ГЛАВА III

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТИПЫ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Обобщенные функции, сосредоточенные на гладкой поверхности

Простейшим примером обобщенной функции, сосредоточенной на поверхности, является обобщенная функция

$$(f,\varphi) = \int\limits_S f(x)\varphi(x)d\sigma, \tag{1}$$

где S — данная поверхность, $d\sigma$ — ее элемент, $f(x)$ — фиксированная функция, а $\varphi(x)$ — любая основная функция[1]. Несколько более сложный пример получается, если заменить подынтегральную функцию выражением, содержащим производные функции $\varphi(x)$.

В этом параграфе мы определим и изучим другие важные функционалы, сосредоточенные на поверхности размерности $< n$, лежащей в n-мерном пространстве. Для случая $n = 1$, как мы знаем, функционалами, сосредоточенными в точке, являются дельта-функция и ее производные. Более того, как будет доказано во втором выпуске, всякий функционал, сосредоточенный в одной точке, является линейной комбинацией дельта-функции и ее производных. В случае $n > 1$, когда поверхность $S(n-1)$-мерна и задается уравнением

$$P(x_1, \dots, x_n) = 0, \tag{2}$$

аналогичную роль играют обобщенные функции, которые мы обозначим через $\delta(P)$, $\delta'(P)$ и т.д.; о них и будет идти речь.

[1] В этой главе основные функции предполагаются финитными и бесконечно дифференцируемыми, т.е. рассматривается только пространство K.

Если $P \equiv x_1$, т.е. если S есть гиперплоскость $x_1 = 0$, естественно считать, что[1)]

$$(\delta(x_1), \varphi(x)) \equiv \int \delta(x_1)\varphi(x)dx = \\ = \int \left[\int \delta(x_1)\varphi(x_1, \ldots, x_n)dx_1\right] dx_2 \ldots dx_n = \\ = \int \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n,$$

т.е. естественно определить обобщенную функцию $\delta(x_1)$ равенством[2)]

$$\int \delta(x_1)\varphi(x)dx = \int \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n. \tag{3}$$

По такой же причине обобщенную функцию $\delta^{(k)}(x_1)$ естественно определить формулой

$$\int \delta^{(k)}(x_1)\varphi(x)dx = (-1)^k \int \varphi^{(k)}_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n. \tag{4}$$

Пусть теперь $P(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная достаточно гладкая функция, такая, что при $P = 0$

$$\operatorname{grad} P \neq 0 \tag{5}$$

(т.е. на поверхности $P = 0$ нет особых точек). Тогда можно определить обобщенную функцию $\delta(P)$ следующим образом.

В достаточно малой окрестности U произвольной точки поверхности $P = 0$ мы можем ввести новые координаты так, чтобы поверхность $P = 0$ стала одной из координатных поверхностей. Для этого мы положим $P = u_1$ и остальные координаты $u_2, \ldots, u_n$ выберем произвольно, но так, чтобы якобиан $D\binom{x}{u}$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ по переменным $u_1, \ldots, u_n$ был отличен от нуля (это всегда можно сделать благодаря условию $\operatorname{grad} P \neq 0$ при $P = 0$). Не ограничивая общности, можно считать, что основная функция $\varphi(x)$ отлична от нуля лишь в пределах окрестности U[3)]. Произведем в «интеграле» $\int \delta(P)\varphi dx$, который мы хотим определить, замену переменных:

$$\int \delta(P)\varphi(x)dx = \int \delta(P)\varphi_1(u) D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du = \int \delta(u_1)\psi(u)du,$$

[1)] Мы пользуемся символикой, установленной в конце п. 3 § 1 гл. I.

[2)] Тем самым мы принимаем, что $\delta(x_1)$ есть прямое произведение $\delta(x_1) \times 1(x_2, \ldots, x_n)$, где $\delta(x_1)$ — дельта-функция на прямой x_1, а $1(x_2, \ldots, x_n)$ — функция от переменных $x_2, \ldots, x_n$, тождественно равная единице (см. гл. I, § 5, п. 1).

[3)] См. добавление 1 к гл. I, п. 2.

где

$$\varphi_1(u_1, \ldots, u_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ и } \psi = \varphi_1(u) D\binom{x}{u}. \tag{6}$$

Отсюда видно, что обобщенную функцию $\delta(P)$ следует определить формулой

$$(\delta(P), \varphi) = \int \delta(P)\varphi dx = \int \psi(0, u_2, \ldots, u_n) du_2 \ldots du_n. \tag{7}$$

Последний интеграл берется по поверхности $P=0$; это и дает основание говорить, что функционал $\delta(P)$ сосредоточен на поверхности $P = 0$.

