iy) = \arg(x+iy)$$

$(-\pi < \arg z < \pi)$. Тогда $(x+iy)^\lambda$ будет однозначной аналитической функцией комплексного переменного $z = x+iy$ в верхней полуплоскости $y>0$ и точно так же $(x+iy)^\lambda$ будет однозначной аналитической функцией в нижней полуплоскости $y < 0$. Нас будут интересовать предельные значения этих двух функций на вещественной прямой. Их нетрудно сосчитать:

$$(x+i0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} e^{i\lambda \arg(x+iy)} = \begin{cases} e^{i\lambda\pi}|x|^\lambda & \text{при } x<0, \\ x^\lambda & \text{при } x>0; \end{cases} \tag{1}$$

$$(x-i0)^\lambda = \lim_{y\to-0}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} e^{i\lambda \arg(x+iy)} = \begin{cases} e^{-i\lambda\pi}|x|^\lambda & \text{при } x<0, \\ x^\lambda & \text{при } x>0. \end{cases} \tag{2}$$

Эти функции определены при любом комплексном λ.

Нашей задачей теперь будет сопоставить этим обычным функциям обобщенные. Последние мы также обозначим через $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$.

Используя функции x_+^λ и x_-^λ, определенные в п. 2, мы при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ можем написать:

$$(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda, \tag{3}$$

$$(x-i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda. \tag{4}$$

Но отсюда видно, что при любом $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ (обычным) функциям (1) и (2) можно сопоставить обобщенные функции, написанные справа в (3) и (4) (см. п. 2). Тем самым обобщенные функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ определяются для $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

Но если при $\lambda = -n$ сравнить вычеты обобщенных функций x_+^λ и x_-^λ (полученные в п. 2), то видно, что особенности слагаемых справа в (3) и (4) взаимно уничтожаются; таким образом, обобщенные функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ — целые функции переменного λ. В § 4 мы получим, в частности, формулы

$$(x+i0)^{-n} = x^{-n} - \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x),$$

$$(x-i0)^{-n} = x^{-n} + \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x).$$

Отсутствие полюсов у обобщенных функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ можно пояснить еще и следующим образом. Предположим, что основная функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству S и аналитически продолжается в некоторую окрестность вещественной оси. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{L_\varepsilon} z^\lambda \varphi(z)\,dz \qquad (z = x+iy)$$

по линии L_ε, которая составляется из луча $(-\infty, -\varepsilon)$ вещественной оси ($\varepsilon > 0$), полуокружности радиуса ε с центром в начале, лежащей в верхней полуплоскости (мы ограничимся рассмотрением $(x+i0)^\lambda$), и луча $(\varepsilon, +\infty)$ вещественной оси. По теореме Коши, величина этого интеграла не зависит от ε. Так как на линии L_ε у подынтегральной функции нет особенностей и $\varphi(x)$ при $|x| \to \infty$ убывает быстрее любой степени x, то интеграл существует при всех λ и представляет собой, как легко видеть, аналитическую функцию от λ. При $\operatorname{Re}\lambda > -1$ эта функция, очевидно, совпадает с функцией

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x+i0)^\lambda \varphi(x)dx;$$

таким образом, аналитическое продолжение последней не имеет полюсов.

7. Каноническая регуляризация. В предыдущих пунктах мы сопоставили ряду конкретных функций со степенными особенностями обобщенные функции (и тем самым научились вычислять многие расходящиеся интегралы). В этом пункте будет рассмотрено единое правило регуляризации, которое годится для функций, образующих уже довольно обширный подкласс в классе функций со степенными особенностями. Для удобства мы назовем эту регуляризацию *канонической* и введем временно обозначение

$$f = \text{к.р.}\, f(x)$$

(f — функционал, являющийся регуляризацией функции $f(x)$). Мы покажем, что эта каноническая регуляризация является естественной в том смысле, что выполняются условия:

1°. $\text{к.р.}\,[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] = \alpha_1\, \text{к.р.}\, f_1(x) + \alpha_2\, \text{к.р.}\, f_2(x)$.

2°. $\text{к.р.}\left[\frac{d}{dx} f(x)\right] = \frac{d}{dx}[\text{к.р.}\, f(x)]$.

Здесь слева $\frac{d}{dx}$ — производная от функции в обычном смысле, а справа — производная от функционала.

3°. $\text{к.р.}\,[h(x)f(x)] = h(x) \cdot \text{к.р.}\, f(x)$

для любой бесконечно дифференцируемой функции $h(x)$.

Рассмотрим сначала функции, имеющие неинтегрируемую особенность только в одной точке $x = 0$.

Ограничимся функциями, представимыми в виде конечных сумм

$$f(x) = \sum p_i(x) q_i(x), \tag{1}$$

где $p_i(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, а $q_i(x)$ — одна из следующих функций: x_+^λ, x_-^λ, x^{-n}, причем параметру λ не разрешается принимать значения $-1, -2, \ldots$ Всем указанным функциям сопоставлены в пп. 2 и 3 обобщенные функции, причем показано, что для этих обобщенных функций сохраняются естественные формулы дифференцирования по x. Отметим, что операции сложения, умножения на бесконечно дифференцируемую функцию и обычного дифференцирования не выводят за пределы класса (1).

Так как для обобщенных функций определены операции умножения на бесконечно дифференцируемую функцию и сложения (см. § 1), то мы сразу получим искомое правило регуляризации функции $f(x)$, подставив справа в (1) вместо $q_i(x)$ соответствующие обобщенные функции.

Таким образом, канонической регуляризацией функций x_+^λ, x_-^λ, x^{-n} мы будем считать соответствующие обобщенные функции, определенные в пп. 2 и 3, а каноническую регуляризацию функции $f(x)$ определим формулой

$$\text{к.р. } f(x) = \sum p_i(x) \cdot \text{к.р. } q_i(x). \tag{2}$$

Так как, в частности, $|x|^0 = 1$, то канонической регуляризацией бесконечно дифференцируемой функции мы считаем отвечающий ей регулярный функционал.

Очевидно, что условия 1° и 3° выполняются. Проверим условие 2°. Достаточно сделать это в случае одного слагаемого, т.е. когда

$$f(x) = p(x) q(x).$$

Для удобства обозначим символом $\frac{d}{dx}$ дифференцирование в смысле обобщенных функций и штрихом обычное дифференцирование. Согласно формуле (3) п. 1 § 2

$$\frac{d}{dx} \text{ к.р. } f(x) = p'(x) \cdot \text{к.р. } q(x) + p(x) \frac{d}{dx} \text{ к.р. } q(x).$$

Но, как уже отмечено,

$$\frac{d}{dx} \text{ к.р. } q(x) = \text{к.р. } q'(x),$$

и, пользуясь условиями 1° и 3°, мы получаем:

$$\frac{d}{dx}\,\text{к.р.}\, f(x) = \text{к.р.}\,[p'(x)q(x) + p(x)q'(x)] = \text{к.р.}\, f'(x).$$

Но возникает вопрос, однозначно ли наше определение канонической регуляризации. Покажем, что это определение действительно однозначно. Для этого заметим, что, разлагая бесконечно дифференцируемые функции $p_i(x)$ по формуле Тейлора, мы можем представить $f(x)$ в виде конечной суммы:

$$f(x) = \sum c_i r_i(x) + h(x), \tag{1'}$$

где $r_i(x)$ — снова одна из функций $x_+^\lambda, x_-^\lambda, x^{-n}$ (только λ принимает, вообще говоря, другие значения), c_i — уже постоянные множители, а $h(x)$ — локально интегрируемая функция. Предположим, что в сумме $\sum c_i r_i(x)$ «приведены подобные члены» и оставлены лишь те $r_i(x)$, у которых $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -1$, а остальные отнесены в $h(x)$. Тогда представление (1′) будет однозначным, так как разные слагаемые имеют разные порядки при $x \to 0$. По формуле (1′) естественно написать регуляризацию

$$\sum c_i \cdot \text{к.р.}\, r_i(x) + h(x). \tag{2'}$$

Покажем, что регуляризации (2) и (2′) совпадают; этим и будет доказана однозначность нашего определения канонической регуляризации.

Достаточно предположить, что сумма в формуле (1) состоит из одного слагаемого $p(x)q(x)$, так как не только регуляризация (2), но и регуляризация (2′) обладает свойством 1°. Рассмотрим случай, когда $q(x) = x_+^\lambda$; остальные два случая рассматриваются аналогично. Пусть $-m-2 < \operatorname{Re}\lambda < -m-1$. Разложим $p(x)$ по формуле Тейлора:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!} p^{(j)}(0) + x^{m+1} s(x).$$

Нам надо показать, что для любой основной функции $\varphi(x)$

$$(x_+^\lambda, p(x)\varphi(x)) = \sum_{j=0}^{m} \frac{p^{(j)}(0)}{j!} (x_+^{\lambda+j}, \varphi(x)) + \int_0^\infty x^{\lambda+m+1} s(x)\varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Для проверки этого равенства преобразуем его левую часть:

$$(x_+^\lambda, p(x)\varphi(x)) = \int_0^\infty x^\lambda \left\{ p(x)\varphi(x) - \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}[p(x)\varphi(x)]^{(k)}\Big|_{x=0} \right\} dx =$$

$$= \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x)\left[\sum_{j=0}^m \frac{x^j}{j!}p^{(j)}(0) + x^{m+1}s(x)\right] - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!}\varphi^{(i)}(0) \cdot \sum_{j=0}^m \frac{x^j}{j!}p^{(j)}(0) \right\} dx =$$

$$= \sum_{j=0}^m \frac{p^{(j)}(0)}{j!} \int_0^\infty x^{\lambda+j}\left[\varphi(x) - \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!}\varphi^{(i)}(0)\right] + \int_0^\infty x^{\lambda+m+1}s(x)\varphi(x)dx,$$

что совпадает с правой частью равенства (3).

Отметим, что мы могли бы положить формулу $(2')$ в основу определения канонической регуляризации. В конкретных случаях можно пользоваться как формулой (2), так и формулой $(2')$.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $f(x)$ имеет не одну, а несколько особенностей такого же вида, как в (1), или даже счетное число таких особенностей, но конечное в любом конечном интервале. В этом случае мы воспользуемся тем, что, как будет доказано в п. 2 добавления 1, единицу можно представить в виде

$$1 = \sum_{i=1}^\infty e_i(x),$$

где функции $e_i(x)$ бесконечно дифференцируемы, причем каждый интервал оси пересекается с носителями[1)] только конечного числа функций $e_i(x)$ и в границах носителя одной функции $e_i(x)$ имеется только одна особая точка функции $f(x)$. Умножая последнее равенство на $f(x)$, мы видим, что можно исходить из представления

$$f(x) = \sum_{i=1}^\infty p_i(x)q_i(x), \tag{4}$$

где $q_i(x)$ — сдвиги тех же функций $x_+^\lambda, x_-^\lambda, x^{-n}$, а $p_i(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции, такие, что в пределах любого конечного

[1)] **Носителем** непрерывной функции $e(x)$ называется замыкание множества точек x, где $e(x) \neq 0$ (см. § 1, п. 4).

интервала ряд (4) оказывается **конечной** суммой. Тогда мы снова можем положить

$$\text{к.р. } f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x) \cdot \text{к.р. } q_i(x), \tag{5}$$

т.е.

$$(\text{к.р. } f(x), \varphi(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} (\text{к.р. } q_i(x), p_i(x)\varphi(x)); \tag{6}$$

здесь уже ряд всегда будет конечным, так как основные функции финитны. Операции сложения, умножения на бесконечно дифференцируемую функцию и дифференцирования снова не выводят за пределы класса (4). Разумеется, представление (4) данной функции $f(x)$,так же, как и представление (1), не будет единственным; но можно показать, что определение (5) не зависит от выбора этого представления.

Свойства $1°$–$3°$ проверяются без труда.

Обозначение «к.р.$f(x)$» в дальнейшем употребляться не будет: мы условимся обозначать каноническую регуляризацию функции $f(x)$ — или, лучше сказать, обобщенную функцию, отвечающую обычной функции $f(x)$, — тем же символом $f(x)$, подобно тому как в пп. 2 и 3 это было сразу принято для функций x_+^λ и др.

В частности, в соответствии с символикой, принятой в п. 3 § 1, под записью $\int f(x)\varphi(x)dx$, где $f(x)$ — обычная функция, допускающая каноническую регуляризацию, мы будем понимать результат применения этой канонической регуляризации к основной функции $\varphi(x)$.

Пример. В п. 4 § 2 мы встретились с функцией $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Ее можно представить при $|x| < \frac{\pi}{2}$ в виде

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = x\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\frac{1}{x} = \frac{p(x)}{x},$$

где $p(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция. Аналогично $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ записывается в окрестностях точек $k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Мы видим, что $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ допускает каноническую регуляризацию. На основных функциях, отличных от нуля лишь в малой окрестности нуля, эта регуляризация записывается следующим образом:

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}, \varphi(x)\right) = \left(\frac{p(x)}{x}, \varphi(x)\right) = \left(\frac{1}{x}, p(x)\varphi(x)\right) =$$
$$= \int_0^\infty \frac{p(x)\varphi(x) - p(-x)\varphi(-x)}{x}dx = \int_0^\infty [\varphi(x) - \varphi(-x)]\operatorname{ctg}\frac{x}{2}dx.$$

В силу свойства 2° производной от функционала будет каноническая регуляризация функции

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}},$$

т.е., в соответствии с определением x^{-2}, функционал, выражаемый формулой

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}, \varphi\right) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{4\varphi(0)}{x^2}\right] dx$$

(снова в предположении, что $\varphi(x) = 0$ вне малой окрестности нуля). Аналогично можно подсчитать следующие производные от обобщенной функции $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

8. Регуляризация других интегралов. В предыдущем пункте было показано, что следует понимать с точки зрения теории обобщенных функций под (расходящимся в обычном смысле) интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx,$$

где $f(x)$ — фиксированная функция с довольно общими степенными особенностями, а $\varphi(x)$ — произвольная основная функция. В частности, фиксируя эту основную функцию, мы получаем способ вычисления конкретных расходящихся интегралов.

Однако при этом остались в стороне уже такие простые, но важные интегралы, как $\int_0^b x^\lambda dx$ и $\int_0^\infty x^\lambda dx$ (первый из этих интегралов расходится при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -1$, второй — при всех λ), и многие другие. В этом пункте мы постараемся придать таким интегралам естественный смысл.

Регуляризация в конечном промежутке. В предыдущих пунктах мы рассматривали функционалы, определяемые функциями x_+^λ, x_-^λ, x^{-n} на полупрямой или на всей прямой. Можно рассматривать функционалы, определяемые интегралами по конечному отрезку, как, например,

$$(x^\lambda_{0\leqslant x\leqslant b}, \varphi) = \int_0^b x^\lambda \varphi(x)dx. \tag{1}$$

Мы взяли здесь отрезок $0 \leqslant x \leqslant b$ как наиболее типичный: на нем имеется одна точка возможной расходимости, причем концевая ($x = 0$). Случай отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, на котором нет особых точек, не представляет интереса; если же точка расходимости находится в середине отрезка, то мы разобьем его на два отрезка так, что каждый из них будет иметь точку расходимости на конце.

Итак, рассматриваем интеграл (1). Он сходится при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ и представляет собой при этом аналитическую функцию λ. Совершая преобразование

$$\int_0^b x^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^b x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx + \\ + \varphi(0)\frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \varphi'(0)\frac{b^{\lambda+2}}{(\lambda+2)} + \ldots + \varphi^{(n-1)}(0)\frac{b^{\lambda+n}}{(n-1)!(\lambda+n)}, \quad (2)$$

мы видим, что наш интеграл как функция от λ аналитически продолжается во всю плоскость λ, за исключением значений $\lambda = -1, -2, \ldots, -n, \ldots$, где он имеет полюсы 1-го порядка. Формулу (2) мы примем за определение регуляризации стоящего слева интеграла при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ Обозначим этот функционал через $x^\lambda_{0 \leqslant x \leqslant b}$.

В качестве $\varphi(x)$ здесь можно фактически брать любую бесконечно дифференцируемую при $0 \leqslant x \leqslant b$ функцию, так как такую функцию всегда можно продолжить за точки 0 и b так, чтобы получилась финитная бесконечно дифференцируемая функция.

Возьмем, в частности, $\varphi(x) \equiv 1$ при $0 \leqslant x \leqslant b$. Мы получим равенство

$$\int_0^b x^\lambda dx = \frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \quad (3)$$

справедливое при всех $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ Излишне указывать, что интеграл в левой части здесь понимается (при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -1$) не в обычном смысле, а как регуляризованный по нашему правилу[1)].

Рассмотрим теперь любую функцию $f(x)$ вида

$$f(x) = \begin{cases} x^\lambda p(x) & \text{при } 0 < x \leqslant b, \\ 0 & \text{при остальных } x, \end{cases} \quad (4)$$

[1)] В данном случае правая часть, а вместе с ней и левая имеют единственную особенность при $\lambda = -1$.

где $p(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция. По аналогии с п. 7 мы рассмотрим регуляризацию функции $f(x)$, определяемую формулой

$$(\text{рег.}\, f(x), \varphi(x)) = \left(x^\lambda_{0 \leqslant x \leqslant b}, p(x)\varphi(x)\right). \tag{5}$$

Следующее замечание будет полезно в дальнейшем. *Справедливое при* $\operatorname{Re}\lambda > -1$ *равенство*

$$\int\limits_0^b x^\lambda \varphi(x)dx = \int\limits_0^c x^\lambda \varphi(x)dx + \int\limits_c^b x^\lambda \varphi(x)dx, \tag{6}$$

где $0<c<b$*, сохраняется при всех* $\lambda \neq -1, -2, \ldots$*, если под первыми двумя интегралами понимать указанные выше регуляризации.* Действительно, все три интеграла допускают независимые аналитические продолжения в полную плоскость λ с исключенными точками $-1, -2, \ldots$, причем последний интеграл существует даже при всех λ в обычном смысле, и равенство (6) сохраняется в силу теоремы единственности.

Теперь рассмотрим функцию $f(x)$ со степенными особенностями в точках a и b, так что в окрестности точки a имеет место представление

$$f(x) = (x-a)^\lambda p_a(x),$$

а в окрестности точки b —представление

$$f(x) = (b-x)^\mu p_b(x),$$

где $p_a(x)$ и $p_b(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции, первая — в интервале $a \leqslant x < b$, вторая — в интервале $a < x \leqslant b$. Определим теперь регуляризацию функции $f(x)$, т.е. интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

равенством

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int\limits_a^c f(x)\varphi(x)dx + \int\limits_c^b f(x)\varphi(x)dx,$$

где c — точка между a и b, а интегралы справа определены как соответствующие регуляризации.

Результат прежде всего не зависит от выбора точки c.

Действительно, если $c' > c$ — любая другая точка на отрезке $[a,b]$, то, по сказанному выше,

$$\int_a^{c'} f(x)\varphi(x)dx = \int_a^{c} f(x)\varphi(x)dx + \int_c^{c'} f(x)\varphi(x)dx,$$

$$\int_c^{b} f(x)\varphi(x)dx = \int_c^{c'} f(x)\varphi(x)dx + \int_{c'}^{b} f(x)\varphi(x)dx$$

и, следовательно,

$$\int_a^{c'} f(x)\varphi(x)dx + \int_{c'}^{b} f(x)\varphi(x)dx = \int_a^{c} + \int_c^{c'} + \int_{c'}^{b} = \int_a^{c} + \int_c^{b},$$

что и требуется.

В качестве примера рассмотрим B-функцию Эйлера

$$B(\lambda,\mu) = \int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}dx.$$

Этот интеграл сходится в обычном смысле при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, $\mathrm{Re}\,\mu > 0$; по доказанному, он аналитически продолжается во всю плоскость λ и во всю плоскость μ, кроме значений $\lambda = 0,-1,-2,\ldots$ и $\mu = 0,-1,-2,\ldots$ Формула регуляризации при $\mathrm{Re}\,\lambda > -k$, $\mathrm{Re}\,\mu > -s$ имеет вид

$$\begin{aligned} B(\lambda,\mu) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\lambda-1}\left[(1-x)^{\mu-1} - \sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r\frac{\Gamma(\mu)x^r}{r!\Gamma(\mu-r)}\right]dx\, + \\ + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)^{\mu-1}\left[x^{\lambda-1} - \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^r\frac{\Gamma(\lambda)(1-x)^r}{r!\Gamma(\lambda-r)}\right]dx\, + \\ + \sum_{r=0}^{k-1}\frac{(-1)^r\Gamma(\mu)}{2^{r+\lambda}r!\Gamma(\mu-r)(r+\lambda)} + \sum_{r=0}^{s-1}\frac{(-1)^r\Gamma(\lambda)}{2^{r+\mu}r!\Gamma(\lambda-r)(r+\mu)}. \end{aligned}$$

Регуляризация на бесконечности. Выше мы придали смысл интегралу

$$\int_0^b x^\lambda dx$$

при всех $\lambda \neq -1$, понимая его как результат применения функционала $x^{\lambda}_{0\leqslant x\leqslant b}$ к основной функции $\varphi(x)$, равной 1 в промежутке $0 \leqslant x \leqslant b$. Было бы желательно осмыслить подобным образом интеграл по бесконечному промежутку

$$\int\limits_b^{\infty} x^{\lambda} dx \qquad (b > 0).$$

Но у нас нет основной функции, равной 1 в промежутке от b до ∞. Поэтому мы примем следующее условие. Мы будем рассматривать класс $K(b,\infty)$ всех функций $\varphi(x)$, каждая из которых определена и бесконечно дифференцируема при всех $x \geqslant b$ и притом такова, что преобразование инверсии $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \psi(x)$ переводит ее в основную функцию на интервале $\left(0, \frac{1}{b}\right)$; точнее, в функцию, которая совпадает на этом интервале с некоторой основной функцией пространства K. Тогда мы определяем функционал

$$\int\limits_b^{\infty} x^{\lambda}\varphi(x) dx$$

формулой, отвечающей постановке $\frac{1}{x} = y$:

$$\int\limits_b^{\infty} x^{\lambda}\varphi(x) dx = \int\limits_0^{\frac{1}{b}} y^{-\lambda-2}\varphi\left(\frac{1}{y}\right) dy,$$

причем получающийся интеграл, если нужно, понимается в указанном выше регуляризованном смысле; он существует, следовательно, при $-\lambda - 2 \neq -1, -2, \ldots$, т.е. при $\lambda \neq -1, 0, +1, \ldots$

Для функции $F(x)$, определенной в промежутке $[b,\infty)$ и имеющей вид $F(x) = x^{\lambda} f(x)$, где $f(x)$ — функция класса $K(b,\infty)$, применим в качестве формулы регуляризации следующую формулу:

$$(\text{рег.}\, F, \varphi) = \int\limits_b^{\infty} F(x)\varphi(x) dx = \int\limits_b^{\infty} x^{\lambda}[f(x)\varphi(x)] dx.$$

Очевидно, что для функционала рег.F, определенного на функциях $\varphi(x)$ класса $K(b,\infty)$, выполнены условия:

$$\text{рег.}\, [\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2] = \alpha_1 \cdot \text{рег.}\, F_1 + \alpha_2 \cdot \text{рег.}\, F_2,$$
$$\text{рег.}\, [g(x)F(x)] = g(x) \cdot \text{рег.}\, F(x)$$

для любой бесконечно дифференцируемой функции $g(x)$.

Перейдем теперь к самому общему случаю, когда функция $F(x)$ имеет несколько (конечное число) степенных особенностей. Перенумеровав особенности в порядке возрастания аргумента, для определенности, $-\infty < b_1 < \ldots < b_n < \infty$, мы разложим ось на конечное число промежутков:

$$(-\infty, a_1),\ (a_1, b_1),\ (b_1, a_2),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (b_n, a_{n+1}),\ (a_{n+1}, \infty),$$

на каждом из которых остается лишь по одной особой точке на том или ином конце, в каждом из этих промежутков применим соответствующую формулу регуляризации и сложим результаты. Так же как и выше, легко показать, что общий результат не зависит от выбора промежуточных точек $a_1, \ldots, a_n$.

Отметим далее, что вместе с регуляризациями функции $F(x)$ на каждом из этих промежутков полученная регуляризация на оси удовлетворяет условиям:

$$\text{рег.}\,[\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2] = \alpha_1 \cdot \text{рег.}\,F_1 + \alpha_2 \cdot \text{рег.}\,F_2,$$
$$\text{рег.}\,[g(x)F(x)] = g(x) \cdot \text{рег.}\,F(x)$$

($g(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция).

Примеры. 1. Найдем $\int\limits_0^\infty x^\lambda dx$.

Как отмечено выше, при $b > 0$

$$\int\limits_0^b x^\lambda dx = \frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1} \quad (\lambda \neq -1).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_b^\infty x^\lambda dx = -\frac{b^{\lambda+1}}{\lambda+1} \quad (\lambda \neq -1).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^\infty x^\lambda dx = \int\limits_0^b x^\lambda dx + \int\limits_b^\infty x^\lambda dx = 0 \quad (\lambda \neq -1).$$

Так как результат есть аналитическая функция λ, то он справедлив и в исключенной точке $\lambda = -1$.

