ГЛАВА II

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Преобразования Фурье основных функций

1. Преобразование Фурье функций из пространства K. Начиная с этого момента, будем рассматривать пространство K комплексных основных функций (гл. I, § 1, п. 9) и соответствующее комплексное пространство K' обобщенных функций.

Рассмотрим вначале случай одного переменного.

Пусть $\varphi(x)$ — некоторая основная функция. Построим ее преобразование Фурье:

$$\psi(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x}\, dx. \tag{1}$$

Функцию $\psi(\sigma)$ будем обозначать также символами $\widetilde{\varphi(x)}$ и $F[\varphi(x)]$.

В действительности, поскольку $\varphi(x)$ — финитная функция, интеграл (1) распространен на конечную область, например $-a \leqslant x \leqslant a$; поэтому функция $\psi(\sigma)$ может быть определена и для комплексных значений $s = \sigma + i\tau$:

$$\psi(\sigma + i\tau) = \int\limits_{-a}^{a} \varphi(x) e^{isx}\, dx = \int\limits_{-a}^{a} \varphi(x) e^{i\sigma x} e^{-\tau x}\, dx. \tag{2}$$

Так как интеграл (2) допускает дифференцирование по комплексному параметру $s = \sigma + i\tau$, то $\psi(\sigma + i\tau)$ — целая аналитическая функция.

Дифференцирование функции $\varphi(x)$ приводит к умножению $\psi(s)$ на $-is$: действительно,

$$\int\limits_{-a}^{a} \varphi'(x)e^{ixs}dx = \varphi(x)e^{ixs}\Big|_{-a}^{a} - \int\limits_{-a}^{a} is\varphi(x)e^{ixs}dx = -is\psi(s).$$

Продолжая дифференцирование, получим далее для любого $q = 0,1,2,\ldots$

$$F[\varphi^{(q)}(x)] = (-is)^q F[\varphi(x)] \tag{3}$$

и вообще

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right] = P(-is)F[\varphi(x)], \tag{4}$$

где $P(t)$ — любой многочлен с постоянными коэффициентами. Вместе с тем мы получаем оценку

$$|s|^q|\psi(s)| = \left|\int\limits_{-a}^{a} \varphi^{(q)}(x)e^{isx}dx\right| \leqslant C_q e^{a|\tau|}.$$

Таким образом, *преобразование Фурье $\psi(s)$ каждой основной функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль при $|x| \geqslant a$, есть целая аналитическая функция переменного $s = \sigma + i\tau$, удовлетворяющая при каждом $q = 0,1,2,\ldots$ неравенству*

$$|s^q\psi(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|}. \tag{5}$$

Мы утверждаем, что верно и обратное: *всякая целая функция $\psi(s)$, удовлетворяющая при каждом q неравенству* (5), *есть преобразование Фурье некоторой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль при $|x| \geqslant a$.*

Функцию $\varphi(x)$ мы, естественно, определим формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma.$$

Используя формулу Коши, можно заменить интегрирование по вещественной оси интегрированием по параллельной прямой:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma + i\tau)e^{-i(\sigma+i\tau)x}d\sigma = \frac{1}{2\pi}e^{\tau x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma + i\tau)e^{-i\sigma x}d\sigma,$$

причем интеграл, в силу неравенства (5), продолжает оставаться абсолютно сходящимся. Он продолжает оставаться абсолютно сходящимся также при формальном дифференцировании подынтегрального выражения по x, поэтому функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема и

$$\varphi^{(q)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-is)^q\psi(s)e^{-isx}\,d\sigma.$$

Пусть $|x| > a$; зададим некоторое число $t > 0$ и найдем τ из условия $x\tau = -t|x|$. Используя неравенство (5) при $q = 0$ и $q = 2$, находим:

$$|\psi(s)| \leqslant e^{a|\tau|}\min\left\{C_0, \frac{C_2}{|s|^2}\right\} \leqslant C\frac{e^{a|\tau|}}{1+|s|^2} \leqslant C\frac{e^{a|\tau|}}{1+|\sigma|^2};$$

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}e^{\tau x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}C\frac{e^{a|\tau|}}{1+|\sigma|^2}\,d\sigma = C'e^{-t|x|+at} = C'e^{t(a-|x|)}.$$

Так как C' не зависит от t, то, устремляя t к ∞, находим, что $\varphi(x) = 0$. Таким образом, при $|x| > a$ функция $\varphi(x)$ обращается в нуль. Итак, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем высказанным условиям. В силу известной теоремы об интеграле Фурье[1)] ее преобразование Фурье совпадает с функцией $\psi(\sigma)$, что и требовалось.

Отметим еще одну полезную формулу: для любой основной функции $\varphi(x)$

$$FF[\varphi(x)] = 2\pi\varphi(-x). \tag{6}$$

Действительно, если $F[\varphi(x)] = \psi(\sigma)$, то мы имеем:

$$F^{-1}[\psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi}\int\psi(\sigma)e^{-ix\sigma}\,d\sigma = \varphi(x),$$

откуда

$$\int\psi(\sigma)e^{ix\sigma}\,d\sigma \equiv F[\psi(\sigma)] = 2\pi\varphi(-x),$$

что и утверждается.

[1)] В. И. Смирнов, Курс, т. II, 1957, п. 160, стр. 467.

2. Пространство Z**.** Изучение преобразований Фурье функций из пространства K, начатое в предыдущем пункте, естественно приводит к следующему определению. Введем *пространство* Z всех целых функций $\psi(s)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|s|^q|\psi(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|} \qquad (q = 0, 1, 2, \dots) \tag{1}$$

(где постоянные a и C_q зависят от функции ψ), с очевидным определением основных линейных операций — сложения и умножения на число.

Как показано в п. 1, *преобразование Фурье устанавливает между пространствами* K *и* Z *взаимно однозначное соответствие.* Очевидно, что это соответствие сохраняет указанные линейные операции.

Отсюда следует, что каждой линейной операции, определенной в пространстве K, отвечает некоторая «двойственная» линейная операция, определенная в пространстве Z. Так, например, операции дифференцирования в пространстве K соответствует, в силу формулы (3) п. 1, операция умножения на $-is$ в пространстве Z. С другой стороны, формула

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{isx}\varphi(x)dx$$

показывает, что операции умножения на ix в пространстве K соответствует операция дифференцирования в пространстве Z; повторяя эту операцию, приходим к формуле, справедливой при любом $q = 0, 1, 2, \dots$:

$$\frac{d^q}{ds^q}F[\varphi] = F[(ix)^q\varphi(x)]. \tag{2}$$

Из существования правой части следует существование левой; поэтому в пространстве Z функции $\psi(s)$ можно неограниченно дифференцировать, не выходя за пределы этого пространства. Можно написать и несколько более общую формулу:

$$P\left(\frac{d}{ds}\right)F[\varphi] = F[P(ix)\varphi(x)], \tag{3}$$

где $P(t)$ — любой многочлен с постоянными коэффициентами.

Операции сдвига $\varphi(x) \to \varphi(x-h)$ в пространстве K отвечает операция умножения на e^{ish} в пространстве Z; действительно,

$$F[\varphi(x-h)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\varphi(x-h)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma(y+h)}\varphi(y)dy = e^{i\sigma h}F[\varphi(x)].$$

Обратно, операции умножения на e^{ixh} (при любом, может быть и комплексном, h) в пространстве K отвечает операция сдвига в пространстве Z:

$$F[e^{ixh}\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixh}e^{i\sigma x}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(h+\sigma)}\varphi(x)dx = \psi(\sigma + h).$$

В частности, мы видим, что в пределах пространства Z функции $\psi(x)$ допускают всевозможные сдвиги.

Можно перенести в пространство Z и операцию предельного перехода, считая, что функции $\psi_\nu(x)$ стремятся к нулю, если их образы $\varphi_\nu(x)$ стремятся к нулю в смысле, установленном для пространства K. Впрочем, эту сходимость в Z можно описать и внутренним образом. Именно, последовательность $\psi_\nu(x)$ стремится к нулю в Z, если, во-первых, выполняются неравенства

$$|s^q\psi_\nu(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|}$$

с постоянными C_q и a, не зависящими от ν, и если эти функции стремятся к нулю равномерно на каждом интервале оси σ.

Отметим, что разложение в ряд Тейлора

$$\sum_{q=0}^{\infty} \psi^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!} = \psi(s+h)$$

с любым фиксированным (комплексным) h имеет место в смысле указанной сходимости; это следует из справедливости двойственной формулы

$$\sum_{q=0}^{\infty} (ix)^q\frac{h^q}{q!}\varphi(x) = e^{ixh}\varphi(x)$$

в смысле сходимости в пространстве K.

3. Случай нескольких переменных. Наши построения могут быть почти без изменений перенесены на случай n независимых переменных. Преобразование Фурье основной функции $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определяется по формуле

$$\psi(\sigma) = \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n)e^{i(x_1\sigma_1 + \ldots + x_n\sigma_n)}dx_1 \ldots dx_n$$

или, короче,

$$\psi(\sigma) = \int\limits_{R_n} \varphi(x) e^{i(x,\sigma)}\, dx, \tag{1}$$

где через (x,σ) обозначена величина $x_1\sigma_1 + \ldots + x_n\sigma_n$. Вследствие финитности функции $\varphi(x)$ функция ψ может быть распространена и на комплексные значения аргумента $s = (s_1, \ldots, s_n) = (\sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \sigma_n + i\tau_n)$:

$$\psi(s) = \int\limits_{R_n} \varphi(x) e^{i(x,s)}\, ds. \tag{2}$$

Полученная функция $\psi(s)$, определенная теперь в n-мерном комплексном пространстве C_n, непрерывна и аналитична по каждому из аргументов $s_1, \ldots, s_n$. Если функция $\varphi(x)$ обращается в нуль при $|x_k| > a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то ее преобразование Фурье $\psi(s)$ допускает оценку

$$|s_1^{q_1} \ldots s_n^{q_n} \psi(\sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \sigma_n + i\tau_n)| \leqslant C_q e^{a_1|\tau_1| + \ldots + a_n|\tau_n|}. \tag{3}$$

Обратно, всякая целая функция $\psi(s_1, \ldots, s_n)$, удовлетворяющая неравенству (3), является преобразованием Фурье основной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, обращающейся в нуль при $|x_k| > a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. (Доказательство проводится так же, как и для одного переменного.) Имеют место формулы, аналогичные формулам (4) п. 1 и (3) п. 2:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_n}\right) F[\varphi] = F[P(ix_1, \ldots, ix_n)\varphi(x)], \tag{4}$$

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi(x)\right] = P(-is_1, \ldots, -is_n) F[\varphi], \tag{5}$$

где P — любой многочлен с постоянными коэффициентами.

Пространство всех целых функций $\psi(s)$, удовлетворяющих неравенствам вида (3), в котором естественным образом определены линейные операции — сложение и умножение на число, по-прежнему, будем обозначать через Z. Преобразование Фурье устанавливает между пространствами K и Z взаимно однозначное соответствие с сохранением линейных операций. Предельный переход в пространстве Z определяется следующим образом: последовательность $\psi_\nu(s) (\nu = 1, 2, \ldots)$ называется *сходящейся к нулю*, если последовательность соответствующих основных функций $\varphi_\nu(x)$ стремится к нулю в пространстве K. Внутренним образом эта сходимость описывается так: выполняются неравенства

$$|s^q \psi_\nu(s)| \leqslant C_q e^{a_1|\tau_1| + \ldots + a_n|\tau_n|}$$

с постоянными C_q и a, не зависящими от ν, и функции $\psi_\nu(\sigma)$ стремятся равномерно к нулю на каждом ограниченном множестве вещественного пространства R_n.

4. Функционалы на пространстве Z. На пространстве Z, как и на пространстве K, можно строить линейные непрерывные функционалы — обобщенные функции. Рассмотрим снова случай одного независимого переменного. *Регулярными функционалами* мы и здесь будем называть функционалы, заданные выражениями вида

$$(g, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma. \tag{1}$$

Функционалы вида

$$(g, \psi) = \int_L g(s)\psi(s)ds, \tag{2}$$

где L — некоторая линия, будем называть *аналитическими функционалами.* Так, дельта-функция $(\delta(s-s_0), \psi) = \psi(s_0)$ (где s_0 — уже произвольное комплексное число) есть не регулярный, но аналитический функционал, поскольку, в силу формулы Коши,

$$\psi(s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(s)ds}{s-s_0},$$

где L — любой контур, заключающий внутри себя точку s_0; таким образом, $\delta(s-s_0)$ является аналитическим функционалом, отвечающим функции $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{s-s_0}$.

Совокупность всех обобщенных функций на пространстве Z обозначается через Z'. С обобщенными функциями на пространстве Z можно производить операции, аналогичные операциям, введенным нами для обобщенных функций на пространстве K. Ясно, что определения линейных операций — сложения и умножения на число, а также предельного перехода не содержат ничего нового. Умножение на функцию $\overline{h}(s)$, формально определяемое равенством

$$(\overline{h}(s)g, \psi) = (g, h\psi), \tag{3}$$

теперь становится выполнимым уже для значительно более узкого круга функций $h(s)$. Действительно, для корректности этого определения нужно, чтобы произведение функции $h(s)$ на любую основную функцию $\psi(s)$ приводило снова к основной функции. Функции $h(s)$, обладающие этим свойством, мы будем называть *мультипликаторами в* Z. Функция $h(s)$ обладает этим свойством, если она сама является целой аналитической функцией и удовлетворяет неравенству вида $|h(s)| \leqslant Ce^{b|\tau|}(1+|s|)^q$ при некоторых b, q и C.

Производная функционала $g \in Z'$ определяется формулой

$$\left(\frac{dg}{ds}, \psi\right) = -\left(g, \frac{d\psi}{ds}\right);$$

можно определить ее и как предел отношения $\frac{g(s+h)-g(s)}{h}$.

Так же как и в пространстве K', обобщенные функции $g \in Z'$ допускают неограниченное дифференцирование. Но, в отличие от первых, обобщенные функции $g \in Z'$ не только бесконечно дифференцируемы, но и аналитичны; это означает, что для каждой $g \in Z'$

$$\sum_{q=0}^{\infty} g^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!} = g(s+h), \tag{4}$$

где ряд слева сходится в смысле сходимости в пространстве Z', а $g(s+h)$ — сдвиг функции $g(s)$ на число h.

Действительно, для любой $\psi(s) \in Z$

$$\left(g^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!}, \psi(s)\right) = \left(g(s), \frac{(-1)^q h^q}{q!}\psi^{(q)}(s)\right)$$

и ряд $\sum \frac{(-1)^q h^q}{q!}\psi^{(q)}(s)$ сходится в смысле сходимости в Z, как мы уже отмечали, к функции $\psi(s-h)$; таким образом,

$$\left(\sum g^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!}, \psi(s)\right) = (g(s), \psi(s-h)) = (g(s+h), \psi(s)),$$

что и требовалось.

Отметим, в частности, разложение

$$\delta(s+h) = \sum_{q=0}^{\infty} \delta^{(q)}(s)\frac{h^q}{q!}, \tag{5}$$

справедливое при любом (комплексном) h; при этом сдвинутая дельта-функция $\delta(s+h)$ определяется равенством

$$(\delta(s+h), \psi(s)) = (\delta(s), \psi(s-h)) = \psi(-h). \tag{6}$$

В случае нескольких независимых переменных пространство Z' строится аналогично. В нем, как и выше, определяются сложение, умножение на число, предельный переход и умножение на функцию $\overline{h}(s) = \overline{h}(s_1, \ldots, s_n)$. Функция $h(s)$ будет мультипликатором в Z, если она непрерывна, аналитична (т.е. аналитична по каждому s_i при фиксированных $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$), и если

$$|h(s)| \leqslant Ce^{b_1|\tau_1| + \ldots + b_n|\tau_n|}(1 + |s_1|)^{q_1} \ldots (1 + |s_n|)^{q_n}.$$

Аналогично предыдущему определяются частные производные функционала $g \in Z'$. Каждый функционал из Z' не только бесконечно дифференцируем, но и аналитичен, т.е. допускает разложение в ряд Тейлора, сходящийся в смысле сходимости в Z'.