Аналогично естественно положить

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi) = \int \delta^{(k)}(P)\varphi dx = (-1)^k \int \psi_{u_1}^{(k)}(0, u_2, \ldots, u_n) du_2 \ldots du_n, \tag{8}$$

где функция $\psi(u)$ определена формулой (6) и интеграл справа в (8) снова берется по поверхности $P = 0$.

Чтобы эти формулы имели смысл, заведомо достаточно предположить, что функция $P(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $k+1$.

На первый взгляд кажется, что определения (6) и (7) существенно зависят от выбора системы координат. На самом деле это не так: мы покажем, что обобщенные функции $\delta(P)$, $\delta'(P)$, $\ldots$ однозначно определяются функцией P. Наиболее удобно дать их определения в инвариантной форме, в которой специальные координаты $u_1, \ldots, u_n$ вообще не участвуют, и при этом вести рассуждения, пользуясь так называемой теорией дифференциальных форм. Те читатели, которые хотят обойтись без дифференциальных форм, могут пользоваться готовыми формулами; мы перечислим их несколько ниже. Однако аппарат дифференциальных форм чрезвычайно удобен, и мы его в этом параграфе будем систематически применять. Необходимый минимум сведений о дифференциальных формах излагается в п. 1.

Под знаком интеграла справа в (7), если вернуться к старым координатам и обозначениям функций, стоит линейная комбинация функции $\varphi(x)$ и ее производных с зависящими от x коэффициентами. В п. 7 мы покажем, что всякий функционал f вида

$$(f, \varphi) = \sum_{i_1+\ldots+i_n \leqslant k} \int_{P=0} a_{i_1\ldots i_n}(x) \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} dx \tag{9}$$

выражается через $\delta(P)$, $\delta'(P)$ и т.д. следующим образом:

$$(f, \varphi) = \sum_{j=0}^{k} \int b_j(x) \delta^{(j)}(P) \varphi dx. \tag{10}$$

В записи (10) только $k+1$ произвольных функций, тогда как в записи (9) их гораздо больше. Запись (10) обладает тем преимуществом, что она однозначна: если $f=0$, то $b_0(x)=\ldots=b_k(x)=0$, тогда как о коэффициентах $a_{i_1\ldots i_n}(x)$ этого сказать нельзя.

Приведем теперь перечень формул, которые мы позднее докажем. В этих формулах функцию P надо считать имеющей большую гладкость, чем мы выше предположили; чтобы не отвлекаться, мы сразу предположим P бесконечно дифференцируемой.

Обозначим через $\theta(P)$ характеристическую функцию области $P\geqslant 0$:

$$\theta(P)=\begin{cases}0 & \text{при} P<0,\\ 1 & \text{при} P\geqslant 0,\end{cases} \qquad (\theta(P),\varphi)=\int\limits_{P\geqslant 0}\varphi(x)dx. \tag{11}$$

Тогда справедливо равенство

$$\theta'(P)=\theta(P), \tag{12}$$

которое надо понимать в следующем смысле:

$$\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_j}=\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P). \tag{12'}$$

Далее, справедлива формула «дифференцирования $\delta^{(k)}(P)$ как сложной функции»:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(P)=\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta^{(k+1)}(P) \quad (k=0,1,2,\ldots). \tag{13}$$

Справедливы также следующие тождества, связывающие обобщенную функцию $\delta(P)$ с ее производными:

$$P\delta(P)=0, \tag{14}$$

$$P\delta'(P)+\delta(P)=0, \tag{15}$$

$$P\delta''(P)+2\delta'(P)=0, \tag{16}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P\delta^{(k)}(P)+k\delta^{(k-1)}(P)=0, \tag{17}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Если поверхности $P=0$ и $Q=0$ (функция Q обладает теми же свойствами, что и P) не пересекаются, то

$$\delta(PQ)=P^{-1}\delta(Q)+Q^{-1}\delta(P). \tag{18}$$

В частности, если функция $a(x)$ не обращается в нуль, то

$$\delta(aP) = a^{-1}\delta(P). \tag{19}$$

Отсюда можно вывести, что

$$\delta^{(k)}(aP) = a^{-(k+1)}\delta^{(k)}(P). \tag{20}$$

Сказанное выше относится к функционалам, сосредоточенным на $(n-1)$-мерной поверхности в n-мерном пространстве. Пусть теперь поверхность S имеет меньшее число измерений. Предположим, что она задается уравнениями