2. Интеграл

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(1+x)^{-\lambda-\mu}dx$$

при Re $\lambda>0$, Re $\mu>0$ сходится в обычном смысле и, как легко проверить подстановкой $\frac{x}{1+x}=y$, совпадает с $B(\lambda,\mu)$. Поэтому его аналитическое продолжение совпадает с $B(\lambda,\mu)$ при всех $\lambda,\mu\neq-1,-2,\ldots$

3. Найдем

$$I=\int_0^\infty\left[(x+1)^\lambda-x^\mu\right]^n dx.$$

Разлагая подынтегральную функцию по формуле бинома и применяя первое свойство канонической регуляризации, находим:

$$I=\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^k\int_0^\infty(x+1)^{(n-k)\lambda}x^{k\mu}dx=$$

$$=\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^kB(k\mu+1,k(\lambda-\mu)-n\lambda-1)$$

в силу результата предыдущего примера.

Заметим, что при $\lambda=\mu, -\frac{1}{n}<\lambda<1-\frac{1}{n}$ интеграл I сходится в обычном смысле; мы получаем, таким образом, следующую «классическую» формулу

$$\int_0^\infty\left[(x+1)^\lambda-x^\lambda\right]^n dx=\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^kB(k\lambda+1,-n\lambda-1)$$

$$\left(-\frac{1}{n}<\lambda<1-\frac{1}{n}\right).$$

9. Обобщенная функция r^λ. Полагая $r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, рассмотрим функционал r^λ, действующий по формуле

$$(r^\lambda,\varphi)=\int_{R_n}r^\lambda\varphi(x)dx, \tag{1}$$

которая имеет смысл при $\operatorname{Re}\lambda > -n$. В силу возможности дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(r^\lambda,\varphi) = \int r^\lambda \ln r\varphi(x)dx$$

функционал r^λ представляет собой аналитическую функцию от λ в области $\operatorname{Re}\lambda > -n$. Для $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -n$ функция r^λ локально интегрируема; мы определим функционал r^λ методом аналитического продолжения. Можно это сделать, обобщая схему предыдущих пунктов (эта идея впоследствии будет рассмотрена в применении к более широкому классу функций вида $P^\lambda(x)$, где $P(x)$ — положительная однородная функция; см. гл. III § 3). Мы здесь используем более простой прием, основанный на сведении функции r^λ к x_+^λ.

Переходя в интеграле (1) к сферическим координатам, приводим его к виду

$$(r^\lambda,\varphi) = \int_0^\infty r^\lambda\left\{\int_\Omega \varphi(r\omega)d\omega\right\}r^{n-1}dr,$$

где $d\omega$ — элемент единичной сферы Ω. Внутренний интеграл можно представить в форме

$$\int_\Omega \varphi(r\omega)d\omega = \Omega_n S_\varphi(r),$$

где Ω_n означает поверхность единичной сферы в n-мерном пространстве, а $S_\varphi(r)$ есть среднее из значений функции $\varphi(x)$ на сфере радиуса r. Итак, мы приходим к формуле

$$(r^\lambda,\varphi) = \Omega_n\int_0^\infty r^{\lambda+n-1}S_\varphi(r)dr. \tag{2}$$

Установим некоторые свойства функции $S_\varphi(r)$. Мы утверждаем, что *функция* $S_\varphi(r)$ (определенная при $r\geqslant 0$) *финитна, бесконечно дифференцируема и все ее производные нечетного порядка обращаются в нуль при* $r=0$.

При достаточно большом r функция $\varphi(x)$ обращается в нуль; поэтому и ее среднее $S_\varphi(r)$ обращается в нуль; таким образом, $S_\varphi(r)$ — финитная функция.

Очевидно также, что $S_\varphi(r)$ бесконечно дифференцируема при $r>0$.

Чтобы убедиться в наличии всех производных у функции $S_\varphi(r)$ и при $r=0$, разложим функцию $\varphi(x)$ по формуле Тейлора. Тогда будем иметь:

$$\Omega_n S_\varphi(r) = \int\limits_\Omega \left[\varphi(0) + \sum \frac{\partial\varphi(0)}{\partial x_j} x_j + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3!}\sum \frac{\partial^3\varphi(0)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} x_i x_j x_k + \ldots \right] d\omega.$$

Ясно, что каждое слагаемое подынтегральной суммы (кроме остаточного члена), содержащие нечетное число множителей x_j, после интегрирования обращается в нуль. Слагаемые подынтегральной суммы, содержащие четное число, скажем $2m$, множителей x_j, после интегрирования и суммирования дадут член вида $a_m r^{2m}$. Итак, мы получаем:

$$S_\varphi(r) = \varphi(0) + a_1 r^2 + a_2 r^4 + \ldots + a_n r^{2k} + o(r^{2k})^{1)}. \qquad (3)$$

Это выражение показывает, что при $r=0$ функция $S_\varphi(r)$ имеет производные до порядка $2k$, причем нечетные производные равны нулю. Так как k, можно взять произвольным, то $S_\varphi(r)$ бесконечно дифференцируема при $r=0$ и все ее нечетные производные при $r=0$ обращаются в нуль.

Отсюда следует, что функцию $S_\varphi(r)$ можно рассматривать как четную основную функцию переменного r. Интеграл (2) в таком случае можно понимать как результат применения функционала $\Omega_n x_+^\mu$ $(\mu = \lambda + n - 1)$ к основной функции $S_\varphi(x)$. Но мы хорошо знаем, что функция x_+^μ, аналитическая при Re $\mu > -1$ (т.е. Re $\lambda > -n$) допускает аналитическое продолжение на всю плоскость $\mu(\lambda)$ с исключенными точками $\mu = -1, -2, \ldots$ $(\lambda = -n, -n+1, \ldots)$, в которых она имеет полюсы 1-го порядка; при этом вычет в полюсе $\mu = -m$ $(\lambda = -n - m + 1)$ равен

$$\frac{\left((-1)^{m-1}\delta^{(m-1)}(x), S_\varphi(x)\right)}{(m-1)!} = \frac{S_\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}.$$

Но так как нечетные производные функции $S_\varphi(x)$ обращаются в нуль при $x=0$, то полюсов, отвечающих четным значениям m, на самом деле нет. Остается серия полюсов, отвечающих значениям $m = 1, 3, 5, \ldots$ или, что то же, $\lambda = -n,\ -n-2,\ -n-4, \ldots$

[1] $y(x) = o(x)$ означает, что отношение $\frac{y}{x}$ стремится к нулю.

Заметим, что вычет функции $(r^\lambda, S_\varphi(x))$ при $\lambda = -n-2k$ $(k=0,1,\ldots)$, как вытекает из вышесказанного, равен

$$\Omega_n \frac{\left(\delta^{(2k)}(x), S_\varphi(x)\right)}{(2k)!} = \Omega_n \frac{S_\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!}. \tag{4}$$

В частности, в точке $\lambda = -n$ функция (r^λ, S_φ) имеет полюс 1-го порядка с вычетом $\Omega_n S_\varphi(0) = \Omega_n \varphi(0)$. Это означает, что обобщенная функция r^λ при $\lambda = -n$ имеет полюс 1-го порядка с вычетом $\Omega_n \delta(x)$.

Величину $S_\varphi^{(2k)}(0)$ можно выразить непосредственно через функцию φ, минуя ее усреднение.

Для этого мы построим иное выражение вычета обобщенной функции r^λ при $\lambda = -n-2k$. Воспользуемся формулой дифференцирования

$$\Delta(r^{\lambda+2}) = (\lambda+2)(\lambda+n)r^\lambda,$$

где Δ —оператор Лапласа. (При $\operatorname{Re}\lambda > 0$ эта формула доказывается непосредственным подсчетом левой части, для остальных λ она остается справедливой в силу аналитического продолжения.) Итерируя эту формулу, можно получить при любом целом k равенство

$$r^\lambda = \frac{\Delta^k r^{\lambda+2k}}{(\lambda+2)(\lambda+4)\ldots(\lambda+2k)(\lambda+n)(\lambda+n+2)\ldots(\lambda+n+2k-2)}.$$

Вычет функции r^λ при $\lambda = -n-2k$ можно теперь сосчитать как вычет правой части при этом значении λ. Так как знаменатель правой части при $\lambda = -n-2k$ не обращается в нуль, то достаточно найти вычет числителя. Но для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\left(\Delta^k r^{\lambda+2k}, \varphi(x)\right) = \left(r^{\lambda+2k}, \Delta^k \varphi(x)\right),$$

т.е. мы должны взять вычет функции $\left(r^\lambda, \Delta^k\varphi(x)\right)$ при $\mu = -n$. Такой вычет мы выше вычислили для любой основной функции; он равен значению этой основной функции в точке $x = 0$, умноженному на Ω_n. В данном случае мы получаем значение вычета, равное $\Omega_n \Delta^k \varphi(0)$. Отсюда следует, что вычет функции (r^λ, φ) при $\lambda = -n-2k$ равен

$$\frac{\Omega_n \Delta^k \varphi(0)}{(-2k-n+2)\ldots(-n)(-2k)\ldots(-2)} = \frac{\Omega_n \left(\Delta^k \delta(x), \varphi(x)\right)}{2^k k! n(n+2)\ldots(n+2k-2)}, \tag{5}$$

а вычет обобщенной функции r^λ при том же λ равен

$$\frac{\Omega_n \Delta^k \delta(x)}{2^k k! n(n+2)\ldots(n+2k-2)}. \tag{5'}$$

Сравнивая величину (5) с найденным выше выражением вычета (4), находим, что

$$S_\varphi^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!\Omega_n \Delta^k \varphi(0)}{2^k k! n(n+2)\ldots(n+2k-2)}. \tag{6}$$

Этот результат дает возможность написать разложение Тейлора для функции $S_\varphi(r)$:

$$S_\varphi(r) = \varphi(0) + \frac{1}{2!}S''_\varphi(0)r^2 + \ldots + \frac{1}{(2k)!}S_\varphi^{(2k)}(0)r^{2k} + \ldots = \\ = \Omega_n \sum_{k=0}^{m} \frac{\Delta^k \varphi(0)}{2^k k! n(n+2)\ldots(n+2k-2)} + \ldots \quad (7)$$

(формула Пицетти[1]).

Для дальнейшего нам удобно нормировать обобщенную функцию r^λ так же, как это было сделано выше для степеней x на прямой. Для этого разделим r^λ на

$$(r^\lambda, e^{-r^2}) = \int r^\lambda e^{-r^2} r^{n-1} d\Omega dr = \frac{\Omega_n}{2}\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right).$$

Функция

$$\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

является, очевидно, целой аналитической функцией λ. Значение этой функции в особых точках числителя и знаменателя можно найти как отношение соответствующих вычетов. Таким образом, мы получаем:

$$\left.\frac{2}{\Omega_n}\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n-2k} = \frac{\underset{\lambda=-n-2k}{\text{выч.}}\; r^\lambda}{\underset{\lambda=-n-2k}{\text{выч.}}\left(r^\lambda, e^{-r^2}\right)} = \\ = \frac{\frac{\Omega_n \Delta^k \delta(x)}{2^k k! n(n+2)\ldots(n+2k-2)}}{\frac{(\Omega_n \delta^{(2k)}(x), e^{-x^2})}{(2k)!}} = (-1)^k \frac{\Delta^k \delta(x)}{2^k k! n \ldots (n+2k-2)}. \quad (8)$$

В частности, при $k=0$ получаем:

$$\left.\frac{2}{\Omega_n}\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n} = \delta(x). \quad (9)$$

10. Разложение функции r^λ на плоские волны. Пусть $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ — точка единичной сферы в пространстве R_n. Пусть

[1] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 1951, гл. IV, § 3.

$\mathrm{Re}\,\lambda > -1$; построим обобщенную функцию $F_\lambda(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)$ по формуле

$$(F_\lambda(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n), \varphi(x)) = \int \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Совершая поворот осей $y = ux$, при котором точка ω приобретает координаты $(1,0,\ldots,0)$ и полагая $\psi(y) = \varphi(u^{-1}y) = \varphi(x)$, мы преобразуем этот интеграл к виду

$$\int \frac{|y_1|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \psi(y) dy = \int\limits_{y_1=-\infty}^{\infty} \frac{|y_1|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \left\{ \int\limits_{y_2,\ldots,y_n} \psi(y) dy_2 \ldots dy_n \right\} dy_1. \quad (2)$$

Выражение в фигурных скобках есть некоторая функция $\varphi_0(y_1)$, бесконечно дифференцируемая и финитная, т.е. основная функция переменного y_1. Но в таком случае выражение (2) может быть аналитически продолжено на все значения λ; вместе с ним определяется для всех λ и функционал $F_\lambda(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)$.

Легко видеть, что функционал $F_\lambda(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)$ непрерывно зависит от точки ω. Действительно, вместе с точкой ω непрерывно меняется подпространство, ортогональное к вектору ω, непрерывно меняется интеграл от функции $\psi(y)$ по этому подпространству и, следовательно, непрерывно меняется функция $\varphi_0(y_1)$; более того, она меняется непрерывно в смысле сходимости в основном пространстве K. Поэтому при каждом фиксированном λ непрерывно меняется величина $(F_\lambda(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n), \varphi(x))$, что и означает непрерывность функционала F_λ по параметру ω (ср. § 1, п. 8).

Поэтому можно *проинтегрировать функционал F_λ по параметру* ω, пробегающему единичную сферу Ω, т.е. построить такой функционал G_λ, что для любой основной функции $\varphi(x)$

$$(G_\lambda, \varphi(x)) = \int\limits_\Omega (F_\lambda, \varphi(x)) d\omega$$

(подробнее об интегрировании по параметру см. в добавлении 2).

Вычислим этот интеграл вначале для $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$. В этом случае, как легко видеть,

$$\int\limits_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda d\omega$$

есть сферически симметричная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, однородная степени λ, и с точностью до множителя равная r^λ. Иными словами,

$$\int\limits_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda d\omega = C(n, \lambda) r^\lambda. \tag{3}$$

Чтобы найти значение постоянной $C(n, \lambda)$, положим $x_n = 1$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$. Мы получим тогда[1)]

$$C(n, \lambda) = \int\limits_\Omega |\omega_n|^\lambda d\omega = 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}.$$

Подставляя значение $C(n, \lambda)$ в формулу (3) и деля на $\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$, получаем формулу

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda d\omega = \frac{2r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}, \tag{4}$$

основную для дальнейшего. Эта формула, установленная для $\operatorname{Re} \lambda > -1$, остается справедливой и при остальных значениях λ в силу единственности аналитического продолжения (см. добавление 2). Она дает разложение функции $\frac{2r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ на так называемые «плоские волны» и тем самым, как будет показано ниже, часто позволяет сводить пространственные задачи к плоским и одномерным.

[1)] Для вычисления интеграла переходим к сферическим координатам $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$. При этом

$$\omega_n = \cos\theta_{n-1}, \quad \text{а} \quad d\omega = \sin^{n-2}\theta_{n-1} d\omega_{n-1},$$

где $d\omega_{n-1}$ — элемент поверхности сферы в $(n-1)$-мерном пространстве. Интеграл приобретает вид

$$2\Omega_{n-1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\theta \cos^\lambda \theta d\theta = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)},$$

поскольку

$$\Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \quad \text{а} \quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\theta \cos^\lambda \theta d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}\right).$$

Рассмотрим частный случай этой формулы при $\lambda = -n$. Если n нечетно, то по формуле (3) п. 5

$$\left.\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(x).$$

С другой стороны, по формуле (9) п. 9

$$\left.\frac{2r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n} = \Omega_n \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где Ω_n — площадь поверхности единичной сферы. Подставив эти значения в формулу (4) и разделив обе части равенства на Ω_n, получаем:

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\pi^{\frac{n-1}{2}} (n-1)! \Omega_n} \int\limits_\Omega \delta^{(n-1)}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n) d\omega.$$

В пространстве нечетного числа измерений

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-2)}.$$

Подставляя это значение Ω_n и упрощая коэффициент, находим окончательную формулу:

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int\limits_\Omega \delta^{(n-1)}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n) d\omega. \tag{5}$$

Выведем теперь формулу, дающую разложение δ-функции на плоские волны в пространстве четного числа измерений. Правая часть формулы (4) по-прежнему при $\lambda = -n$ обратится в $\Omega_n \delta(x_1, \ldots, x_n)$. С другой стороны, при четном n

$$\left.\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n} = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)} x^{-n},$$

где выражение x^{-n} определено формулой (5) п. 3. Подставляя эти значения в (4), мы получаем, что при четном n

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \pi^{\frac{n-1}{2}} \Omega_n} \int\limits_\Omega (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{-n} d\omega.$$

Вспоминая, что $\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, мы получаем, что в случае четного n

$$\delta(x_1,\ldots,x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Omega}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{-n} d\omega^{1)}. \qquad (6)$$

Для пояснения формулы (5) применим обе части равенства к функции $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Мы получим:

$$\varphi(0,\ldots,0) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\Omega} d\omega \int\limits_{\sum\omega_k x_k = 0} \frac{\partial^{n-1}\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial\nu^{n-1}} d\sigma_0, \qquad (7)$$

где $d\sigma_0$ — элементарная площадка в плоскости $\sum\omega_k x_k = 0$, а $\frac{\partial}{\partial\nu}$ — дифференцирование по направлению ортогонального к ней вектора ω. Аналогично можно записать формулу (6). Положим для основной функции $\varphi(x)$

$$\psi(\xi,\omega) \equiv \psi(\xi) = \int\limits_{\sum\omega_k x_k = \xi} \varphi(x_1,\ldots,x_n) d\sigma_\xi,$$

где $d\sigma_\xi$ — элементарная площадка в плоскости $\sum\omega_k x_k = \xi$ (величина этого интеграла зависит от направления вектора ω). Очевидно, что $\psi(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция. Согласно формуле (5) п. 3

$$(\xi^{-n},\psi(\xi)) = \int\limits_0^\infty \xi^{-n}\left\{\psi(\xi) + \psi(-\xi) - 2\left[\psi(0) + \frac{\xi^2}{2!}\psi''(0) + \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots + \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!}\psi^{(n-2)}(0)\right]\right\} d\xi.$$

---

[1] Случай четного n можно было бы объединить со случаем нечетного n в единой формуле

$$\delta(x_1,\ldots,x_n) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Omega}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n - i0)^{-n} d\omega$$

в силу определения функции $(x - i0)^{-n}$ (см. п. 6).

Теперь можно записать результат применения формулы (6) к основной функции $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(0,\ldots,0)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\times$$
$$\times\int\limits_{\Omega}((\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)^{-n},\psi(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n))d\omega. \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) дают решение так называемой *проблемы Радона* о восстановлении функции $\varphi(x)$ (или $\psi(x)$) по известным ее интегралам по гиперплоскостям $(\omega,x)=C$.

11. Однородные функции. Рассмотрим теперь введенные выше обобщенные функции x_+^λ, x_-^λ и др. еще с новой точки зрения — именно, в аспекте понятия однородной функции. Мы определили в § 1, п. 6 однородную обобщенную функцию степени λ уравнением

$$f(\alpha x)=\alpha^\lambda f(x), \quad (1)$$

или, что то же,

$$\left(f(x),\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)=\alpha^{\lambda+n}(f(x),\varphi(x))$$

для любой основной функции $\varphi(x)$ и любого положительного α.

Установим некоторые простые свойства обобщенных однородных функций.

1) *Сумма двух однородных функций степени λ есть снова однородная функция той же степени λ.*

2) *Произведение однородной обобщенной функции f степени λ на бесконечно дифференцируемую однородную функцию $a(x)$ степени μ есть однородная обобщенная функция степени $\lambda+\mu$.*

   Доказательства свойств 1 и 2 получаются непосредственно применением определения (1).

3) *Производная по x_j однородной обобщенной функции f степени λ есть однородная обобщенная функция степени $\lambda-1$.*

   Действительно, мы имеем:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j},\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)=-\left(f,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)=-\frac{1}{\alpha}\alpha^{\lambda+n}\left(f,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=$$
$$=\alpha^{\lambda-1+n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j},\varphi\right).$$

4) *Однородные функции различной степени линейно независимы.* Предположим, что имеет место равенство

$$c_1 f_1(x) + \ldots + c_m f_m(x) = 0,$$

где $f_k(x)$ — однородная обобщенная функция степени λ_k, причем все числа λ_k различны. Согласно определению, при любом положительном α и любой основной функции $\varphi(x)$ имеет место равенство

$$c_1 \alpha^{\lambda_1}(f_1, \varphi) + c_2 \alpha^{\lambda_2}(f_2, \varphi) + \ldots + c_m \alpha^{\lambda_m}(f_m, \varphi) = 0.$$

Так как показатели λ_k по предположению различны, то при любом k и при любой φ мы имеем $c_k(f_k, \varphi) = 0$. Если $f_k \neq 0$, то функцию $\varphi(x)$ можно взять так, чтобы было $(f_k, \varphi) \neq 0$; отсюда $c_k = 0$ при каждом k, что и требуется.

5) *Пусть f_λ — однородная обобщенная функция степени λ, аналитическая по λ в области Λ. Пусть, далее, f_λ допускает аналитическое продолжение по λ в более широкую область $\Lambda_1 \supset \Lambda$. Тогда функционал f_λ и в более широкой области Λ_1 остается однородным степени λ.*

Действительно, при любом фиксированном λ и любой основной функции $\varphi(x)$ в области Λ выполняется равенство

$$\left(f_\lambda, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f_\lambda, \varphi).$$

Справа и слева стоят аналитические в области Λ функции от λ. В силу единственности аналитического продолжения, они совпадают и в области Λ_1, что нам и требуется.

Рассмотренная в предыдущих пунктах обобщенная функция x_+^λ при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ является однородной функцией степени λ. Далее, мы знаем, что функция x_+^λ допускает аналитическое продолжение во всю плоскость λ с исключенными точками $-1, -2, \ldots$ В силу свойства 5 *функция x_+^λ является однородной функцией степени λ при всех комплексных $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n, \ldots$* То же относится к функции x_-^λ. Функции $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, $(x + i0)^\lambda$, $(x - i0)^\lambda$, как линейные комбинации функций x_+^λ и x_-^λ, также однородные функции степени λ; при этом каждая из них однородна в полной области своего существования: функция $|x|^\lambda$ однородна при $\lambda \neq -1, -3, -5, \ldots$, функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ однородна при $\lambda \neq -2, -4, \ldots$, функции $(x + i0)^\lambda$ и $(x - i0)^\lambda$ однородны при всех λ без исключений. В частности, обобщенная функция x^{-m} однородна степени $-m$ при любом целом m. Имеется еще одна однородная функция степени $-m$, именно $\delta^{(m-1)}(x)$; действительно,

$$\left(\delta^{(m-1)}(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = (-1)^{m-1}\frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{\alpha^{m-1}} = \alpha^{-m+1}(\delta^{(m-1)}(x), \varphi(x)).$$

Найдем все однородные обобщенные функции порядка λ на прямой. Согласно определению такие функции удовлетворяют уравнению

$$f(\alpha x) = \alpha^{\lambda} f(x) \tag{2}$$

при любом $\alpha > 0$. Дифференцируя это соотношение по α и полагая затем $\alpha = 1$, получаем:

$$x f'(x) = \lambda f(x). \tag{3}$$

Найдем все решения этого уравнения. При $x \neq 0$ можно интегрировать обычным образом; это приводит нас к выводу, что искомая обобщенная функция $f(x)$ должна совпадать с $C_1 x^{\lambda}$ при $x > 0$ и $C_2|x|^{\lambda}$ при $x < 0$. Такого рода обобщенные функции имеются уже у нас: это функции $C_1 x_+^{\lambda}$ и $C_2 x_-^{\lambda}$ при $\lambda \neq -n$, $n = 1, 2, \ldots$ Предполагая, что эти неравенства выполнены, рассмотрим обобщенную функцию $f_0(x) = f(x) - C_1 x_+^{\lambda} - C_2 x_-^{\lambda}$. Она вместе с каждым слагаемым удовлетворяет уравнению (2) и в то же время равна нулю при $x \neq 0$. Таким образом, функция $f_0(x)$ сосредоточена в одной точке.

Во втором выпуске будет доказана следующая теорема, которую мы сейчас примем без доказательства. *Если обобщенная функция f_0 сосредоточена в одной точке, скажем $x_0 = 0$, то она имеет вид*

$$f_0(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \delta^{(k)}(x)$$

с некоторым (конечным) m.

В силу этой теоремы мы имеем

$$f(x) - C_1 x_+^{\lambda} - C_2 x_-^{\lambda} - \sum_{k=0}^{m} c_k \delta^{(k)}(x) = 0.$$

Применяя свойство 4, получаем $c_0 = c_1 = \ldots = c_m = 0$, и, следовательно,

$$f(x) = C_1 x_+^{\lambda} + C_2 x_-^{\lambda}$$

есть общее решение поставленной задачи при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

Пусть теперь $\lambda = -n$ есть целое отрицательное число. Будем предполагать, что $f(x)$ — четная функция при четном n и нечетная функция при нечетном n. При $x \neq 0$ функция $f(x)$ должна совпадать с функцией Cx^{-n}. Обобщенная однородная функция, обладающая этим свойством, известна, именно, Cx^{-n}. Разность $f_0(x) = f(x) - Cx^{-n}$, как и выше, сосредоточена в точке $x = 0$ и есть линейная комбинация δ-функции и ее производных. Снова применяя свойство 4, получаем, что общее решение уравнения (2) при $\lambda = -n$ имеет вид

$$f(x) = Cx^{-n} + C_1\delta^{(n-1)}(x).$$

Во всех случаях получаются две линейно независимые однородные обобщенные функции порядка λ.