5. Аналитические функционалы. В предыдущем пункте мы назвали функционал g на пространстве Z аналитическим, если он представлен в виде

$$(g, \psi) = \int\limits_{\Gamma} g(s)\psi(s)ds,$$

где $g(s)$ — некоторая функция, а Γ — контур в комплексной плоскости (мы сначала рассматриваем случай одного независимого переменного).

Согласно общим правилам теории аналитических функций, в случае, когда $g(s)$ — аналитическая функция, контур Γ можно непрерывно деформировать без изменения величины (g, ψ); при этом начало и конец контура должны оставаться закрепленными и контур не должен переходить через особые точки функции $g(s)$. Так, функционал единица

$$1(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \psi(s)ds$$

может быть задан не только с помощью интегрирования вдоль вещественной оси, но и с помощью интегрирования вдоль любой линии, идущей из $-\infty$ и $+\infty$ в пределах некоторой полосы $|\operatorname{Im} s| \leqslant C$, например вдоль любой прямой, параллельной вещественной оси. Такие линии, т.е. линии, интегралы вдоль которых от любой основной функции ψ равны, мы назовем *эквивалентными.* Если же мы будем интегрировать 1 по какому-нибудь иному контуру Γ, то получим уже иной функционал. Например, если Γ — замкнутый контур или петля, идущая в пределах полосы $|\operatorname{Im} s| \leqslant C$ из $-\infty$ снова в $-\infty$ (или из $+\infty$ в $+\infty$), то получающийся функционал, очевидно, равен нулю. Такие контуры, т.е.

контуры, вдоль которых интегралы от любой основной функции ψ равны нулю, будем называть *нулевыми* или *обобщенными замкнутыми*.

Рассмотрим функцию $g(s) = \frac{1}{s}$. Можно построить с ее помощью два различных аналитических функционала:

$$(g_+, \psi) = \int\limits_{-\infty+ai}^{+\infty+ai} \frac{\psi(s)}{s} ds \qquad (a > 0),$$

$$(g_-, \psi) = \int\limits_{-\infty-ai}^{+\infty-ai} \frac{\psi(s)}{s} ds \qquad (a > 0).$$

В обоих случаях интегрирование ведется вдоль прямой, параллельной вещественной оси и расположенной в первом случае в верхней полуплоскости, а во втором — в нижней. Оба эти функционала удовлетворяют уравнению

$$\overline{s} g = 1.$$

Разность между этими функционалами может быть приведена к виду

$$(g_+ - g_-, \psi) = \int\limits_{|s|=1} \frac{\psi(s)}{s} ds$$

с интегрированием, например, вдоль единичной окружности по часовой стрелке. В силу формулы Коши

$$(g_+ - g_-, \psi) = -2\pi i \psi(0),$$

откуда

$$g_+ - g_- = -2\pi i \delta(s).$$

Функционал $g_0 = g_+ - g_-$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\overline{s} g_0 = 0.$$

Рассмотрим общую дробно-рациональную функцию

$$g(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Различные корни многочлена $Q(s)$ обозначим через $s_1, \ldots, s_n$. Интегрирование по любой линии Γ, эквивалентной вещественной оси, приводит к функционалу

$$(\overline{g}, \psi) = \int\limits_{\Gamma} g(s)\psi(s)ds,$$

зависящему, вообще, от контура Γ; всякий такой функционал удовлетворяет уравнению

$$Qg = P.$$

Интегрирование по любому нулевому контуру Γ_0 приводит к функционалу

$$(\overline{g_0}, \psi) = \int\limits_{\Gamma_0} g(s)\psi(s)ds,$$

также зависящему от контура Γ_0. Все эти функционалы удовлетворяют уравнению

$$Qg_0 = 0.$$

Например, если Γ_0 — контур, обходящий в положительном направлении простой корень s_1 многочлена $Q(s)$, то

$$(\overline{g_0}, \psi) = \int\limits_{\Gamma_0} g(s)\psi(s)ds = 2\pi i \underset{s=s_1}{\text{выч.}} [g(s)\psi(s)] = C\psi(s_1),$$

так что $g_0 = C\delta(s - s_1)$. Если Γ_0 обходит k-кратный корень s_1 многочлена $Q(s)$, то

$$(g_0, \psi) = 2\pi i \underset{s=s_1}{\text{выч.}} [g(s)\psi(s)] = \frac{2\pi i}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [(s - s_1)^k g(s)\psi(s)]_{s=s_1}.$$

Рассмотрим аналитические функционалы, связанные с функцией

$$g(s) = e^{s^n}.$$

В силу равенства

$$|e^{s^n}| = e^{\mathrm{Re}\ s^n} = e^{|s|^n \cos n\theta}, \text{ где } \theta = \arg s$$

плоскость комплексного переменного s можно разделить на $2n$ равных секторов раствором в $\frac{\pi}{n}$ каждый, так что функция $|e^{s^n}|$ в этих секторах поочередно то экспоненциально возрастает, то экспоненциально убывает. Секторы первого типа назовем «отрогами», секторы второго типа — «долинами». Рассмотрим произвольный путь Γ_k, ведущий из ∞ в первой долине в ∞ какой-либо другой, например k-й, долине $(k = 2, \dots, n)$. Для этого пути можно образовать функционал

$$(F_k, \psi) = \int_{\Gamma_k} e^{s^n} \psi(s) ds,$$

причем интеграл заведомо сходится в силу экспоненциального убывания $|e^{s^n}|$ в обеих долинах и более медленного возрастания основной функции $\psi(s)$.

Мы получим таким образом $n-1$ различных функционалов, которые обозначим соответственно через $e_1^{s^n}, \dots, e_{n-1}^{s^n}$. Все они удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению 1-го порядка, которое легко получить следующим образом. Продифференцируем функционал $e_k^{s^n}$:

$$\left(\frac{d}{ds} e_k^{s^n}, \psi\right) = \left(e_k^{s^n}, -\frac{d\psi}{ds}\right) = -\int_{\Gamma_k} e_k^{s^n} \frac{d\psi}{ds} ds.$$

Это выражение проинтегрируем по частям; внеинтегральный член исчезнет (по причине сильного убывания функции $e_k^{s^n}$ в долинах), и мы получим:

$$\left(\frac{d}{ds} e_k^{s^n}, \psi\right) = \int_{\Gamma_k} n s^{n-1} e_k^{s^n} \psi(s) ds = (n s^{n-1} e_k^{s^n}, \psi).$$

Таким образом, функционалы $e_k^{s^n}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{ds} e_k^{s^n} = n s^{n-1} e_k^{s^n}.$$

Мы видим, что *в области функционалов над пространством Z линейное однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка может иметь любое число линейно независимых решений.*

Большой интерес представляют также аналитические функционалы в области нескольких переменных $s_1, \dots, s_n$. Здесь аналитические функционалы строятся по формулам

$$(g, \psi) = \int\limits_{\Gamma} g(s)\psi(s)ds,$$

где Γ — некоторая $(2n-1)$-мерная поверхность в $2n$-мерном пространстве n комплексных переменных $s_1, \ldots, s_n$.

В силу теоремы Пуанкаре[1)], обобщающей интегральную теорему Коши на аналитические функции n переменных, поверхность Γ может быть также произвольным образом деформирована (без изменения результата) при условии, что ее граница фиксирована, а в процессе изменения Γ не переходит через особые точки функции $g(s)$.

Будем называть поверхность Γ *эквивалентной вещественной,* если для любой основной функции

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)d\sigma$$

(интеграл справа — по всем вещественным переменным). Примером поверхности, эквивалентной вещественной, служит «лестница Хормандера»; геометрическое место всех точек $s_1, \ldots, s_n$, где $s_2, \ldots, s_n$ вещественны и при каждом выборе их значений s_1 пробегает контур, эквивалентный (в плоскости s_1) вещественной оси. Функционал g, определенный формулой

$$(g, \psi) = \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{P(s)}\psi(s)ds,$$

где Γ — лестница Хормандера, на которой многочлен (или целая функция) $P(s)$ не обращается в нуль, удовлетворяет уравнению

$$Pg = 1. \tag{1}$$

Во втором выпуске (гл. II, § 3, п. 3) будет показано, что для всякого многочлена $P(s)$ такую лестницу можно построить и, следовательно, в пространстве Z' уравнение (1) всегда разрешимо. Будем называть, далее, поверхность Γ *нулевой* или *обобщенной замкнутой,* если для всякой основной функции $\psi(s)$

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(s)ds = 0.$$

[1)] См. Б. А. Фукс, Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 1948, стр. 299.

Примером нулевой поверхности может служить многообразие, являющееся произведением нулевого контура в плоскости s_1 на любую поверхность в пространстве остальных переменных.

Для каждого многочлена $P(s)$, обратная величина которого $\frac{1}{P(s)}$ ограничена на нулевом контуре Γ, определяется функционал

$$(g,\psi) = \int_\Gamma \frac{1}{P(s)}\psi(s)ds;$$

он является решением уравнения

$$Pg = 0. \tag{2}$$

Замечание. Переходя в уравнениях (1) и (2) к преобразованиям Фурье (см. ниже, § 2), мы получаем решения уравнений

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) f = \delta(x) \tag{3}$$

и

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0, \tag{4}$$

где под записью $i\frac{\partial}{\partial x}$ нужно понимать $\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Таким образом, во втором выпуске мы сможем доказать, что любое уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами обладает фундаментальным решением.

Мы используем в дальнейшем эти простые соображения также для фактического построения решений подобных уравнений.

6. Преобразования Фурье функций пространства S. Мы ввели в конце § 1 гл. I пространство S бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^k D^q \varphi(x)| \leqslant C_{kq}. \tag{1}$$

Найдем класс функций, являющихся преобразованиями Фурье функций класса S[1]. Каждая функция $\varphi(x) \in S$ обладает, очевидно, классическим преобразованием Фурье

$$\psi(\sigma) = \int \varphi(x) e^{i(x,\sigma)} dx,$$

[1] Излагаемые в этом абзаце соображения будут подробно развиты в § 1 гл. III второго выпуска.

причем функция $\psi(\sigma)$ бесконечно дифференцируема в силу абсолютной сходимости интегралов

$$D^q\psi(\sigma) = \int (ix)^q \varphi(x) e^{i(x,\sigma)}\,dx.$$

Так как функция $(ix)^q\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема вместе с $\varphi(x)$ и все ее производные являются абсолютно интегрируемыми, то функция $D^q\psi(\sigma)$ стремится к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{|\sigma|}$. Таким образом, функция $\psi(\sigma)$ как функция переменных $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ обладает теми же свойствами, что и функция $\varphi(x)$ как функция переменных x. Мы видим, что пространство S преобразованием Фурье переводится в себя. Более того, так как такие же рассуждения проходят для обратного преобразования Фурье, то преобразованием Фурье пространство S отображается *на себя*, т.е. каждая функция $\psi(\sigma) \in S$ имеет прообраз. Можно проверить, что всякая сходящаяся в S последовательность функций $\varphi_\nu(x)$ переводится преобразованием Фурье в последовательность функций $\psi_\nu(\sigma)$, также сходящуюся в S.

Из сказанного, в частности, следует, что каждый элемент $\psi(\sigma)$ пространства Z есть элемент пространства S. (Это можно получить и непосредственно: из определения пространства Z следует, что всякая функция $\psi(\sigma) \in Z$ бесконечно дифференцируема и стремится при $|\sigma| \to \infty$ к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{|\sigma|}$; далее, применяя для вычисления производных интегральную формулу Коши, мы можем получить то же свойство для любой производной от $\psi(\sigma)$.) Кроме того, из сказанного вытекает, что если последовательность $\psi_\nu(\sigma)$ функций из Z сходится в смысле сходимости в Z, то она сходится и в смысле сходимости в S. Далее, поскольку пространство K вложено в пространство S плотно, его образ — пространство Z — также располагается плотно в S, так что любую функцию $\psi(\sigma) \in S$ можно получить как предел (по сходимости в S) последовательности функций $\psi_\nu(\sigma) \in Z$.

§ 2. Преобразования Фурье обобщенных функций. Случай одного переменного

1. Определение. Поскольку между пространствами K и Z существует взаимно однозначное соответствие с сохранением линейных операций и сходимости, аналогичное соответствие можно установить и между линейными непрерывными функционалами на этих пространствах. Мы установим это соответствие так, чтобы на функционалах, отвечающих абсолютно интегрируемым функциям, оно переходило бы в соответствие между функцией и ее классическим преобразованием Фурье.

Вначале опять рассмотрим случай одного независимого переменного.

Пусть $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция и $g(\sigma)$ — ее преобразование Фурье. Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$ и ее преобразования Фурье $\psi(\sigma)$ имеет место соотношение

$$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)e^{ix\sigma}}dx\right\}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\sigma)}\psi(\sigma)d\sigma = \frac{1}{2\pi}(g,\psi),$$

которое называют обычно *равенством Парсеваля*; оно остается справедливым и тогда, когда $f(x)$ и $\varphi(x)$, а следовательно, и их преобразования Фурье $g(\sigma)$ и $\psi(\sigma)$, лишь интегрируемы в квадрате на оси. Равенство Парсеваля показывает, что $g(\sigma)$ как обобщенная функция действует на основную функцию по формуле

$$(g,\psi) = 2\pi(f,\varphi). \tag{1}$$

В этой форме оно может служить определением обобщенной функции g на пространстве Z при любой заданной обобщенной функции f на пространстве K. Будем называть функционал g, определенный равенством (1), *преобразованием Фурье функционала* f и обозначать символами $F[f]$ или $\widetilde{f}$.

Подчеркнем, что функционал $F[f]$ действует уже не в пространстве K, а в двойственном пространстве Z.

Для преобразования Фурье обобщенных функций сохраняются формулы дифференцирования обычных преобразований Фурье:

$$P\left(\frac{d}{ds}\right)F[f] = F[P(ix)f], \tag{2}$$

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)f\right] = P(-is)F[f], \tag{3}$$

так что, в частности, умножению на ix в пространстве K' соответствует дифференцирование в пространстве Z' и дифференцированию в пространстве K' отвечает умножение на $-is$ в пространстве Z.

Для доказательства достаточно рассмотреть случай $P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx}$. Мы имеем в этом случае

$$(F[ixf], F[\varphi]) = 2\pi(ixf, \varphi) = 2\pi(f, -ix\varphi) =$$
$$= (F[f], F[-ix\varphi]) = \left(F[f], -\frac{d}{ds}F[\varphi]\right) = \left(\frac{d}{ds}F[f], F[\varphi]\right),$$

что дает формулу (2); аналогично устанавливается (3).