$$P_1(x_1,\dots,x_n) = 0,\dots,P_k(x_1,\dots,x_n) = 0, \tag{21}$$

где $P_1,\dots,P_k$ — достаточно гладкие функции, причем поверхности $P_i(x) = 0$ $(i = 1,\dots,k)$ образуют «правильную сетку», т.е. в окрестности каждой точки поверхности S можно принять $P_1(x),\dots,P_k(x)$ за первые k координат $u_1,\dots,u_k$, а остальные координаты $u_{k+1},\dots,u_n$ выбрать так, чтобы якобиан $D\binom{x}{u}$ был отличен от нуля. В этом случае мы аналогично предыдущему можем определить обобщенную функцию $\delta(P_1,\dots,P_k)$ и ее производные $\frac{\partial^m\delta(P_1,\dots,P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1},\dots,\partial P_k^{\alpha_k}}$. А именно, если мы хотим, чтобы выполнялось тождество

$$\int \delta(P_1,\dots,P_k)\varphi dx = \int \delta(u_1,\dots,u_k)\varphi_1(u) D\binom{x}{u} du = \\ = \int \delta(u_1,\dots,u_k)\psi(u_1,\dots,u_n)du_1\dots du_n,$$

где

$$\varphi_1(u) = \varphi(x) \qquad \text{и} \qquad \psi(u) = \varphi_1(u) D\binom{x}{u}, \tag{22}$$

то мы должны положить

$$\int \delta(P_1,\dots,P_k)\varphi dx = \int \psi(0,\dots,0,u_{k+1},\dots,u_n)du_{k+1}\dots du_n; \tag{23}$$

по таким же мотивам следует положить

$$\int \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}\delta(P_1,\dots,P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1}\dots\partial P_k^{\alpha_k}}\varphi(x)dx = (-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k} \times \\ \times \int \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}\psi(0,\dots,0,u_{k+1},\dots,u_n)}{\partial u_1^{\alpha_1}\dots\partial u_k^{\alpha_k}} du_{k+1}\dots du_n. \tag{24}$$

В п. 9 мы покажем, что и эти определения не зависят от специального выбора системы координат. Для этих обобщенных функций справедливы следующие тождества:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(P_1,\ldots,P_k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\delta(P_1,\ldots,P_k)}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial x_j} \tag{25}$$

(«теорема о дифференцировании сложной функции»);

$$P_i\delta(P_1,\ldots,P_k)=0, \tag{26}$$

$$P_iP_j\delta(P_1,\ldots,P_k)=0, \tag{27}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_1P_2\ldots P_k\delta(P_1,\ldots,P_k)=0, \tag{28}$$

а также тождества, получаемые формальным дифференцированием последних.

1. Предварительные сведения о дифференциальных формах[1]**.** *Дифференциальной формой k-го порядка* в n-мерной области с координатами $x_1,\ldots,x_n$ называется выражение вида

$$\sum a_{i_1 i_2\ldots i_k}(x)dx_{i_1}\ldots dx_{i_k},$$

где суммирование проводится по всем сочетаниям n индексов по k. Функции $a_{i_1\ldots i_k}(x)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми функциями координат. При этом две формы k-го порядка считаются *равными*, если они переходят друг в друга путем преобразования произведений дифференциалов по формуле

$$dx_idx_j=-dx_jdx_i \tag{1}$$

и приведения подобных членов.

Это условие, в частности, показывает, что каждый член формы, содержащий два одноименных дифференциала, равен нулю. Кроме того, пользуясь этим правилом, можно, если угодно, записать любую форму «в каноническом виде» — так, чтобы в каждом члене индексы шли в возрастающем порядке.

[1] Теория дифференциальных форм не понадобится нам в максимальной общности; поэтому всюду, где можно, мы в целях наглядности вносим упрощения. Читателю, желающему подробнее ознакомиться с затронутыми в этом пункте понятиями, можно обратиться, например, к книге: П.К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, Гостехиздат, 1947, или к книге: Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956.

Будем называть форму *финитной*, если все ее коэффициенты являются финитными функциями.

Внешним произведением форм $\sum a_{i_1\ldots i_k}(x)dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}$ и $\sum b_{j_1\ldots j_m}(x)\times \times dx_{j_1}\ldots dx_{j_m}$ называется форма порядка $k+m$, полученная в результате формально алгебраического перемножения данных форм; результат этот можно, разумеется, дальше упростить, используя правило (1) и приводя подобные члены[1)].