В n-мерном пространстве обобщенная функция r^λ при $\operatorname{Re}\lambda > -n$, очевидно, однородная функция степени λ. В силу свойства 5 она остается однородной всюду, куда она аналитически продолжается, т.е. всюду в плоскости λ, кроме точек $\lambda = -n, -n-2, \ldots$ Функция $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ — однородная функция степени $-n$, что можно получить как непосредственно из ее определения, так и с помощью формулы (9) п. 9.

Используя однородность функций $\delta^{(n-1)}(x)$ и x^{-n}, мы можем преобразовать формулы разложения δ-функции на плоские волны (п. 10, формулы (5) и (6)) к аффинно-инвариантному виду. Рассмотрим произвольную поверхность S, звездную относительно точки O; она получается из единичной сферы умножением радиуса-вектора, идущего в точку $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, на положительное число $f(\omega)$. Положим $\rho_k = f(\omega)\omega_k$. В силу однородности функции $\delta^{(n-1)}(x)$ мы имеем

$$\delta^{(n-1)}(\rho_1 x_1 + \ldots + \rho_n x_n) = [f(\omega)]^{-n}\delta^{(n-1)}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n);$$

с другой стороны, произведение $[f(\omega)]^n d\omega$ есть элемент dS поверхности S; поэтому при нечетном n имеет место равенство

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = c_n \int\limits_\Omega \delta^{(n-1)}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)d\omega = \\ = c_n \int\limits_S \delta^{(n-1)}(\rho_1 x_1 + \ldots + \rho_n x_n)ds. \quad (4)$$

Аналогично, при четном n

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = c_n \int\limits_{\Omega} (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{-n} d\omega =$$
$$= c_n \int\limits_{S} (\rho_1 x_1 + \ldots + \rho_n x_n)^{-n} ds. \quad (5)$$

Формулы (4)–(5) имеют уже аффинно-инвариантную запись.

§ 4. Присоединенные функции[1)]

1. Присоединенные функции. Однородные функции, как это следует из их определения, являются собственными функциями оператора подобного преобразования u:

$$uf(x) = f(\alpha x).$$

Действительно, если $f(x)$ — однородная функция степени λ, то

$$uf(x) = f(\alpha x) = \alpha^{\lambda} f(x).$$

У произвольного линейного преобразования, наряду с собственной функцией f_0, отвечающей данному собственному значению, имеются обычно так называемые присоединенные функции различных порядков. Функции $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ называются *присоединенными к собственной функции* f_0 *преобразования* u, если они удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &uf_0 = af_0, \\ &uf_1 = af_1 + bf_0, \\ &uf_2 = af_2 + bf_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &uf_k = af_k + bf_{k-1}, \end{aligned}$$

т.е. линейное преобразование u воспроизводит присоединенную функцию k-го порядка с точностью до присоединенной функции $(k-1)$-го порядка.

Заметим при этом, что, как легко проверить, сумма присоединенной функции k-го порядка и присоединенной функции низшего порядка снова представляет собой присоединенную функцию k-го порядка. В конечномерном пространстве, в базисе, состоящем из собственных и

[1)]Этот параграф при первом чтении можно пропустить.

присоединенных векторов линейного преобразования, матрица этого преобразования имеет жорданову нормальную форму. Присоединенные векторы имеет жорданову нормальную форму. Присоединенные векторы выбираются при этом так, чтобы постоянная b равнялась единице.

Возвращаясь к функциям и к оператору подобного преобразования в области независимых переменных, мы скажем, что *присоединенной функцией 1-го порядка степени* λ называется функция $f_1(x)$, которая для любого $\alpha > 0$ удовлетворяет равенству

$$f_1(\alpha x) = \alpha^\lambda f_1(x) + h(\alpha) f_0(x),$$

где $f_0(x)$ — однородная функция степени λ. Функция $h(\alpha)$ однозначно определяется из тождества

$$h(\alpha\beta) = \alpha^\lambda h(\beta) + \beta^\lambda h(\alpha),$$

вытекающего из рассмотрения $f_1(\alpha\beta x)$. Деля обе части этого тождества на $\alpha^\lambda \beta^\lambda$, получаем, что функция $h_1(\alpha) = \frac{h(\alpha)}{\alpha^\lambda}$ удовлетворяет уравнению

$$h_1(\alpha\beta) = h_1(\alpha) + h_1(\beta).$$

Как известно, единственным непрерывным решением этого уравнения является логарифмическая функция. Учитывая еще, что $h(1) = 0$, мы получаем:

$$h(\alpha) = \alpha^\lambda \ln \alpha.$$

Окончательно мы будем называть $f_1(x)$ *присоединенной функцией 1-го порядка степени* λ, если для любого $\alpha > 0$ выполняется условие

$$f_1(\alpha x) = \alpha^\lambda f_1(x) + \alpha^\lambda \ln \alpha f_0(x), \tag{1}$$

где $f_0(x)$ — однородная функция степени λ. Например, $\ln|x|$ есть присоединенная функция 1-го порядка нулевой степени, так как для $\alpha > 0$

$$\ln|\alpha x| = \ln|x| + \ln \alpha.$$

Аналогично тому, как это было сделано для обобщенных однородных функций, определим теперь обобщенные присоединенные функции. Обобщенная функция f_1 называется *присоединенной однородной функцией 1-го порядка степени* λ, если для любого $\alpha > 0$

$$\left(f_1, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+1}(f_1, \varphi) + \alpha^{\lambda+1} \ln \alpha (f_0, \varphi), \tag{2}$$

где f_0 — обобщенная однородная функция степени λ. Вообще, для любого k обобщенная функция f_k называется *присоединенной однородной функцией k-го порядка степени* λ, если для всякого $\alpha > 0$

$$\left(f_k, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+1}(f_k, \varphi) + \alpha^{\lambda+1}\ln\alpha(f_{k-1}, \varphi), \tag{3}$$

где f_{k-1} — присоединенная функция $(k-1)$-го порядка.

Выясним теперь, что представляют собой присоединенные обобщенные функции различных порядков и произвольной степени λ. Для этого заметим, что *если f_λ — обобщенная однородная функция степени λ, дифференцируемая по λ, то ее производная по λ будет присоединенной функцией 1-го порядка.*

Действительно, продифференцировав по λ тождество

$$\left(f_\lambda, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+1}(f_\lambda, \varphi),$$

имеем:

$$\left(\frac{df_\lambda}{d\lambda}, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+1}\left(\frac{df_\lambda}{d\lambda}, \varphi\right) + \alpha^{\lambda+1}\ln\alpha(f_\lambda, \varphi),$$

т.е. $\frac{df_\lambda}{d\lambda}$ — присоединенная функция 1-го порядка. Аналогично производная по λ от присоединенной функции k-го порядка есть присоединенная функция $(k+1)$-го порядка.

2. Разложение функций x_+^λ и x_-^λ в ряд Тейлора и в ряд Лорана. Естественно, что при разложении однородных функций x_+^λ и им аналогичных в ряд Тейлора или ряд Лорана получаются присоединенные функции.

Разложение функции x_+^λ в окрестности регулярной точки λ_0 в ряд Тейлора имеет вид

$$\begin{aligned} x_+^\lambda &= x_+^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)\frac{\partial}{\partial\lambda}x_+^{\lambda_0} + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}x_+^{\lambda_0} + \ldots = \\ &= x_+^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)x_+^{\lambda_0}\ln x_+ + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 x_+^{\lambda_0}\ln^2 x_+ + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

В этом разложении участвуют новые обобщенные функции

$$x_+^\lambda \ln^m x_+ = \frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}x_+^\lambda \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Здесь m-я функция является присоединенной функцией m-го порядка. Явные определения этих функций можно получить либо тем же путем, что и определения обобщенной функции x_+^λ, либо m-кратным дифференцированием по λ формул (3) и (4) п. 2 § 3; так как при $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$ имеем:

$$\left(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi\right) = \\ = \int_0^1 x^\lambda \ln^m x \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx + \\ + \int_1^\infty x^\lambda \ln^m x \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^m m! \varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)^{m+1}}; \quad (2)$$

при $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$ имеем:

$$\int_0^\infty x^\lambda \ln^m x \varphi(x) dx = \\ = \int_0^\infty x^\lambda \ln^m x \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx. \quad (3)$$

В окрестности полюса $\lambda = -n$ функция x_+^λ разлагается в ряд Лорана с главной частью степени -1. Чтобы написать это разложение в явном виде, выделим из регуляризованного значения интеграла

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx = \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx,$$

то слагаемое, которое перестает сходиться при $\lambda = -n$, т.е. запишем этот интеграл в таком виде[1]:

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx + \\ + \int_1^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)\right] dx + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!(\lambda+n)}.$$

---

[1] Вместо $\int_1^\infty x^{\lambda+n-1} dx$ мы могли бы вычислить интеграл $\int_a^\infty x^{\lambda+n-1} dx$ для любого $a > 0$. При этом пришлось бы разлагать в ряд Тейлора $a^{\lambda+n}$ и дальнейшие формулы стали бы более громоздкими.

Сумма интегралов в правой части этого равенства есть правильная часть ряда Лорана, к которому мы вскоре придем. Она представляет собой аналитическую функцию от λ в полосе $|\mathrm{Re}\,\lambda + n| < 1$. Мы обозначим этот функционал через $F_{-n}(x_+, \lambda)$. Таким образом,

$$(F_{-n}(x_+,\lambda),\varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \Big[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots \\ \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\theta(1-x)\Big]\,dx,$$

где $\theta(x)$ — функция, равная 0 при $x < 0$ и 1 при $x > 0$. Иначе говоря, последнее слагаемое под знаком интеграла принимается во внимание лишь при $0 < x < 1$, а при $x > 1$ заменяется нулем; таким образом, написанный интеграл оказывается сходящимся и при $x = 0$, и при $x = \infty$.

Особую роль играет значение этого функционала при $\lambda = -n$, которое мы обозначим через x_+^{-n}, т.е. значение при $\lambda = -n$ правильной части лорановского разложения для x_+^λ в окрестности $\lambda = -n$:

$$x_+^{-n} = \lim_{\lambda \to -n} \frac{\partial}{\partial \lambda}[(\lambda + n)x_+^\lambda].$$

Отсюда видно, что обобщенная функция x_+^{-n} есть присоединенная функция 1-го порядка степени $-n$. Этот функционал действует на основную функция φ по формуле

$$\left(x_+^{-n},\varphi\right) = \int_0^\infty x^{-n}\left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\theta(1-x)\right]dx. \tag{4}$$

Подчеркнем, что обобщенная функция x_+^{-n} не есть значение функции x_+^λ при $\lambda = -n$; последняя функция при $\lambda \to -n$ имеет полюс и, следовательно, при $\lambda = -n$ не существует. Тем не менее, функционал x_+^{-n} является некоторой регуляризацией обычной функции x_+^{-n}.

Отметим любопытную формулу дифференцирования функции x_+^{-n} по x. Мы имеем:

$$\left(\frac{d}{dx}x_+^{-n}, \varphi(x)\right) = -\left(x_+^{-n}, \varphi'(x)\right) =$$

$$= -\int_0^\infty x^{-n}\left[\varphi'(x) - \varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(0)\theta(1-x)\right]dx =$$

$$= -\int_0^1 x^{-n}\left[\varphi'(x) - \varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(0)\right]dx -$$

$$- \int_1^\infty x^{-n}\left[\varphi'(x) - \varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx.$$

Произведем в каждом из слагаемых интегрирование по частям; в результате получим

$$\left(\frac{d}{dx}x_+^{-n}, \varphi\right) = -\int_0^\infty nx^{-n-1}\left[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(0)\theta(1-x)\right]dx + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx}x_+^{-n} = -nx_+^{-n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}(x). \tag{5}$$

Таким образом, хотя мы с обычной функцией x_+^{-n} и сопоставили обобщенную, нам пришлось «пожертвовать» обычной формулой дифференцирования; регуляризация (4) не есть каноническая регуляризация функции x_+^{-n}.

Полезны также производные по λ функции $F_{-n}(x_+, \lambda)$ при $\lambda = -n$. Мы обозначим их соответственно

$$\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}F_{-n}(x_+, \lambda)\right|_{\lambda=-n} = x_+^{-n}\ln x_+,$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}F_{-n}(x_+, \lambda)\right|_{\lambda=-n} = x_+^{-n}\ln^2 x_+,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

легко проверить, что явные определения этих обобщенных функций получаются заменой в формуле (5) x^{-n} соответственно на $x^{-n}\ln x$, $x^{-n}\ln^2 x$ и т.д.

Как мы видим, эти обобщенные функции суть присоединенные функции степени $-n$ и порядков $2, 3, 4, \ldots$

Теперь, после того как введены обобщенные функции x_+^{-n}, $x_+^{-n}\ln x_+, \ldots$, мы можем выписать разложение в ряд Лорана обобщенной функции x_+^λ в окрестности точки $\lambda = -n$. Для этого функцию $F_{-n}(x_+, \lambda)$ нужно разложить в ряд Тейлора, и мы получаем:

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + x_+^{-n} + \\ + (\lambda+n)x_+^{-n}\ln x_+ + \ldots + \frac{(\lambda+n)^k}{k!}x_+^{-n}\ln^k x_+ + \ldots$$

Тейлорово разложение функции x_-^λ в окрестности регулярного значения λ_0 имеет вид

$$x_-^\lambda = x_-^\lambda + (\lambda-\lambda_0)x_-^{\lambda_0}\ln x_- + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 x_-^{\lambda_0}\ln^2 x_- + \ldots$$

Здесь фигурируют новые обобщенные функции $x_-^\lambda \ln^k x_-$ ($k = 1, 2, \ldots$); k-я функция есть присоединенная функция степени λ и порядка k. Все они аналитичны по λ при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ и определяются в полосе $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$ формулами

$$\left(x_-^\lambda \ln^k x_-, \varphi\right) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^k x \Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \\ \ldots - \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]dx. \quad (6)$$

Чтобы выписать разложение функции x_-^λ в окрестности полюса $\lambda = -n$ в ряд Лорана, выделим и здесь слагаемое, перестающее сходиться при $\lambda = -n$:

$$\int_{-\infty}^0 x_-^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^1 x^\lambda \Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \\ \ldots - (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]dx + \int_1^\infty x^\lambda \Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)\Big]dx + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{\lambda+n}.$$

Сумма интегралов справа — это правильная часть искомого ряда Лорана. Она аналитична при $|\operatorname{Re}\lambda + n| < 1$. Обозначим этот функционал через $F_{-n}(x_-,\lambda)$. Таким образом,

$$(F_{-n}(x_-,\lambda),\varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots$$
$$\ldots - (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\theta(1-x)\Big]\,dx.$$

Значение этой функции при $\lambda=-n$, т.е. значение при $\lambda=-n$ правильной части лоранова разложения для x_-^λ, обозначим через x_-^{-n}, так что

$$x_-^{-n} = \lim_{\lambda\to -n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda+n)x_-^\lambda\right].$$

Эта обобщенная функция действует на основные функции функции φ по формуле

$$\left(x_-^{-n},\varphi\right) = \int_0^\infty x^{-n}\Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots$$
$$\ldots - (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\theta(1-x)\Big]\,dx \qquad (7)$$

и является регуляризацией обычной функции x_-^{-n}. Подчеркнем еще раз, что обобщенная функция x_-^{-n} не есть значение аналитической обобщенной функции x_-^λ при $\lambda=-n$.

Производные по λ функции $F_{-n}(x_-,\lambda)$ при $\lambda=-n$ обозначим соответственно

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}F_{-n}(x_-,\lambda)\Big|_{\lambda=-n} = x_-^{-n}\ln x_-,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}F_{-n}(x_-,\lambda)\Big|_{\lambda=-n} = x_-^{-n}\ln^2 x_-,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Явные определения этих обобщенных функций получаются из формул (7) заменой x^{-n} на $x^{-n}\ln x, x^{-n}\ln^2 x, \ldots$

Разложив аналитическую функцию $F_{-n}(x_-,\lambda)$ в ряд по степеням $\lambda+n$, получаем ряд Лорана для функции x_-^λ:

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + x_-^{-n} + (\lambda+n)x_-^{-n}\ln x_- + \ldots \qquad (8)$$

В этом ряду коэффициенты при $(\lambda+n)^{-1}$ есть однородная функция степени $-n$, а коэффициент при $(\lambda+n)^m$, $m=0,1,2,\ldots$ есть присоединенная функция степени $-n$ и порядка $m+1$.

3. Разложение функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Выпишем тейлоровы и лорановы разложения функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Мы получим их, естественно, комбинированием соответствующих разложений для функций x_+^λ и x_-^λ. При этом мы опять введем ряд новых обобщенных функций.

Если λ_0 — регулярное значение для обобщенной функции $|x|^\lambda$, то

$$|x|^\lambda = |x|^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)|x|^{\lambda_0}\ln|x| + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2|x|^{\lambda_0}\ln^2|x| + \ldots \quad (1)$$

Здесь введены новые обобщенные функции $|x|^\lambda \ln^k|x|$; k-я функция есть присоединенная функция степени λ и порядка k. Все они аналитичны по λ при $\lambda \neq -1,-3,\ldots$ и определяются при $-2m-1<\operatorname{Re}\lambda<-2m+1$ формулами

$$(|x|^\lambda \ln^k|x|, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^k x \Big\{\varphi(x)+\varphi(-x) - {} \\ - 2\left[\varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\right]\Big\}dx. \quad (2)$$

Аналогично, если λ_0 — регулярное значение обобщенной функции $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, то тейлорово разложение этой функции в окрестности точки λ_0 записывается в виде

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x + (\lambda-\lambda_0)|x|^{\lambda_0}\ln|x|\operatorname{sgn} x + {} \\ + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2|x|^{\lambda_0}\ln^2|x|\operatorname{sgn} x + \ldots \quad (3)$$

Здесь $|x|^\lambda \ln^k|x|\operatorname{sgn} x$ — новые обобщенные функции; k-я из них — присоединенная функция степени λ и порядка k. Все они аналитичны по λ при $\lambda \neq -2,-4,\ldots$ и определяются при $-2m-2<\operatorname{Re}\lambda<-2m$ формулами

$$(|x|^\lambda \ln^k|x|\operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^k x \Big\{\varphi(x)-\varphi(-x) - {} \\ - 2\left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\right]\Big\}dx. \quad (4)$$

Если $\lambda_0 = -2m-1$, так что λ_0 — полюс 1-го порядка обобщенной функции $|x|^\lambda$, то разложение Лорана этой функции в окрестности точки λ_0 записывается следующим образом:

$$|x|^\lambda = 2\frac{\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}\frac{1}{\lambda+2m+1} + x_+^{-2m-1} + x_-^{-2m-1} + \\ + (\lambda+2m+1)\left[x_+^{-2m-1}\ln x_+ + x_-^{-2m-1}\ln x_-\right] + \ldots \quad (5)$$

Аналогично, если $\lambda_0 = -2m$ (полюс 1-го порядка функции $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$), то лораново разложение $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ в окрестности этой точки имеет вид

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = -2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}\frac{1}{\lambda+2m} - x_+^{-2m} + x_-^{-2m} + \\ + (\lambda+2m)\left[x_+^{-2m}\ln x_+ - x_-^{-2m}\ln x_-\right] + \ldots \quad (6)$$

Обобщенную функцию $x_+^{-2m-1} + x_-^{-2m-1}$ мы будем обозначать через $|x|^{-2m-1}$. Результат ее применения к основной функции $\varphi(x)$ выражается формулой

$$\left(|x|^{-2m-1}, \varphi\right) = \int\limits_0^\infty x^{-2m-1}\Bigg\{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\Bigg[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots \\ \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0) + \frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi^{(2m)}(0)\theta(1-x)\Bigg]\Bigg\}\,dx \\ (-2m-2 < \operatorname{Re}\lambda < -2m), \quad (7)$$

где $\theta(x)$ имеет тот же смысл, что и выше.

Аналогично обобщенную функцию $x_+^{-2m} - x_-^{-2m}$ мы будем обозначать через $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$; она применяется к основной функции $\varphi(x)$ по формуле

$$\left(|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x, \varphi\right) = \int\limits_0^\infty x^{-2m}\Bigg\{\varphi(x) - \varphi(-x) - 2\Bigg[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots \\ \ldots + \frac{x^{2m-3}}{(2m-3)!}\varphi^{(2m-3)}(0) + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\theta(1-x)\Bigg]\Bigg\}\,dx \\ (-2m-1 < \operatorname{Re}\lambda < -2m+1) \quad (8)$$

и т.д. Окончательно требуемые лорановы разложения записываются в форме

$$|x|^\lambda = 2\frac{\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}\frac{1}{\lambda+2m+1} + |x|^{-2m-1} + \\ + (\lambda+2m+1)|x|^{-2m-1}\ln|x| + \ldots; \tag{9}$$

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = -2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}\frac{1}{\lambda+2m} + |x|^{-2m}\operatorname{sgn} x + \\ + (\lambda+2m)|x|^{-2m}\ln|x|\operatorname{sgn} x + \ldots \tag{10}$$

В этих рядах первые коэффициенты $\delta^{(2m)}(x)$ и $\delta^{(2m-1)}(x)$ суть однородные функции степени соответственно $-2m-1$ и $-2m-2$, а следующие коэффициенты — присоединенные функции той же степени и порядков $1, 2, 3, \ldots$

В частности, полагая в равенстве (5) $m = 0$, получаем разложение функции $|x|^\lambda$ в окрестности полюса $\lambda = -1$:

$$|x|^\lambda = 2\frac{\delta(x)}{\lambda+1} + |x|^{-1} + (\lambda+1)|x|^{-1}\ln|x| + \ldots \tag{11}$$

При этом функционал $|x|^{-1}$ определяется формулой

$$\left(|x|^{-1}, \varphi\right) = \int\limits_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)\theta(1-x)}{x}dx = \\ = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(0)\theta(1-x^2)}{x}dx, \tag{12}$$

где множитель $\theta(1-x^2)$ указывает, что слагаемое $\varphi(0)$ нужно учитывать только при $|x| \leqslant 1$, а при $|x| > 1$ заменить на нуль.

Введенные выше обобщенные функции

$$|x|^{-2m-1} = x_+^{-2m-1} + x_-^{-2m-1}, \\ |x|^{-2m}\operatorname{sgn} x = x_+^{-2m} - x_-^{-2m}$$

не являются значениями аналитических функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ при соответствующих значениях λ ($-2m-1$ и $-2m$). В указанных точках функции $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ имеют полюсы 1-го порядка, и величины $|x|^{-2m-1}$ и $|x|^{-2m}\operatorname{sgn} x$ суть значения правильных частей соответствующих рядов Лорана в этих полюсах.

Можно рассмотреть и обобщенные функции

$$x_+^{-2m} + x_-^{-2m},$$
$$x_+^{-2m-1} - x_-^{-2m-1};$$

легко убедиться, что первая из них совпадает с обобщенной функцией x^{-2m} (значением $|x|^\lambda$ в регулярной точке $\lambda = -2m$), вторая — с обобщенной функцией x^{-2m-1}.

Мы ввели в п. 5 § 3 нормированные функции

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}, \quad \frac{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}. \tag{13}$$

Эти обобщенные функции уже не имеют особенностей. Разлагая числители и знаменатели дробей (13) в ряды Тейлора (или Лорана) и производя по обычным правилам деление рядов, можно построить разложения полученных функций в ряды Тейлора в окрестности любой точки λ.

Разложение $\Gamma(\lambda+1)$ по степеням λ

$$\Gamma(\lambda+1) = 1 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \ldots,$$

хорошо известно[1]; здесь $c_1 = c = 0{,}505\ldots$ — постоянная Эйлера, а коэффициенты $c_2, c_3, \ldots$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}c_{n-k}s_{k+1},\ s_1 = c,\ s_n = \zeta(n).$$

В частности, при $\lambda = 0$ получается разложение

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{\theta(x) + \lambda \ln x_+ + \ldots}{1 + c\lambda + \ldots} = \theta(x) + \lambda(\ln x_+ - c\theta(x)) + \ldots \tag{14}$$

4. Функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$. Эти обобщенные функции были введены в п. 6 § 3. Мы рассмотрим их здесь более подробно. Указанные обобщенные функции для $\operatorname{Re}\lambda > -1$ были определены как пределы выражений $(x+iy)^\lambda$ и $(x-iy)^\lambda$ при $y \to +0$; это привело нас к формулам

$$(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda, \tag{1}$$

$$(x-i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda. \tag{2}$$

---

[1] И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (изд. 3-е, Гостехиздат, 1951), стр. 331, формула (6.321). В дальнейших ссылках на эту книгу будем писать кратко: «И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы».

Правые части формул (1), (2) допускают аналитическое продолжение во всю плоскость λ; этим аналитическим продолжением мы *определяем* для $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -1$ левые части равенств (1), (2). Мы уже заметили, что при аналитическом продолжении правых частей особенности в точках $\lambda = -1, -2, \ldots$ исчезают; теперь мы найдем в этих точках и сами значения функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$.

В п. 2 мы записывали лорановы разложения обобщенных функций x_+^λ и x_-^λ в окрестности точки $\lambda = -n$ следующим образом:

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + F_{-n}(x_+,\lambda), \tag{3}$$

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + F_{-n}(x_-,\lambda). \tag{4}$$

Здесь $F_{-n}(x_+,\lambda)$ и $F_{-n}(x_-,\lambda)$ — правильные части рядов Лорана; их значения при $\lambda=-n$ обозначены в п. 2 соответственно через x_+^{-n} и x_-^{-n}.