Обратный оператор F^{-1} определен на пространстве Z' и переводит функционал g в функционал f по той же формуле (1) (читаемой справа налево), так что

$$\left.\begin{aligned} &F^{-1}[F[f]] = f, \qquad F\left[F^{-1}[g]\right] = g,\\ &(F^{-1}[g], \varphi) = \frac{1}{2\pi}(g, F[\varphi]). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отметим еще, что формула $FF[\varphi(x)] = 2\pi\varphi(-x)$ (§ 1, п. 1, формула (6)) легко переносится на обобщенные функции. Действительно, для функций φ, принадлежащих пространству S:

$$(FF[f], FF[\varphi(x)]) = 2\pi(F[f], F[\varphi(x)]) = (2\pi)^2(f, \varphi(x)).$$

Но слева вместо $FF[\varphi(x)]$ можно подставить $2\pi\varphi(-x)$. Сокращая на 2π и заменяя x на $-x$, мы получаем:

$$(FF[f], \varphi(x)) = (2\pi f, \varphi(-x)),$$

т.е.

$$FF[f(x)] = 2\pi f(-x), \tag{5}$$

что и требуется.

2. Примеры. 1. Найдем $F[\delta]$. Согласно определению

$$(\widetilde{\delta}, \widetilde{\varphi}) = 2\pi(\delta, \varphi) = 2\pi\varphi(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)d\sigma = (1, \psi),$$

откуда

$$F[\delta] \equiv \widetilde{\delta} = 1, \quad F^{-1}[1] = \delta. \tag{1}$$

2. Аналогично найдем $F[1]$:

$$(\widetilde{1},\widetilde{\varphi}) = 2\pi(1,\varphi) = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ix\cdot 0}dx = \\ = 2\pi\psi(0) = 2\pi(\delta,\psi),$$

откуда

$$F[1] = \widetilde{1} = 2\pi\delta, \quad F^{-1}[\delta] = \frac{1}{2\pi}. \tag{2}$$

3. Преобразование Фурье от многочлена. Используя формулы (2)–(3) находим:

$$F[P(x)] = F[P(x)\cdot 1] = P\left(-i\frac{d}{ds}\right)\widetilde{1} = 2\pi P\left(-i\frac{d}{ds}\right)\delta(s), \tag{3}$$

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)\right] = P(-is)\widetilde{\delta} = P(-is)\cdot 1 = P(-is). \tag{4}$$

В частности,

$$\left.\begin{aligned} F\left[\delta^{(2m)}(x)\right] &= (-1)^m s^{2m}, \\ F\left[\delta^{(2m+1)}(x)\right] &= (-1)^{m+1} i s^{2m+1}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

4. Дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка

$$ny^{(n-1)}(x) = xy(x) \tag{6}$$

после преобразования Фурье переходит в уравнение 1-го порядка

$$n(-i\sigma)^{(n-1)}u(\sigma) = -i\frac{du(\sigma)}{d\sigma} \quad (u = \widetilde{y}). \tag{7}$$

Так как уравнение $(n-1)$-го порядка (6) имеет $n-1$ линейно независимых (обычных) решений, то и уравнение 1-го порядка (7) имеет $n-1$ линейно независимых решений в пространстве обобщенных функций над Z. Мы уже рассмотрели эти решения в п. 5 § 1.

5. Преобразование Фурье от показательной функции e^{bx}. Воспользуемся тем, что ряд

$$e^{bx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n x^n}{n!}$$

сходится в смысле сходимости в пространстве K'; это позволит вычислить $\widetilde{e^{bx}}$ путем почленного применения оператора F к этому ряду. Мы получим (см. формулы (5)–(6) п. 4 § 1)

$$\widetilde{e^{bx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \widetilde{x^n} = 2\pi \sum_{0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \left(-i\frac{d}{ds}\right)^n \delta(s) = 2\pi\delta(s - ib). \qquad (8)$$

Формула (8) позволяет легко получить преобразования Фурье у часто встречающихся функций $\sin bx$, $\cos bx$, $\operatorname{sh} bx$, $\operatorname{ch} bx$:

$$F[\sin bx] = F\left[\frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}\right] = i\pi[\delta(s - b) - \delta(s + b)], \qquad (9)$$

$$F[\cos bx] = F\left[\frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}\right] = \pi[\delta(s - b) + \delta(s + b)], \qquad (10)$$

$$F[\operatorname{sh} bx] = F\left[\frac{e^{bx} - e^{-bx}}{2}\right] = \pi[\delta(s - ib) - \delta(s + ib)], \qquad (11)$$

$$F[\operatorname{ch} bx] = F\left[\frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}\right] = \pi[\delta(s - ib) + \delta(s + ib)]. \qquad (12)$$

6. Преобразование Фурье обобщенных функций, продолжаемых на пространство S. Предположим, что функционал f, определенный первоначально на пространстве K, может быть распространен по непрерывности на пространство S (см. гл. 1, § 1, п. 10). Покажем, что преобразование Фурье $g = \widetilde{f}$ функционала f также распространяется (с пространства Z) на пространство S.

Действительно, формула

$$(g, \psi) = 2\pi(f, \varphi), \quad \psi = \widetilde{\varphi}, \qquad (13)$$

определяет функционал g сразу на всех функциях ψ, являющихся преобразованиями Фурье функций φ; поскольку φ пробегает все пространство S, функция ψ также пробегает все пространство S. Так как из сходимости к нулю функций $\psi_\nu \in S$ следует сходимость к нулю их прообразов $\varphi_\nu(x) \in S$ (обе в смысле пространства S), то получаемый функционал g непрерывен на S. Действительно, если $\psi_\nu(\sigma) \to 0$, то $(g, \psi_\nu) = 2\pi(f, \varphi_\nu) \to 0$.

Итак, формулой (13) определен непрерывный функционал g на S. Но для $\psi \in Z$ он совпадает, очевидно, с преобразованием Фурье $\widetilde{f}$ функционала f, действующего на пространстве K. Тем самым $\widetilde{f}$ распространяется с Z на S, что и требовалось.

В частности, преобразования Фурье периодических функций, финитных обобщенных функций и всех обычных функций степенного роста, а также их производных можно считать функционалами на S. Таковы, например, обобщенные функции $\widetilde{x_+^\lambda}, \widetilde{x_-^\lambda}, \widetilde{|x|^\lambda}$ и $\widetilde{|x|^\lambda \operatorname{sgn} x}$, которые мы подробно рассмотрим в пункте 3.

7. Преобразование Фурье от периодической функции. Всякая периодическая (с периодом 2π) локально интегрируемая функция $f(x)$, как мы видели в п. 4 § 2 гл. I, представляется в виде суммы ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{14}$$

сходящегося в смысле обобщенных функций (даже в пространстве S').

Применяя к равенству (14) преобразование Фурье почленно (что законно в силу его непрерывности) и используя результат примера 5, находим:

$$\widetilde{f(x)} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \delta(s+n). \tag{15}$$

Таким образом, функционал $\widetilde{f(x)}$, рассматриваемый как элемент пространства S', сосредоточен на счетной последовательности точек $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. Преобразования Фурье обобщенных функций x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Подсчитаем преобразование Фурье обобщенной функции x_+^λ. Ограничимся сначала значениями λ, для которых $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$.

Рассмотрим выражение

$$F[x_+^\lambda e^{-\tau x}] = \int_0^\infty x^\lambda e^{i\sigma x} e^{-\tau x} dx = \int_0^\infty x^\lambda e^{isx} dx \tag{1}$$

для $\tau = \operatorname{Im} s > 0$, так что $0 < \arg s < \pi$. Этот интеграл заведомо сходится. Когда $\tau \to +0$, $x_+^\lambda e^{-\tau x}$ сходится к x_+^λ в смысле обобщенных функций, поэтому преобразование Фурье от $x_+^\lambda e^{-\tau x}$ стремится к искомому преобразованию Фурье от x_+^λ .

Вычислим интеграл (1) с помощью подстановки

$$isx = -\xi, \quad isdx = -d\xi, \quad x = -\frac{\xi}{is}, \quad dx = -\frac{d\xi}{is},$$

Мы получим при этом

$$F[x_+^\lambda e^{-\tau x}] = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{s}\right)^{\lambda+1} \int\limits_L \xi^\lambda e^{-\xi} d\xi,$$

где путь интегрирования L представляет собой луч, идущий из 0 в ∞, с аргументом $\arg\xi = \arg s - \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\xi < \frac{\pi}{2}.$$

Но в правой полуплоскости $e^{-\xi}$ экспоненциально убывает. Пользуясь теоремой Коши, получаем, что последний интеграл равен интегралу по полуоси $\xi > 0$, т.е.

$$\int\limits_0^\infty \xi^\lambda e^{-\xi} d\xi = \Gamma(\lambda+1),$$

так что

$$F[x_+^\lambda e^{-\tau x}] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(\sigma + i\tau)^{-\lambda-1}\Gamma(\lambda+1).$$

Так как по предположению $-1 < \operatorname{Re}\lambda < 0$, то и

$$-1 < \operatorname{Re}(-\lambda - 1) < 0.$$

Совершая предельный переход при $\tau \to +0$, мы получаем (см. гл. I, § 3, п. 6)

$$F[x_+^\lambda] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma + i0)^{-\lambda-1}. \tag{2}$$

В силу единственности аналитического продолжения[1)] эта формула верна при любом $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ Если разделить обе части равенства

[1)]Здесь (и часто дальше) используются следующие простые соображения. Пусть f_λ и g_λ обобщенные функции, аналитически зависящие от λ в области G, и пусть известно, что в меньшей области $G_1 \subset G$ обобщенная функция g_λ является преобразованием Фурье обобщенной функции $f_\lambda : g_\lambda = \widetilde{f_\lambda}$. Первое означает, что числовые функции от λ

$$(f_\lambda, \varphi) \text{ и } (g_\lambda, \psi), \tag{$*$}$$

где φ и ψ — основные функции, аналитичны в области G, а второе, — что в области G_1, если $\psi = \widetilde{\varphi}$, функции $(*)$ связаны равенством

$$(g_\lambda, \psi) = 2\pi(f_\lambda, \varphi). \tag{$**$}$$

В силу единственности аналитического продолжения равенство $(**)$ сохраняется в области G и, следовательно, в области G обобщенная функция g_λ также является преобразованием Фурье обобщенной функции f_λ.

на $\Gamma(\lambda+1)$, мы получим справа и слева целые функции от λ, и следовательно, при всех значениях λ

$$F\left[\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(\sigma+i0)^{-\lambda-1}. \tag{3}$$

Можно еще подставить в правую часть выражение функции $(\sigma + + i0)^{-\lambda-1}$ (см. гл. 1, § 3). Тогда получим при $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$F[x_+^\lambda] = i\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}\right]; \tag{4}$$

при $\lambda = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$F[x_+^n] = i^{n+1}[n!\sigma^{-n-1} + (-1)^{n+1} i\pi\delta^{(n)}(\sigma)]. \tag{5}$$

В частности,

$$F[x_+^0] \equiv F[\theta(x)] = i\sigma^{-1} + \pi\delta(\sigma), \tag{6}$$

$$F[x_+^1] \equiv F[x_+] = -\sigma^{-2} - i\pi\delta'(\sigma) \tag{7}$$

и т.д.

Аналогично можно подсчитать и преобразование Фурье от x_-^λ. Для этого нужно, предположив сначала, что $-1 < \operatorname{Re}\lambda < 0$, вычислить $F[x_-^\lambda e^{-\tau x}]$, где $\tau < 0$, а затем перейти к пределу при $\tau \to -0$. При этом получается:

$$F[x_-^\lambda e^{-\tau x}] = \int\limits_\infty^0 |x^\lambda| e^{i\sigma x} e^{-\tau x} dx = \int\limits_0^\infty t^\lambda e^{-ist} dt = \left(-\frac{i}{s}\right)^{\lambda+1} \Gamma(\lambda+1).$$

Отсюда для $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$F[x_-^\lambda] = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1} \tag{8}$$

и при всех λ

$$F\left[\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right] = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}(\sigma-i0)^{-\lambda-1}. \tag{9}$$

При $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, подставляя выражение $(\sigma - i0)^{-\lambda-1}$, находим:

$$F[x_-^\lambda] = i\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}\right]. \tag{10}$$

При $\lambda = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ получаем:

$$F[x_-^n] = i^{n+1}[(-1)^{n+1} n!\sigma^{-n-1} - i\pi\delta^{(n)}(\sigma)]. \tag{11}$$

Перейдем теперь к обобщенным функциям $|x|^\lambda$ и $|x^\lambda|\operatorname{sgn} x$. Складывая и вычитая формулы (4) и (10), мы находим: при $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$F[|x|^\lambda] \equiv F[x_+^\lambda] + F[x_-^\lambda] = -2\Gamma(\lambda+1)\sin\frac{\lambda\pi}{2}|\sigma|^{-\lambda-1}, \tag{12}$$

$$F[|x|^\lambda \operatorname{sgn} x] \equiv F[x_+^\lambda] - F[x_-^\lambda] = 2i\Gamma(\lambda+1)\cos\frac{\lambda\pi}{2}|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma. \tag{13}$$

Разделяя обе части равенства (12) на $\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$ и применяя формулу удвоения для гамма-функции[1)], получаем следующую изящную формулу преобразования Фурье для целой функции $f_\lambda(x) = 2^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$:

$$F[f_\lambda(x)] = F\left[\frac{2^{-\frac{\lambda}{2}}|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right] = \sqrt{2\pi}\frac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}|\sigma|^{-\lambda-1}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} = \sqrt{2\pi}f_{-\lambda-1}(\sigma). \tag{12'}$$

Преобразуя аналогично формулу (13) и полагая $g_\lambda(x) = \frac{2^{-\frac{\lambda}{2}}|x^\lambda|\operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$, находим

$$F[g_\lambda(x)] = \sqrt{2\pi}i\frac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma}{\Gamma\left(\frac{-\lambda+1}{2}\right)} = \sqrt{2\pi}ig_{-\lambda-1}(\sigma). \tag{13'}$$

Аналогично, при $\lambda = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ из формул (5) и (11) находим

$$\begin{aligned} F[|x|^n] &\equiv F[x_+^n] + F[x_-^n] = \\ &= i^{n+1}[(1+(-1)^{n+1})\sigma^{-n-1}n! + ((-1)^{n+1}-1)i\pi\delta^{(n)}(\sigma)], \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} F[|x|^n\operatorname{sgn} x] &\equiv F[x_+^n] - F[x_-^n] = \\ &= i^{n+1}[(1-(-1)^{n+1})\sigma^{-n-1}n! + ((-1)^{n+1}+1)i\pi\delta^{(n)}(\sigma)]. \end{aligned} \tag{15}$$

В частности, для n четного, $n = 0, 2, \ldots, 2k, \ldots$,

$$F[x^{2k}] = (-1)^k 2\pi\delta^{(2k)}(\sigma), \tag{16}$$

$$F[|x|^{2k}\operatorname{sgn} x] = 2i(-1)^k(2k)!\sigma^{-2k-1}, \tag{17}$$

а для n нечетного, $n = 1, 3, \ldots, 2k+1, \ldots$,

$$F[x^{2k+1}] = 2\pi i(-1)^{k+1}\delta^{(2k+1)}(\sigma), \tag{18}$$

$$F[|x|^{2k+1}] = 2(-1)^{k+1}(2k+1)!\sigma^{-2k-2}. \tag{19}$$

[1)] Г.М. Фихтенгольц, Курс, т. 2, 1949, стр. 784.