Из этого определения, в частности, вытекает, что антикоммутативный закон справедлив и для произведения любых форм первого порядка $\alpha = \sum a_j(x)dx_j$ и $\beta = \sum b_k(x)dx_k$; действительно,

$$\alpha\beta = \sum_{j,k} a_j(x)b_k(x)dx_j dx_k = -\sum_{j,k} a_j(x)b_k(x)dx_k dx_j = -\beta\alpha.$$

Выведем формулу преобразования дифференциальной формы при бесконечно дифференцируемом преобразовании координат $x_i = x_i(x'_1,\ldots,x'_n)$. Мы имеем:

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} dx'_j$$

и

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1}\ldots dx_{i_k} = \sum_{i_1<\ldots<i_k}\sum_{j} a_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial x'_{j_1}}\cdots\frac{\partial x_{i_k}}{\partial x'_{j_k}} dx'_{j_1}\ldots dx'_{j_k}.$$

Слагаемые полученной суммы, содержащие два одинаковых дифференциала, обращаются в нуль. Слагаемые, содержащие одинаковые по составу группы из различных дифференциалов, можно объединить, используя правило $dx'_j dx'_k = -dx'_k dx'_j$; после этого коэффициентом при члене $dx'_{j_1}\ldots dx'_{j_k}$, где $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, как легко проверить, станет якобиан

$$D\begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \ldots & x_{i_k} \\ x'_{j_1} & x'_{j_2} & \ldots & x'_{j_k} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем:

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1}\ldots dx_{i_k} = \sum_{j_1<\ldots<j_k} a'_{j_1\ldots j_k} dx'_{j_1}\ldots dx'_{j_k}, \tag{2}$$

[1)] Естественно, что коэффициенты $a_{i_1\ldots i_k}$ и $b_{j_1\ldots j_m}$ предполагаются перестановочными между собой и с дифференциалами.

где

$$a'_{j_1\dots j_k} = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_k} D\begin{pmatrix} x_{i_1} & \dots & x_{i_k} \\ x'_{j_1} & \dots & x'_{j_k} \end{pmatrix} a_{i_1\dots i_k}. \tag{3}$$

В частности, для формы n-го порядка, которая всегда приводится к одному члену, мы имеем:

$$a dx_1\dots dx_n = aD\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix} dx'_1\dots dx'_n. \tag{4}$$

Заметим, что *по этой формуле преобразуются подынтегральные выражения при замене переменных в кратном интеграле.* Можно, следовательно, при такой замене пользоваться техникой дифференциальных форм. Например, для двойного интеграла, если $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, то

$$dx = \varphi'_u du + \varphi'_v dv, \quad dy = \psi'_u du + \psi'_v dv,$$
$$dxdy = (\varphi'_u\psi'_v - \varphi'_v\psi'_u)dudv.$$

Внешний дифференциал дифференциальной формы

$$\alpha = \sum a_{i_1\dots i_k} dx_{i_1}\dots dx_{i_k}$$

определяется как дифференциальная форма порядка $k+1$

$$d\alpha = \sum_{i_1,\dots,i_k}\left(\sum_i \frac{\partial a_{i_1\dots i_k}}{\partial x_i} dx_i\right) dx_{i_1}\dots dx_{i_k}, \tag{5}$$

где, разумеется, снова можно произвести упрощения, пользуясь правилом $dx_i dx_j = -dx_j dx_i$.

Например, внешний дифференциал формы нулевого порядка, под которой мы понимаем просто скалярную функцию $a(x)$, есть обычный дифференциал, т.е. форма 1-го порядка $\sum \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i$ (коэффициенты ее образуют градиент скаляра $a(x)$). Внешний дифференциал формы 1-го порядка $\sum a_i(x) dx_i$ есть форма 2-го порядка:

$$\sum_{i<j}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j$$

(если коэффициентам формы $\sum a_i dx_i$ сопоставить вектор $a = \{a_i\}$, то коэффициентам внешнего дифференциала будет соответствовать ротор вектора a). Дифференциал формы $(n-1)$-го порядка

$$\sum a_j(x) dx_1\dots dx_{j-1} dx_{j+1}\dots dx_n$$

есть форма n-то порядка:

$$\left\{\sum(-1)^{j+1}\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j}\right\}dx_1\dots dx_n.$$

Пользуясь правилом (1), нетрудно проверить, что для любой формы α

$$dd\alpha = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим вопрос об интегрировании дифференциальных форм по областям и многообразиям.

Примем, что форма n-го порядка $\alpha = a(x)dx_1\dots dx_n$ интегрируется по n-мерной области G пространства R_n по обычным правилам многомерного интегрирования.

Теперь мы хотим определить интеграл от формы k-го порядка по k-мерной области. Предварительно скажем несколько слов об ориентации областей и поверхностей.

Если в некоторой окрестности V (любого числа измерений m) задана локальная система координат $u_1,\dots,u_m$, то говорят, что этим определяется *ориентация* окрестности V. *Та же* ориентация определяется любой другой локальной системой координат $v_1,\dots,v_m$, переход от которых к $u_1,\dots,u_m$ выражается функциями с положительным якобианом. Возможна еще *противоположная* ориентация V. Она определяется любой локальной системой координат $\omega_1,\dots,\omega_m$, переход от которых к $u_1,\dots,u_m$ выражается функциями с отрицательным якобианом.