Напишем еще

$$e^{\pm i\lambda\pi} = (-1)^n e^{\pm i(\lambda+n)\pi} = (-1)^n[1 \pm i(\lambda+n)\pi + \ldots]. \tag{5}$$

Подставляя выражения (3)–(5) в правые части формул (1) и (2), сокращая члены с особенностями и переходя к пределу при $\lambda \to -n$, мы получаем:

$$(x \pm i0)^{-n} = x_+^{-n} + (-1)^n x_-^{-n} \mp \frac{(-1)^{n-1} i\pi}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x).$$

В п. 3 мы отмечали, что при четном $n = 2m$

$$x_+^{-2m} + x_-^{-2m} = x^{-2m} = |x|^\lambda\big|_{\lambda=-2m},$$

а при нечетном $n = 2m+1$

$$x_+^{-2m-1} - x_-^{-2m-1} = x^{-2m-1} = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x\big|_{\lambda=-2m-1}.$$

Таким образом, окончательно

$$(x+i0)^{-n} = x^{-n} - \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x), \tag{6}$$

$$(x-i0)^{-n} = x^{-n} + \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x). \tag{7}$$

В частности, при $n = 2$

$$\left(\frac{1}{(x+i0)^2}, \varphi(x)\right) = \int\limits_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx - i\pi\varphi'(0); \tag{8}$$

$$\left(\frac{1}{(x-i0)^2}, \varphi(x)\right) = \int\limits_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx + i\pi\varphi'(0). \tag{9}$$

Отметим, что, как видно из формул (1) и (2) при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ и из формул (6) и (7) при $\lambda = -n = -1, -2, \ldots,$

$$\frac{d}{dx}(x+i0)^\lambda = \lambda(x+i0)^{\lambda-1}, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}(x-i0)^\lambda = \lambda(x-i0)^{\lambda-1}. \tag{11}$$

Так как при дифференцировании индекс понижается на единицу, то формулы (10) и (11) можно было бы положить в основу определения обобщенных функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ Например, $(x+i0)^{-3/2}$ можно было бы определить как $-2\frac{d}{dx}(x+i0)^{-1/2}$, где $\frac{d}{dx}$ — дифференцирование в смысле обобщенных функций, а $(x+i0)^{-1/2}$ — локально интегрируемая функция, определенная формулой (1) при $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Формулы (10) и (11) указывают еще и на следующее важное обстоятельство: при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$\lim_{y\to+0}(x+iy)^\lambda = (x+i0)^\lambda, \tag{12}$$

$$\lim_{y\to-0}(x+iy)^\lambda = (x-i0)^\lambda \tag{13}$$

в смысле обобщенных функций. Действительно, для достаточно больших $\operatorname{Re}\lambda$ это следует из самого определения этих функций, а при дифференцировании в смысле обобщенных функций сходящаяся последовательность переходит в сходящуюся.

В целых отрицательных точках $-n$ функции $(x+i0)^{-n}$ и $(x-i0)^{-n}$ можно также вводить при помощи дифференцирования. Напомним, что выше (§ 2, п. 2, пример 6) была введена (локально интегрируемая) функция

$$\ln(x+i0) = \lim_{y\to+0}\ln(x+iy) = \ln|x| + i\pi\theta(-x), \tag{14}$$

производная которой равна

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \tag{15}$$

Отсюда и из формулы (6) при $n = 1$ мы видим, что

$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0) = \frac{1}{x+i0}. \tag{16}$$

Аналогично (14) можно ввести

$$\ln(x-i0) = \lim_{y\to -0}\ln(x+iy) = \ln|x| - i\pi\theta(-x). \tag{17}$$

Производная этой функции равна

$$\frac{d}{dx}\ln(x-i0) = \frac{1}{x} + i\pi\delta(x), \tag{18}$$

т.е. в силу формулы (7) при $n = 1$,

$$\frac{d}{dx}\ln(x-i0) = \frac{1}{x-i0}. \tag{19}$$

Таким образом, обобщенные функции $(x \pm i0)^{-1}$ мы могли бы определить формулами (16) и (19), а $(x \pm i0)^{-n}$ в остальных целых отрицательных точках — снова при помощи формул (10) и (11).

Так как предельные соотношения (14) и (17) имеют место и в смысле обобщенных функций, то мы получаем, что предельные соотношения (12) и (13) *при всех* λ выполняются в смысле обобщенных функций.

Это позволяет, например, вместо формул (8) и (9) написать:

$$\lim_{y\to+0}\int \frac{\varphi(x)}{(x+iy)^2}dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx - i\pi\varphi'(0),$$

$$\lim_{y\to+0}\int \frac{\varphi(x)}{(x-iy)^2}dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx + i\pi\varphi'(0).$$

5. Разложение функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ в ряд Тейлора. Обобщенная функция $(x+i0)^\lambda$ как целая функция параметра λ при любом значении λ_0 разлагается в ряд Тейлора по степеням $\lambda - \lambda_0$, сходящийся при всех λ:

$$(x+i0)^\lambda = (x+i0)^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)(x+i0)^{\lambda_0}\ln(x+i0) + \\ + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2(x+i0)^{\lambda_0}\ln^2(x+i0) + \ldots \tag{1}$$

Написанные в равенстве (1) новые обобщенные функции $(x+i0)^{\lambda_0}\ln(x+ +i0),\ldots$ суть последовательные производные по λ от $(x+i0)^\lambda$ при $\lambda=\lambda_0$. Явные выражения этих обобщенных функций можно получить, если сравнить разложение (1) с аналогичным разложением по степеням $\lambda-\lambda_0$ развернутого выражения

$$(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda. \tag{2}$$

Мы имеем при этом для $\lambda_0 \neq -1,-2,\ldots$

$$x_+^\lambda = x_+^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)x_+^{\lambda_0}\ln x_+ + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 x_+^{\lambda_0}\ln^2 x_+ + \ldots, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda = e^{i\lambda_0\pi}\left(1+i\pi(\lambda-\lambda_0) - \frac{\pi^2}{2}(\lambda-\lambda_0)^2+\ldots\right)\times \\ \times\left(x_-^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)x_-^{\lambda_0}\ln x_- + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 x_-^{\lambda_0}\ln^2 x_- + \ldots\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Сравнивая коэффициенты ряда (1) и ряда, получаемого подстановкой рядов (3) и (4) в формулу (2), получаем, заменяя снова λ_0 на λ:

$$(x+i0)^\lambda \ln(x+i0) = x_+^\lambda \ln x_+ + i\pi e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda \ln x_-, \tag{5}$$

$$(x+i0)^\lambda \ln^2(x+i0) = x_+^\lambda \ln^2 x_+ + e^{i\lambda\pi}\left[x_-^\lambda\ln^2 x_- + 2i\pi x_-^\lambda \ln x_- - \pi^2 x_-^\lambda\right] \tag{6}$$

и т.д.

Эти формулы справедливы при $\lambda \neq -1,-2,\ \ldots$

Разложение функции $(x-i0)^\lambda$ в ряд Тейлора по степеням $\lambda-\lambda_0$ имеет вид

$$\begin{aligned} (x-i0)^\lambda = (x-i0)^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)(x-i0)^{\lambda_0}\ln(x-i0) + \\ + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2(x-i0)^\lambda \ln^2(x-i0) + \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Мы обозначили здесь через

$$(x-i0)^\lambda \ln(x-i0),\ (x-i0)^\lambda\ln^2(x-i0),\ \ldots$$

последовательные производные по λ целой функции $(x-i0)^\lambda$. Таким же путем, как и выше, можно получить формулы

$$(x-i0)^\lambda \ln(x-i0) = x_+^\lambda \ln x_+ - i\pi e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda + e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda \ln x_-, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} (x-i0)^\lambda \ln^2(x-i0) = x_+^\lambda \ln^2 x_+ + \\ + e^{-i\lambda\pi}\left[x_-^\lambda \ln^2 x_- - 2i\pi x_-^\lambda \ln x_- - \pi^2 x_-^\lambda\right] \quad (\lambda\neq -1,-2,\ldots) \end{aligned} \tag{9}$$

и т.д.

Для получения соответствующих формул при λ_0, равном целому отрицательному числу $-n$, мы вместо формул (3) и (4) рассмотрим соответствующие ряды Лорана:

$$\begin{aligned} x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + x_+^{-n} + (\lambda+n)x_+^{-n}\ln x_+ + \\ + \frac{1}{2}(\lambda+n)^2 x_+^{-n}\ln^2 x_+ + \ldots, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + x_-^{-n} + (\lambda+n)x_-^{-n}\ln x_- + \\ + \frac{1}{2}(\lambda+n)^2 x_-^{-n}\ln^2 x_- + \ldots, \end{aligned} \tag{11}$$

$$e^{i\lambda\pi} = (-1)^n\left[1 + i\pi(\lambda+n) - \frac{\pi^2}{2}(\lambda+n)^2 - i\frac{\pi^3}{6}(\lambda+n)^3 + \ldots\right]. \tag{12}$$

Умножая (11) на (12) и складывая с (10), находим:

$$\begin{aligned} x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda = \left[x^{-n} + \frac{i\pi(-1)^n}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x)\right] + \\ + (\lambda+n)\left[i\pi(-1)^n x_-^{-n} + (-1)^{n-1}\frac{\pi^2}{2}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n}\ln|x|\right] + \\ + \frac{(\lambda+n)^2}{2}\left[(-1)^{n-1}i\frac{\pi^3}{3}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \right. \\ \left. + (-1)^{n-1}\pi^2 x_-^{-n} + 2i\pi(-1)^n x_-^{-n}\ln x_- + x^{-n}\ln^2|x|\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, мы получаем:

$$(x+i0)^{-n}\ln(x+i0) = (-1)^n i\pi x_-^{-n} + (-1)^{n-1}\frac{\pi^2}{2}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n}\ln|x|, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} (x+i0)^{-n}\ln^2(x+i0) = (-1)^{n-1}i\frac{\pi^3}{3}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + (-1)^{n-1}\pi^2 x_-^{-n} + \\ + 2i\pi(-1)^n x_-^{-n}\ln x_- + x^{-n}\ln^2|x| \end{aligned} \tag{15}$$

и т.д.

Формулы (14) и (15), как следует из общих соображений, представляют собой результаты предельного перехода при $\lambda_0 \to -n$ в формулах (5) и (6). Аналогично

$$(x - i0)^{-n} \ln(x - i0) = (-1)^{n-1} i\pi x_-^{-n} + \\ + (-1)^{n-1} \frac{\pi^2}{2} \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n} \ln|x|, \tag{16}$$

$$(x - i0)^{-n} \ln^2(x - i0) = (-1)^n i \frac{\pi^3}{3} \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + (-1)^{n-1} \pi^2 x_-^{-n} + \\ + 2i\pi(-1)^{n-1} x_-^{-n} \ln x_- + x^{-n} \ln^2|x|. \tag{17}$$

Читателю предоставляется самому определить, какие из введенных функций однородные или присоединенные той или иной степени и порядка.

6. Разложение функции r^λ. Обобщенная функция r^λ была введена в п. 9 § 3 по формуле

$$(r^\lambda, \varphi) = \int r^\lambda \varphi(x) dx, \tag{1}$$

пригодной при $\operatorname{Re} \lambda > -n$. Очевидно, что функция r^λ при этих значениях λ есть однородная функция степени λ. Мы преобразовали в п. 9 § 3 формулу (1) к виду

$$(r^\lambda, \varphi) = \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} S_\varphi(r) dr,$$

где

$$S_\varphi(r) = \frac{1}{\Omega_n} \int_\Omega \varphi(x) d\Omega$$

есть среднее значение основной функции $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ на сфере радиуса r. Таким образом, (r^λ, φ) совпадает с результатом применения функционала $\Omega_n x_+^\mu$ $(\mu = \lambda + n - 1)$ к четной основной функции $S_\varphi(r)$ и, следовательно, аналитически продолжается в плоскость λ, за исключением лишь точек $\lambda = -n, \ -n-2, \ldots$ Очевидно, что при этом продолжении r^λ остается однородной функцией степени λ.

Разложение функции r^λ в ряд Тейлора или ряд Лорана можно получить непосредственно из соответствующих разложений функции $\Omega_n x_+^\mu$.

Например, ряд Тейлора в окрестности регулярной точки λ_0 имеет вид

$$r^\lambda = r^{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) r^{\lambda_0} \ln r + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 r^{\lambda_0} \ln^2 r + \ldots,$$

где под $r^{\lambda_0} \ln^k r$ понимается функционал, действующий по формуле

$$(r^{\lambda_0} \ln^k r, \varphi) = \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda_0+n-1} \ln^k r \times \\ \times \left[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \ldots - \frac{r^{m-1}}{(m-1)!} S_\varphi^{(m-1)}(0) \right] dr$$

при $-m - n < \text{Re}\ \lambda_0 < -m - n + 1$.

Выпишем разложение функции r^λ в ряд Лорана в окрестности точки $\lambda = -n - 2k$. Это разложение, естественно, совпадает с разложением в ряд Лорана для функции $\Omega_n x_+^\mu$ в окрестности точки $\mu = -2k - 1$ (п. 3), так что мы имеем:

$$r^\lambda = \Omega_n \frac{\delta^{(2k)}(r)}{(2k)!} \frac{1}{\lambda + n + 2k} + \Omega_n r^{-2k-n} + \\ + \Omega_n (\lambda + n + 2k) r^{-2k-n} \ln r + \ldots \quad (2)$$

Здесь под $r^{-2k-n} \ln^m r$ понимается функционал

$$(r^{-2k-n} \ln^m r, S_\varphi(r)) = \int_0^\infty r^{-n-2k} \ln^m r \left[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \ldots \right. \\ \left. \ldots - \frac{r^{2k-2}}{(2k-2)!} S_\varphi^{(2k-2)}(0) - \frac{r^{2k}}{(2k)!} S_\varphi^{(2k)}(0) \theta(1-r) \right] dr. \quad (3)$$

Заметим, что r^{-2k-n} не есть значение обобщенной функции r^λ при $\lambda = -2k - n$ (последняя функция имеет полюс при этом значении λ), а значение при $\lambda = -2k - n$ главной части лоранова разложения r^λ.

В приведенных выше разложениях обобщенная функция $r^{\lambda_0} \ln^k r$ является присоединенной функцией степени λ_0 и порядка k, а $r^{-2k-n} \ln^m r$ — присоединенной функцией степени $-2k - n$ и порядка m.

§ 5. Свертка обобщенных функций

В классическом анализе часто используется операция свертки двух функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x) * g(x) = \int f(\xi) g(x - \xi) d\xi. \quad (1)$$

В анализе обобщенных функций аналогичная операция имеет, пожалуй, еще более существенное значение.

Определение операции свертки в области обобщенных функций опирается на понятие *прямого произведения* обобщенных функций. Поэтому мы начинаем с описания прямых произведений (п. 1). В остальных пунктах этого параграфа будет введена и изучена операция свертки и будут указаны примеры ее применения.

1. Прямое произведение обобщенных функций. Пусть даны обобщенная функция $f(x)$, определенная на пространстве X_k основных функций от k независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$, и обобщенная функция $g(y)$, определенная на пространстве Y_m основных функций от m независимых переменных $y_1, y_2, \dots, y_m$. С помощью этих обобщенных функций мы определим обобщенную функцию $h(z)$ на пространстве Z_n основных функций от $n = k + m$ независимых переменных $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2, \dots, z_k = x_k, z_{k+1} = y_1, z_{k+2} = y_2, \dots, z_n = y_m$. Для этого поступим следующим образом. Основную функцию $\varphi(x)$ будем обозначать теперь через $\varphi(x,y)$. Зафиксируем x и рассмотрим $\varphi(x,y)$ как функцию только от y. Очевидно, это основная функция в пространстве Y_m. Применим к ней функционал $g(y)$; в результате получим некоторую функцию $\psi(x)$. Эта функция бесконечно дифференцируема по x, так как

$$\frac{\psi(x+\Delta x_j)-\psi(x)}{\Delta x_j} = \left(g(y), \frac{\varphi(x+\Delta x_j,y)-\varphi(x,y)}{\Delta x_j}\right) \to \\ \to \left(g(y), \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_j}\right)$$

в силу того, что последовательность $\frac{\varphi(x+\Delta x_j,y)-\varphi(x,y)}{\Delta x_j}$ сходится к $\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_j}$ в смысле сходимости в пространстве Y_m и функционал $g(y)$ непрерывен. Очевидно также, что функция $\psi(x)$ финитна. Таким образом, $\psi(x)$ — основная функция в пространстве X_k, и к ней можно применять функционал $f(x)$. Итак, выражение

$$(f(x), (g(y), \varphi(x,y))) \tag{2}$$

имеет смысл. Это некоторый функционал на пространстве Z_n; из непрерывности функционалов $g(y)$ и $f(x)$ можно вывести, что этот функционал непрерывен[1]. Мы обозначим его через $h(z) = f(x) \times g(y)$ и назовем *прямым произведением функционала $f(x)$ на функционал $g(y)$.*

[1] Пусть последовательность функций $\varphi_\nu(x,y)$ стремится к нулю в пространстве Z_n; нам нужно показать, что числа $(f(x),(g(y),\varphi_\nu(x,y)))$ стремятся к нулю. Для этого достаточно показать, что функции $\psi_\nu(x) = (g(y),\varphi_\nu(x,y))$ остаются равными

Особенно просто выглядит прямое произведение в применении к основной функции $\varphi(x,y)$, являющейся произведением основных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$. В этом случае, согласно определению прямого произведения,

$$(f(x) \times g(y), \varphi_1(x)\varphi_2(y)) = (f(x), (g(y), \varphi_1(x)\varphi_2(y))) = \\ = (f(x), \varphi_1(x)(g(y), \varphi_2(y))) = (f, \varphi_1)(g, \varphi_2). \quad (3)$$

Примеры. Прямое произведение $\delta(x) \times \delta(y)$ есть $\delta(x,y)$. Прямое произведение $\delta(x) \times 1(y)$ есть функционал, действующий по формуле $(\delta(x) \times 1(y), \varphi(x,y)) = \int_Y \varphi(0,y)dy$.

Прямое произведение двух регулярных функционалов $f(x)$ и $g(y)$ есть регулярный функционал, отвечающий функции $f(x)g(y)$.

Носитель прямого произведения. Напомним, что совокупность всех точек, из которых каждая обладает тем свойством, что ни в какой ее окрестности обобщенная функция f не равна нулю, мы назвали в п. 4 § 1 носителем обобщенной функции f. Пусть нам известны носители F и G функционалов f и g, спрашивается, как описать носитель функционала $h = f \times g$. Ответ следующий: *носитель H функционала h есть прямое произведение $F \times G$ носителей f и g*; иначе говоря, совокупность H состоит из тех и только из тех пар (x,y), у которых первая координата x принадлежит множеству F, а вторая y — множеству G.

Действительно, рассмотрим точку (x_0, y_0), у которой одна из координат — для определенности x_0 — не принадлежит соответствующему носителю. Это означает, что функционал f обращается в нуль на всякой основной функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль вне некоторой фиксированной окрестности U точки x_0. Рассмотрим произвольную основную функцию $\varphi(x,y)$, отличную от нуля только при $x \in U$, и

нулю вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю вместе со всеми производными. Первое — очевидно, поскольку $\varphi_\nu(x,y)$ равны нулю вне фиксированной области в пространстве переменных $x_1, \ldots, y_m$. Допустим, что $\psi_\nu(x)$ не сходятся равномерно к нулю. Это означает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(\nu)}, \ldots$ такая, что

$$|\psi_\nu(x_\nu)| = |(g(y), \varphi_\nu(x_\nu, y))| \geqslant \varepsilon.$$

Но так как последовательность $\varphi_\nu(x,y)$ равномерно сходится к нулю вместе со всеми производными, то функции $\varphi_\nu^*(y) = \varphi_\nu(x_\nu, y)$ сходятся к нулю, как основные функции в пространстве Y_m. В силу непрерывности функционала $g(y)$ мы должны иметь

$$(g(y), \varphi_\nu^*(y)) = (g(y), \varphi_\nu(x_\nu, y)) \to 0$$

в противоречие с предположением. Итак, $\psi_\nu(x)$ равномерно сходятся к нулю; аналогично доказывается равномерная сходимость к нулю и всех производных этой последовательности, чем доказательство и завершается.

покажем, что $(f \times g, \varphi(x,y)) = 0$. Согласно определению,

$$(f \times g, \varphi(x,y)) = (f(y), (g(x), \varphi(x,y))) = (f(y), 0) = 0;$$

следовательно, функционал $f \times g$ обращается в нуль в окрестности точки (x_0, y_0).

С другой стороны, если x_0 и y_0 принадлежат к множествам F и G, то для любой окрестности точки (x_0, y_0), очевидно, можно указать функцию вида $\varphi(x)\psi(y)$, обращающуюся в нуль вне этой окрестности, на которой функционал $f \times g$ имеет ненулевое значение. Тем самым справедливость нашего утверждения установлена.

Коммутативность и ассоциативность. : *Имеют место формулы*

$$\left.\begin{aligned} f(x) \times g(y) = g(y) \times f(x), \\ f(x) \times \{g(y) \times h(z)\} = \{f(x) \times g(y)\} \times h(z). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Для доказательства заметим, что поскольку в обеих частях равенств стоят непрерывные функционалы, достаточно проверить эти равенства на плотном множестве основных функций. Для проверки первого равенства мы возьмем плотное множество функций вида $\sum\limits_{j=1}^{\nu} \varphi_j(x)\psi_j(y)$, где $\varphi_j(x)$, $\psi_j(y)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu; \nu = 1, 2, \ldots)$ — основные функции соответствующих переменных[1)]. Мы будем иметь тогда

$$(f(x) \times g(y), \sum \varphi_j(x)\psi_j(y)) = \\ = \sum (f(x) \times g(y), \varphi_j(x)\psi_j(y)) = \sum (f(x), \varphi_j(x))(g(y), \psi_j(y))$$

и аналогично

$$(g(y) \times f(x), \sum \varphi_j(x)\psi_j(y)) = \sum (g(y), \psi_j(y))(f(x), \varphi_j(x)),$$

что и требуется.

Для проверки второго равенства аналогичная выкладка проводится с основными функциями вида $\sum\limits_j \varphi_j(x)\psi_j(y)\chi_j(z)$.

[1)] Множество таких функций действительно плотно в пространстве K. Если, например, основная функция $\varphi(x,y)$ обращается в нуль вне квадрата $Q = \{|x| \leqslant a, |y| \leqslant a\}$, то для заданного $\varepsilon = 1/\nu$, пользуясь теоремой Вейерштрасса, мы построим многочлен $P_\nu(x,y)$, который в квадрате $Q' = \{|x| \leqslant 2a, |y| \leqslant 2a\}$ отличается от $\varphi(x,y)$ меньше чем на ε вместе с производными до порядка ν. Пусть, далее, $b(x)$ — фиксированная основная функция, равная 1 при $|x| \leqslant a$ и равная 0 при $|x| \geqslant 2a$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ функции $P_\nu(x,y)$, $b(x)b(y)$ стремятся к функции $\varphi(x,y)$ в пространстве K.

2. Свертка обобщенных функций. Если $f(x)$ и $g(x)$ — две абсолютно интегрируемые функции на прямой и $h(x) = f(x) * g(x)$ — их свертка, то выражение функционала, определяемого функцией (также абсолютно интегрируемой) $h(x)$, мы можем преобразовать следующим образом:

$$(h(x),\varphi(x)) = \int h(x)\varphi(x)dx = \\ = \int \left\{ \int f(\xi)g(x-\xi)d\xi \right\} \varphi(x)dx = \int\int f(\xi)g(\eta)\varphi(\xi+\eta)d\xi d\eta.$$

Иными словами, искомый результат есть результат применения функционала $f(x)g(y)$, который можно считать прямым произведением функций $f(x)$ и $g(y)$, к функции $\varphi(x+y)$.

Естественно общее определение свертки любых обобщенных функций f и g задать формулой

$$(f * g,\varphi) = (f(x) \times g(y),\varphi(x+y)). \tag{1}$$

Но здесь следует иметь в виду, что $\varphi(x+y)$ — уже не финитная функция в пространстве переменных x,y и поэтому формула (1), вообще говоря, не имеет смысла.

Однако в довольно общих предположениях, которые мы сейчас укажем, формула (1) все же имеет смысл.

Как мы видели в предыдущем пункте, носитель прямого произведения функционалов $f(x)$ и $g(y)$ есть прямое произведение носителей этих функционалов. Равенство (1) будет иметь смысл, если полоса $|x+y| \leqslant a$, в которой заключен носитель функции $\varphi(x+y)$, имеет лишь ограниченное пересечение с носителем прямого произведения $f \times g$. В этом случае функцию $\varphi(x+y)$ можно заменить в полосе $|x+y| \leqslant a$ финитной функцией $\varphi(x,y)$, не изменяя ее значений в точках пересечения полосы с носителем функционала $f \times g$; но тогда уже определено значение

$$(f \times g,\varphi(x,y))$$

и, как легко проверить, оно не зависит от выбора значений функции $\varphi(x,y)$ вне указанного пересечения.

В частности, равенство (1) имеет смысл в следующих случаях:

а) один из функционалов f, g имеет ограниченный носитель;

б) носители обоих функционалов f, g ограничены с одной и той же стороны (например, $f = 0$ при $x < a$, $g = 0$ при $y < b$).