Обобщенные функции $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ сохраняют непрерывность и при целых отрицательных λ; первая — при четных значениях $\lambda = -2k-2$, вторая — при нечетных значениях $\lambda = -2k-1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Формулы преобразования Фурье для этих обобщенных функций получаются непосредственно из формул (12) и (13), если применить к ним еще раз оператор F, использовать формулу $FF[f(x)] = 2\pi f(-x)$ (§ 2, п. 1, формула (5)) и в результате заменить x на σ и σ на x. Мы получим, таким образом,

$$F[x^{-2k-2}] = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{(2k+1)!} |\sigma|^{2k+1}, \tag{20}$$

$$F[x^{-2k-1}] = \frac{(-1)^k i\pi}{(2k)!} |\sigma|^{2k} \operatorname{sgn} \sigma. \tag{21}$$

Мы видим, что эти формулы получаются из формул (12) и (13) подстановкой $\lambda = -2k-2$ и $\lambda = -2k-1$ соответственно.

Этим же приемом, применяя вторично оператор F к формулам (3) и (9) и заменяя $-\lambda - 1$ на λ, можно получить формулы преобразований Фурье для обобщенных функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$:

$$F[(x+i0)^\lambda] = \frac{2\pi e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)} \sigma_-^{-\lambda-1}; \tag{22}$$

$$F[(x-i0)^\lambda] = \frac{2\pi e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)} \sigma_+^{-\lambda-1}. \tag{23}$$

Полученные нами здесь формулы сведены в таблицу на стр. 197.

4. Преобразования Фурье обобщенных функций $x_+^\lambda \ln x_+$ и аналогичных[1]**.** Дифференцируя по λ преобразования Фурье, найденные в предыдущем пункте, мы получаем новые формулы преобразований Фурье. Так, дифференцируя формулу (2) предыдущего пункта, мы находим: при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$\begin{aligned} F[x_+^\lambda \ln x_+] &= ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}} \Big\{ \Gamma'(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1} - \\ &- \Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1} \ln(\sigma+i0) + i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1} \Big\} = \\ &= ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}} \Big\{ \Big[\Gamma'(\lambda+1) + i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1) \Big] (\sigma+i0)^{-\lambda-1} - \\ &- \Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1} \ln(\sigma+i0) \Big\}. \end{aligned} \tag{1}$$

[1] При первом чтении можно этот пункт пропустить. Результаты его приведены в конце книги в сводной таблице преобразований Фурье.

Таблица 1

№№ п/п	Обобщенная функция	Ее преобразование Фурье
1	$\lvert x\rvert^\lambda \quad (\lambda \neq -1, -3, \ldots)$	$-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}$
2	$f_\lambda(x) = 2^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\lvert x\rvert^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$	$\sqrt{2\pi}f_{-\lambda-1}(\sigma)$
3	$\lvert x^\lambda\rvert \operatorname{sgn} x \quad (\lambda \neq -2, -4, \ldots)$	$2i\cos\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma$
4	$g_\lambda(x) = 2^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\lvert x\rvert^\lambda \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$	$\sqrt{2\pi}ig_{-\lambda-1}(\sigma)$
5	x^m	$2(-i)^m\pi\delta^{(m)}(\sigma)$
6	x^{-m}	$\frac{i^m\pi}{(m-1)!}\sigma^{m-1}\operatorname{sgn}\sigma$
7	x^{-1}	$i\pi\operatorname{sgn}\sigma$
8	x^{-2}	$-\pi\lvert\sigma\rvert$
9	$x_+^\lambda \quad (\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$i\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1} - - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}\right] = = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}$ *)
10	x_+^n	$i^{n+1}n!\sigma^{-n-1} + (-i)^n\pi\delta^{(n)}(x)$
11	$\theta(x)$	$i\sigma^{-1} + \pi\delta(\sigma)$
12	$x_-^\lambda \quad (\lambda \neq -1, -2, \ldots)$	$i\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1} - - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}\right] = = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}$ *)
13	$(x+i0)^\lambda$	$\frac{2\pi}{\Gamma(-\lambda)}e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}$
14	$(x-i0)^\lambda$	$\frac{2\pi}{\Gamma(-\lambda)}e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}$

*) Первое — при $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Аналогично, дифференцируя формулу (8) п. 3, находим, что при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$F[x_-^\lambda \ln x_-] = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Big[\Gamma'(\lambda+1) - i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma - i0)^{-\lambda-1} - \\ - \Gamma(\lambda+1)(\sigma - i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma - i0)\Big\}. \quad (2)$$

В частности, полагая $\lambda = 0$, получаем:

$$F[\ln x_+] = i\Big\{\Big(\Gamma'(1) + i\frac{\pi}{2}\Big)(\sigma + i0)^{-1} - (\sigma + i0)^{-1}\ln(\sigma + i0)\Big\}; \quad (3)$$

$$F[\ln x_-] = -i\Big\{\Big(\Gamma'(1) - i\frac{\pi}{2}\Big)(\sigma - i0)^{-1} - (\sigma - i0)^{-1}\ln(\sigma - i0)\Big\}. \quad (4)$$

Складывая и вычитая формулы (1)–(2), находим:

$$\begin{aligned} F[|x|^\lambda \ln|x|] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big[\Gamma'(\lambda+1) + i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma + i0)^{-\lambda-1} - \\ - ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big[\Gamma'(\lambda+1) - i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma - i0)^{-\lambda-1} - \\ - ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma + i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma + i0) + \\ + ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma - i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma - i0), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F[|x|^\lambda \ln|x| \operatorname{sgn} x] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big[\Gamma'(\lambda+1) + i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma + i0)^{-\lambda-1} + \\ + ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}[\Gamma'(\lambda+1) - i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)](\sigma - i0)^{-\lambda-1} - \\ - ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma + i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma + i0) - \\ - ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma - i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma - i0). \end{aligned} \quad (6)$$

В частности, при $\lambda = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} F[\ln|x|] = i\Big[\Gamma'(1) + i\frac{\pi}{2}\Big](\sigma + i0)^{-1} - i\Big[\Gamma'(1) - i\frac{\pi}{2}\Big](\sigma - i0)^{-1} - \\ - i(\sigma + i0)^{-1}\ln(\sigma + i0) + i(\sigma - i0)^{-1}\ln(\sigma - i0), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} F[\ln|x| \operatorname{sgn} x] = i\Big[\Gamma'(1) + i\frac{\pi}{2}\Big](\sigma + i0)^{-1} + i\Big[\Gamma'(1) - i\frac{\pi}{2}\Big](\sigma - i0)^{-1} - \\ - i(\sigma + i0)^{-1}\ln(\sigma + i0) - i(\sigma - i0)^{-1}\ln(\sigma - i0). \end{aligned} \quad (8)$$

Предельный переход $\lambda \to -2k$ в формуле (5) и $\lambda \to -2k-1$ в формуле (6) позволяет найти выражения $F[x^{-2k}\ln|x|]$ и $F[x^{-2k-1}\ln|x|]$. Мы найдем эти выражения ниже несколько иным путем.

Преобразования Фурье обобщенных функций x_+^{-n}, x_-^{-n}, $x_+^{-n}\ln x_+$, $x_-^{-n}\ln x_-$ могут быть найдены с помощью рядов Лорана функций x_+^λ и x_-^λ в окрестности значения $\lambda=-n$. Как мы помним, разложение Лорана функции x_+^λ в окрестности значения $\lambda=-n$ имеет вид

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + x_+^{-n} + (\lambda+n)x_+^{-n}\ln x_+ + \ldots$$

Почленное применение преобразования Фурье приводит к разложению

$$F[x_+^\lambda] = F\left[\frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)}\right] + F[x_+^{-n}] + (\lambda+n)F[x_+^{-n}\ln x_+] + \ldots \tag{9}$$

Поэтому, разлагая по степеням $\lambda+n$ функцию

$$F[x_+^\lambda] = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1} \tag{10}$$

и приравнивая коэффициенты получающегося ряда соответствующим коэффициентам ряда (9), мы найдем выражения преобразований Фурье от $x_+^{-n}, x_+^{-n}\ln x_+, \ldots$ Заметим, что $e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}$ и $(\sigma+i0)^{-\lambda-1}$ — целые функции, а $\Gamma(\lambda+1)$ имеет при $\lambda=-1$ полюс 1-го порядка; следовательно, искомое разложение функции (10) по степеням $\lambda+n$ может быть получено как произведение ряда Тейлора функции $(\sigma+i0)^{-\lambda-1}$ и ряда Лорана функции

$$A(\lambda) = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1).$$

Первый из этих рядов имеет вид

$$(\sigma+i0)^{-\lambda-1} = \sigma^{n-1} - (\lambda+n)\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0) + \\ + \frac{1}{2}(\lambda+n)^2\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma+i0) + \ldots, \tag{11}$$

а второй мы запишем в форме

$$A(\lambda) = \frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots \tag{12}$$

Коэффициенты $a_{-1}^{(n)}, a_0^{(n)}, \ldots$ можно вычислить явно; ниже приведены их значения. Перемножая ряды (11) и (12), находим:

$$\begin{aligned} &ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1} = \\ &\qquad = \frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}\sigma^{n-1} + [a_0^{(n)}\sigma^{n-1} - a_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0)] + \\ &+ (\lambda+n)[a_1^{(n)}\sigma^{n-1} - a_0^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0) + \frac{1}{2}a_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma+i0)] + \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

Приравнивая коэффициенты разложений (9) и (13), получаем:

$$F[x_+^{-n}] = a_0^{(n)}\sigma^{n-1} - a_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0), \tag{14}$$

$$\begin{aligned} F[x_+^{-n}\ln x_+] = a_1^{(n)}\sigma^{n-1} - a_0^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma+i0) + \\ + \frac{1}{2}a_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma+i0). \end{aligned} \tag{15}$$

Аналогичные вычисления проводятся для определения преобразований Фурье обобщенных функций x_-^{-n}, $x_-^{-n}\ln x_-$ и т.д. Исходим из разложения Лорана

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + x_-^{-n} + (\lambda+n)x_-^{-n}\ln x_- + \ldots,$$

к которому применяем почленно преобразование Фурье

$$F[x_-^\lambda] = F\left[\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)}\right] + F[x_-^{-n}] + (\lambda+n)F[x_-^{-n}\ln x_-] + \ldots \tag{16}$$

Поскольку

$$F[x_-^\lambda] = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1},$$

мы можем получить интересующие нас формулы разложением последней функции по степеням $(\lambda+n)$ и приравниванием соответствующих коэффициентов получающегося ряда и ряда (16). Мы имеем:

$$\begin{aligned} (\sigma-i0)^{-\lambda-1} = \sigma^{n-1} - (\lambda+n)\sigma^{n-1}\ln(\sigma-i0) + \\ + \frac{1}{2}(\lambda+n)^2\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma-i0) + \ldots, \end{aligned} \tag{17}$$

$$-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1) \equiv B(\lambda) = \frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + b_0^{(n)} + b_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots, \tag{18}$$

откуда

$$\begin{aligned} F[x_-^\lambda] = \frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n}\sigma^{n-1} + [b_0^{(n)}\sigma^{n-1} - b_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma - i0)] + \\ + (\lambda+n)[b_1^{(n)}\sigma^{n-1} - b_0^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma - i0)] + \\ + \frac{1}{2}b_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma - i0) + \ldots \end{aligned} \tag{19}$$

Приравнивая коэффициенты в (16) и (19), получаем:

$$F[x_-^{-n}] = b_0^{(n)}\sigma^{n-1} - b_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma - i0), \tag{20}$$

$$\begin{aligned} F[x_-^{-n}\ln x_-] = b_1^{(n)}\sigma^{n-1} - b_0^{(n)}\sigma^{n-1}\ln(\sigma - i0) + \\ + \frac{1}{2}b_{-1}^{(n)}\sigma^{n-1}\ln^2(\sigma - i0), \end{aligned} \tag{21}$$

. . . .

Найдем теперь преобразования Фурье обобщенных функций:

$$|x|^{-n}, \quad |x|^{-n}\operatorname{sgn} x, \quad |x|^{-n}\ln|x| \quad \text{и} \quad |x|^{-n}\ln|x|\operatorname{sgn} x.$$

Разложим функцию $|x|^\lambda$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\lambda = -2k$:

$$|x|^\lambda = x^{-2k} + (\lambda + 2k)x^{-2k}\ln|x| + \ldots$$

Применим почленно преобразование Фурье:

$$F[|x|^\lambda] = F[x^{-2k}] + (\lambda + 2k)F[x^{-2k}\ln|x|] + \ldots \tag{22}$$

С другой стороны, имеем:

$$F[|x|^\lambda] = -2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)|\sigma|^{-\lambda-1}.$$

Положим

$$C(\lambda) = -2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1). \tag{23}$$

Эта функция при $\lambda = -2k$ регулярна, так что

$$C(\lambda) = c_0^{(2k)} + (\lambda + 2k)c_1^{(2k)} + \ldots \tag{24}$$

Далее, в окрестности точки $\lambda = -2k$

$$|\sigma|^{-\lambda-1} = |\sigma|^{2k-1} - (\lambda+2k)|\sigma|^{2k-1}\ln|\sigma| + \ldots \tag{25}$$

Перемножая разложения (24) и (25) и сравнивая результат с разложением (22), находим:

$$F[x^{-2k}] = c_0^{(2k)}|\sigma|^{2k-1} \tag{26}$$

(ср. выше формулу (20) п. 3),

$$F\left[x^{-2k}\ln|x|\right]= c_1^{(2k)}|\sigma|^{2k-1} - c_0^{2k}|\sigma|^{2k-1}\ln|\sigma|. \tag{27}$$

Продолжив разложения (22), (24) и (25), можно было бы аналогично найти $F[x^{-2k}\ln^2|x|]$ и т.д.

Аналогично разложим $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ в окрестности точки $\lambda = -2k-1$:

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = x^{-2k-1} + (\lambda+2k+1)x^{-2k-1}\ln|x| + \ldots$$

Применяя почленно преобразование Фурье, получаем:

$$F[|x|^\lambda \operatorname{sgn} x] = F[x^{-2k-1}] + (\lambda+2k+1)F[x^{-2k-1}\ln|x|] + \ldots \tag{28}$$

С другой стороны,

$$F[|x|^\lambda \operatorname{sgn} x] = iD(\lambda)|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma,$$

где

$$D(\lambda) = 2\cos\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1). \tag{29}$$

Разложим функции $D(\lambda)$ и $|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma$ по степеням $\lambda+2k+1$:

$$D(\lambda) = d_0^{(2k+1)} + (\lambda+2k+1)d_1^{(2k+1)} + \ldots, \tag{30}$$

$$|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma = |\sigma|^{2k}\operatorname{sgn}\sigma - (\lambda+2k+1)|\sigma|^{2k}\ln|\sigma|\operatorname{sgn}\sigma + \ldots \tag{31}$$

Перемножая (30) и (31) и сравнивая с (28), находим:

$$F[x^{-2k-1}] = id_0^{(2k+1)}|\sigma|^{2k}\operatorname{sgn}\sigma \tag{32}$$

(ср. формулу (21) п. 3),

$$F[x^{-2k-1}\ln|x|] = id_1^{(2k+1)}|\sigma|^{2k}\operatorname{sgn}\sigma - id_0^{(2k+1)}|\sigma|^{2k}\ln|\sigma|\operatorname{sgn}\sigma \tag{33}$$

и т.д.

Теперь нам нужно подсчитать преобразования Фурье обобщенных функций $|x|^{-n}$ и $|x|^{-n}\ln|x|$ при нечетных n и преобразования Фурье обобщенных функций $|x|^{-n}\operatorname{sgn} x$ и $|x|^{-n}\ln|x|\operatorname{sgn} x$ при четных n. Мы найдем эти преобразования Фурье тем же путем, только в отличие от предыдущего вместо рядов Тейлора воспользуемся рядами Лорана.