Область или поверхность Γ (m измерений) называется *ориентируемой*, если в окрестностях всех ее точек можно определить ориентации согласованным образом, т.е. так, чтобы координаты, действующие в пересекающихся окрестностях, определяли в пересечении одну и ту же ориентацию. Неориентируемые поверхности (например, лист Мебиуса) мы не будем рассматривать.

Пусть некоторая m-мерная окрестность U содержится в $(m+1)$-мерной окрестности V и разделяет последнюю на две части: одну из этих частей будем считать *внутренней*, а другую *внешней*. Допустим, что система координат $\omega_1,\dots,\omega_m$ в U может быть дополнена до системы координат $\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_m$ в V. Тогда мы условимся говорить, что соответствующая *ориентация V отвечает положительному направлению нормали*, если ω_0 возрастает во внешнюю сторону от U; в противном случае мы будем говорить, что *ориентация V отвечает отрицательному направлению нормали.*

Определим теперь интеграл от формы α k-го порядка по k-мерной ($k\leqslant n$) ориентируемой области Γ. Предположим эту область замкнутой, ограниченной и достаточно гладкой. Разобьем Γ на куски $\Gamma^{(1)},\dots,\Gamma^{(m)}$, в каждом из которых можно ввести локальные координаты, и введем эти координаты согласованным образом. Тем самым на Γ определится одна из двух возможных ориентаций. Приведем форму α в каждом куске $\Gamma^{(i)}$ к выбранным в нем локальным координатам $u_1, \ldots, u_k$. Если форма α была задана в n-мерной области, содержащей область Γ, то локальные координаты $u_1, \ldots, u_n$ нужно выбирать так, чтобы $n-k$ из них, например $u_{k+1}, \ldots, u_n$, обращались в нуль на Γ; тогда $du_{k+1}=0, \ldots, du_n = 0$ на Γ, так что форма α приводится к виду

$$\alpha = a(u_1, \ldots, u_k)du_1 \ldots du_k.$$

Проинтегрируем в этих координатах форму α обычным образом по каждому куску $\Gamma^{(i)}$ и сложим результаты. Нетрудно понять, что определенное так значение интеграла $\int\limits_\Gamma \alpha$ не зависит от разбиения области Γ на куски и от выбора локальных координат в каждом куске, отвечающих фиксированной ориентации: достаточно вспомнить, что при переходе к новым координатам $u'_1, \ldots, u'_k$ форма α приобретает вид

$$\alpha = a(u_1(u'_1, \ldots, u'_k), \ldots, u_k(u'_1, \ldots, u'_k))D\begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_k \\ u'_1 & \ldots & u'_k \end{pmatrix} du'_1 \ldots du'_k.$$

Однако, если мы во всех кусках $\Gamma^{(i)}$ перейдем к локальным координатам, отвечающим противоположной ориентации, то величина интеграла $\int\limits_\Gamma \alpha$ изменит знак, так как в этом случае якобианы $D\begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_k \\ u'_1 & \ldots & u'_k \end{pmatrix}$ отрицательны.

Таким образом, $\int\limits_\Gamma \alpha$ определен однозначно с точностью до знака, а знак, в свою очередь, однозначно определен ориентацией области Γ.

Формула Гаусса–Остроградского. Пусть форма α порядка $n-1$ задана в некоторой ограниченной n-мерной области G с кусочно-гладкой границей Γ. Предположим ориентацию области G отвечающей положительному направлению нормали к границе Γ. Через $d\alpha$, как и выше, обозначим внешний дифференциал формы α. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_G d\alpha = \int\limits_\Gamma \alpha, \tag{7}$$

называемая *формулой Гаусса–Остроградского.* Если ориентация G отвечает отрицательному направлению нормали, то перед одним из интегралов нужно поставить минус.

Для примера рассмотрим форму α 2-го порядка в трехмерном пространстве. В координатах x_1, x_2, x_3 она записывается в виде

$$\alpha = a_1 dx_2 dx_3 + a_2 dx_3 dx_1 + a_3 dx_1 dx_2,$$

а ее дифференциал — в виде

$$d\alpha = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3,$$

и формула Гаусса–Остроградского приобретает вид

$$\int\limits_\Gamma [a_1 dx_2 dx_3 + a_2 dx_3 dx_1 + a_3 dx_1 dx_2] = \\ = \int\limits_G \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (8)$$

в котором она обычно и приводится в курсах анализа.