Рассмотрим сначала случай а). Пусть, например, $f(x)$ — *финитный функционал*, т.е. имеющий ограниченный носитель, а $g(y)$ — произвольный функционал. Тогда

$$(f * g,\varphi) = (f(x) \times g(y),\varphi(x+y)) = (g(y),(f(x),\varphi(x+y))). \tag{2}$$

Функция $(f(x),\varphi(x+y))$ бесконечно дифференцируема и обращается при достаточно больших $|y|$ в нуль, так как при больших $|y|$ носители функции $\varphi(x+y)$ и функционала $f(x)$ не пересекаются. Поэтому функция $(f(x),\varphi(x+y))$ — основная по y и применение к ней функционала $g(y)$ имеет смысл.

Если, наоборот, $g(y)$ — финитный функционал, а $f(x)$ — произвольный, то функция $(f(x),\varphi(x+y))$ бесконечно дифференцируема, но, вообще говоря, не финитна; но так как функционал $g(y)$ финитный, то возможная нефинитность $(f(x),\varphi(x+y))$ не играет роли и результат (2) по-прежнему имеет смысл.

Рассмотрим теперь случай б): предположим, что носители функционалов $f(x)$ и $g(y)$ ограничены, скажем, слева. Рассмотрим функцию $(f(x),\varphi(x+y))$. Как и ранее, это бесконечно дифференцируемая функция от y. При достаточно больших положительных y носитель функции $\varphi(x+y)$ не пересекается с носителем функционала $f(x)$; поэтому при таких y функция $(f(x),\varphi(x+y))$ обращается в нуль. Таким образом, функция $(f(x),\varphi(x+y))$ имеет носитель, ограниченный справа. Так как носитель функционала $g(y)$ по условию ограничен слева, то пересечение носителей ограничено и правая часть формулы (2) имеет смысл.

Таким образом, *в указанных случаях а), б) свертка функционалов f, g имеет смысл.* В частности, всегда определена свертка $\delta * f$, $D\delta * f$, где D — любой дифференциальный оператор; это вытекает из того, что функционалы δ, $D\delta$ сосредоточены в одной точке.

Найдем свертку $\delta * f$. Согласно определению

$$(\delta * f,\varphi) = (\delta(x) \times f(y),\varphi(x+y)) = \\ = ((f(y),(\delta(x),\varphi(x+y))) = (f(y),\varphi(y)) = (f,\varphi).$$

Таким образом, для любого функционала f

$$\delta * f = f. \qquad (3)$$

Аналогично

$$D\delta * f = Df. \qquad (4)$$

В силу общих свойств прямого произведения функционалов свертка функционалов коммутативна, по крайней мере, в случаях а) и б):

$$f * g = g * f.$$

Аналогично можно написать равенство, выражающее свойство ассоциативности:

$$(f * g) * h = f * (g * h),$$

предположив, что носители двух из трех функционалов f, g, h ограничены с обеих сторон или что носители всех трех функционалов ограничены с одной и той же стороны.

Выведем следующую *формулу дифференцирования свертки*:

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg. \tag{5}$$

В дальнейшем эта формула будет часто применяться.

Имеем:

$$(D(f * g), \varphi) = (f * g, D^* \varphi),$$

где, например, $D^* = (-1)^\nu D$, если D — однородный дифференциальный оператор порядка ν. Далее согласно определению свертки,

$$(f * g, D^*\varphi) = (g(y), (f(x), D^*\varphi(x+y))) = \\ = (g(y), (Df(x), \varphi(x+y))) = (Df * g, \varphi),$$

откуда $D(f * g) = Df * g$. Далее, поскольку свертка коммутативна,

$$D(f * g) = D(g * f) = Dg * f = f * Dg,$$

и тем самым формула (5) установлена.

Установим полезную лемму о непрерывности свертки.

Лемма. Из $f_\nu \to f$ *следует* $f_\nu * g \to f * g$ *при каждом из следующих предположений:*

а) все функционалы f_ν *сосредоточены на одном и том же ограниченном множестве;*

б) функционал g *сосредоточен на ограниченном множестве;*

в) носители функционалов f_ν *и* g *ограничены с одной и той же стороны и притом не зависящей от* v *константой.*

Доказательство. По определению свертки, для любой основной функции φ

$$(f_\nu * g, \varphi) = (f_\nu(y), (g(x), \varphi(x+y))). \tag{6}$$

В случае а) функцию $(g(x), \varphi(x+y))$ можно заменить основной функцией $\psi(y)$, равной нулю вне области, в которой сосредоточены все функционалы $f_\nu(y)$; поэтому

$$(f_\nu * g, \varphi) = (f_\nu(y), \psi(y)) \to (f, \psi) = (f * g, \psi),$$

т.е.

$$f_\nu * g \to f * g,$$

что и утверждалось.

В случае б) $\psi(y) = (g(x), \varphi(x+y))$ есть основная функция; отсюда, так же как и выше, получаем требуемое.

В случае в), если для определенности предположить, что носители функционалов f_ν и g ограничены слева, то функция $\psi(y) = (g(x), \varphi(x+y))$ имеет ограниченный справа носитель; ее можно заменить основной функцией, обращающейся в нуль вне области, в которой сосредоточены все функционалы $f_\nu(y)$; отсюда, как и выше, получаем требуемое. Лемма доказана.

Следствие. *Если функционал $f = f_t$ зависит от параметра t и существует производная $\frac{\partial}{\partial t} f_t$*[1]*, то формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t * g) = \frac{\partial f_t}{\partial t} * g$$

справедлива в каждом из следующих предположений:

а) функционалы f_t сосредоточены на одном и том же ограниченном множестве;

б) функционал g сосредоточен на ограниченном множестве;

в) носители функционалов f_t и g ограничены с одной и той же стороны и притом не зависящей от t константой.

Доказательство легко приводится к доказательству леммы, если учесть, что производная $\frac{\partial f_t}{\partial t}$ есть предел отношения

$$\frac{f_{t+\Delta t} - f_t}{\Delta t}$$

при $\Delta t \to 0$.

3. Ньютоновский потенциал и фундаментальные решения дифференциальных уравнений. Классическая формула ньютоновского потенциала для распределения массы с кусочно гладкой финитной плотностью $\mu(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид

$$u(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}}. \qquad (1)$$

Известно, что $u(x_1, x_2, x_3)$ — функция, обладающая производными до 2-го порядка и удовлетворяющая уравнению Пуассона

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) = \mu(x_1, x_2, x_3).$$

Формулу (1) можно записать в виде свертки

$$u = \mu * \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \qquad \left(r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right).$$

---

[1] Подробнее о дифференцировании по параметру мы будем говорить в добавлении 2.

Здесь μ может быть уже любой финитной обобщенной функцией. При этом в общем случае u есть *обобщенная функция*. Оказывается, что формула Пуассона имеет место и в общем случае; действительно, вспоминая формулу $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta$ (§ 2, n. 3), мы можем написать:

$$\Delta u = \Delta\left(\mu * \left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\right) = \mu * \Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \mu * \delta = \mu.$$

Пусть теперь

$$P(D)u = \mu \tag{2}$$

— любое линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и произвольной обобщенной функцией μ в правой части. Назовем *фундаментальным решением* дифференциального уравнения (2) функционал $E(x)$, удовлетворяющий уравнению

$$P(D)E = \delta$$

(функционал E определен с точностью до решения однородного уравнения). Когда фундаментальное решение E известно, решение уравнения (2) может быть записано в форме свертки

$$u = \mu * E,$$

если, например, μ — финитная обобщенная функция. Действительно,

$$P(D)u = \mu * P(D)E = \mu * \delta = \mu.$$

Так, для оператора Лапласа в трехмерном пространстве фундаментальным решением служит регулярный функционал $E = -\frac{1}{4\pi r}$. В n-мерном пространстве фундаментальным решением для оператора Лапласа при $n > 2$ служит регулярный функционал $-\frac{1}{(n-2)\Omega_n}\frac{1}{r^{n-2}}$, где Ω_n — поверхность единичной сферы, а при $n = 2$ — регулярный функционал $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$.

В качестве примера покажем еще, как строится фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами[1)]:

$$a_0E^{(n)} + a_1E^{(n-1)} + \ldots + a_nE = \delta(x). \tag{3}$$

[1)] По существу, используется лишь наличие фундаментальной системы решений, которое имеет место и для переменных коэффициентов — лишь бы только коэффициент a_0 не обращался в нуль.

Пусть $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения

$$a_0 u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n u(x) = 0. \tag{4}$$

Положим

$$E(x) = \begin{cases} A(x) \equiv \alpha_1 u_1(x) + \ldots + \alpha_n u_n(x) & \text{при } x < 0, \\ B(x) \equiv \beta_1 u_1(x) + \ldots + \beta_n u_n(x) & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

и подберем постоянные α_i и β_j так, чтобы удовлетворялось уравнение (3). Поскольку дельта-функция является производной функции $\theta(x)$, равной 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$, достаточно потребовать, чтобы в точке $x = 0$ выполнялись условия:

$$\left.\begin{aligned} A(0) = B(0), A'(0) = B'(0), \ldots, A^{(n-2)}(0) = B^{(n-2)}(0), \\ a_0\left[A^{(n-1)}(0) - B^{(n-1)}(0)\right] = 1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Полагая $\alpha_i - \beta_i = \gamma_i \quad (i = 1, \ldots, n)$, получаем для чисел γ_i систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 u_1(0) + \ldots + \gamma_n u_n(0) = 0, \\ \gamma_1 u_1'(0) + \ldots + \gamma_n u_n'(0) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_1 u_1^{(n-2)}(0) + \ldots + \gamma_n u_n^{(n-2)}(0) = 0, \\ \gamma_1 u_1^{(n-1)}(0) + \ldots + \gamma_n u_n^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Эта система всегда разрешима, так как ее определитель есть вронскиан фундаментальной системы решений $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ и, следовательно, нигде не равен нулю.

Таким образом, фундаментальное решение строится с большим произволом: однозначно определяются только разности γ_i. Этот произвол объясняется очень просто: фундаментальное решение определено с точностью до прибавления любого решения однородного уравнения (4). Он используется для построения функций Грина — фундаментальных решений, удовлетворяющих тем или иным граничным условиям[1)].

Пример. Рассмотрим уравнение

$$E'' = \delta(x). \tag{7}$$

[1)] См., например, М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954.

В этом случае можно взять $u_1 = 1, u_2 = x$, следовательно,

$$A(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x, \qquad B(x) = \beta_1 + \beta_2 x.$$

Для $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$ получаем значения

$$\gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = 1.$$

Таким образом,

$$E = \beta_1 + \beta_2 x + x_+.$$

Это, разумеется, можно было сразу увидеть из уравнения (7). В § 6, а также в § 2 гл. III мы построим фундаментальные решения для широкого класса уравнений в частных производных.

4. Интеграл Пуассона и фундаментальное решение задачи Коши. Классическая формула Пуассона в теории теплопроводности имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \mu(\xi) d\xi, \tag{1}$$

где $\mu(\xi)$, скажем, — финитная интегрируемая функция. Известно[1)], что $u(x,t)$ обладает производной по t и двумя производными по x и удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \mu(x). \tag{3}$$

Функция $u(x,t)$ выражает температуру точки x бесконечного стержня в момент t, если известна начальная температура $\mu(x)$ при $t = 0$. Формулу (1) можно записать в виде свертки

$$u(x,t) = \mu(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4\pi}}. \tag{4}$$

Здесь в качестве μ можно взять уже любую финитную обобщенную функцию. При этом в общем случае функция $u(x,t)$, определенная формулой (4), есть, конечно, обобщенная функция (зависящая от параметра t). Докажем, что *эта обобщенная функция снова удовлетворяет уравнению теплопроводности* (2) *с начальным условием* (3).

[1)] В. И. Смирнов, Курс, т. II, 1957, п. 204, стр. 606.

Прежде всего заметим, что при $t > 0$ дифференцирование функции

$$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

рассматриваемой как обобщенная функция, по x и по параметру t равносильно ее обычному дифференцированию по x и t. В силу следствия из леммы о непрерывности свертки (п. 2)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu(x) * v(x,t)) = \mu(x) * \frac{\partial}{\partial t} v(x,t)$$

и в силу формулы дифференцирования свертки (п. 2)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mu * v) = \mu * \frac{\partial^2}{\partial x^2} v.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\mu * v) = \mu * \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v.$$

Но

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\dfrac{x^2}{4t}} \equiv 0,$$

так что $\mu * v$ и действительно является решением уравнения теплопроводности.

С другой стороны, поскольку $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\dfrac{x^2}{4t}}$ при $t \to 0$ имеет пределом в смысле обобщенных функций дельта-функцию $\delta(x)$ (см. § 2, п. 5, пример 2), мы имеем при $t \to 0$, согласно лемме о непрерывности свертки (п. 2),

$$u(x,t) = \mu * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \to \mu * \delta = \mu,$$

что и утверждалось.

Пусть теперь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u$$

— любое дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Поставим задачу Коши: найти решение этого уравнения (обобщенную функцию, зависящую от t как от параметра), обращающееся при $t = 0$ в заданную обобщенную функцию $u_0(x)$.

То частное решение задачи Коши, которое обращается при $t = 0$ в $\delta(x)$, называется *фундаментальным решением* этой задачи и обозначается через $E(x,t)$. Для уравнения теплопроводности им является функция $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Если известно фундаментальное решение, то решение задачи Коши с начальным условием $u_0(x)$ — в предположении, что функционал $u_0(x)$ финитен — можно выразить сверткой

$$u(x,t) = E(x,t) * u_0(x).$$

Действительно, мы имеем, с одной стороны, при $t \to 0$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial t} - P(\frac{\partial}{\partial x})\right] u(x,t) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t}[E(x,t) * u_0(x)] - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[E(x,t) * u_0(x)] = \\ &= \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} * u_0(x) - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x,t) * u_0(x) = \\ &= \left[\frac{\partial E}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E\right] * u_0(x) = 0 * u_0(x) = 0;\end{aligned}$$

с другой стороны,

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = [\lim_{t\to 0} E(x,t)] * u_0(x) = \delta(x) * u_0(x) = u_0(x),$$

что и утверждается.

Можно рассмотреть и более общий случай линейного уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0 \tag{5}$$

некоторого, например m-го, порядка по t, также с постоянными коэффициентами. Задача Коши здесь состоит в том, чтобы найти решение $u(x,t)$ уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \ldots, \frac{\partial^{(m-1)}(x,0)}{\partial t} = u_{m-1}(x). \tag{6}$$

Фундаментальным решением уравнения (5) называется решение $E(x,t)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{gathered}E(x,0) = 0, \frac{\partial E(x,0)}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial^{(m-2)} E(x,0)}{\partial t^{m-2}} = 0, \\ \frac{\partial^{(m-1)} E(x,0)}{\partial t^{m-1}} = \delta(x).\end{gathered}\right\} \tag{7}$$

Если обобщенная функция $u_{m-1}(x)$ финитна, то решение задачи Коши для уравнения (5) с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) = 0, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-2} u(x,0)}{\partial t^{m-2}} = 0,\\ \frac{\partial^{m-1} u(x,0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

можно записать в виде

$$u(x,t) = E(x,t) * u_{m-1}(x). \tag{9}$$

Эта формула годится и для любой $u_{m-1}(x)$, если финитно фундаментальное решение $E(x,t)$.

Действительно, построенная функция $u(x,t)$, с одной стороны, есть решение уравнения (5), поскольку дифференциальный оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ можно отнести к $E(x,t)$; далее, при $t \to 0$ мы имеем:

$$\begin{gathered} u(x,t) \to E(x,0) * u_{m-1}(x) = 0,\\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \to \frac{\partial E(x,0)}{\partial t} * u_{m-1}(x) = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial^{m-1} u(x,t)}{\partial t^{m-1}} \to \frac{\partial^{m-1} E(x,0)}{\partial t^{m-1}} * u_{m-1}(x) = u_{m-1}(x). \end{gathered}$$

Пример. Рассмотрим уравнение струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (-\infty < x < \infty) \tag{10}$$

и покажем, что фундаментальным решением задачи Коши для этого уравнения служит функция

$$E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } |x| < t,\\ 0 & \text{при } |x| > t. \end{cases}$$

Действительно, при фиксированном $t > 0$ мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} &= \frac{1}{2}\delta(x+t) - \frac{1}{2}\delta(x-t),\\ \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}\delta'(x+t) - \frac{1}{2}\delta'(x-t), \end{aligned}$$

а при фиксированном x, дифференцируя $E(x,t)$ по параметру t, находим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\delta(x+t) + \frac{1}{2}\delta(x-t),\\ \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{2}\delta'(x+t) - \frac{1}{2}\delta'(x-t),\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

так что уравнение (10) удовлетворяется.

Далее, устремляя в формуле (11) t к нулю, получаем:

$$\left.\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(x),$$

так что удовлетворяется и начальное условие, определяющее фундаментальное решение задачи Коши (очевидно, что сама $E(x,t)$ при $t \to 0$ имеет пределом 0).

Отсюда получаем формулу решения задачи Коши для уравнения струны (10) с начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x).$$

Согласно формуле (9) мы имеем (считая $u_1(x)$ локально интегрируемой функцией)

$$u(x,t) = E(x,t) * u_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi,t)u_1(x-\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} u_1(x-\xi)d\xi = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\gamma)d\gamma.$$

В данном случае фундаментальное решение $E(x,t)$ — финитная функция; поэтому свертка $E(x,t) * u_1(x)$ существует для любой обобщенной функции $u_1(x)$.

Теперь можно перейти к самому общему случаю, когда заданы функции

$$u(x,0) = u_0(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \ldots, \frac{\partial^{m-1}u(x,0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x)$$

и все они финитны (если финитно фундаментальное решение $E(x,t)$, то последнее условие можно отбросить). Для этого заметим, что если u — решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = 0 \qquad (k = 0,1,2,\ldots,m-2),$$
$$\frac{\partial^{m-1} u(x,0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x),$$

то функция $u_1(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}$ удовлетворяет тому же уравнению и начальным условиям, в которых отличны от нуля только $\frac{\partial^{m-2} u_1(x,0)}{\partial t^{m-2}}$ и $\frac{\partial^{m-1} u_1(x,0)}{\partial t^{m-1}}$. Вычитая из $u_1(x,t)$ решение $u_2(x,t)$, удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^k u_2(x,0)}{\partial t^k} = 0 \qquad (k = 0,1,2,\ldots,m-2),$$
$$\frac{\partial^{m-1} u_2(x,0)}{\partial t^{m-1}} = \frac{\partial^{m-1} u_1(x,0)}{\partial t^{m-1}},$$

мы получим решение u_3, у которого при $t = 0$ отлична от нуля только производная $\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}$, причем она равна заданной функции $u_{m-2}(x)$. Аналогично при любом $k \leqslant m-1$ можно получить решение, у которого при $t = 0$ из первых $m-1$ производных по t отлична от нуля и равна заданной функции $u_k(x)$ только производная $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$. Сумма построенных частных решений дает решение общей задачи.

Решение задачи Коши для уравнения струны (10) при общих начальных данных

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \tag{12}$$

получается по этому методу следующим образом. Находим решение $u_1(x,t)$, отвечающее начальным условиям

$$u_1(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = u_0(x).$$

По доказанному, оно имеет вид

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} u_0(\xi)\,d\xi.$$

Дифференцируя $u_1(x,t)$ по t, находим новое решение

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = u_2(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)],$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u_2(x,0) = \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = u_0(x),$$
$$\frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_0(x)}{\partial t} - \frac{\partial u_0(x)}{\partial t}\right] = 0.$$

Отсюда видно, что решением, отвечающим начальным условиям (12), служит функция

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} u_1(\xi)d\xi.$$

Мы получили известную формулу Даламбера.

В дальнейшем (§ 6) аналогичными методами мы найдем фундаментальные решения задачи Коши для широкого класса уравнений в частных производных.

5. Интегрирование и дифференцирование произвольного порядка. Хорошо известная формула Коши

$$g_n(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^{\xi_{n-1}} \cdots \int\limits_0^{\xi_2}\int\limits_0^{\xi_1} g(\xi)d\xi d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x g(\xi)(x-\xi)^{n-1}d\xi$$

сводит вычисление n-кратной первообразной от функции $g(x)$, определенной при $x \geqslant 0$, к вычислению однократного интеграла. Эта формула может быть записана в виде

$$g_n(x) = g(x) * \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = g(x) * \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)},$$

где функции $g(x)$ и x^{n-1} при $x < 0$ заменяются нулем.

Представляется естественным обобщить эту формулу на случай любого показателя λ и любой обобщенной функции g, сосредоточенной на полуоси $x \geqslant 0$, определив *первообразную порядка* λ *от функции* g как свертку

$$g_\lambda(x) = g(x) * \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}. \tag{1}$$

Непосредственно эта формула действует при $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Для остальных значений λ под $\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ следует понимать обобщенную функцию, построенную в n. 5 § 3; так как она остается сосредоточенной на полупрямой $x \geqslant 0$, то корректность определения свертки сохраняется. Удобно обозначить $\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = \Phi_\lambda$, так что

$$g_\lambda(x) = g(x) * \Phi_\lambda. \tag{2}$$

Из равенства

$$\Phi_{-k} = \delta^{(k)}(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

(§ 3, n. 5) мы выводим, что

$$g_0(x) = g(x) * \Phi_0 = g(x) * \delta(x) = g(x),$$
$$g_1(x) = g(x) * \Phi_{-1} = g(x) * \delta'(x) = g'(x)$$

и т.д.; таким образом, формула (2) дает при различных значениях λ не только интегралы, но и все производные функции $g(x)$. В связи с этим мы условимся также говорить, что свертка

$$g_{-\lambda} = g * \Phi_{-\lambda}$$

есть производная порядка λ *обобщенной функции* g и обозначать это так:

$$g_{-\lambda} = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} g.$$

Для функционалов Φ_λ имеет место формула

$$\Phi_\lambda * \Phi_\mu = \Phi_{\lambda+\mu}, \tag{3}$$

или

$$\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} = \frac{x_+^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)}. \tag{3'}$$

Докажем сначала, что она верна при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$. Так как

$$\Phi_\lambda * \Phi_\mu = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} = \int_0^x \frac{\xi^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{(x-\xi)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} d\xi,$$

$$\Phi_{\lambda+\mu} = \frac{x_+^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)},$$

то требует доказательства лишь соотношение

$$\int_0^x \xi^{\lambda-1}(x-\xi)^{\mu-1} d\xi = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} x^{\lambda+\mu-1}.$$

Положим в левой части $\xi = xt$; тогда интеграл слева приведется к интегралу

$$x^{\lambda+\mu-1}\int\limits_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}dt$$

и нужное соотношение оказывается следствием известного соотношения

$$B(\lambda,\mu) = \int\limits_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}dt = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{(\lambda+\mu)}.$$

Для остальных λ, μ формула (3) остается справедливой и силу единственности аналитического продолжения.

Из формулы (3) вытекает, что для любой обобщенной функции g (сосредоточенной на полуоси $x \geqslant c$)

$$(g * \Phi_\lambda) * \Phi_\mu = g * (\Phi_\lambda * \Phi_\mu) = g * \Phi_{\lambda+\mu}. \tag{4}$$

При $\mu = -\lambda$ отсюда видно, что дифференцирование и интегрирование одного и того же порядка — взаимнообратные операции. Далее, из формулы (4) видно, что

$$\frac{d^\beta}{dx^\beta}\left(\frac{d^\gamma g}{dx^\gamma}\right) = \frac{d^{\beta+\gamma} g}{dx^{\beta+\gamma}} \tag{5}$$

при любых β и γ.

Отметим еще другие следствия формулы (3). Заменяя в ней λ на $-\lambda$, можем написать:

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\right) = \frac{x_+^{\mu-\lambda-1}}{\Gamma(\mu-\lambda)}. \tag{6}$$

В частности, при $\mu = 1$ имеем:

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\theta(x) = \frac{x_+^{-\lambda}}{\Gamma(-\lambda+1)}. \tag{6$'$}$$

Если в формуле (6) μ является целым отрицательным числом или нулем, $\mu = -k$, то мы получаем, что

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\delta^{(k)}(x)\right) = \frac{x_+^{-k-\lambda-1}}{\Gamma(-k-\lambda)}. \tag{7}$$

С другой стороны, если $\mu - \lambda = -k$ является целым отрицательным числом или нулем, то из формулы (6) следует, что

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left(\frac{x_+^{\lambda-k-1}}{\Gamma(\lambda-k)}\right) = \delta^{(k)}(x). \tag{8}$$

Примеры. 1. Рассмотрим так называемое *интегральное уравнение Абеля*

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^\alpha}. \tag{9}$$

Здесь g — заданная, f — искомая функция.