Разложим функцию $|x|^\lambda$ в ряд Лорана в окрестности значения $\lambda = -2k-1$:

$$|x|^\lambda = 2\frac{\delta^{(2k)}(x)}{(2k)!}\frac{1}{\lambda+2k+1} + |x|^{-2k-1} + (\lambda+2k+1)|x|^{-2k-1}\ln|x| + \ldots$$

Применим почленно преобразование Фурье:

$$F[|x|^\lambda] = 2\frac{F[\delta^{(2k)}(x)]}{(2k)!}\frac{1}{\lambda+2k+1} + F[|x|^{-2k-1}] + \\ + (\lambda+2k+1)F[|x|^{-2k+1}\ln|x|] + \ldots \tag{34}$$

С другой стороны, перемножая разложения

$$C(\lambda) = \frac{c_{-1}^{(2k+1)}}{\lambda+2k+1} + c_0^{(2k+1)} + (\lambda+2k+1)c_1^{(2k+1)} + \ldots \tag{35}$$

и

$$|\sigma|^{-\lambda-1} = \sigma^{2k} - (\lambda+2k+1)\sigma^{2k}\ln|\sigma| + \frac{1}{2}(\lambda+2k+1)^2\sigma^{2k}\ln^2|\sigma| + \ldots, \tag{36}$$

получаем:

$$F[|x|^\lambda] = \frac{c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}}{\lambda+2k+1} + \Big[c_0^{(2k+1)}\sigma^{2k} - c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln|\sigma|\Big] + \\ + (\lambda+2k+1)\Big[c_1^{(2k+1)}\sigma^{2k} - c_0^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln|\sigma| + \\ + \frac{1}{2}c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln^2|\sigma|\Big] + \ldots \tag{37}$$

Следовательно,

$$F[|x|^{-2k-1}] = c_0^{(2k+1)}\sigma^{2k} - c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln|\sigma|, \tag{38}$$

$$F[|x|^{-2k-1}\ln|x|] = c_0^{(2k+1)}\sigma^{2k} - c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln|\sigma| + \frac{1}{2}c_{-1}^{(2k+1)}\sigma^{2k}\ln^2|\sigma|, \tag{39}$$

. . . .

Аналогичные вычисления производим с обобщенной функцией $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ в окрестности значения $\lambda = -2k$:

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = 2\frac{\delta^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}\frac{1}{\lambda+2k} + |x|^{-2k}\operatorname{sgn} x + \\ + (\lambda+2k)|x|^{-2k}\ln|x|\operatorname{sgn} x + \ldots,$$

$$F[|x|^\lambda \operatorname{sgn} x] = 2\frac{F[\delta^{(2k-1)}(x)]}{(2k-1)!}\frac{1}{\lambda+2k} + F[|x|^{-2k}\operatorname{sgn} x] + \\ + (\lambda+2k)F[|x|^{-2k}\ln|x|\operatorname{sgn} x] + \ldots \tag{40}$$

С другой стороны, перемножая разложения

$$|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma = \sigma^{2k-1} - (\lambda+2k)\sigma^{2k-1}\ln|\sigma| + \frac{1}{2}(\lambda+2k)^2\sigma^{2k-1}\ln^2|\sigma|, \tag{41}$$

и

$$D(\lambda) = \frac{d_{-1}^{(2k)}}{\lambda+2k} + d_0^{(2k)} + (\lambda+2k)d_1^{(2k)} + \ldots, \tag{42}$$

находим:

$$D(\lambda)|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma = \frac{d_{-1}^{(2k)}}{\lambda+2k}\sigma^{2k-1} + \left[d_0^{(2k)}\sigma^{2k-1} - d_{-1}^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln|\sigma|\right] + \\ + (\lambda+2k)[d_1^{(2k)}\sigma^{2k-1} - d_0^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln|\sigma| + \frac{1}{2}d_{-1}^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln^2|\sigma|] + \ldots \tag{43}$$

Сравнивая (40) и (43), получаем формулы:

$$F[|x|^{-2k}\operatorname{sgn} x] = id_0^{(2k)}\sigma^{2k-1} - id_{-1}^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln|\sigma|,$$

$$F[|x|^{-2k}\ln|x|\operatorname{sgn} x] = id_1^{(2k)}\sigma^{2k-1} - id_0^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln|\sigma| + \frac{i}{2}d_{-1}^{(2k)}\sigma^{2k-1}\ln^2|\sigma|,$$

. . . .

В ходе вычислений мы ввели следующие функции:

$$A(\lambda) = ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1) = \tfrac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$
$$B(\lambda) = -ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1) = \tfrac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + b_0^{(n)} + b_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$
$$C(\lambda) = -2\sin\tfrac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1) = \tfrac{c_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + c_0^{(n)} + c_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$
$$D(\lambda) = 2\cos\tfrac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1) = \tfrac{d_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + d_0^{(n)} + d_1^{(n)}(\lambda+n).$$

Заметим, что $B(\lambda) = \overline{A(\lambda)}$ при вещественных λ, т.е. $B(\lambda)$ получается из $A(\lambda)$ заменой i на $-i$. Далее, $C(\lambda) = A(\lambda) + B(\lambda)$, т.е. $C(\lambda) = 2\operatorname{Re} A(\lambda)$ при вещественных λ, а $D(\lambda) = A(\lambda) - B(\lambda)$, т.е. $D(\lambda) = 2i\operatorname{Im} A(\lambda)$ при вещественных λ. Значения $a_{-1}^{(n)}$, $a_0^{(n)}$ и $a_1^{(n)}$ мы приведем без вывода:

$$
\begin{aligned}
a_{-1}^{(n)} &= \frac{i^{n-1}}{(n-1)!};\\
a_0^{(n)} &= \frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \Gamma'(1) + i\frac{\pi}{2}\right];\\
a_1^{(n)} &= \frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^2} + \sum_{\substack{j\neq k\\ i\leqslant j,k\leqslant n-1}}\frac{1}{jk} - \frac{\pi^2}{8} + \right.\\
&\qquad + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)\Gamma'(1) + \Gamma''(1) + \\
&\qquad \left. + i\frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \Gamma'(1)\right]\right\};\\
b_i^{(n)} &= \overline{a_i}^{(n)}; c_i^{(n)} = 2\operatorname{Re}\, a_i^{(n)};\quad d_i^{(n)} = 2\operatorname{Im}\, a_i^{(n)}.
\end{aligned}
$$

В частности,

$$
\begin{aligned}
b_{-1}^{(n)} &= \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!};\quad c_{-1}^{(n)} = \frac{2(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cos(n-1)\frac{\pi}{2};\\
d_{-1}^{(n)} &= \frac{2(-1)^n}{(n-1)!}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

5. Преобразование Фурье обобщенной функции $(ax^2 + bx + c)_+^\lambda$**.** Рассмотрим функцию $(ax^2 + bx + c)_+^\lambda$, равную $(ax^2 + bx + c)^\lambda$ при тех x, при которых $ax^2 + bx + c > 0$, и равную нулю при остальных x. Соответствующая обобщенная функция определяется равенством

$$
\Big((ax^2 + bx + c)_+^\lambda, \varphi(x)\Big) = \int\limits_{ax^2+bx+c>0} (ax^2 + bx + c)^\lambda \varphi(x)\,dx \qquad (1)
$$

при тех λ, при которых интеграл существует, а при других λ — как аналитическое продолжение этого интеграла.

Область, в которой $ax^2 + bx + c > 0$, если она существует, может иметь один из следующих видов:

1) интервал $\alpha < x < \beta$;

2) вся прямая;

3) лучи $x < \alpha$ и $x > \beta$ $(\alpha < \beta)$;

4) вся прямая за исключением одной точки $x = \alpha$.

Линейным преобразованием переменного x (сдвигом и растяжением) можно свести функцию $(ax^2+bx+c)_+^\lambda$ к одному из следующих типов: в случае 1) к $(1-x^2)_+^\lambda$; в случае 2) к $(1+x^2)_+^\lambda = (1+x^2)^\lambda$; в случае 3) к $(x^2-1)_+^\lambda$; в случае 4) к $x_+^{2\lambda}$. Последний случай нас интересовать не будет, так как функция $x_+^{2\lambda}$ и ее преобразование Фурье изучены выше.

В первом случае интеграл

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^\lambda \varphi(x)dx$$

сходится при $\operatorname{Re}\lambda > -1$; при других λ его регуляризация (аналитическое продолжение) получается по формулам, указанным в § 3 гл. 1. При этом выясняется, что обобщенная функция $(1-x^2)_+^\lambda$ аналитична всюду, за исключением точек $\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots$, в которых она имеет полюсы; вычет в полюсе $\lambda = -k$ равен $\frac{(-1)^{k-1}\delta^{k-1}(1-x^2)}{(k-1)!}$. Здесь $\delta^{(k-1)}(1-x^2)$ — обобщенная функция, определяемая формулой

$$\delta^{(k-1)}(1-x^2) = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k x^{k-1}}\left[\delta^{(k-1)}(x-1) - \delta^{(k-1)}(x+1)\right].$$

Аналогично обобщенная функция $(1+x^2)^\lambda$, определенная сходящимся при $\operatorname{Re}\lambda < -\frac{1}{2}$ интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^\lambda \varphi(x)dx,$$

аналитична при всех λ, а обобщенная функция $(x^2-1)_+^\lambda$, определенная как сумма сходящихся при $-1 < \operatorname{Re}\lambda < -\frac{1}{2}$ интегралов

$$\int_{-\infty}^{-1} (1-x^2)^\lambda \varphi(x)dx + \int_{1}^{\infty} (1-x^2)^\lambda \varphi(x)dx,$$

аналитична при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ и имеет в точке $\lambda = -k$ полюс с вычетом $\frac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(x^2-1)}{(k-1)!}$. Здесь $\delta^{(k-1)}(x^2-1)$ — обобщенная функция, определяемая формулой

$$\delta^{(k-1)}(x^2-1) = (-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(1-x^2) = \\ = \frac{1}{2^k x^{k-1}}\left[\delta^{(k-1)}(x-1) - \delta^{(k-1)}(x+1)\right].$$

В связи с приведенными определениями дадим общее определение обобщенных функций $\delta(f(x))$ и $\delta^{(k)}(f(x))$.

Пусть сначала $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, имеющая единственный и притом простой корень при $x = x_0$, причем $f'(x_0) > 0$. Сделаем в интеграле

$$\int \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0) \qquad \text{(I)}$$

подстановку $t = f(x)$. Формула (I) перепишется в виде

$$\int \delta(f(x))\varphi(f(x))f'(x)dx = \varphi(0);$$

положив $\varphi(f(x))f'(x) = \psi(x)$, получим:

$$\int \delta(f(x))\psi(x)dx = \frac{\psi(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Если $f'(x_0) < 0$, то чтобы слева интегрирование производилось в сторону возрастания x, надо поставить перед интегралом знак минус; таким образом, в общем случае

$$\int \delta(f(x))\psi(x)dx = \frac{\psi(x_0)}{|f'(x_0)|}. \qquad \text{(II)}$$

Эти наводящие соображения делают естественным следующее определение. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция, имеющая один и притом простой корень $x = x_0$. Обобщенная функция $\delta(f(x))$ есть функционал, определяемый формулой (II), где $\psi(x)$ — любая основная функция.

Пусть теперь $f(x)$ имеет произвольное число простых корней. В этом случае естественно определить $\delta(f(x))$ формулой

$$\int \delta(f(x))\psi(x)dx = \sum_n \frac{\psi(x_n)}{|f'(x_n)|}, \qquad \text{(III)}$$

где суммирование производится по всем корням уравнения $f(x) = 0$; можно переписать ее в виде

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\delta(x - x_n). \qquad \text{(IV)}$$

Например, $\delta(\sin x) = \sum\limits_n \delta(x - \pi n)$.

Определение $\delta^{(k)}(f(x))$ легко получить из (IV) формальным дифференцированием. Дифференцируя формулу (IV) один раз, получим:

$$\delta'(f(x))f'(x) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\frac{d}{dx}\delta(x - x_n).$$

На $f'(x)$ можно разделить, так как $f'(x)$ в точках $x = x_n$ не обращается в нуль:

$$\delta'(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \delta(x - x_n).$$

Продолжая дифференцирование, приходим к следующему определению:

$$\delta^k(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \left(\frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \right)^k \delta(x - x_n). \tag{V}$$

Найдем преобразования Фурье обобщенных функций $(1 - x^2)_+^\lambda$, $(1 + x^2)^\lambda$, $(x^2 - 1)_+^\lambda$. Эти преобразования Фурье при тех λ, при которых соответствующие интегралы сходятся, выражаются через бесселевы функции; в силу единственности аналитического продолжения эти выражения сохраняются и при других λ. Интересно, что при целых значениях параметра λ удается выразить эти преобразования Фурье через элементарные функции и через производные от δ-функции. Тем самым устанавливаются связи между бесселевыми функциями, с одной стороны, и производными от δ-функции, с другой.

Мы начнем с вывода преобразования Фурье обобщенной функции $(1 - x^2)^\lambda$. При $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ имеет место формула[1)]

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^\lambda e^{ixs} dx = \sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1) \left(\frac{s}{2} \right)^{-\lambda - \frac{1}{2}} J_{\lambda + \frac{1}{2}}(s). \tag{2}$$

Функция, стоящая справа, а следовательно и функция слева, аналитична при всех λ , кроме $\lambda = -1, -2, \ldots$; в этих точках рассматриваемое выражение имеет простые полюсы.

Таким образом, преобразование Фурье обобщенной функции $(1 - x^2)_+^\lambda$ выражается формулой

$$F\left[(1 - x^2)_+^\lambda\right] = \sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1) \left(\frac{s}{2} \right)^{-\lambda - \frac{1}{2}} J_{\lambda + \frac{1}{2}}(s), \tag{2'}$$

оно существует при всех $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

Вычет написанного выражения при $\lambda = -n$ равен

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sqrt{\pi} \left(\frac{s}{2} \right)^{n - \frac{1}{2}} J_{-n + \frac{1}{2}}(s). \tag{3}$$

Этот вычет можно выразить и иначе. Для этого разделим обе части равенства (2) на $\Gamma(\lambda + 1)$ и найдем предел при $\lambda \to -n$. Так как

$$\lim_{\lambda \to -n} \frac{(1 - x^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)} = \delta^{(n-1)}(1 - x^2),$$

1) **И.М. Рыжик и И.С. Градштейн**, Таблицы, 1951, стр. 345, формула 6.413, 3.

то

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} J_{-n+\frac{1}{2}}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-1)}(1-x^2)e^{ixs}dx. \tag{4}$$

Последний интеграл, как нетрудно подсчитать, равен

$$\frac{1}{2^{n-1}} s^{2n-1} \frac{d^{n-1}}{(sds)^{n-1}}\left(\frac{\cos s}{s}\right). \tag{5}$$

Это и есть второе выражение вычета при $\lambda = -n$.

При целых $\lambda = n > 0$ легко получается формула

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n e^{ixs}dx = 2^{n+1} n!(-1)^n \frac{d^n}{(sds)^n}\left(\frac{\sin s}{s}\right). \tag{6}$$

Для доказательства этой формулы заметим, что она справедлива при $n = 0$. Пусть формула (6) справедлива для некоторого n. Применяя к обеим частям равенства (6) оператор $2\frac{d}{sds}$ и интегрируя по частям, можно убедиться в справедливости этой формулы и при $n+1$.