Обобщением формулы Гаусса–Остроградского является **формула Стокса**[1]. Она записывается в той же форме

$$\int\limits_G d\alpha = \int\limits_\Gamma \alpha,$$

только здесь уже G есть k-мерная ограниченная область ($k < n$), а α-форма $(k-1)$-го порядка; ориентация области G по-прежнему предполагается отвечающей положительному направлению нормали к границе Γ.

Примером может служить классическая формула Стокса. В трехмерном пространстве в координатах x_1, x_2, x_3 форма α 1-го порядка записывается в виде

$$\alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3,$$

а ее дифференциал — в виде

$$d\alpha = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_2 dx_3 + \\ + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_3 dx_1;$$

[1] См. Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956, где эта формула приведена в терминах, близких к здесь используемым.

следовательно, формула Стокса приобретает вид

$$\int\limits_G \left[\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2+\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)dx_2dx_3+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)dx_3dx_1\right]=\int\limits_\Gamma [a_1dx_1+a_2dx_2+a_3dx_3], \quad (9)$$

где G — двумерная ограниченная область, а Γ — ограничивающая ее кривая.

2. Форма ω**.** Рассмотрим теперь поверхность S, определяемую уравнением $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, где функция $P(x)$ бесконечно дифференцируема и $\operatorname{grad} P = \left\{\frac{\partial P}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial x_n}\right\}$ не обращается в нуль на поверхности S (так что отсутствуют особые точки).

В этом пункте мы изучим важную для дальнейшего специальную дифференциальную форму ω порядка $n-1$, инвариантно связанную с поверхностью $P = 0$, точнее, однозначно определенную функцией P на поверхности $P = 0$.

Эта форма определяется уравнением

$$dP \cdot \omega = dv, \quad (1)$$

где $dv = dx = dx_1 \ldots dx_n$, а dP — дифференциал функции P.

Прежде всего проверим, что при сделанных выше предположениях такая форма ω действительно *существует в некоторой n-мерной области, содержащей поверхность S.*

В самом деле, при этих предположениях в окрестности любой точки поверхности можно ввести локальную систему координат $u_1, \ldots, u_n$ так, что одной из этих координат, например u_j, будет величина $P(x)$, причем формулы перехода от координат $x_1, \ldots, x_n$ к координатам $u_1, u_2, \ldots, u_n$ будут задаваться бесконечно дифференцируемыми функциями с положительным якобианом $D\binom{x}{u}$. В этих координатах мы имеем $dv = D\binom{x}{u} du_1 \ldots du_{j-1} dP du_{j+1} \ldots du_n$ и, следовательно, можно положить

$$\omega = (-1)^{j-1} D\binom{x}{u} du_1 \ldots du_{j-1} du_{j+1} \ldots du_n. \quad (2)$$

Таким образом, существование формы ω доказано.

Если, в частности, в окрестности данной точки $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$, то в качестве координат $u_1, \ldots, u_n$ можно взять

$$u_1 = x_1, \ldots, u_j = P, \ldots, u_n = x_n;$$

тогда

$$D\binom{x}{u} = \frac{1}{D\binom{u}{x}} = \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_j}},$$

и форма ω, определенная по формуле (2), принимает вид

$$\omega = (-1)^{j-1}\frac{dx_1 \dots dx_{j-1}dx_{j+1}\dots dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим вопрос о единственности формы ω. Вообще говоря, форма ω не определяется уравнением (1) однозначно; очевидно, что наравне с некоторой формой ω удовлетворяющей уравнению (1), можно рассматривать и любую форму вида $\omega+\gamma$, где γ — любая форма, «ортогональная» к форме dP, т.е. удовлетворяющая условию $dP\cdot\gamma = 0$. Покажем, что *всякая форма γ, ортогональная к форме dP, имеет вид*

$$\gamma = \alpha dP,$$

где α — некоторая форма $(n-2)$-го порядка. Действительно, в координатах $u_1 = P, u_2, \dots, u_n$ дифференциальную форму γ, как и любую форму $(n-1)$-го порядка, можно записать в виде

$$\gamma = g_1 du_2 \dots du_n + g_2 dP du_3 \dots du_n + \dots + g_n dP du_2 \dots du_{n-1},$$

где коэффициенты $g_1, g_2, \dots, g_n$ — функции от координат. Равенство $dP\cdot\gamma = 0$ приводит к соотношению $g_1 = 0$. Вынося dP за скобки из остальных слагаемых, приходим к справедливости утверждения.