В классической теории[1)] число α предполагается меньшим 1; это условие обеспечивает сходимость интеграла в правой части. Однако мы в этом предположении не нуждаемся, так как при любом α можем понимать правую часть уравнения (9) как интеграл порядка $\lambda = -\alpha + 1$ от обобщенной функции f, т. е. как свертку

$$g(x) = f(x) * \Phi_\lambda. \tag{9$'$}$$

Для получения выражения функции f через g нужно, очевидно, применить к последней дифференцирование порядка λ. Таким образом, $f(x) = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} g(x)$. Решение получается сверткой с функционалом $\Phi_{-\lambda}$:

$$g(x) * \Phi_{-\lambda} = (f(x) * \Phi_\lambda) * \Phi_{-\lambda} = f(x) * (\Phi_\lambda * \Phi_{-\lambda}) = \\ = f(x) * \delta = f(x). \tag{10}$$

Пусть, в частности, $0 < \alpha < 1$; тогда Φ_λ приводится к обычной функции $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x_+^{-\alpha}$ и уравнение (9') записывается в виде (9). В этом случае $-\lambda = \alpha - 1$ и функционал $\Phi_{-\lambda}$ сингулярен, так что, вообще говоря, решение уравнения (9) не приводится к классической формуле. Если дополнительно предположить, что функция $g(x)$ дифференцируема, то запись решения в классической форме уже возможна. Именно, мы имеем:

$$g(x) * \Phi_{\alpha-1} = g(x) * \frac{d}{dx}\Phi_\alpha = \frac{d}{dx} g(x) * \Phi_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{g'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}},$$

[1)] См. Г. М. Фихтенгольц, Курс, т. III, п. 592, стр. 290 (случай $\alpha = 1/2$).

т. е.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{g'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}. \tag{11}$$

Формула (11) для значения $\alpha = \frac{1}{2}$ и была фактически получена Абелем при решении уравнения (9).

2. Многие специальные функции могут быть выражены как производные дробного порядка от элементарных функций. Для *гипергеометрической функции*[1] существуют два таких выражения. Гипергеометрическая функция $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ определяется при $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\beta > 0$ и $|x| < 1$ как интеграл следующего вида:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}dt. \tag{12}$$

При остальных значениях β,γ $(\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots)$ и $|x| < 1$ она определяется как аналитическое продолжение, т. е. как регуляризация этого интеграла (см. § 3, п. 8). Сделаем в этом интеграле подстановку $\omega = tx$. Мы получим:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)x^{\gamma-1}} \int_0^x \omega^{\beta-1}(1-\omega)^{-\alpha}(x-\omega)^{\gamma-\beta-1}d\omega; \tag{13}$$

эту формулу можно записать в следующем виде:

$$\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{d^{\beta-\gamma}}{dx^{\beta-\gamma}}\left(\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}\right). \tag{14}$$

Таким образом, *функция* $\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ *является производной порядка* $\beta-\gamma$ *от функции* $\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}$. Это можно записать также в виде формулы

$$\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{x_+^{\gamma-\beta-1}}{\Gamma(\gamma-\beta)} * \frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}. \tag{15}$$

[1] См. Г. М. Фихтенгольц, Курс, т. II, 1948, п. 495, стр. 793.

Другое выражение для гипергеометрической функции в виде производной дробного порядка получается, если сделать в интеграле (12) подстановку $\omega = \frac{x(1-t)}{1-tx}$. Мы получаем, что

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \\ = \frac{\Gamma(\gamma)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)x^{\gamma-1}} \int_0^x \omega^{\gamma-\beta-1}(1-\omega)^{\alpha-\gamma}(x-\omega)^{\beta-1}d\omega. \quad (16)$$

Иными словами,

$$\frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}} \left[\frac{x_+^{\gamma-\beta-1}(1-x)_+^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\gamma-\beta)} \right]. \quad (17)$$

Сравнивая формулы (14) и (17), мы получаем известную формулу

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;x). \quad (18)$$

Любопытные соотношения для гипергеометрической функции вытекают из равенства (5), т. е. из формулы

$$\frac{d^\beta}{dx^\beta}\left(\frac{d^\gamma g}{dx^\gamma}\right) = \frac{d^{\beta+\gamma} g}{dx^{\beta+\gamma}}. \quad (19)$$

Возьмем от равенства (14) производную порядка $-\delta$. Мы получим, что

$$\frac{d^{-\delta}}{dx^{-\delta}} \left[\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha,\beta,\gamma;x) \right] = \frac{d^{\beta-\gamma-\delta}}{dx^{\beta-\gamma-\delta}} \left[\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)} \right] = \\ = \frac{x^{\gamma+\delta-1}}{\Gamma(\gamma+\delta)} F(\alpha,\beta,\gamma;x). \quad (20)$$

Если изобразить это равенство в интегральной форме, то мы получаем:

$$F(\alpha,\beta,\gamma+\delta;x) = \\ = \frac{\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)x^{\gamma+\delta-1}} \int_0^x \omega^{\gamma-1} F(\alpha,\beta,\gamma;x)(x-\omega)^{\delta-1} d\omega = \\ = \frac{\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)} \int_0^1 \omega^{\gamma-1}(1-\omega)^{\delta-1} F(\alpha,\beta,\gamma,x\omega) d\omega. \quad (21)$$

Эта формула верна при всех значениях $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, если понимать интеграл в правой части равенства как регуляризованное значение интеграла (§ 3, n. 8).

Представления (14) и (17) гипергеометрической функций в виде производной дробного порядка позволяют установить случаи, в которых эта функция является многочленом или же многочленом, умноженным на $(1-x)^p$.

Пусть β — отрицательное целое число или нуль, $\beta = -k$. Тогда $\frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \delta^{(k)}(x)$. Следовательно, формула (14) принимает вид

$$\frac{x^{\gamma-1}F(\alpha,-k,\gamma,x)}{\Gamma(\gamma)} = \frac{d^{-k-\gamma}}{dx^{-k-\gamma}}\left[(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x)\right]. \tag{22}$$

Но функция[1] $(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x)$ является линейной комбинацией δ-функции и ее производных:

$$(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x) = \sum_{r=0}^{k}(-1)^r C_k^r \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\delta^{(k-r)}(x). \tag{23}$$

По формуле (7)

$$\frac{d^{-k-\gamma}}{dx^{-k-\gamma}}\left[\delta^{(k-r)}(x)\right] = \frac{x^{r+\gamma-1}}{\Gamma(r+\gamma)}.$$

Внося выражение для $(1-x)^{-\alpha}\delta^{(k)}(x)$ в формулу (22), выполняя дифференцирование и сокращая на $\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$, мы получаем:

$$F(\alpha,-k,\gamma;x) = \sum_{r=0}^{k}(-1)^r C_k^r \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+r)}x^r \tag{24}$$

(при этом γ не должно быть целым отрицательным числом или нулем). Многочлен $F(\alpha,-n,\gamma;x)$ называется *многочленом Якоби* и обозначается $G(\alpha,-n,\gamma;x)$. Из формул (18) и (24) вытекает, что в случае, когда $\gamma-\beta$ является целым отрицательным числом или нулем, $\gamma-\beta=-n$, гипергеометрическая функция принимает следующий вид:

$$F(\alpha,\gamma+n,\gamma;x) = (1-x)^{-\alpha-n}G(\gamma-\alpha,-n,\gamma;x).$$

---

[1] Очевидно, что такое произведение определено: так как $\delta^{(k)}(x)$ сосредоточено в нуле, то $(1-x)^{-\alpha}$ можно заменить бесконечно дифференцируемой функцией, равной $(1-x)^{-\alpha}$ в окрестности нуля.

Из равенства $F(\alpha,\beta,\gamma;x) = F(\beta,\alpha,\gamma;x)$ вытекают аналогичные утверждения для случаев, когда α или $\gamma-\alpha$ являются целыми отрицательными числами или нулями.

Рассмотрим теперь гипергеометрическую функцию как функцию от γ. Из равенства (14) видно, что эта функция может иметь особенность, если γ является целым отрицательным числом или нулем. Функция $\Gamma(\gamma)$ имеет при $\gamma=-n$ полюс с вычетом $\frac{(-1)^n}{n!}$. Если α или β также являются целыми отрицательными числами или нулями, например $\beta=-m$, причем $m<n$, то, согласно сказанному выше, гипергеометрическая функция вырождается в многочлен. Если же это условие не выполняется, то гипергеометрическая функция, рассматриваемая как функция от γ, имеет полюс с вычетом

$$\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}\frac{d^{\beta+n}}{dx^{\beta+n}}\left(\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}\right) = \\ = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}\frac{d^{n+1}\Gamma(\alpha,\beta,1;x)}{dx^{n+1}}. \quad (25)$$

Рассмотрим теперь *бесселевы функции*[1] и покажем, что функцию $u^{p/2}J_p(\sqrt{u})$ также можно представить производной дробного порядка от элементарной функции. Функция $J_p(z)$ имеет при $\operatorname{Re} p > -\dfrac{1}{2}$ следующее интегральное представление:

$$J_p(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_0^1 (1-t^2)^{p-\frac{1}{2}}\cos zt\,dt. \quad (26)$$

Для остальных p этот интеграл можно понимать в регуляризованном смысле. Полагая здесь $zt=\omega$, мы получаем:

$$J_p(z) = \frac{2}{(2z)^p\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_0^z (z^2-\omega^2)^{p-\frac{1}{2}}\cos\omega\,d\omega, \quad (27)$$

или

$$2^p\sqrt{\pi}u^{p/2}J_p\left(\sqrt{u}\right) = \int_0^u \frac{(u-v)^{p-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\frac{\cos\sqrt{v}}{\sqrt{v}}dv. \quad (28)$$

Это равенство можно записать в следующем виде:

$$2^p\sqrt{\pi}u^{p/2}J_p\left(\sqrt{u}\right) = \frac{d^{-p-\frac{1}{2}}}{du^{-p-\frac{1}{2}}}\left[\frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right]. \quad (29)$$

[1] См. В. И. Смирнов, Курс, т. III, ч. 2, 1951, гл. 6, § 2.

Возьмем от обеих частей этого равенства производную порядка $-q-1$; мы получим:

$$\frac{d^{-q-1}}{du^{-q-1}}\left[2^p\sqrt{\pi}u^{p/2}J_p\left(\sqrt{u}\right)\right] = \frac{d^{-p-q-\frac{3}{2}}}{du^{-p-q-\frac{3}{2}}}\left(\frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right) = \\ = 2^{p+q+1}\sqrt{\pi}u^{\frac{p+q+1}{2}}J_{p+q+1}\left(\sqrt{u}\right). \quad (30)$$

Записывая это равенство в интегральной форме, мы находим:

$$2^{q+1}u^{\frac{p+q+1}{2}}J_{p+q+1}\left(\sqrt{u}\right) = \int\limits_0^u v^{p/2}J_p\left(\sqrt{v}\right)\frac{(u-v)^q}{\Gamma(q+1)}dv. \quad (31)$$

Подстановка $u = x^2$, $v = x^2\sin\theta$ приводит формулу (31) к виду

$$J_{p+q+1}(x) = \frac{x^{q+1}}{\Gamma(q+1)2^q}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} J_p(x\sin\theta)\sin^{p+1}\theta\cos^{2q+1}\theta\,d\theta. \quad (32)$$

Этот интеграл называется *интегралом Сонина*, так как Н. Я. Сонин доказал формулу (32) для целых p и q, $p \geqslant 0, q \geqslant 0$.

§ 6. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1. Фундаментальные решения эллиптических уравнений. Пусть дан линейный дифференциальный оператор $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ порядка $2m$ с постоянными коэффициентами. Обозначим через L_0 его главную часть, т. е. часть, содержащую только производные порядка $2m$. Оператор L называется *эллиптическим,* если при замене в L_0 каждого из дифференциалов $\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ числами $\omega_1,\ldots,\omega_n$ мы получаем многочлен $L_0(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, не обращающийся в нуль при $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n) \neq 0$.

Мы должны решить уравнение

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u(x_1,\ldots,x_n) = \delta(x_1,\ldots,x_n). \quad (1)$$

Применим для этого следующий метод.

1°. Мы заменяем δ-функцию в правой части рассматриваемого уравнения функцией $\frac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$, которая равна дельта-функции при $\lambda = -n$ (§ 3, n. 9, (9)).

2°. Функцию $\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ разлагаем на плоские волны, т. е. представляем ее, согласно формуле (4) п. 10 § 3, как среднее по всем направлениям $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ от функций вида $C|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda$ и решаем уравнение для правой части вида $|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda$, что уже элементарно.

Итак, заменяем уравнение (1) уравнением

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = \frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}, \tag{2}$$

из которого уравнение (1) получается при $\lambda = -n$.

Представим теперь правую часть по формуле (4) п. 10 § 3 в виде

$$\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda d\Omega. \tag{3}$$

Если найти решение v уравнения

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) v = \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}, \tag{4}$$

зависящее только от $\xi = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n$, то решение уравнения (2) запишется в виде

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_\Omega v(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n) d\Omega.$$

Решение уравнения (4) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Так как для функции $v(\xi) = v(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \omega_k \frac{d}{d\xi},$$

то, подставляя функцию $v(\xi)$ в уравнение (4), мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2m$:

$$L\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \ldots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right) v = \frac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}. \tag{5}$$

Правая часть этого уравнения, помимо ξ, зависит от λ, а коэффициенты слева зависят от $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Следовательно, решение v зависит от ξ, λ и ω. Поэтому мы будем писать:

$$v = v_\omega(\xi, \lambda).$$

Пусть $G(\xi,\omega)$ есть фундаментальное решение уравнения (5), т. е. решение уравнения

$$L\left(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ldots,\omega_n\frac{d}{d\xi}\right)G(\xi,\omega)=\delta(\xi).$$

Тогда

$$v_\omega(\xi,\lambda)=\frac{1}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\xi-\eta,\omega)|\eta|^\lambda d\eta \tag{6}$$

и

$$u(x_1,\ldots,x_n)=\int\limits_\Omega v_\omega(\omega_1x_1+\ldots,+\omega_nx_n,\lambda)d\Omega. \tag{7}$$

Чтобы получить искомое фундаментальное решение, нужно положить в последних формулах $\lambda=-n$.

Особенно простой результат получится в случае нечетного числа измерений. В этом случае

$$\left.\frac{|\eta|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}=C\delta^{(n-1)}(\eta)$$

и, значит,

$$v_\omega(\xi,-n)=C\frac{\partial^{n-1}G(\xi,\omega)}{\partial\xi^{n-1}}. \tag{8}$$

Таким образом, в случае нечетного числа измерений фундаментальное решение эллиптического уравнения (1) может быть представлено в виде

$$u(x_1,\ldots,x_n)=C_1\int\limits_\Omega\frac{\partial^{n-1}}{d\xi^{n-1}}G(\xi,\omega)d\Omega. \tag{9}$$

Здесь $\xi=\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n$, а $G(\xi,\omega)$ есть фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения с левой частью $L\left(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ldots,\omega_n\frac{d}{d\xi}\right)$. Можно проверить, что

$$C_1=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Omega_n(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 1\cdot 3\ldots(n-2)}.$$

Строго говоря, существование свертки в формуле (6) и возможность интегрирования в формуле (7) нуждаются в обосновании. Прямой путь для этого — получение формул для $G(\xi,\omega)$ в явном виде. Вместо этого мы здесь, обходя вопрос о существовании свертки (6), приведем другой способ получения функции $v_\omega\left(\sum \omega_i x_i\right)$, не оставляющий сомнений в возможности ее интегрирования по единичной сфере.

Заметим, что если обобщенная функция $v(\xi)$ непрерывно зависит от некоторых параметров, то ее производная любого порядка по ξ также непрерывно зависит от этих параметров (см. § 2). Далее, если обобщенная функция $v(\xi)$ является решением уравнения $L_\xi v(\xi) = f(\xi)$ (L_ξ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами), то производная $\omega(\xi) = \frac{dv(\xi)}{d\xi}$ является решением уравнения $L_\xi\, \omega(\xi) = \frac{df(\xi)}{d\xi}$. Отметим еще, что если обобщенные функции $v_\lambda(\xi)$ и $f_\lambda(\xi)$ непрерывно зависят от параметра λ и при $\lambda \neq \lambda_0$ (в окрестности точки λ_0) $v_\lambda(\xi)$ является решением уравнения $L_\xi v_\lambda(\xi) = f_\lambda(\xi)$, то $v_{\lambda_0}(\xi)$ будет решением уравнения $L_\xi v_{\lambda_0}(\xi) = f_{\lambda_0}(\xi)$.

Предположим сначала, что $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Тогда правая часть уравнения (5) — непрерывная функция от ξ, и решение существует в силу классических теорем существования. Далее, при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ правая часть зависит непрерывно и от λ, поэтому v непрерывно зависит от λ. Наконец, коэффициенты уравнения (5), стоящие в левой части, непрерывно зависят от ω $\left(\sum \omega_i^2 = 1\right)$, причем модуль старшего коэффициента $L_0(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, в силу эллиптичности исходного уравнения, имеет положительный минимум. Следовательно, v непрерывно зависит и от ω. В частности, v зависит от ω и λ непрерывно в смысле обобщенных функций.

Заметим теперь, что при двукратном дифференцировании по ξ правая часть уравнения (5) воспроизводится (с точностью до множителя 2λ) с индексом, на две единицы меньшим, если только $\lambda \neq 0$. В силу предыдущих замечаний мы можем найти непрерывно зависящее от ω решение уравнения (5) при всех λ многократным дифференцированием решения $v_\omega(\xi, \lambda)$ для $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и, если нужно, предельным переходом.

В случае нечетного n нужно начать с дифференцирования $v_\omega(\xi, \lambda)$ при $\lambda = 1$. После двукратного дифференцирования получится с точностью до множителя функция $G(\xi, \omega)$, так как правая часть уравнения (5) при $\lambda = -1$ обращается с точностью до множителя в $\delta(\xi)$. Дальнейшим дифференцированием мы получим формулу (8).

В случае четного n мы определим решение $v_\omega(\xi, \lambda)$ при малых положительных λ, затем дважды продифференцируем его по ξ, разделим на λ и устремим λ к нулю. В результате получится решение уравнения (5), отвечающее значению $\lambda = -2$. Дальнейшим дифференцированием получим $v_\omega(\xi, \lambda)$ при $\lambda = -4, -6, \ldots$

Разберем более подробно случай однородного эллиптического дифференциального оператора $L(= L_0)$. Обыкновенное дифференциальное уравнение (5) в этом случае приобретает вид

$$L(\omega_1, \ldots, \omega_n) v^{(2m)}(\xi) = \frac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$$

и, значит,

$$v^{(2m)}(\xi) = \frac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) L(\omega_1, \ldots, \omega_n)}.$$

Для того чтобы найти $v(\xi)$, достаточно $2m$ раз проинтегрировать правую часть полученного уравнения. Как мы показали в § 3, п. 4, результат следует считать равным

$$v(\xi) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} \left\{ \frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)} + Q_\lambda(\xi) \right\},$$

где

$$Q_\lambda(\xi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi^{2m-2k}}{(2k-1)!(2m-2k)!(\lambda+2k)}.$$

Таким образом, решение однородного эллиптического уравнения

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = \frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$$

задается формулой

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \times \\ \times \int\limits_\Omega \left\{ \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)} + Q_\lambda\left(\sum \omega_k x_k\right) \right\} \frac{d\Omega}{L(\omega_1 \ldots \omega_n)}. \quad (10)$$

В частности, при $\lambda = -n$ получается фундаментальное решение однородного эллиптического дифференциального уравнения порядка $2m$.

Заметим, что так как интеграл по единичной сфере Ω от каждого слагаемого в выражении $Q_\lambda\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k x_k\right)$ является многочленом степени меньше $2m$ и поэтому удовлетворяет уравнению $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0$, то мы можем в фундаментальное решение включить только то слагаемое этого выражения, которое нужно, чтобы полученная функция не имела полюса при $\lambda = -n$, отбросив все остальные слагаемые.

Разберем более подробно вид фундаментального решения. При этом будем исследовать отдельно случай, когда порядок уравнения не меньше размерности пространства, т. е. $2m \geqslant n$, и случай, когда $2m < n$. Рассмотрим сначала первый случай $2m \geqslant n$. Приходится различать еще случай пространства нечетной размерности n и случай четного n. При n нечетном и $2m > n$ предельный переход в формуле (10) дает для фундаментального решения выражение

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{4(2\pi)^n (2m-n)!} \int\limits_\Omega \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{2m-n}}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} d\Omega. \quad (11)$$

Многочлен $Q_\lambda(\xi)$ здесь отброшен, так как для предельного перехода он не нужен.

В случае четного n и $2m \geqslant n$ при $\lambda = -n$ для получения конечного значения приходится добавлять к функции $\frac{|\sum \omega_k x_k|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)}$ то слагаемое многочлена $Q_\lambda\left(\sum\omega_k x_k\right)$, коэффициент которого содержит множитель $\frac{1}{\lambda+n}$, а именно $\frac{\xi^{2m-n}}{(n-1)!(2m-n)!(\lambda+n)}$. При этом сумма

$$\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)}+\frac{\xi^{-n+2m}}{(n-1)!(2m-n)!(\lambda+n)}$$

при $\lambda\to -n$ стремится к $-\frac{\xi^{2m-n}\ln|\xi|}{(n-1)!(2m-n)!}$, и мы получаем следующее выражение для фундаментального решения:

$$u(x_1,\ldots,x_n)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{(2\pi)^n(2m-n)!}\times\\ \times\int\limits_{\Omega}\frac{(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)^{2m-n}\ln|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)}d\Omega. \quad (12)$$

Заметим, что когда порядок уравнения не меньше размерности пространства, интегралы по сфере сходятся, и функция Грина представляет собой обычную (необобщенную) функцию от $x_1,x_2,\ldots,x_n$, непрерывную в точке $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Перейдем к случаям, когда порядок уравнения меньше размерности пространства ($2m<n$).

В этих случаях

$$\left.\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-2m-1)!}\delta^{n-2m-1}(x)$$

для нечетного n и

$$\left.\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}=\frac{|\xi|^{-n+2m}}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}$$

для четного n.

Отсюда для фундаментального решения получается при нечетном n ($2m<n$) выражение

$$u(x_1,\ldots,x_n)=\\ =\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\Omega}\delta^{(n-2m-1)}(\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n)\frac{d\Omega}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)} \quad (13)$$

и при четном n ($2m<n$) выражение

$$u(x_1,\ldots,x_n)=\\ =\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-2m-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Omega}|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^{-n+2m}\frac{d\Omega}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)}. \quad (14)$$

Можно показать, что фундаментальное решение $u(x_1, \dots, x_n)$, выраженное формулами (11)–(14), всегда представляет собой обычную (не обобщенную) функцию, притом обладающую следующими свойствами: при $x \neq 0$ она аналитична, а в окрестности начала координат удовлетворяет соотношению

$$u(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} O(r^{2m-n}), & \text{если } n \text{ нечетно или} \\ & \text{если } n \text{ четно и } 2m < n, \\ O(r^{2m-n} \ln r), & \text{если } n \text{ четно и } 2m \geqslant n \end{cases}$$

где $r = \sqrt{\sum x_i^2}$; при этом в случае $2m > n$ функция $u(x_1, \dots, x_n)$ имеет в начале координат непрерывные производные до порядка $2m - n - 1$.

Пример. Пусть $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^m$ есть m-я итерация оператора Лапласа. Многочлен $L_0(\omega_1, \dots, \omega_n) = \left(\sum \omega_i^2\right)^m$ на единичной сфере Ω обращается в единицу. Интегралы (8), (10) и (11) можно вычислить теперь по формуле (3) и при $2m < n$, а также при n нечетном и $2m \geqslant n$ мы получаем с точностью до коэффициента пропорциональности

$$u(x) = C_{mn} r^{2m-n}.$$

Если $2m \geqslant n$ и n четно, то, переходя в интеграле (12) к сферическим координатам, мы получаем:

$$u(x) = C'_{mn} r^{2m-n} \ln r + C''_{mn} r^{2m-n}.$$

Последнее слагаемое можно отбросить, так как оно является решением однородного уравнения $\Delta^m u = 0$.

2. Фундаментальные решения однородных регулярных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, \dots, x_n) = \delta(x_1, \dots, x_n), \tag{1}$$

где L — такой дифференциальный оператор, что если мы заменим в нем $\frac{\partial}{\partial x_i}$ на ω_i, то получим однородный полином степени m[1]. *Мы предположим, что конус $L(\omega_1, \dots, \omega_n) = 0$ не имеет особых точек* (кроме начала координат), *т. е. что при $L(\omega_1, \dots, \omega_n) = 0$ и $\sum \omega_j^2 \neq 0$ градиент $L(\omega_1, \dots, \omega_n)$ не обращается в нуль.* В этом случае уравнение $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = \delta(x)$ и сам оператор $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ будем называть *регулярными.*

---

[1] В п. 1 порядок оператора L обозначался через $2m$.

В п. 1 мы рассмотрели эллиптический случай, когда m четно и, что самое главное, $L(\omega_1, \dots, \omega_n) \neq 0$ при $\sum \omega_j^2 \neq 0$. В общем случае тем же путем можно формально прийти к выражению

$$u(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{\Omega} \frac{f_{mn}\left(\sum x_i \omega_i\right) d\Omega}{L(\omega_1, \dots, \omega_n)}, \tag{2}$$

где Ω — единичная сфера $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i^2 = 1$, $d\Omega$ — элемент поверхности этой сферы, а функция f_{mn} имеет следующие значения: если n четно и $m \geqslant n$, то

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{(2\pi)^n (m-n)!} x^{m-n} \ln |x|; \tag{3}$$

если n четно и $m < n$, то

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+m} (n-m-1)!}{(2\pi)^n} x^{m-n}; \tag{4}$$

если n нечетно и $m \geqslant n$, то

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{4(2\pi)^{n-1} (m-n)!} x^{m-n} \operatorname{sgn} x; \tag{5}$$

если n нечетно и $m < n$, то

$$f_{mn}(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \delta^{(n-m-1)}(x). \tag{6}$$

Но теперь интеграл (2), вообще говоря, расходится, поскольку на единичной сфере Ω имеется в общем случае многообразие P, на котором $L(\omega_1, \dots, \omega_n) = 0$.