Из полученных формул легко вывести выражение бесселевой функции полуцелого аргумента через элементарные функции. Сравнивая формулы (3)–(5), находим:

$$J_{-n+\frac{1}{2}}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(s)^{n-\frac{1}{2}} \frac{d^{n-1}}{(sds)^{n-1}}\left(\frac{\cos s}{s}\right). \tag{7}$$

Указанное выражение применимо, если индекс бесселевой функции отрицателен. Чтобы найти выражение бесселевой функции с положительным полуцелым индексом через элементарные функции, положим в формуле (2) $\lambda = n$:

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n e^{ixs}dx = n!\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(s). \tag{8}$$

Сравнивая (6) и (8), находим

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^n}{(xdx)^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right). \tag{7'}$$

Таким образом, мы доказали, что как при отрицательных, так и при положительных полуцелых значениях r функция $J_r(x)$ выражается через элементарные функции.

Рассмотрим теперь функцию $(1+x^2)^\lambda$. Преобразование Фурье этой функции при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ равно[1)]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^\lambda e^{ixs}dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{|s|}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}} K_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|). \tag{9}$$

[1)] **И.М.Рыжик и И.С.Градштейн**, Таблицы, 1951, стр. 281, формула 5.116, 1.

Формула (9) сохраняется при всех λ. При целых неотрицательных $\lambda = n$ искомое преобразование Фурье легко находится непосредственно: функция $(1+x^2)^\lambda$ является многочленом $(1+x^2)^n$, а функция $|s|^{-\lambda-\frac{1}{2}}K_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|)$ имеет полюс. Преобразование Фурье функции $(1+x^2)^n$, как мы знаем, равно $\left(1-\frac{d^2}{ds^2}\right)^n\delta(s)$.

Отсюда следует, что

$$\lim_{\lambda\to-n}\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left|\frac{s}{2}\right|^{\lambda-\frac{1}{2}}K_{\lambda-\frac{1}{2}}(|s|) = \sqrt{\pi}\left(1-\frac{d^2}{ds^2}\right)^n\delta(s). \tag{10}$$

Наконец, рассмотрим преобразование Фурье обобщенной функции $(x^2-1)_+^\lambda$. Оно равно

$$\int_{-\infty}^{-1}(x^2-1)^\lambda e^{isx}dx + \int_1^\infty (x^2-1)^\lambda e^{isx}dx = 2\int_1^\infty (x^2-1)^\lambda \cos sx dx. \tag{11}$$

Но при $-1 < \operatorname{Re}\lambda < 0$ имеет место равенство[1)]

$$\int_1^\infty (x^2-1)^\lambda \cos sx dx = -\frac{\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}}{2\left|\frac{s}{2}\right|^{\lambda+\frac{1}{2}}}N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|). \tag{12}$$

Отсюда следует, что для всех $\lambda \neq -1,-2,\ldots$ преобразование Фурье обобщенной функции $(x^2-1)_+^\lambda$ равно

$$2\int_1^\infty (x^2-1)^\lambda \cos sx dx = -\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left|\frac{s}{2}\right|^{-\lambda-\frac{1}{2}}N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|) =$$

$$= \Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left|\frac{s}{2}\right|^{-\lambda-\frac{1}{2}}\frac{\cos\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|s|) - J_{\lambda+\frac{1}{2}}(|s|)}{\sin\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}. \tag{13}$$

[1)] Там же, стр. 347, формула 6.422

Особенно просто подсчитывается преобразование Фурье функции $(x^2-1)^n$ $(n=0,1,2,\dots)$. В этом случае

$$2\int_1^\infty (x^2-1)^n \cos sx dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2-1)^n e^{isx} dx + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n e^{isx} dx =$$

$$= 2\pi(-1)^n \left(1+\frac{d^2}{ds^2}\right)^n \delta(s) + (-1)^{n+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(s). \quad (14)$$

Таким образом, преобразование Фурье функции $(x^2-1)_+^n$ равно

$$2\pi(-1)^n \left(1+\frac{d^2}{ds^2}\right)^n \delta(s) + (-1)^{n+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{s}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(s). \quad (15)$$

6. Преобразование Фурье аналитических функционалов. Рассмотрим аналитический функционал в пространстве Z

$$(g,\psi) = \int_\Gamma g(s)\psi(s) ds. \quad (1)$$

Контур интегрирования Γ предполагается конечным или бесконечным, но заведомо таким, вдоль которого функция $g(s)e^{\tau b}$ абсолютно интегрируема при любом вещественном b. Мы утверждаем, что функционал g является преобразованием Фурье регулярного функционала над пространством K, определенного функцией

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\overline{\int_\Gamma g(s)e^{isx} ds}. \quad (2)$$

Прежде всего заметим, что функция $f(x)$ определена формулой (2) для всех x в силу предположения о контуре Γ. Пусть $\varphi(x)$ — основная функция, преобразованием Фурье которой служит функция $\psi(s)$; тогда, подставляя в формулу (1) выражение $\psi(s)$ через $\varphi(x)$, мы находим:

$$(g,\psi) = \int_\Gamma g(s)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{isx} dx\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\left\{\int_\Gamma g(s)e^{isx} ds\right\} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\varphi(x) dx = 2\pi(f,\varphi),$$

где $f(x)$ определена формулой (2), что и утверждается.

Пусть, например, Γ есть ограниченный замкнутый контур, внутри которого имеется изолированная особая точка s_0 функции $g(s)$. В этом случае функция $\overline{f(x)}$, согласно теореме о вычетах, имеет вид

$$\overline{f(x)} = \int_\Gamma g(s)e^{-isx}dx = 2\pi i \cdot \underset{s=s_0}{\text{выч.}}[g(s)e^{-isx}].$$

Пример. Рассмотрим аналитический функционал

$$(g(s), \psi(s)) = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\frac{s^2}{2}}\psi(s)ds \tag{3}$$

с интегрированием по мнимой оси (или по любому эквивалентному пути). По доказанному, функционал g есть преобразование Фурье функции f, определяемой равенством

$$\overline{f(x)} = \frac{i}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\frac{s^2}{2}}e^{isx}ds.$$

Этот интеграл легко вычисляется. Заменим в нем s на $i\tau$, он перейдет тогда в интеграл

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}-\tau x}d\tau = \frac{1}{2\pi}e^{\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\tau+x)^2}d\tau = \\ = \frac{i}{2\pi}e^{\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Таким образом, аналитический функционал (3) является преобразованием Фурье функции

$$f(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Обращая этот результат, получаем, что преобразованием Фурье функции $e^{\frac{x^2}{2}}$ служит аналитический функционал, определяемый функцией $i\sqrt{2\pi}e^{\frac{s^2}{2}}$ и контуром $(-i\infty, i\infty)$.

§ 3. Преобразования Фурье обобщенных функций. Случай нескольких переменных

1. Определение. Преобразование Фурье функционала f, действующего на пространстве K основных функций $\varphi(x)$ от нескольких независимых переменных $x=(x_1,\ldots,x_n)$, определяется как функционал g на пространстве Z основных функций $\psi(s)$, $s=(s_1,\ldots,s_n)$, действующий по формуле

$$(g,\psi)=(2\pi)^n(f,\varphi), \tag{1}$$

где $\psi=\widetilde{\varphi}$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(x)$. Функционал g линеен и непрерывен; он обозначается через $\widetilde{f}$ или $F[f]$. Результаты § 2 переносятся на этот случай без особых изменений. Формулы (2)–(3) п. 1 приобретают следующий вид: если P — многочлен от n переменных с постоянными коэффициентами, то

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial s_n}\right)F[f]=F[P(ix_1,\ldots,ix_n)f], \tag{2}$$

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f\right]=P(-is_1,\ldots,-is_n)\widetilde{f}. \tag{3}$$

Обратный оператор F^{-1} действует в пространстве Z' и переводит его в пространство K' по формуле

$$(F^{-1}g,\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^n}(g,F\varphi). \tag{4}$$

Если $f(x)$ — функция, обладающая преобразованием Фурье в классическом смысле, то функционал $\widetilde{f}$ есть регулярный функционал, соответствующий преобразованию Фурье функции $f(x)$.

Из сингулярных функционалов простейшим является дельта-функция: для нее имеют место формулы

$$\widetilde{\delta(x)}=1,\quad \widetilde{1}=(2\pi)^n\delta(s), \tag{5}$$

аналогичные формулам (2) п. 2 § 2.

Формула *преобразования Фурье от многочлена* получается комбинированием формул (2) и (5):

$$F[P(x_1,\ldots,x_n)]=F[P(x_1,\ldots,x_n)1]=(2\pi)^nP\left(-i\frac{\partial}{\partial s_1},\ldots,-i\frac{\partial}{\partial s_n}\right)\delta(s). \tag{6}$$

Выясним, как выглядит преобразование Фурье от обобщенной функции f, к которой применена некоторая операция u линейного преобразования независимых переменных (гл. I,§ 1, п. 6). Для основной функции $\varphi(x)$ мы имеем, полагая $u^{-1}x = y$, $x = uy$, $dx = |u|dy$:

$$F[\varphi(u^{-1}x)] = \int \varphi(u^{-1}x)e^{i(\sigma,x)}dx = |u|\int \varphi(y)e^{i(\sigma,uy)}dy = \\ = |u|\int \varphi(y)e^{i(u'\sigma,y)}dy = |u|\widetilde{\varphi}(u'\sigma),$$

т.е. *преобразованию* u^{-1} *в области переменных* x *отвечает сопряженное преобразование* u' *в области переменных* σ *и умножение результата на* $|u|$. Далее для обобщенной функции f мы будем иметь, обозначая, как всегда, $\psi(\sigma) = F[\varphi(x)]$:

$$(F[f(ux)],F[\varphi(x)]) = (2\pi)^n(f(ux),\varphi(x)) = \\ = (2\pi)^n(f(x),\varphi(u^{-1}x)) = (F[f(x)],F[\varphi(u^{-1}x)]) = \\ = (F[f(x)],|u|\varphi(u'\sigma)) = |u|(F[f(x)],F[\varphi(u'\sigma)]).$$

Обозначая далее, $g(\sigma) = F[f(x)]$, $g_u(\sigma) = F[\varphi(ux)]$, мы получаем:

$$(g_u(\sigma),\psi(\sigma)) = (g(\sigma),\psi(u'\sigma)) = (g(u'^{-1}\sigma),\psi(\sigma)),$$

откуда

$$g_u(\sigma) = |u|g(u'^{-1}\sigma).$$

Таким образом, *преобразованию* $f(x) \to f(ux)$ *в пространстве обобщенных функций отвечает преобразование* $g(\sigma) \to |u|g(u'^{-1}\sigma)$ *в пространстве преобразований Фурье.*

В частности, если обобщенная функция f инвариантна относительно преобразования u, так что $f(ux) = f(x)$, то ее преобразование Фурье инвариантно относительно преобразования u'^{-1} и умножения на $|u|$, так что $|u|g(u'^{-1}\sigma) = g(\sigma)$. Например, если обобщенная функция f сферически симметрична, т.е. для каждого поворота u мы имеем $f(ux) = f(x)$, то и ее преобразование Фурье сферически симметрично, поскольку для поворота выполняются соотношения $u'^{-1} = u$, $|u| = 1$.

2. Преобразование Фурье прямого произведения. Пусть $f(x)$ и $g(y)$ — данные обобщенные функции соответственно, по переменным $x = (x_1,\dots,x_k)$ и $y = (y_1,\dots,y_m)$, и $\widetilde{f}(\xi)$, $\widetilde{g}(\eta)$ — их преобразования

Фурье. Тогда *преобразование Фурье прямого произведения* $f(x)g(y)$ (по всем переменным) *выражается по формуле*

$$F[f \times g] = \widetilde{f}(\xi) \times \widetilde{g}(\eta),$$

т.е. *равно прямому произведению преобразований Фурье функционалов* f *и* g. Для доказательства достаточно (см. гл. I, § 4, п. 1) проверить требуемое равенство на основных функциях $\varphi(x,y)$ вида $\sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\psi_j(y)$. Мы имеем в этом случае

$$\begin{aligned}(\widetilde{f \times g}, \widetilde{\sum \varphi_j\psi_j}) &= (2\pi)^{m+k}(f \times g, \sum \varphi_k\psi_k) = \\ &= (2\pi)^{m+k}\sum (f,\varphi_j)(g,\psi_j) = \sum (\widetilde{f},\widetilde{\varphi}_j)(\widetilde{g},\widetilde{\psi}_j) = \\ &= (\widetilde{f} \times \widetilde{g}, \sum \widetilde{\varphi}_j\widetilde{\psi}_j) = (\widetilde{f} \times \widetilde{g}, \sum \widetilde{\varphi_j\psi_j}),\end{aligned}$$

что и утверждается.

Примеры. 1. Если $f(x) = \delta(x)$, то наша формула приводится к виду

$$F[\delta(x) \times g(y)] = 1(\xi) \times \widetilde{g}(\eta).$$

В частности,

$$F[\delta(x) \times 1(y)] = 1(\xi) \times (2\pi)^m \delta(\eta).$$

Иными словами, преобразование Фурье характеристической функции подпространства R_y есть характеристическая функция подпространства R_ξ, умноженная на $(2\pi)^m$.

2. Построим преобразование Фурье функции $f(x,y)$ двух переменных, равной 1 при $x > 0, y > 0$ и равной 0 при остальных значениях x,y. Эта функция есть произведение (и, следовательно, прямое произведение) функций $\theta(x)$ и $\theta(y)$. Отсюда в соответствии с формулой (6) п. 3 § 2 получаем:

$$\widetilde{f(x,y)} = \widetilde{\theta(x)} \times \widetilde{\theta(y)} = [\pi\delta(\xi) + i\xi^{-1}] \times [\pi\delta(\eta) + i\eta^{-1}].$$

3. Преобразование Фурье обобщенной функции r^λ. Обобщенная функция r^λ согласно п. 9 § 3 гл. I, определена при $\lambda \neq -n, -n-2, \ldots$ и сферически симметрична. Поэтому ее преобразование Фурье $g_\lambda(\sigma)$ есть также сферически симметричная обобщенная функция. Интеграл Фурье

$$g_\lambda(\sigma) = \int r^\lambda e^{i(\sigma,x)}dx$$

сходится при $-n < \operatorname{Re}\lambda < 0$ и представляет собой сферически симметричную функцию, т.е. функцию от $\rho = \sqrt{\sum \sigma_j^2}$. Далее, при любом $t > 0$

$$g_\lambda(t\sigma) = \int r^\lambda e^{i(t\sigma, x)} dx = \int r^\lambda e^{i(\sigma, tx)} dx;$$

совершая преобразование координат $tx = y$, $x = t^{-1}y$, $dx = t^{-n}dy$, $r = |x| = t^{-1}|y|$, мы получаем:

$$g_\lambda(t\sigma) = \int |y|^\lambda t^{-\lambda-n} e^{i(\sigma, y)} dy = t^{-\lambda-n} g_\lambda(\sigma).$$

Это означает, что $g_\lambda(\sigma)$ есть однородная функция степени $-\lambda - n$. Поэтому она имеет вид $g_\lambda(\sigma) = C_\lambda \rho^{-\lambda-n}$. Вычислим постоянную C_λ. Для этого используем формулу $(g_\lambda, \psi) = (2\pi)^n (r^\lambda, \varphi)$, в которой положим[1)] $\varphi(x) = e^{-\frac{r^2}{2}} = e^{-\frac{x_1^2}{2}} \dots e^{-\frac{x_n^2}{2}}$. Тогда $\psi(\sigma) = \left(\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}}\right) \dots \left(\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}}\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{2}}$, и мы получим:

$$C_\lambda (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{-n-\lambda} d\sigma = (2\pi)^n \int r^\lambda e^{-\frac{r^2}{2}} dx.$$

Интегралы справа и слева вычисляются переходом к сферическим координатам; при этом можно разделить на площадь единичной сферы с обеих сторон и заменить интегралы однократными, записывая $\rho^{n-1} d\rho$ вместо $d\sigma$ и $r^{n-1} dr$ вместо dx. Получившиеся выражения вычисляются теперь с помощью гамма-функции:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{-\lambda-1} d\rho = 2^{-\frac{\lambda}{2}-1} \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r^{\lambda+n-1} dr = 2^{\frac{\lambda+n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right).$$

Отсюда находим:

$$C_\lambda = 2^{\frac{n}{2} + \frac{\lambda+n-2}{2} + \frac{\lambda}{2} + 1} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} = 2^{\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \qquad (1)$$

[1)] Мы пользуемся формулой $F\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$ $(n = 1)$. См. И.М. Рыжик и И.С. Градштейн, Таблицы, 1951, стр. 281, формула 5.119.