Отметим (это замечание несколько ниже нам понадобится), что, как видно из доказательства, *если форма γ финитна, то α также финитна.*

Из доказанного следует, в частности, что на самой поверхности S форма γ тождественно равна нулю (так как $dP=0$), и следовательно, *на самой поверхности $P=0$ форма ω определена функцией P однозначно.*

Выясним геометрический смысл формы ω. Рассмотрим поверхности S и S_h, определенные соответственно уравнениями $P=0$ и $P=h$ при малом h (рис. 6). Выберем элементарную площадку $d\sigma$ на поверхности S и перенесем ее с помощью координатных линий $u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n$ на поверхность S_h. При этом получится фигура П, имеющая некоторый объем dv. Форма ω, согласно определению, есть отношение dv к $dP=h$. Таким образом, *форма ω есть скорость изменения элементарного объема dv по отношению к изменению величины P.*

На этой модели легко объясняется инвариантность формы ω на поверхности S. Действительно, при замене системы координат

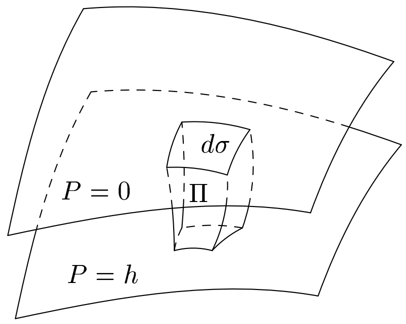

Рис. 6.

$u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n$ на новую изменяется наклон фигуры Π по отношению к поверхности S; но основание ее не меняется, не меняется и ее высота, определяемая расстоянием до поверхности S_h, не меняется, следовательно, и ее объем, откуда следует, что не меняется и $\omega = \frac{dv}{dP}$. Таким образом, форма ω не зависит от выбора остальных координат $u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n$.

Однако форма ω зависит, разумеется, от выбора функции P, определяющей уравнением $P = 0$ поверхность S. Посмотрим, как должна измениться форма ω, если вместо уравнения $P = 0$ рассмотреть уравнение $P_1 \equiv \alpha P = 0$ с отличной от нуля функцией $\alpha(x)$. Мы имеем здесь вдоль поверхности S равенство $dP_1 = \alpha dP$, откуда следует, что соответствующая форма

$$\omega_1 = \frac{dv}{dP_1} = \frac{1}{\alpha}\omega.$$

Заметим еще, что в том случае, когда функция $P(x)$ есть евклидово расстояние точки x от поверхности $P = 0$ (или отличается от этого расстояния на малую высшего порядка), форма ω на S совпадает с евклидовым элементом $d\sigma$ поверхности S.

3. Обобщенная функция $\delta(P)$. Теперь переходим к нашему основному определению. Поставим в соответствие каждой основной функции $\varphi(x)$ число

$$\int\limits_{P=0} \varphi(x)\omega.$$

Мы получим, очевидно, линейный непрерывный функционал на основном пространстве. Обозначим этот функционал через $\delta(P)$, т.е.

положим

$$(\delta(P),\varphi) = \int \delta(P)\varphi dx = \int\limits_{P=0} \varphi(x)\omega. \tag{1}$$

Из сказанного выше следует, что *функционал $\delta(P)$ не зависит от специального выбора формы ω, а зависит лишь от функции $P(x)$.*

Чтобы убедиться в совпадении этого определения с определением $\delta(P)$, данным в начале этого параграфа, достаточно заметить, что в координатах $u_1 = P, u_2, \ldots, u_n$ по формуле (2) п. 2

$$\omega = D\binom{x}{u} du_2 \ldots du_n.$$

Примеры. 1. Прежде всего рассмотрим обобщенную функцию $\delta(x_1)$, которая в начале этого параграфа была исходным пунктом для общего определения $\delta(P)$. Уравнение $x_1 = 0$ определяет координатную гиперплоскость; форма ω в этом случае выражается в виде

$$\omega = dx_2 \ldots dx_n,$$

и поэтому

$$\int \delta(x_1)\varphi(x)dx = (\delta(x_1),\varphi) = \int \varphi(0,x_2,\ldots,x_n)dx_2 \ldots dx_n. \tag{2}$$

2. Рассмотрим функцию $\delta(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)$, где $\sum \alpha_i^2 = 1$. Уравнение

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

определяет гиперплоскость, проходящую через начало координат ортогонально к единичному вектору α.

Если ввести координаты

$$u_1 = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,\ u_2, \ldots, u_n$$

и притом так, чтобы матрица перехода была ортогональной (поворот осей), то форму ω можно задать в виде произведения $du_2 \ldots du_n$. Поэтому

$$(\delta(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n),\varphi) = \int\limits_{\sum \alpha_i x_i = 0} \varphi du_2 \ldots du_n = \int\limits_{\sum \alpha_i x_i = 0} \varphi d\sigma, \tag{3}$$

где $d\sigma$ — евклидов элемент гиперплоскости $\sum \alpha_i x_i = 0$.