Однако, если оператор L регулярен и, следовательно, многообразие P не имеет особых точек, то интеграл (2) можно регуляризировать следующим образом:

$$u(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{\Omega} \frac{f_{mn}\left(\sum x_i \omega_i\right)}{L(\omega_1, \dots, \omega_n)} d\Omega = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x_1, \dots, x_n),$$

где

$$u_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{f_{mn}\left(\sum x_i \omega_i\right) d\Omega}{L(\omega_1, \dots, \omega_n)}. \tag{7}$$

Здесь через Ω_ε обозначено множество тех точек на единичной сфере, для которых $|L(\omega_1,\dots,\omega_n)| > \varepsilon$.

Нам надо прежде всего показать, что существует предел для обобщенной функции u_ε, т. е. что для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции φ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(u_\varepsilon,\varphi(x_1,\dots,x_n)) = (u,\varphi(x_1,\dots,x_n)).$$

Заметим, что если $f_{mn}(\sum x_i\omega_i)$ определена по одной из формул (3)–(6), то (f_{mn},φ) является бесконечно дифференцируемой функцией от $\omega_1,\dots,\omega_n$. Это проверяется простой заменой переменных в интеграле, выражающем (f_{mn},φ), переводящей зависимость от $\omega_1,\dots,\omega_n$ в аргумент φ.

Обозначим $(f_{mn}(\sum x_i\omega_i),\varphi)$ через $r(\omega_1,\dots,\omega_n)$ и покажем, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{r(\omega_1,\dots,\omega_n)d\Omega}{L(\omega_1,\dots,\omega_n)} = (u,\varphi).$$

Чтобы доказать это, представим $r(\omega_1,\dots,\omega_n)$ в виде $r = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$, где функция $r_i(\omega_1,\dots,\omega_n)$ бесконечно дифференцируема и обращается в нуль вне достаточно малой области S_i. Надо рассмотреть интегралы лишь для тех функций r_i, для которых замыкание области S_i пересекается с многообразием P, где $L(\omega_1,\dots,\omega_n) = 0$. Таким образом, можно предположить, что функция $r_i(\omega_1,\dots,\omega_n)$, для которой надо установить существование предела $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{r\,d\Omega}{\tau}$, обращается в нуль вне достаточно малой окрестности точки A, принадлежащей многообразию P. В этой точке, как и на всем многообразии P, градиент L не обращается в нуль. Поэтому в точке A одна из производных $\frac{\partial L}{\partial\omega_i}$ $(i = 1,2,\dots,n)$ не обращается в нуль. Кроме того, в точке A мы имеем $\sum\omega_i^2 = 1$ и хотя бы одна из координат ω_i отлична от нуля. Пусть для определенности $\frac{\partial L}{\partial\omega_1} \neq 0$ и $\omega_n \neq 0$. Тогда в окрестности точки A на P можно ввести систему координат $L,\omega_2,\dots,\omega_{n-1}$. В этих координатах $d\Omega$ выразится в виде

$$d\Omega = I(L,\omega_2,\dots,\omega_{n-1})dL\,d\omega_2\dots d\omega_{n-1},$$

где $I(L,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1})$ — гладкая функция. Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{r_i(\omega_1,\ldots,\omega_n)}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)} d\Omega =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon}\cdots\int \frac{r_i(L,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1}) I(L,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1})}{L} dL\, d\omega_2\ldots d\omega_{n-1} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \left[\int\limits_{|L|>\varepsilon} \frac{r_i(L,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1}) I(L,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1}) dL}{L}\right] \times$$

$$\times\, d\omega_2\ldots d\omega_{n-1}.$$

Так как интеграл $\int\limits_{|L|>\varepsilon} \frac{r_i I\, dL}{L}$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к главному значению по Коши, то существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{r_i(\omega_1,\ldots,\omega_n) d\Omega}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)},$$

а следовательно, и предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{r(\omega_1,\ldots,\omega_n) d\Omega}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)} = \lim_{\varepsilon\to 0} (u_\varepsilon,\varphi).$$

Мы доказали, что существует регуляризация по Коши интеграла

$$\int\limits_{\Omega} \frac{r(\omega_1,\ldots,\omega_n) d\Omega}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)}. \tag{8}$$

По каждой регуляризации интеграла (8) мы можем определить обобщенную функцию (2)

$$u(x_1,\ldots,x_n) = \int\limits_{\Omega} \frac{f_{mn}\left(\sum x_i\omega_i\right) d\Omega}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)}$$

следующим образом:

$$(u,\varphi(x_1,\ldots,x_n)) = \int\limits_{\Omega} \frac{(f_{mn},\varphi) d\Omega}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)},$$

где интеграл понимается в смысле нашей регуляризации.

Для наших целей годится любая регуляризация интеграла (8), подчиняющаяся тому условию, что если функция r имеет вид

$$r(\omega_1, \ldots, \omega_n) = L(\omega_1, \ldots, \omega_n) r_1(\omega_1, \ldots, \omega_n),$$

где r и r_1 — бесконечно дифференцируемые функции, то

$$\int\limits_{\Omega} \frac{r(\omega_1, \ldots, \omega_n) d\Omega}{L(\omega_1, \ldots, \omega_n)} = \int\limits_{\Omega} r_1(\omega_1, \ldots, \omega_n) d\Omega. \tag{9}$$

Две регуляризации, подчиняющиеся условию (9), отличаются друг от друга на следующее выражение:

$$\int\limits_{P} r(\omega_1, \ldots, \omega_n) d\mu, \tag{10}$$

где P — снова многообразие нулей полинома $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ на единичной сфере Ω, а μ — некоторая мера на этом многообразии.

Действительно, так как для функции r, обращающейся в нуль на многообразии P, все регуляризации интеграла (8), подчиняющиеся условию (9), дают один и тот же результат (поскольку такую функцию можно представить в виде $r = r_1 L$), разница между двумя регуляризациями не может зависеть ни от значений функции $r(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ вне многообразия P, ни от значений производных ее на самом многообразии P, а значит, имеет вид (10).

Покажем теперь, что две различные регуляризации интеграла (2), подчиняющиеся условию (9), отличаются друг от друга на решение однородного уравнения

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0.$$

Действительно, разность между этими обобщенными функциями мы можем по (10) представить в виде следующего функционала:

$$s(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{P} f_{mn}\left(\sum x_i \omega_i\right) d\mu.$$

Применяя к полученному выражению оператор L, мы имеем:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) s(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{P} L(\omega_1, \ldots, \omega_n) f_{mn}^{(m)}\left(\sum x_i \omega_i\right) d\mu,$$

и так как интегрирование идет по многообразию P, где $L(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$, последний интеграл обращается в нуль.

Нам осталось показать, что интеграл (2) действительно даст решение уравнения (1). Для проверки этого факта применим к интегралу (2) дифференциальный оператор $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Мы будем иметь:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{\Omega} f_{mn}^{(m)}\left(\sum x_i \omega_i\right) d\Omega.$$

Используя формулы (3)–(6) для функции f_{mn}, а также формулы для разложения δ-функций на плоские волны (§ 3), мы получаем: если n четно, то

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u(x_1,\ldots,x_n) = \\ = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Omega}\left(\sum x_i\omega_i\right)^{-n}d\Omega = \delta(x_1,\ldots,x_n);$$

если n нечетно, то

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u(x_1,\ldots,x_n) = \\ = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\Omega}\delta^{(n-1)}\left(\sum x_i\omega_i\right)d\Omega = \delta(x_1,\ldots,x_n).$$

Таким образом, если конус $L(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ не имеет особых точек, то формулы (2)–(6) действительно выражают решение уравнения $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = \delta(x)$.

3. Фундаментальное решение задачи Коши. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u = 0 \tag{1}$$

порядка m по переменному t.

Несколько позже мы сформулируем ограничения, наложенные на это уравнение. Мы ставим себе целью построить фундаментальное решение задачи Коши для этого уравнения (см. § 5, п. 4). Иными словами, мы должны найти решение $u(t,x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0,x) = 0, \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1}u(0,x)}{\partial t} = \delta(x).$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) при произвольном числе независимых переменных мы проведем сведением к задаче Коши для двух независимых переменных. Относительно уравнения (1) сделаем следующее предположение: *дифференциальный оператор*

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \xi}\right) = P\left(\frac{\partial}{\partial t},\omega_1\frac{\partial}{\partial \xi},\ldots,\omega_n\frac{\partial}{\partial \xi}\right) \tag{2}$$

обладает тем свойством, что для уравнения

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v_\omega = 0 \tag{3}$$

задача Коши корректна.

Перейдем теперь к разысканию фундаментального решения задачи Коши для уравнения (1).

Учитывая, что

$$\delta(x) = \left.\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right|_{\lambda=-n}$$

(§ 3, n. 9), рассмотрим это уравнение (1)

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) u = 0$$

при начальных данных

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} &= 0 \qquad (k = 0,1,\ldots,m-2), \\ \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} &= \frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Разложим $\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ по формуле

$$\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_\Omega |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda d\Omega.$$

Будем искать решение уравнения (1) с начальными условиями (4), в которых правую часть последнего равенства заменим выражением

$$\frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda.$$

Если искать решение этой задачи в виде функции

$$u_\omega(t,\xi,\lambda) = u_\omega(t,\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n, \lambda),$$

то мы придем к следующей двумерной задаче: найти решение $u_\omega(t,\xi,\lambda)$ уравнения (3)

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_\omega = P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \omega_1 \frac{d}{d\xi}, \ldots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right) u_\omega = 0$$

при начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial^k u_\omega(t,\xi,\lambda)}{\partial t^k}\right|_{t=0} &= 0 \qquad (k=0,1,\ldots,m-2),\\ \left.\frac{\partial^{m-1} u_\omega(t,\xi,\lambda)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} &= \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}|\xi|^\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Искомое фундаментальное решение задачи Коши для уравнения (1) представляется в виде

$$u(t,x) = \int\limits_\Omega u_\omega(t, x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n, -n)\,d\Omega. \tag{6}$$

Мы положили $\lambda = -n$, поскольку именно при этом значении λ функция $\frac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ обращается в $\delta(x_1,\ldots,x_n)$.

Функция $u_\omega(t,\xi,\lambda)$ в свою очередь выражается через фундаментальное решение $G_\omega(t,\xi)$ задачи Коши для уравнения (3), а именно:

$$u_\omega(t,\xi,\lambda) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\omega(t,\xi-\eta)|\eta|^\lambda d\eta. \tag{7}$$

Особенно простая формула получается в случае нечетного числа измерений: в этом случае

$$u_\omega(t,\xi,-n) = C\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}G_\omega(t,\xi). \tag{8}$$

Таким образом, фундаментальное решение $u(t,x)$ задачи Коши для уравнения (1) выражается через фундаментальное решение $G_\omega(t,\xi)$ задачи Коши для уравнения (3) по формуле

$$u(t,x) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int\limits_\Omega \left.\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\omega(t,\xi-\eta)|\eta|^\lambda d\eta\right\} d\omega\right|_{\lambda=-n}; \tag{9}$$

в случае нечетного числа измерений получается более простая формула:

$$u(t,x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!}\int\limits_\Omega \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}G_\omega(t,\xi)\,d\Omega. \tag{10}$$

Дифференцирование здесь нужно понимать как дифференцирование в смысле обобщенных функций, а интегрирование — как интегрирование обобщенных функций, непрерывно зависящих от параметра.

Подчеркнем, что указанные формулы справедливы для всех уравнений, для которых корректна задача Коши, например, для любых параболических и гиперболических уравнений.

При желании обойти вопрос о существовании свертки в формуле (7) и получить функцию $v_\omega(t,\xi,-n)$ в такой форме, чтобы была очевидной возможность ее интегрирования по единичной сфере, следует провести рассуждения, аналогичные приведенным в п. 1 (мелким шрифтом). Мы не будем на этом останавливаться.

Решение задачи Коши для однородных гиперболических уравнений. Формулы Герглотца–Петровского. Разберем более подробно случай гиперболического уравнения, не содержащего производных порядка $<m$.

Однородный оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) = P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ называется *гиперболическим*, если при любых значениях $\omega_1,\ldots,\omega_n$, $\sum\omega_j^2 = 1$, уравнение m-го порядка относительно v

$$P(v,\omega_1,\ldots,\omega_n) = 0 \tag{11}$$

имеет m вещественных и различных корней.

Мы имеем задачу

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x_i}\right)u = 0 \tag{12}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} &= 0 \qquad (k=0,1,\ldots,m-2),\\ \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} &= \frac{2r^\lambda}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Как мы уже говорили, решение этой задачи сводится к решению следующей одномерной задачи Коши:

$$P_\omega\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \xi}\right)u_\omega = P\left(\frac{\partial}{\partial t},\omega_1\frac{\partial}{\partial \xi},\ldots,\omega_n\frac{\partial}{\partial \xi}\right)u_\omega = 0 \tag{14}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial^k u_\omega}{\partial t^k}\right|_{t=0} &= 0 \qquad (k=0,1,\ldots,m-2),\\ \left.\frac{\partial^{m-1} u_\omega}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} &= \frac{|\xi|^\lambda}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Как легко проверить, уравнению (12) удовлетворяет всякая функция $f\left(\sum x_k\omega_k + v_j t\right)$, где v_j — какой-либо корень алгебраического уравнения (11). Все корни этого уравнения вещественны и различны в силу гиперболичности уравнения (12). Решение $f\left(\sum x_k\omega_k + v_j t\right)$ представляет собой плоскую волну, распространяющуюся со скоростью $-v_j$.

Будем искать решение задачи Коши (14)–(15) в виде суммы одинаковых плоских волн

$$u_\omega\left(t, \sum \omega_k x_k\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\omega_k + v_j t\right), \tag{16}$$

распространяющихся со скоростями v_j. Суммирование в формуле (16) ведется по всем корням уравнения (11). По начальным условиям определяем c_j и f из уравнений

$$\left.\begin{gathered}\sum c_j = 0, \quad \sum c_j v_j = 0, \quad \ldots, \quad \sum c_j v_j^{m-2} = 0, \quad \sum c_j v_j^{m-1} = 1,\\ f^{(m-1)}(\xi) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} |\xi|^\lambda.\end{gathered}\right\} \tag{17}$$

Отсюда

$$c_j = \frac{1}{(v_j - v_1)\ldots(v_j - v_{j-1})(v_j - v_{j+1})\ldots(v_j - v_m)}. \tag{18}$$

Для определения $f(\xi)$ нужно $m-1$ раз проинтегрировать $|\xi|^\lambda$. Мы получаем:

$$f(\xi) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \left\{\frac{|\xi|^{\lambda+m-1}(\operatorname{sgn}\xi)^{m-1}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+m-1)} + Q_\lambda(\xi)\right\}, \tag{19}$$

где

$$Q_\lambda(\xi) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{\xi^{m-2k-1}}{(2k-1)!(m-2k-1)!(\lambda-2k)} \tag{20}$$

(ср. § 3, п. 4).

Итак, в рассматриваемом случае решение задачи Коши (14) и (15) найдено в явном виде:

$$u_\omega\left(t, \sum \omega_k x_k\right) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{m} c_j \left\{ \frac{\left|\sum \omega_k x_k + v_j t\right|^{\lambda+m-1} \left[\operatorname{sgn}\left(\sum \omega_k x_k + v_j t\right)\right]^{m-1}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m-1)} + \right.$$

$$\left. + Q_\lambda\left(\sum \omega_i x_i + v_j t\right) \right\}, \quad (21)$$

где c_j определяется по формуле (18), а $Q_\lambda(\xi)$ — по формуле (20).

Решение исходной задачи Коши (12) и (13) получается из (21) интегрированием по единичной сфере $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2 = 1$:

$$u(t, x_1, \ldots, x_n; \lambda) = \int\limits_\Omega u_\omega\left(t, \sum \omega_k x_k\right) d\Omega. \quad (22)$$

При $\lambda = -n$ из этой формулы, как и раньше, получается фундаментальное решение задачи Коши.

В формуле (22) интегрирование проводится по единичной сфере. Выбор сферы в качестве поверхности интегрирования является здесь по существу случайным; поэтому мы сейчас преобразуем эту формулу к виду, более отвечающему существу задачи.

В формуле (22) u_ω есть сумма m слагаемых, выражаемая формулой (21). Рассмотрим j-е слагаемое:

$$c_j \left\{ \frac{\left|\sum x_k \omega_k + v_j t\right|^{\lambda+m-1} \left[\operatorname{sgn}\left(\sum x_k \omega_k + v_j t\right)\right]^{m-1}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m-1)} + Q\left(\sum x_k \omega_k + v_j t\right) \right\}$$

Сделаем в интеграле по единичной сфере Ω от этого слагаемого замену переменных, а именно положим $\frac{\omega_j}{v_i} = \xi_j$. Мы стремимся к тому, чтобы заменить интегрирование по Ω интегрированием по поверхности $P(1, \xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv H(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$. При каждом фиксированном наборе значений $\omega_1, \ldots, \omega_n$ уравнение $P(v, \omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ имеет n различных корней v_j. Поскольку эти корни непрерывно зависят от параметров ω_i, мы можем при изменении ω_i следить за одним корнем. Когда точка $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ пробегает единичную сферу Ω, точка $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ описывает некоторую компоненту поверхности $P(1, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$.

Каждая компонента может быть двух типов: 1) при переходе от $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ к $(-\omega_1, \ldots, -\omega_n)$ соответствующий корень v_j переходит в

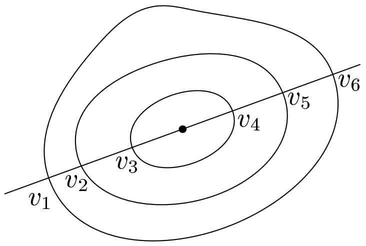

Рис. 5.

некоторый другой корень v_k; 2) при таком переходе v_j переходит в себя. Компоненты 1-го типа назовем «овалами», компоненты 2-го типа — «непарными кусками». Можно доказать, что если уравнение — четного порядка, то поверхность $P(1,\xi_1,\dots,\xi_n)=0$ состоит из $\frac{m}{2}$ овалов, а если m нечетно, то имеется $\frac{m-1}{2}$ овалов и один непарный кусок. Мы ограничимся разбором первого случая (рис. 5); второй разбирается аналогично.

Таким образом, нужно учесть, что когда точка $(\omega_1,\dots,\omega_n)$ пробегает Ω, точка $(1,\xi_1,\dots,\xi_n)$ пробегает овал, отвечающий двум различным корням v_j и v_k. Поэтому, когда мы сложим интегралы по Ω, отвечающие разным слагаемым в формуле (21), мы получим удвоенный интеграл по поверхности $H(\xi_1,\dots,\xi_n)=0$. Если обозначить через $d\sigma$ элемент поверхности $H(\xi_1,\dots,\xi_n)=0$, заключенный в телесном угле, опирающемся на $d\Omega$, и через φ — угол между нормалями к площадкам $d\sigma$ и $d\Omega$, то, очевидно,

$$d\Omega=\frac{|\cos\varphi|d\sigma}{|\xi|^{n-1}}=\frac{|\sum\xi_i H_{\xi_i}|\,d\sigma}{|\xi|^n|\operatorname{grad}H|}.$$

Коэффициент c_j равен

$$c_j=\frac{1}{(v_j-v_1)\dots(v_j-v_{j-1})(v_j-v_{j+1})\dots(v_j-v_m)}=\frac{1}{\frac{\partial P}{\partial v}\Big|_{v=v_j}}.$$

В силу однородности многочлена $P(v,\omega_1,\dots,\omega_n)$

$$v_j\,\frac{\partial P}{\partial v}\bigg|_{v=v_j}+\sum\omega_k\frac{\partial P}{\partial\omega_k}=mP\qquad(v_j,\omega_1,\dots,\omega_n)=0$$

(так как v_j — корень уравнения $P(v,\omega_1,\dots,\omega_n)=0$); поэтому

$$c_j=\frac{1}{\frac{\partial P}{\partial v}\Big|_{v=v_j}}=-\frac{v_j}{\sum\omega_k\,\frac{\partial P}{\partial\omega_k}\Big|_{v=v_j}}.$$

Заменяя ω_k на $v_j\xi_k$ и $P(1,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ на $H(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, получаем:

$$c_j = -\frac{v_j^{1-m}}{\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k H_{\xi_k}} = -\frac{(\operatorname{sgn} v_j)^{m-1}|\xi|^{m-1}}{\sum \xi_k H_{\xi_k}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Bigl|\sum x_k\omega_k + v_j t\Bigr|^{\lambda+m-1}\Bigl[\operatorname{sgn}\Bigl(\sum x_k\omega_k + v_j t\Bigr)\Bigr]^{m-1} &=\\ = |v_j|^{\lambda+m-1}(\operatorname{sgn} v_j)^{m-1}\Bigl|\sum x_k\xi_k + t\Bigr|^{\lambda+m-1}&\Bigl[\operatorname{sgn}\Bigl(\sum x_k\xi_k + t\Bigr)\Bigr]^{m-1},\end{aligned}$$

и для любого j имеем:

$$\begin{aligned}\Bigl(\sum x_k\omega_k + tv_j\Bigr)^{m-2k-1} = v_j^{m-2k-1}\Bigl(\sum x_k\xi_k + t\Bigr)^{m-2k-1} &=\\ = \left(\frac{\sum \xi_k x_k + t}{|\xi|}\right)^{m-2k-1}&(\operatorname{sgn} v_j)^{m-1}.\end{aligned}$$

Подставляя значения c_j, $d\Omega$ и функции от $\sum x_k\omega_k + v_j t$ в формулу (22), мы получаем:

$$\begin{aligned}u(t,x_1,\ldots,x_n;\lambda) = -\frac{2}{\Omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\times\\ \times\int\limits_{H=0}\Biggl\{\frac{|\xi|^{-\lambda-n}\,|\sum x_k\xi_k + t|^{\lambda+m-1}\operatorname{sgn}(\sum x_k\xi_k + t)^{m-1}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m-1)} +\\ + Q\left(\frac{\sum x_k\xi_k + t}{|\xi|}\right)\Biggr\}\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|\operatorname{sgn}(\sum\xi_k H_{\xi_k})}.\end{aligned} \qquad (23)$$

Предельный переход при $\lambda\to -n$ дает нам формулы Герглотца–Петровского для фундаментального решения задачи Коши. При этом, если n нечетно, полученная формула имеет вид

$$\begin{aligned}u(x_1,\ldots,x_n) = -\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}(m-n-1)!}\times\\ \times\int\limits_{H=0}\Bigl(\sum x_k\xi_k + t\Bigr)^{m-n-1}\Bigl[\operatorname{sgn}\Bigl(\sum x_k\xi_k + t\Bigr)\Bigr]^{m-1}\omega,\end{aligned} \qquad (24)$$

где через ω обозначено выражение $\dfrac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H| \operatorname{sgn}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k H_{\xi_k}\right)}$.

Формы подобной структуры будут подвергнуты детальному изучению в гл. III.

Многочлен $Q\left(\frac{\sum \xi_k x_k + t}{|\xi|}\right)$ здесь при предельном переходе отброшен, так как интеграл от него равен нулю. При четном n получается формула

$$u(x_1, \dots, x_n) = \frac{2(-1)^{n/2}}{(2\pi)^n (m-n-1)!} \times \\ \times \int\limits_{H=0} \left(\sum x_k \xi_k + t\right)^{m-n-1} \ln \left| \frac{\sum x_k \xi_k + t}{\sum x_k \xi_k} \right| \omega. \quad (25)$$

Когда порядок уравнения m меньше $n-1$, формулы для фундаментального решения задачи Коши приобретают вид: при нечетном n

$$u(x_1, \dots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{H=0} \delta^{(n-m)} \left(\sum x_k \xi_k + t\right) \omega \quad (26)$$

и при четном n

$$u(x_1, \dots, x_n) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} (n-m)!}{(2\pi)^n} \int\limits_{H=0} \frac{\omega}{\left(\sum x_k \xi_k + t\right)^{n-m+1}}. \quad (27)$$

Используя аффинно-инвариантную запись разложения дельта-функции на плоские волны (§ 3, п. 11, формулы (4) и (5)) и выбирая в качестве области интегрирования поверхность $H = 0$, можно было бы получить формулы (24)–(27) более прямым путем, не обращаясь к интегрированию по единичной сфере.

ДОБАВЛЕНИЕ 1. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Мы указывали в § 1, что обобщенные функции можно задавать локально, т. е. на основных функциях, отличных от нуля только в заданных произвольно малых окрестностях каждой точки.

В этом добавлении мы получим этот результат вместе с другими, касающимися локальных свойств обобщенных функций; такие результаты имеют многочисленные применения в теории. Вначале мы вернемся к изучению пространства K основных функций. Мы покажем, что в числе основных функций имеются такие, которые в заданных непересекающихся ограниченных замкнутых множествах принимают заданные постоянные значения. Наличие таких основных функций позволит наиболее простым образом подойти к изучению локальных свойств обобщенных функций.

1. Построение основных функций путем усреднения непрерывных. Покажем, что *для заданной* (не обязательно финитной) *непрерывной функции* $f(x)$ *можно построить бесконечно дифференцируемые функции* $f_\delta(x)$ *так, что при* $\delta \to 0$

$$f_\delta(x) \to f(x)$$

равномерно в любой ограниченной области.