и, следовательно,

$$F[r^\lambda] = 2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\rho^{-\lambda-n}. \tag{2}$$

Это равенство, выведенное для $-n < \operatorname{Re}\lambda < 0$, остается справедливым в полной области существования аналитической функции r^λ, т.е. при всех $\lambda \neq -n, -n-2, \ldots$ (в исключенных точках функция r^λ имеет полюсы).

Разделяя формулу (2) на $\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)$, приходим к следующей простой формуле преобразования Фурье для целой функции $f_\lambda(r) = 2^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$:

$$F[f_\lambda(r)] = (2\pi)^{\frac{n}{2}}2^{\frac{\lambda+n}{2}}\frac{r^{-\lambda-n}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}f_{-\lambda-n}(\rho). \tag{2'}$$

Разложение функции r^λ в ряд Тейлора или Лорана приводит к новым формулам преобразований Фурье.

Мы знаем из п. 6 § 4 гл. I, что в окрестности регулярной точки λ_0

$$r^\lambda = r^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)r^{\lambda_0}\ln r + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 r^{\lambda_0}\ln^2 r + \ldots$$

Отсюда

$$\widetilde{r^\lambda} = \widetilde{r^{\lambda_0}} + (\lambda-\lambda_0)F[r^{\lambda_0}\ln r] + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 F[r^{\lambda_0}\ln^2 r] + \ldots \tag{3}$$

С другой стороны, разлагая функцию $\widetilde{r^\lambda} = C_\lambda\rho^{-\lambda-n}$ в окрестности точки λ_0 в ряд Тейлора, мы получим:

$$\begin{aligned} C_\lambda\rho^{-\lambda-n} = C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n} + (\lambda-\lambda_0)[C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n} + C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln\rho] +\\ + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2[C''_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n} + 2C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln\rho + C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln^2\rho] + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Сравнивая коэффициенты в разложениях (4) и (3), получаем:

$$F[r^{\lambda_0}\ln r] = C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n} + C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln\rho, \tag{5}$$

$$F[r^{\lambda_0}\ln^2 r] = C''_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n} + 2C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln\rho + C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-n}\ln^2\rho \tag{6}$$

и т.д.

В окрестности особой точки $\lambda = -n-2m$

$$r^\lambda = \frac{a_{-1}}{\lambda+n+2m} + a_0 + a_1(\lambda+n+2m) + \ldots, \tag{7}$$

где коэффициенты $a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ имеют выражения (гл. I, § 4, п. 6)

$$a_{-1} = \Omega_n \frac{\delta^{(2m)}(r)}{(2m)!}, \quad a_0 = \Omega_n r^{-2n-m}, \quad a_1 = \Omega_n r^{-2n-m} \ln r, \quad \ldots; \qquad (8)$$

применяя к обеим частям равенства (7) почленно преобразование Фурье, находим:

$$\widetilde{r^\lambda} = \frac{\Omega_n}{(2m)!} \frac{F[\delta^{(2m)}(r)]}{\lambda + n + 2m} + \Omega_n F[r^{-2n-m}] + \\ + \Omega_n (\lambda + n + 2m) F[r^{-2n-m} \ln r] + \ldots \qquad (9)$$

С другой стороны, в окрестности этой же точки

$$C_\lambda \rho^{-\lambda-n} = \left(\frac{c_{-1}^{(n+2m)}}{\lambda + n + 2m} + c_0^{(n+2m)} + c_1^{(n+2m)} (\lambda + n + 2m) + \ldots \right) \times \\ \times (\rho^{2m} + (\lambda + n + 2m) \rho^{2m} \ln \rho + \ldots) = \frac{c_{-1}^{(n+2m)} \rho^{2m}}{\lambda + n + 2m} + \\ + \left(c_{-1}^{(n+2m)} \rho^{2m} \ln \rho + c_0^{(n+2m)} \rho^{2m} \right) + (\lambda + n + 2m) \times \\ \times \left(\frac{1}{2} c_{-1}^{(n+2m)} \rho^{2m} \ln^2 \rho + c_0^{(n+2m)} \rho^{2m} \ln \rho + c_1^{(n+2m)} \rho^{2m} \right) + \ldots \qquad (10)$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты разложений (10) и (8), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Omega_n}{(2m)!} F[\delta^{(2m)}(r)] &= c_{-1}^{(n+2m)} \rho^{2m}, \\ \Omega_n F[r^{-2n-m}] &= c_{-1}^{(n+2m)} \rho^{2m} \ln \rho + c_0^{(n+2m)} \rho^{2m}, \\ \Omega_n F[r^{-2m-n} \ln r] &= \frac{1}{2} c_{-1}^{(n+2m)} \rho^{2m} \ln^2 \rho + \\ &\quad + c_0^{(n+2m)} \rho^{2m} \ln \rho + c_1^{(n+2m)} \rho^{2m}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right\} \qquad (11)$$

Здесь числовые коэффициенты $c_{-1}^{(n+2m)}$, $c_0^{(n+2m)}$ и т.д. суть коэффициенты разложения в ряд Лорана функции $C_\lambda(1)$ в окрестности $\lambda = -n - 2m$.

4. Преобразование Фурье обобщенной функции, сосредоточенной в ограниченной области. Покажем, что преобразование Фурье всякой обобщенной функции f, сосредоточенной в ограниченной области, есть функционал типа следующей функции от σ:

$$(\overline{f(x)}, e^{i(x,\sigma)}).$$

Понимать это выражение нужно следующим образом: функция $e^{i(x,\sigma)}$ заменяется основной функцией $\varphi_0(x)$, равной $e^{i(x,\sigma)}$ в той области, где сосредоточен функционал f, и обращающейся в нуль вне достаточно большой области; затем к ней применяется функционал $\overline{f}$:

$$(\overline{f}, \varphi_0(x)) = \overline{(f, \overline{\varphi_0(x)})}.$$

Полученное при этом число не зависит от выбора функции $\varphi_0(x)$ с указанными свойствами (см. добавление 1 к гл. I, п. 3). Мы должны проверить, что справедливо равенство

$$\int \overline{(\overline{f(x)}, e^{i(x,\sigma)})}\psi(\sigma)d\sigma = (2\pi)^n (f, \varphi)$$

для любой основной функции $\varphi(x)$ и ее преобразования Фурье $\psi(\sigma)$. Но

$$(f, \varphi) = \left(f, \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(\sigma)e^{-i(\sigma,x)}d\sigma\right).$$

Если мы внесем теперь функционал f под знак интеграла, то наше утверждение будет доказано:

$$(f, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(\sigma)(f, e^{-i(\sigma,x)})d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \overline{(\overline{f(x)}, e^{i(\sigma,x)})}\psi(\sigma)d\sigma. \quad (1)$$

Нам остается поэтому проверить законность внесения функционала f под знак интеграла. Покажем сначала, что это справедливо для интеграла по ограниченной области:

$$\left(f, \int\limits_G \psi(\sigma)e^{-i(\sigma,x)}d\sigma\right) = \int\limits_G \psi(\sigma)(f, e^{-i(\sigma,x)})d\sigma.$$

Интеграл по ограниченной области G есть предел интегральных сумм

$$s_N(x) = \sum_{j=1}^{N} \psi(\sigma_j)e^{-i(\sigma_j,x)}\Delta\sigma_j.$$

Суммы $s_N(x)$ стремятся к интегралу по области G равномерно в каждой ограниченной области изменения x, так же как и любые их производные по x. Поэтому, превращая их обычным способом в основные функции (умножением на фиксированную основную функцию, равную 1 в окрестности носителя f), мы получим последовательность, сходящуюся в пространстве K. Отсюда следует, что

$$(f, s_N) = \sum \psi(\sigma_j)\left(f, \sigma^{-i(\sigma_j, x)}\right)\Delta\sigma_j$$

имеет пределом

$$\left(f, \int\limits_G \psi(\sigma) e^{-i(\sigma,x)} d\sigma\right).$$

Но, с другой стороны, (f, s_N) есть интегральная сумма для непрерывной функции от σ

$$\psi(\sigma)(f, e^{-i(\sigma,x)});$$

она имеет пределом интеграл от этой функции. Таким образом, равенство (1) для ограниченной области G установлено.

Далее, интеграл по всему пространству есть предел интегралов по ограниченным областям:

$$\int\limits_{R_n} \psi(\sigma) e^{-i(\sigma,x)} d\sigma = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{|\sigma|\leqslant N} \psi(\sigma) e^{-i(\sigma,x)} d\sigma.$$

Функции от x, стоящие под знаком предела, сходятся к своему пределу, т.е. к левой части, снова равномерно вместе со всеми производными в каждой ограниченной области изменения переменного x, и таким же образом можно считать, что эта сходимость есть сходимость в пространстве K. Поэтому

$$\left(f, \int\limits_{R_n} \psi(\sigma) e^{-i(\sigma,x)} d\sigma\right) = \lim_{N\to\infty}\left(f, \int\limits_{|\sigma|\leqslant N} \psi(\sigma) e^{-i(\sigma,x)} d\sigma\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_{|\sigma|\leqslant N} \psi(\sigma)(f, e^{-i(\sigma,x)}) d\sigma = \int\limits_{R_n} \psi(\sigma)(f, e^{-i(\sigma,x)}) d\sigma,$$

что и требуется.

В качестве примера найдем преобразование Фурье от сингулярной обобщенной функции $\delta(r-a)$, отвечающей однородному распределению массы с плотностью 1 по сфере U_a радиуса a с центром в начале координат:

$$(\delta(r-a), \varphi) = \int\limits_{U_a} \varphi(x) dx.$$

Функция $\delta(r-a)$ сосредоточена в ограниченной области; по доказанному, ее преобразование Фурье есть функция

$$F[\delta(r-a)] = (\delta(r-a), e^{i(x,\sigma)}) = \int\limits_{U_a} e^{i(x,\sigma)} dx.$$

Переходя к сферическим координатам ($r = |x| = a$, $\rho = |\sigma|$, θ — угол между векторами x и σ), находим:

$$F[\delta(r-a)] = \int e^{ia\rho\cos\theta} a^{n-1} \sin^{n-1}\theta d\theta d\omega =$$

$$= a^{n-1}\Omega_{n-1} \int_0^\pi e^{ia\rho\cos\theta} \sin^{n-1}\theta d\theta,$$

где $d\omega$ — элемент поверхности сферы в $(n-2)$-мерном подпространстве, ортогональном к вектору ρ.

Как известно, полученный интеграл выражается через бесселевы функции[1]:

$$F[\delta(r-a)] = a^{n-1}\Omega_{n-1}(a\rho)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(a\rho) = \Omega_{n-1} a^{\frac{n}{2}} \rho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(a\rho). \quad (2)$$

При n нечетном, $n = 2m+3$, бесселеву функцию можно выразить через тригонометрические функции (§ 2, п. 6, формула (7′))

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z,$$

. . . .

$$J_{m+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^m z^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \left(\frac{1}{\sqrt{z}} J_{\frac{1}{2}}(z)\right).$$

Таким образом, при $n = 2m+3$ мы имеем:

$$F[\delta(r-a)] = \Omega_{n-1} a^{\frac{n}{2}} \rho^{1-\frac{n}{2}} (-1)^m (a\rho)^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \left(\frac{1}{\sqrt{z}} J_{\frac{1}{2}}(z)\right) \Bigg|_{z=a\rho}. \quad (3)$$

В частности, при $n = 3$, $m = 0$

$$F[\delta(r-a)] = 2\pi a^2 J_{\frac{1}{2}}(a\rho) = 4\pi a \frac{\sin \rho a}{\rho}. \quad (4)$$

С другой стороны, при любом $n = 2m+3$ можно использовать известную формулу[2]

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m \left[z^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(z)\right] = \sqrt{z} J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z. \quad (5)$$

[1] И.М.Рыжик и И.С.Градштейн, Таблицы, 1951, стр. 165, формула 3.227,3 (положить $x = \cos\theta$).

[2] И.М.Рыжик и И.С.Градштейн, Таблицы, 1951, стр. 359, формула 6.482,3.

Заменим в (2) аргумент $a\rho$ на z, тогда мы получим:

$$\rho^{n-2}\frac{1}{a}F[\delta(r-a)] = \Omega_{n-1}J_{\frac{n}{2}-1}(z)z^{\frac{n}{2}-1}$$

и по формуле (5)

$$\rho^{n-2}\left(\frac{d}{zdz}\right)^m\frac{1}{a}F[\delta(r-a)] = \Omega_{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z,$$

или, произведя обратную подстановку $z = a\rho$, $dz = \rho da$,

$$\rho\left(\frac{d}{ada}\right)^m\frac{1}{a}F[\delta(r-a)] = \Omega_{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin a\rho.$$

Так как преобразование Фурье совершается по переменным x, а дифференцирование — по параметру a, то

$$\left(\frac{d}{ada}\right)^m\frac{1}{a}F[\delta(r-a)] = F\left[\left(\frac{d}{ada}\right)^m\frac{1}{a}\delta(r-a)\right].$$

В результате получается интересная формула

$$F\left[\left(\frac{d}{ada}\right)^m\frac{\delta(r-a)}{a}\right] = \Omega_{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\rho}{\rho}. \qquad (6)$$

5. Преобразование Фурье как предел последовательности функций. Метод, изложенный в п. 4, может помочь и при разыскании преобразований Фурье произвольных обобщенных функций (не обязательно финитных).

Пусть f — произвольная обобщенная функция. Как мы знаем (гл. I, § 1, п. 8), функционал f можно представить как предел функционалов f_ν, каждый из которых сосредоточен в ограниченной области. Преобразование Фурье функционала f_ν, по доказанному, есть функция $g_\nu(s)$. Так как оператор Фурье переводит сходящуюся последовательность функционалов снова в сходящуюся последовательность, то можно получить искомое преобразование Фурье функционала f как предел (по сходимости в Z') последовательности функций $g_\nu(s)$ при $\nu \to \infty$.

В частности, для любой (обычной) функции $f(x)$ (как угодно быстро растущей) преобразование Фурье может быть определено как предел (в смысле сходимости в Z') последовательности обычных функций

$$g_\nu(\sigma) = \int\limits_{|x|\leqslant\nu} f(x)e^{i(x,\sigma)}dx. \qquad (1)$$

Если функция $f(x)$ имеет рост не выше степенного и определяет тем самым функционал на пространстве S, то интеграл (1) сходится к преобразованию Фурье функции $f(x)$ также в смысле сходимости, установленной для пространства S' (т.е. на всех основных функциях $\psi(\sigma) \in S$). В частности, функционалы $g_\nu(\sigma)$ сходятся к своему пределу $g(\sigma)$ на всех финитных бесконечно дифференцируемых функциях в смысле сходимости в пространстве K'. Мы встречались уже с такими фактами в примерах, приведенных в гл. I, § 2, п. 5.