В качестве $f_\delta(x)$ возьмем усреднение функции $f(x)$ вида

$$f_\delta(x) = C_\delta \int\limits_{|x-\xi|\leqslant\delta} f(\xi)\varphi(x-\xi,\delta)d\xi, \tag{1}$$

где $\varphi(x,\ \delta)$ — функция, с которой мы встретились в п. 2 § 1:

$$\varphi(x,\delta) = \begin{cases} e^{-\frac{\delta^2}{\delta^2-|x|^2}} & \text{при } |x|<\delta, \\ 0 & \text{при } |x|>\delta; \end{cases} \qquad \frac{1}{C_\delta} = \int\limits_{|x|\leqslant\delta} \varphi(x,\delta)dx.$$

Из выражения (1) видно, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема вместе с функцией $\varphi(x,\ \delta)$. Далее, мы имеем:

$$f(x) - f_\delta(x) = \\ = C_\delta \int\limits_{|x-\xi|<\delta} f(x)\varphi(x-\xi,\delta)d\xi - C_\delta \int\limits_{|x-\xi|<\delta} f(\xi)\varphi(x-\xi,\delta)d\xi = \\ = C_\delta \int\limits_{|x-\xi|<\delta} [f(x)-f(\xi)]\varphi(x-\xi,\delta)d\xi.$$

Так как $f(x)$ — непрерывная функция x, то в любой фиксированной ограниченной области для достаточно малого δ величина $|f(x) - f(\xi)|$ при $|x - \xi| < \delta$ становится меньше заданного ε. Поэтому, выбирая δ указанным образом, мы получаем:

$$|f(x) - f_\delta(x)| \leqslant \varepsilon \cdot C_\delta \int\limits_{|x-\xi|<\delta} \varphi(x-\xi,\delta)d\xi = \varepsilon,$$

что и утверждается.

В частности, *если функция $f(x)$ финитна, то и $f_\delta(x)$ финитна: $f_\delta(x) = 0$ вне δ-окрестности носителя функции $f(x)$.*

Если функция $f(x)$ постоянна в шаре радиуса δ с центром в точке x_0:

$$f(x) \equiv f(x_0) \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leqslant \delta,$$

то

$$f_\delta(x_0) = f(x_0) C_\delta \int\limits_R \varphi(x-\xi,\delta)d\xi = f(x_0).$$

Следовательно, *если функция $f(x)$ постоянна в области G, то $f_\delta(x)$ постоянна* (и равна $f(x)$) *в области G_δ*, состоящей из тех точек $x \in G$, которые содержатся в G вместе с шаром радиуса δ.

Отметим еще, что если значения функции $f(x)$ всюду заключены между 1 и 0, то этим же свойством обладает и функция $f_\delta(x)$.

Покажем теперь, что *если F — ограниченное замкнутое множество и U — содержащая его открытая область, то существует основная функция $\varphi(x)$, равная 1 на F, 0 вне U и заключенная между 1 и 0 в остальных точках.*

Действительно, так как F ограничено, то оно содержится в U вместе со своей ε-окрестностью при некотором $\varepsilon > 0$. Обозначим через F_1 замыкание $\frac{\varepsilon}{3}$-окрестности множества F, через U_1 открытую $\frac{2\varepsilon}{3}$-окрестность множества F и через W ее замкнутое дополнение до всего пространства R_n. Непрерывная функция точки x

$$\rho(x,W) = \min_{y\in W} \rho(x,y)$$

положительна в области U_1 и на множестве F_1 обладает положительным минимумом μ. Функция

$$f(x) = \min\left\{\frac{1}{\mu}\rho(x,W), 1\right\}$$

также непрерывна, равна нулю вне области U_1 и единице на множестве F_1, а в остальных точках заключена между 0 и 1. В качестве искомой основной функции $\varphi(x)$ достаточно взять $f_\delta(x)$ с $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

2. Разложение единицы. Пусть имеется некоторое счетное покрытие n-мерного пространства R_n открытыми ограниченными областями $U_1, U_2, \ldots, U_m, \ldots$, локально конечное в том смысле, что каждая точка покрывается лишь конечным числом множеств из совокупности U_1, $U_2, \ldots, U_m, \ldots$; требуется построить бесконечно дифференцируемые функции $e_1(x), e_2(x), \ldots, e_m(x), \ldots$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) $0 \leqslant e_k(x) \leqslant 1$;

б) $e_k(x) = 0$ вне области $U_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$;

в) $e_1(x) + e_2(x) + \ldots + e_m(x) + \ldots \equiv 1$.

Слева при каждом x, в силу б), отлично от нуля лишь конечное число слагаемых. Совокупность функций $\{e_i(x)\}$ называется *разложением единицы,* точнее, разложением единицы, соответствующим покрытию $\{U_i\}$.

Конструкцию разложения единицы можно осуществить следующим образом. Прежде всего можно указать открытые области $V_1, V_2, \ldots, V_m, \ldots$, также образующие покрытие всего пространства R_n и такие, что область V_k содержится в области U_k вместе со своим замыканием $\overline{V}_k (k = 1, 2, \ldots)$. Действительно, пусть области $V_1, \ldots, V_{k-1}$ уже построены так, что $\overline{V}_j \subset U_j (j = 1, \ldots, k-1)$ и $V_1, \ldots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \ldots$ есть локально конечное покрытие пространства R_n. Дополнение к области $V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1} \cup U_{k+1} \cup \ldots$ есть замкнутое множество F_k, которое целиком покрывается областью U_k. В качестве V_k можно взять любую из открытых областей, содержащих F_k и содержащихся в U_k вместе со своим замыканием, и т.д.

Так как множество $\overline{V}_k$ ограничено, то, в силу последнего результата п. 1, существует бесконечно дифференцируемая функция $h_k(x)$, всюду заключенная между 0 и 1, равная 1 в V_k и 0 вне U_k. Положим

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x);$$

эта функция существует при всех x и заведомо не меньше 1.

Теперь остается положить

$$e_k(x) = \frac{h_k(x)}{h(x)} \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

очевидно, что функции $e_k(x)$ удовлетворяют поставленным требованиям.

Замечание. Пусть $\{e_i(x)\}$ — разложение единицы, соответствующее (локально конечному) покрытию $\{U_i\}$ пространства R_n. Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$ мы имеем:

$$\varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} \varphi_i(x), \tag{1}$$

где

$$\varphi_i(x) = \varphi(x) e_i(x)$$

— основная функция, равная нулю вне области U_i. При этом число слагаемых справа в (1) будет конечным, если дополнительно предположить, что каждый шар $|x| \leqslant n$ пересекается лишь с конечным числом областей U_i. Отметим еще, что если функции $\varphi_\nu(x)$ стремятся к нулю при $\nu \to \infty$ в пространстве K, то и каждая последовательность $\varphi_{\nu i}(x) = \varphi_\nu(x) e_i(x)$ стремится к нулю при $\nu \to \infty$ в пространстве K.

Это замечание использовалось в предыдущих параграфах и неоднократно будет нам полезно и в дальнейшем.

3. Локальные свойства обобщенных функций. В n. 4 § 1 мы ввели такое определение: обобщенная функция f равна нулю в окрестности данной точки, если для всякой основной функции φ, отличной от нуля только в пределах этой окрестности, имеет место равенство $(f,\,\varphi) = 0$.

Далее, мы говорили, что обобщенная функция f равна нулю в открытой области G, если она равна нулю в некоторой окрестности каждой точки области G. Это — типичное *локальное* определение.

Можно дать и иное, *нелокальное* определение равенства нулю обобщенной функции f в области G: обобщенная функция f *равна нулю в области* G, если для любой основной функции φ, отличной от нуля только на множестве Q, содержащемся в G вместе со своим замыканием, имеет место равенство $(f,\,\varphi) = 0$.

Наметим доказательство эквивалентности этих определений. Достаточно проверить, что равенство нулю в смысле нелокального определения вытекает из равенства нулю в смысле локального определения (обратное очевидно). Допустим, что обобщенная функция f равна нулю в области G в смысле локального определения, и пусть $\varphi(x)$ — основная функция, отличная от нуля только на множестве Q, замыкание которого $\overline{Q}$ содержится в G. У каждой точки $x \in \overline{Q}$ можно найти, по условию, окрестность U, в которой функционал f равен нулю. Без ограничения общности можно считать ее ограниченной. Совокупность этих окрестностей образует покрытие множества $\overline{Q}$, из которого, пользуясь леммой Гейне–Бореля, мы можем выбрать счетное покрытие $U_1, \ldots, U_m, \ldots$, обладающее тем свойством, что каждый шар $|x| \leqslant n$ пересекает лишь конечное число окрестностей U_i. Согласно замечанию в конце п. 2 функцию $\varphi(x)$ можно представить в виде (конечной) суммы основных функций

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_m(x) + \ldots,$$

где $\varphi_k(x)$ обращается в нуль вне U_k. Тогда, по условию, $(f,\ \varphi_k) = 0$, откуда и $(f,\ \varphi) = \sum(f,\ \varphi_k) = 0$, что и требуется.

Приведем очевидное, но весьма важное следствие этого предложения: *обобщенная функция f, равная нулю в окрестности каждой точки, есть нулевая функция, т. е. для любой основной функции φ*

$$(f, \varphi) = 0.$$

Отметим еще одно следствие: *если основная функция $\varphi(x)$ равна нулю в некоторой окрестности U носителя F обобщенной функции f*, то $(f,\ \varphi) = 0$. Действительно, согласно локальному определению, $f = 0$ вне F, и остается сослаться на нелокальное определение.

Мы говорили далее, что две обобщенные функции f и g совпадают в окрестности точки x_0, если их разность $f - g$ в окрестности этой точки равна нулю. Доказанное выше предложение показывает, что *обобщенные функции, совпадающие в окрестности каждой точки, равны друг другу.* Таким образом, каждая обобщенная функция определена однозначно своими локальными значениями.

Можно использовать это свойство для построения обобщенной функции в целом, когда она задана локально. А именно, предположим, что у каждой точки x_0 имеется окрестность $U(x_0)$, такая, что для всех основных функций $\varphi(x)$, обращающихся в нуль вне этой окрестности, заданы числа $(f,\ \varphi)$, линейно и непрерывно зависящие от φ. Предположим, кроме того, что число $(f,\ \varphi)$ при этом зависит только от самой функции φ и не зависит от выбора точки x_0, вне окрестности $U(x_0)$ которой $\varphi(x)$ равна нулю. Тогда можно утверждать, что *существует функционал на пространстве K, совпадающий с функционалом f на тех $\varphi(x)$, на которых функционал f определен.*

Для доказательства поступим следующим образом.

Окрестности $U(x_0)$ указанного вида, по условию, существуют у каждой точки и образуют, следовательно, покрытие пространства R. Без ограничения общности можно считать эти окрестности ограниченными. Как и выше, пользуясь леммой Гейне–Бореля, из этого покрытия можно выбрать счетное покрытие $U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_m,\ \ldots$, обладающее тем свойством, что каждый шар $|x| \leqslant n$ пересекает лишь конечное число окрестностей U_i. Согласно замечанию в п. 2 всякая основная функция $\varphi(x)$ представима в виде

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty \varphi_i(x), \tag{1}$$

где $\varphi_i(x)$ — основная функция, равная нулю вне U_i, причем сумма на самом деле всегда конечна. Для всех слагаемых определены значения функционала f. Положим, по определению,

$$(f,\varphi) = \sum_{1}^{\infty}(f,\varphi_i). \tag{2}$$

Мы получили, очевидно, линейный функционал на пространстве основных функций. Он является и непрерывным функционалом. Действительно, если последовательность основных функций φ стремится к нулю в пространстве K, то, как отмечено в п. 2, $\varphi_m(x) \to 0$ в K при каждом фиксированном m. При этом сумма справа в (1) содержит фиксированное число слагаемых, поскольку носители функций φ заключены в фиксированном шаре. Поэтому и $(f,\ \varphi) \to 0$.

Очевидно, что на основных функциях φ, равных нулю вне окрестности U_m, значения построенного функционала совпадают со значениями исходного, так как в этом случае все φ_i справа в (1) равны нулю вне U_m.

Отсюда следует, что определение функционала f не зависит от выбора покрытия $\{U_i\}$ с указанными выше свойствами: если $\{V_i\}$ — другое покрытие с этими свойствами и g — получаемый с его помощью функционал, то $f = g$ локально, а потому и в целом.

4. Дифференцирование как локальная операция. Мы говорили, что обобщенная функция f равна нулю в окрестности точки x_0, если она обращается в нуль на всякой основной функции, отличной от нуля только в пределах этой окрестности. Покажем, что *в этом случае и все производные обобщенной функции f равны нулю в этой окрестности.* В самом деле, если основная функция φ отлична от нуля только в пределах окрестности $U(x_0)$, то и все ее производные отличны от нуля только в пределах этой окрестности; поэтому для любой такой функции

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j},\varphi\right) = \left(f,-\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = 0,$$

что и утверждается.

Отсюда следует, что *функционалы, совпадающие в области G, имеют в этой области и совпадающие производные любого порядка.*

Пусть, например, функционал f в области G совпадает с регулярным функционалом, соответствующим дифференцируемой функции $f(x)$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ совпадает в области G с регулярным функционалом, порожденным функцией $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$. Таким образом, даже для сингулярных обобщенных функций *там, где можно дифференцировать обычным образом, мы получаем и обычные производные.*

Другим выводом из сказанного является следующий факт: *если функционал f сосредоточен на множестве F, то его производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ и т.д. также сосредоточены на множестве F.*

Например, производные дельта-функции $\delta(x - x_0)$ сосредоточены в точке x_0 (что, впрочем, и непосредственно очевидно); любая производная от непрерывной функции, обращающейся в нуль вне замкнутого множества F, сосредоточена на этом множестве F.

Замечательно, что эти предложения допускают обращения:

1°. *Всякая обобщенная функция, сосредоточенная в одной точке x_0, может быть представлена как (конечная) линейная комбинация функции $\delta(x - x_0)$ и ее производных.*

2°. *Всякая обобщенная функция, сосредоточенная на ограниченном замкнутом множестве F, может быть представлена при любом $\varepsilon > 0$ как (конечная) линейная комбинация производных от непрерывных функций, обращающихся в нуль вне ε-окрестности множества F.*

Доказательства утверждений 1°–2° будут даны во втором выпуске (гл. II, § 4).

ДОБАВЛЕНИЕ 2. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

В этом добавлении будут рассмотрены свойства обобщенных функций, зависящих от параметра, в частности свойства обобщенных функций, аналитически зависящих от параметра. Эти свойства во многом аналогичны свойствам обычных аналитических функций и доказываются по большей части путем сведения к обычным функциям. Существенной является теорема о полноте пространства обобщенных функций: если дана последовательность обобщенных функций f_1, $f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$, такая, что каждая числовая последовательность (f_ν, φ) имеет предел, то величина $\lim\limits_{\nu\to\infty}(f_\nu, \varphi) = (f, \varphi)$ определяет обобщенную функцию. Доказательство этой теоремы дается в Добавлении, помещенном в конце этого выпуска.

1. Непрерывные функции. Пусть каждому значению вещественного или комплексного параметра λ, пробегающего некоторую область Λ, поставлена в соответствие обобщенная функция f_λ. В соответствии с определением, данным в п. 8 § 1, обобщенная функция f называется *пределом* f_λ *при* $\lambda \to \lambda_0$, если числовая функция (f_λ, φ) стремится к (f, φ) *при любом* φ. Функция f_λ называется *непрерывной по* λ *в области* Λ, если при любом $\lambda_0 \in \Lambda$ имеет место соотношение $f_{\lambda_0} = \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda$.

Рассмотрим весьма важный вопрос о *доопределении обобщенной функции* f_λ *по непрерывности по параметру* λ. Представим себе, что обобщенная функция f_λ определена и непрерывна на множестве Λ, имеющем предельную точку λ_0, в которой обобщенная функция f_λ заранее не задана. Спрашивается, возможно ли доопределить обобщенную функцию f_λ в точке λ_0 так, чтобы получилась обобщенная функция, непрерывная на множестве $\Lambda + \lambda_0$.

Очевидно, что необходимым условием для возможности такого доопределения является возможность доопределения по непрерывности всех числовых функций (f_λ, φ) в точке λ_0. *Это условие является и достаточным;* действительно, если для любой основной функции φ и любой последовательности $\lambda_\nu \to \lambda_0$, $\lambda_\nu \in \Lambda$ существует предел последовательности чисел $(f_{\lambda_\nu}, \varphi)$, то, согласно теореме о полноте пространства обобщенных функций, существует обобщенная функция $f = f_{\lambda_0}$, которая является пределом последовательности f_{λ_ν}. Обычным путем доказывается, что эта обобщенная функция не зависит от выбора последовательности $\lambda_\nu \to \lambda_0$.

Заметим далее, что производные (по x) обобщенной функции f_λ, непрерывно зависящей от параметра λ, также непрерывно зависят от параметра λ. Действительно, как мы видели в n. 4 § 2, из $f_{\lambda_\nu} \to f_{\lambda_0}$ следует

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_{\lambda_\nu} \to \frac{\partial}{\partial x_j} f_{\lambda_0}.$$

Непрерывные по параметру обобщенные функции f_λ можно интегрировать по этому параметру (ср. § 3, n. 10). Пусть, например, функционал f_λ непрерывен по λ на спрямляемой кривой Γ. Составим интегральную сумму

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} f_{\lambda'_j} \Delta\lambda_j,$$

взяв разбиение кривой Γ на n частей точками деления $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и выбрав произвольно точки λ'_j на интервалах $[\lambda_{j-1}, \lambda_j]$. При $\max|\Delta\lambda_j| \to$ $\to 0$ для любой основной функции φ, в силу непрерывности выражения (f_λ, φ), существует предел выражений

$$(s_n, \varphi) = \sum_{j=1}^{n} \left(f_{\lambda'_j}, \varphi\right) \Delta\lambda_j,$$

не зависящий от способа разбиения Γ и выбора промежуточных точек λ'_j, равный интегралу от функции (f_λ, φ). Этот предел определяет линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций; он называется *интегралом от обобщенной функции f_λ по кривой* Γ.

Разумеется, интегрировать можно не только по кривой, но и по области любого числа измерений.

2. Дифференцируемые функции. В n. 1 § 3 было введено определение: обобщенная функция g называется *производной* от обобщенной функции f_λ *по параметру* λ при $\lambda = \lambda_0$, если

$$g = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}.$$

Для существования производной $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}$ при $\lambda = \lambda_0$ необходимо и достаточно, чтобы все числовые функции (f_λ, φ) были дифференцируемы по λ при $\lambda = \lambda_0$. Необходимость этого условия очевидна; проверим его достаточность. По условию, для каждой φ и любой последовательности $\lambda_\nu \to \lambda_0$ существует предел отношения

$$\frac{(f_\lambda, \varphi) - (f_{\lambda_0}, \varphi)}{\lambda - \lambda_0} = \left(\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}, \varphi\right).$$

Но тогда, как было указано выше, обобщенная функция $\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$, определенная при $\lambda \neq \lambda_0$, может быть доопределена по непрерывности и при $\lambda = \lambda_0$; иными словами, существует обобщенная функция, являющаяся пределом отношения $\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$ при $\lambda \to \lambda_0$, что и утверждается.

Если f_λ имеет производную по λ при любом $\lambda \in \Lambda$, то функция f_λ называется *дифференцируемой по λ в области Λ*.

Аналогично определяются высшие производные по параметру и многократная дифференцируемость функций.

Легко проверить, что если функция f_λ дифференцируема по λ в области Λ, то и все производные f_λ по x дифференцируемы по λ и имеет место формула

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda. \tag{1}$$

Действительно, для любой основной функции φ числовая функция

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda, \varphi \right) = \left(f_\lambda, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)$$

дифференцируема по λ и имеет производную

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(f_\lambda, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda, \varphi \right).$$

Это означает, что функционал $\frac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda$ имеет производную по λ и справедлива формула (1), что и утверждается.

3. Аналитические функции. Если λ — комплексный параметр, пробегающий открытую область Λ, то дифференцируемая в области Λ обобщенная функция f_λ называется *аналитической функцией от λ*. В этом случае все числовые функции $(f_\lambda,\ \varphi)$ являются обычными аналитическими функциями от λ в области Λ. И обратно, *если для обобщенной функции f_λ все числовые функции $(f_\lambda,\ \varphi)$ являются аналитическими функциями от λ в области Λ, то и f_λ есть аналитическая функция от λ* (ср. § 3, п. 1). *В этом случае в каждой точке λ области Λ существуют все производные* $\frac{\partial f}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}, \ \ldots$, и в окрестности точки $\lambda_0 \in \Lambda$ *имеет место разложение в ряд Тейлора*

$$f_\lambda = f_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2} + \ldots \tag{2}$$

Действительно, обобщенная функция $\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}$ существует, так как по условию при $\lambda = \lambda_0$ существуют производные по λ у всех числовых функций

$(f_\lambda,\ \varphi)$; по такой же причине существуют и все высшие производные $\frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial\lambda^2}$, ... Далее, для каждой основной функции $\varphi(x)$ справедливо разложение Тейлора обычной аналитической функции $(f_\lambda,\ \varphi)$:

$$(f_\lambda,\varphi) = (f_{\lambda_0},\varphi) + (\lambda-\lambda_0)\,\frac{\partial}{\partial\lambda}(f_\lambda,\varphi)\Big|_{\lambda=\lambda_0} + \\ + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\,\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(f_\lambda,\varphi)\Big|_{\lambda=\lambda_0} + \ldots = \\ = (f_{\lambda_0},\varphi) + (\lambda-\lambda_0)\left(\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial\lambda},\varphi\right) + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\left(\frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial\lambda^2},\varphi\right) + \ldots = \\ = \left(f_{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial\lambda} + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial\lambda^2} + \ldots,\varphi\right),$$

откуда следует справедливость разложения (2).

Две аналитические функции f_λ и g_λ, определенные в области Λ и совпадающие на множестве значений λ, имеющем предельную точку внутри Λ, совпадают при всех значениях $\lambda \in \Lambda$. Действительно, для любой основной функции $\varphi(x)$ выражения $(f_\lambda,\ \varphi)$ и $(g_\lambda,\ \varphi)$ совпадают в области Λ в силу классической теоремы единственности для аналитических функций.

На этом свойстве основан важный метод аналитического продолжения функционала f_λ по параметру λ. Допустим, что функционал f_λ аналитичен в области Λ. Предположим далее, что все числовые функции (f_λ,φ) допускают аналитическое продолжение в более широкую область Λ_1. Тогда мы можем утверждать, что числа (f_{λ_1},φ) при любом $\lambda_1 \subset \Lambda_1$ также задают линейный непрерывный функционал на пространстве K. Действительно, аналитическое продолжение в любую точку области Λ_1, как известно, всегда может быть осуществлено при помощи конечного числа переразложений в ряд Тейлора. Но каждый ряд Тейлора

$$(f_\lambda,\varphi) = (f_{\lambda_0},\varphi) + (\lambda-\lambda_0)\left(\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial\lambda},\varphi\right) + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\left(\frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial\lambda^2},\varphi\right) + \ldots,$$

поскольку он сходится при любой основной функции φ и поскольку радиус его круга сходимости определяется конфигурацией областей Λ и Λ_1 и не зависит от φ, имеет своей суммой в круге сходимости снова линейный непрерывный функционал, что нам и требуется.

Очевидно, что производные (по x) аналитической обобщенной функции f_λ суть также аналитические обобщенные функции от λ. Отметим далее, что аналитическое продолжение сохраняет многие свойства функционала f_λ. Например, если функционал f_λ в области Λ инвариантен относительно операции u, так что $f_\lambda(ux) = f_\lambda(x)$, то и его аналитическое продолжение в область Λ_1 инвариантно относительно этой операции. Действительно, равенство

$$(f_\lambda(ux), \varphi(x)) = (f_\lambda(x), \varphi(x)) = (f_\lambda(x), \varphi(u^{-1}x)),$$

справедливое в области Λ, в силу единственности аналитического продолжения, остается справедливым и в области Λ_1.

Так, например, сферически симметричные аналитические функционалы имеют и сферически симметричные аналитические продолжения.

Заметим в заключение, что аналитическое продолжение обобщенной функции, зависящей от параметра, так же как и аналитическое продолжение обычной аналитической функции, может привести к функции с изолированными особенностями (полюсами или существенно особыми точками), а также к многозначным функциям.

В окрестности изолированной особой точки λ_0 аналитическая обобщенная функция f_λ допускает разложение в ряд Лорана в классической форме

$$f_\lambda = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (\lambda - \lambda_0)^n,$$

где $c_n (n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$ — фиксированные (не зависящие от λ) функционалы. Действительно, разложение в ряд Лорана имеет место для каждой основной функции φ:

$$(f_\lambda, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\varphi)(\lambda - \lambda_0)^n,$$

причем коэффициенты $c_n(\varphi)$ выражаются по формулам Коши

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{(f_\lambda, \varphi)\, d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

где Γ — контур в области аналитичности функции f_λ, заключающий внутри себя точку λ_0. Интеграл (3) может быть представлен в форме

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \left(\frac{f_\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}, \varphi \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma (g_\lambda, \varphi)\, d\lambda, \quad g_\lambda = \frac{f_\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}$$

и, по доказанному, снова является линейным непрерывным функционалом от φ. Мы можем положить поэтому $c_n(\varphi) = (c_n, \ \varphi)$, где c_n — линейный непрерывный функционал. Итак, $f_\lambda = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n(\lambda - \lambda_0)^n$, что и утверждалось.