§ 4. Преобразования Фурье и дифференциальные уравнения

1. Предварительные замечания. Преобразование Фурье в его классической форме является одним из важных методов при решении задач, относящихся к дифференциальным уравнениям. Но область применимости метода преобразования Фурье ограничивалась, в основном, классом интегрируемых во всем пространстве функций или их степеней. Использование преобразования Фурье в комплексной плоскости позволило включить в область применимости метода Фурье и функции экспоненциального роста, но с обязательным условием равенства этих функций нулю при отрицательных значениях аргумента. Это относится и к преобразованию Лапласа[1)], которое представляет собой модификацию преобразования Фурье. В двустороннем преобразовании Лапласа, которое положено в основу известной книги Ван-дер-Поля[2)], допустимым функциям разрешается при экспоненциальном росте в сторону $x \to +\infty$ быть отличными от нуля при $x < 0$, но с экспоненциальным убыванием, обеспечивающим наличие полосы существования преобразования Лапласа в комплексной плоскости. Другой изящный метод построения операционного исчисления предложен Я. Микусинским[3)]; этот метод (развитый пока что только для функций одного переменного) позволяет рассматривать функции произвольного роста в сторону $x \to +\infty$, равные нулю при отрицательных x.

Метод преобразований Фурье обобщенных функций, излагаемый в этой книге, не требует никаких предположений относительно характера роста рассматриваемых функций как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ и годится для функции любого числа переменных. Поэтому естественно, что этот метод, в частности, позволяет решать все

[1)] См., например, Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948.

[2)] Б. Ван-дер-Поль и Х. Бреммер, Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952.

[3)] Ян Микусинский, Операторное исчисление, ИЛ, 1956.

типы задач, к которым можно применять классические преобразования Фурье и Лапласа или метод Микусинского, а также и многие задачи, которые недоступны для этих методов.

Мы ограничимся в этом выпуске рассмотрением только некоторых простых примеров.

2. Итерированное уравнение Лапласа $\Delta^m u = f$. Решение этого уравнения будет найдено, когда будет известно фундаментальное решение E по формуле $u = f * E$. Фундаментальное решение есть решение уравнения

$$\Delta^m E = \delta(x). \tag{1}$$

Будем искать фундаментальное решение в пространстве K'. После преобразования Фурье, примененного к уравнению (1), мы получим:

$$(-1)^m \rho^{2m} V = 1 \qquad \left(\rho^2 = \sum \sigma_j^2\right), \tag{2}$$

где V означает преобразование Фурье функции E. Вопрос, следовательно, упирается в решение уравнения (2).

Если $2m < n$, то решением служит (локально интегрируемая) функция $\frac{(-1)^m}{\rho^{2m}}$. Далее, если значение $n = -2m < 0$ не есть полюс аналитической функции ρ^λ (гл. I, § 3, п. 9) — напомним, что полюсы функции ρ^λ расположены в точках $-n, -n-2, \ldots,$ — то решением является функционал $(-1)^m \rho^{-2m}$, что получается предельным переходом из равенства $\rho^{2m}\rho^\lambda = \rho^{2m+\lambda}$ при $\lambda \to -2m$.

Пусть, наконец, $\lambda = -2m$ является полюсом аналитической функции ρ^λ. Рассмотрим разложение функции ρ^λ в окрестности этой точки в ряд Лорана:

$$\rho^\lambda = \frac{a_{-1}}{\lambda + 2m} + a_0 + a_1(\lambda + 2m) + \ldots, \tag{3}$$

где $a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ — обобщенные функции (гл. I, § 4, п. 6).

Умножим это равенство почленно на функцию ρ^{2m} и перейдем затем к пределу при $\lambda \to -2m$. Левая часть имеет пределом, так же как и выше, единицу. В правой части все члены, начиная с третьего, в пределе обратятся в нуль; второй член $\rho^{2m} a_0$ остается постоянным, первый при $\rho^{2m} a_{-1} \neq 0$ должен был бы иметь пределом бесконечность, но так как это противоречило бы полученному предельному соотношению, где все остальные члены конечны, то мы делаем вывод, что $\rho^{2m} a_{-1} = 0$ и, следовательно,

$$\rho^{2m} a_0 = 1.$$

Итак, решением уравнения $(-1)^m \rho^{2m} V = 1$ оказывается в данном случае $(-1)^m a_0$, где a_0 — значение правильной части ряда Лорана (3) при $\lambda = -2m$[1]. В первом и во втором случаях результатом обратного преобразования Фурье в соответствии с формулой (2) п. 3 § 3 является функция $C_{2m} r^{2m-n}$. В третьем случае в соответствии с формулой (5) п. 3 § 3 решением служит функция

$$Ar^{2m-n} \ln r + Br^{2m-n}.$$

Но второе слагаемое в данном случае излишне, так как оператором Δ^m оно переводится в нуль. Поэтому фундаментальное решение E во всех случаях может быть записано в виде

$$E(x) = \begin{cases} Cr^{2m-n} \ln r, & \text{если } 2m > n \text{ и } n \text{ четное}, \\ Cr^{2m-n} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Волновое уравнение в нечетномерном пространстве. Частными решениями волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \tag{1}$$

являются бегущие волны

$$e^{-i[(\sigma,x) \pm \rho t]} \quad \left(\rho = |\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}\right),$$

из которых мы будем комбинировать любое решение в форме

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \Psi_1(\sigma) e^{-i(\sigma,x)+i\rho t} d\sigma + \frac{1}{(2\pi)^n} \int \Psi_2(\sigma) e^{-i(\sigma,x)-i\rho t} d\sigma.$$

Решение $u(x,t)$ должно быть определено из начальных условий, которые мы возьмем (ср. п. 4 § 5 гл. I) в форме

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \delta(x). \tag{2}$$

Первое из этих условий приводит к уравнению

$$\int [\Psi_1(\sigma) + \Psi_2(\sigma)] e^{-i(\sigma,x)} d\sigma = 0$$

[1] Этот коэффициент есть обобщенная функция $\Omega_n r^{-n-2m}$. Но явное его выражение здесь не будет играть роли.

и удовлетворяется, если $\Psi_2(\sigma) \equiv -\Psi_1(\sigma) \equiv \frac{1}{2i}\Psi(\sigma)$, так что

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \Psi(\sigma)e^{-i(\sigma,x)}\sin\rho t d\sigma = F^{-1}[\Psi(\sigma)\sin\rho t]. \qquad (3)$$

Второе начальное условие приводится к виду

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \Psi(\sigma)e^{-i(\sigma,x)}\rho d\sigma = \delta(x)$$

или

$$F^{-1}[\rho\Psi(\sigma)] = \delta(x).$$

Отсюда

$$\rho\Psi(\sigma) = \widetilde{\delta(x)} = 1$$

и, следовательно, по формуле (3)

$$u(x,t) = F^{-1}\left[\frac{\sin\rho t}{\rho}\right].$$

Но обратное преобразование Фурье от $\frac{\sin\rho t}{\rho}$ мы уже знаем: согласно формуле (6) п. 4 § 3 при $n = 2m+3$

$$F^{-1}\left[\frac{\sin\rho t}{\rho}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\Omega_{n-1}}\left(\frac{d}{tdt}\right)^m\frac{\delta(r-t)}{t}.$$

Для решения задачи Коши с заданной начальной функцией $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f(x)$ мы получаем формулу

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\Omega_{n-1}}\left(\frac{d}{tdt}\right)^m\frac{\delta(r-t)}{t} * f(x) = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\Omega_{n-1}}\left(\frac{d}{tdt}\right)^m t^{n-2}\Omega_n M_t[f],$$

где $M_t[f]$ означает среднее от функции $f(x-\xi)$ по сфере $|\xi| \leqslant t$.

В частности, при $n=3$, $m=0$

$$u(x,t) = tM_t[f].$$

Обычным способом спуска можно получить решение волнового уравнения и в четномерном пространстве[1]).

[1]) См. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. II, 1951, гл. VI, § 5, п. 2, стр. 372.

4. Связь между фундаментальным решением уравнения и фундаментальным решением задачи Коши для него. Фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f, \tag{1}$$

согласно определению, есть обобщенная функция $E(x,t)$ (из пространства K'), удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x,t) = \delta(x,t). \tag{2}$$

Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0 \tag{3}$$

есть обобщенная функция $u(x,t)$, определенная при $t \geqslant 0$ на основных функциях $\varphi(x)$ (зависящая от t как от параметра), удовлетворяющая уравнению (2) и обращающаяся в $\delta(x)$ при $t = 0$.

Зная обобщенную функцию $u(x,t)$, можно построить фундаментальное решение $E(x,t)$; именно, справедлива теорема:

Пусть известно фундаментальное решение $u(x,t)$ задачи Коши для уравнения (3). *Положим*

$$E(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ u(x,t) & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда $E(x,t)$ есть фундаментальное решение уравнения (1).

Определение (4) требует еще некоторых пояснений при $t \geqslant 0$. Мы должны ведь определить обобщенную функцию над основными функциями, зависящими от x и t, а $u(x,t)$ определена как обобщенная функция над функциями от x и зависит от t как от параметра. Мы придаем функции $u(x,t)$ следующий смысл как обобщенной функции над основными функциями $\varphi(x,t)$:

$$(u(x,t),\varphi(x,t)) = \int_0^\infty (u(x,t),\varphi(x,t))dt.$$

Под знаком интеграла $u(x,t)$ при фиксированном t применяется к основной функции $\varphi(x,t)$ как функции от x при том же значении t;

результат есть финитная функция по t, и интегрирование по t допустимо.

Покажем, что полученная обобщенная функция $E(x,t)$ есть решение уравнения (2). Достаточно показать, что удовлетворяется двойственное уравнение (полученное из (2) преобразованием Фурье по x и t). Считая, что координаты $x_1,\ldots,x_n$ переходят при преобразовании Фурье в координаты $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$, а координата t — в координату σ_0, получаем двойственное уравнение в форме

$$[-i\sigma_0 - P(\sigma)]V(\sigma,\sigma_0) = 1. \tag{5}$$

Совершим преобразование Фурье функционала $E(x,t)$, определенного формулами (4) сначала только по координатам x при фиксированном t. Обозначая результат этого преобразования через $v(\sigma,t)$, получаем из (3):

$$\left.\begin{aligned} v(\sigma,t) &= 0 \quad (t<0),\\ v(\sigma,0) &= 1 \quad (t=0),\\ \frac{d}{dt}v(\sigma,t) - P(\sigma)v(\sigma,t) &= 0 \quad (t>0). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Производная $\frac{d}{dt}$, понимаемая в обычном смысле, может быть заменена на производную в смысле обобщенных функций, если добавить скачок функции $v(\sigma,t)$ при $t=0$, равный нулю (гл. I, § 2, п. 2, пример 2); поэтому уравнения (6) могут быть заменены уравнением

$$\frac{d}{dt}v(\sigma,t) - P(\sigma)v(\sigma,t) - \delta(\sigma) = 0,$$

где $\frac{d}{dt}$ — символ производной от обобщенной функции $v(\sigma,t)$. Совершая преобразование Фурье по t, приходим к уравнению

$$-i\sigma_0 V(\sigma,\sigma_0) - P(\sigma)V(\sigma,\sigma_0) = 1,$$

что и требуется.

5. Классическое операционное исчисление. В классическом операционном исчислении рассматриваются дифференциальные уравнения и системы вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)$$

при $t>0$ с некоторыми начальными (для $t=0$) и граничными условиями (в области изменения x). При помощи преобразования Лапласа по t

задача сводится к дифференциальному уравнению только по x (или к алгебраической задаче в случае обыкновенных уравнений).

Рассмотрим эти задачи с точки зрения теории обобщенных функций. Введем обобщенную функцию $U(x,t)$ (обобщенную по переменной t, зависящую от x как от параметра), равную $u(x,t)$ при $t > 0$ и нулю при $t < 0$. Так как при переходе от значений $t < 0$ к значениям $t > 0$ функция $u(x,t)$ испытывает скачок, равный заданному значению $u(x,0)$, то

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,0)\delta(t).$$

Поэтому $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению (системе)

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x,t) + u(x,0)\delta(t). \tag{1}$$

Совершая преобразование Фурье по t и обозначая новую переменную через $p = p_1 + ip_2$, получаем уравнение

$$-ipV(x,p) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x,p) + u(x,0) \cdot 1. \tag{2}$$

Для корректных задач полученное уравнение с учетом граничных условий по x имеет единственное решение $V(x,p)$, которое представляет собой аналитическую функцию от p (в случае обыкновенного уравнения — даже рациональную функцию от p), обладающую некоторыми особенностями (возможно, неоднозначную). Имея функцию $V(x,p)$, можно построить семейство аналитических функционалов вида

$$(V,\psi) = \int\limits_{\Gamma} V(x,p)\psi(p)dp, \tag{3}$$

где Γ — любой фиксированный контур, минующий особенности функции $V(x,p)$ и эквивалентный вещественной оси, т.е. обладающий тем свойством, что

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)d\sigma$$

для любой основной функции $\psi(s)$. В частности, годится любая прямая, параллельная вещественной s-оси, не проходящая через особые точки функции $V(x,p)$.

Каждый из этих функционалов определяет решение уравнения (2), а обратное преобразование Фурье такого функционала — решение уравнения (1). Только это решение, вообще говоря, не обращается в нуль при $t < 0$.

Выделить аналитический функционал (3), обратное преобразование Фурье которого обращается в нуль при $t < 0$, в общем случае представляется затруднительным.

Предположим, что функция $V(x,p)$ обладает следующими специальными свойствами:

а) выше прямой $\operatorname{Im} p = p_2^0$ функция $V(x,p)$ не имеет особых точек;

б) в указанной области функция $V(x,p)$ обладает интегрируемой мажорантой $W(p_1)$:

$$|V(x,p)| \leqslant W(p_1), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(p_1)dp_1 < \infty.$$

Тогда аналитический функционал

$$(V,\psi) = \int\limits_{-\infty+ip_2}^{\infty+ip_2} V(x,p)\psi(p)dp \qquad (p_2 > p_2^0)$$

есть преобразование Фурье обобщенной (даже обычной) функции $u(x,t)$, обращающейся в нуль при $t < 0$ и удовлетворяющей уравнению (системе) (1).

Условия этой теоремы есть обычные условия существования обращения преобразования Лапласа. Преобразование Фурье функционала V записывается по формуле (2) п. 5 § 2:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty+ip_2}^{\infty+ip_2} V(x,p)e^{-ipt}dp.$$

Равенство нулю функции $u(x,t)$ для $t < 0$ вытекает при этом из оценки

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} e^{p_2 t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(p_1)dp_1,$$

если устремить p_2 к $+\infty$.

Пусть, далее, дана функция $V_1(x,p)$, которая может быть представлена в форме

$$V_1(x,p) = Q(p)V(x,p), \tag{4}$$

где $V(x,p)$ обладает указанными выше свойствами, а $Q(p)$ — некоторый многочлен. Уравнение (4) эквивалентно уравнению

$$u_1(x,t) = Q\left(i\frac{d}{dt}\right)u(x,t),$$

где $u_1(t,x)$ и $u(x,t)$ — обратные преобразования Фурье функций $V_1(x,p)$ и $V(x,p)$; мы видим, что и в этом случае $V_1(x,p)$ есть преобразование Фурье функционала, сосредоточенного на полуоси $t \geqslant 0$.