3. Подсчитаем обобщенную функцию $\delta(xy-c)$ в двумерном пространстве. Уравнение $xy-c=0$ определяет гиперболу[1]. В координатах $u_1=x$, $u_2=xy-c$ мы получаем по формуле (3) п. 2 $\omega=-\frac{dx}{x}$, и следовательно,

$$(\delta(xy-c),\varphi(x,y))=\int\delta(xy-c)\varphi(x,y)dxdy=-\int\varphi\left(x,\frac{c}{x}\right)\frac{dx}{x}. \quad (4)$$

4. Построим обобщенную функцию $\delta(r-c)$, где $r^2=\sum x_i^2, c>0$. Уравнение $r-c=0$ определяет сферу O_c радиуса c. Так как $P=r-c$ есть евклидово расстояние от поверхности сферы, то при $r=c$ форма ω совпадает с евклидовым элементом поверхности сферы dO_c, так что[2]

$$(\delta(r-c),\varphi)=\int\delta(r-c)\varphi dx=\int\limits_{O_c}\varphi dO_c, \quad (5)$$

и следовательно, $\delta(r-c)$ можно охарактеризовать как функционал, соответствующий массе, равномерно распределенной по сфере $r=c$ с плотностью единица.

Та же сфера радиуса c задается уравнением $r^2-c^2=0$. Найдем выражение $\delta(r^2-c^2)$. Положим $u_1=r^2-c^2$, $u_2=\theta_1,\ldots,u_n=\theta_{n-1}$, где $\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}$ — те же углы, что и в обычных сферических координатах. Мы получим:

$$\omega=\frac{1}{2r}dO_c=\frac{1}{2c}dO_c$$

и

$$(\delta(r^2-c^2),\varphi)=\int\delta(r^2-c^2)\varphi dx=\frac{1}{2c}\int\limits_{O_c}\varphi dO_c. \quad (6)$$

Обобщенная функция $\delta(P)$ естественно возникает при дифференцировании характеристической функции $\theta(P)$ области $P\geqslant 0$, т.е. функции, равной 1 при $P(x)\geqslant 0$ и 0 при $P(x)<0$:

$$(\theta(P),\varphi)=\int\limits_{P\geqslant 0}\varphi(x)dx.$$

Утверждается, что имеет место формула

$$\theta'(P)=\theta(P), \quad (7)$$

[1] Если $c\neq 0$. По поводу случая $c=0$ см. § 4, п. 2.

[2] См. ниже пример 4 в п. 5.

которую надо понимать в том смысле, что для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial \theta(P)}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta(P). \tag{7'}$$

Для доказательства формулы (7) проверим сначала, что при фиксированном j функционалы в правой и левой частях равенства (7′) совпадают в окрестности любой точки поверхности $P = 0$, где $\frac{\partial p}{\partial x_j} \neq 0$ (вне этой поверхности они оба равны нулю). Для этого применим правую и левую части к основной функции $\varphi(x)$, отличной от нуля лишь в малой окрестности такой точки.

Левая часть преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial \theta(P)}{\partial x_j}, \varphi\right) = -\left(\theta(P), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = -\int\limits_{P \geqslant 0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx,$$

а правая — к виду

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_j} \delta(P), \varphi\right) = \left(\delta(P), \frac{\partial P}{\partial x_j} \varphi\right) = \int\limits_{P=0} \frac{\partial P}{\partial x_j} \varphi \omega.$$

Предположим сначала, что область $P \geqslant 0$ ограничена. Тогда мы применим к этой области и к форме $(n-1)$-го порядка, стоящей под знаком интеграла справа, формулу Гаусса–Остроградского. В число координат мы включим саму величину P; тогда, учитывая, что в данном случае эта величина увеличивается в направлении внутрь этой области, мы получаем:

$$\int\limits_{P=0} \frac{\partial P}{\partial x_j} \varphi \omega = -\int\limits_{P \geqslant 0} d\left(\frac{\partial P}{\partial x_j} \varphi \omega\right).$$

Считая основную функцию $\varphi(x)$ отличной от нуля лишь в достаточно малой окрестности точки поверхности $P = 0$, форму под знаком интеграла справа можно вычислить в координатах $u_1 = x_1, \ldots, u_{j-1} = x_{j-1}, u_j = P, \ldots, u_n = x_n$. В этих координатах

$$\omega = (-1)^{j-1} \frac{dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}$$

и, следовательно,

$$d\left(\varphi \frac{\partial P}{\partial x_j} \omega\right) = (-1)^{j-1} d(\varphi dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_1 \ldots dx_n.$$

Вне указанной области равенство

$$d\left(\varphi\frac{\partial P}{\partial x_j}\omega\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx$$

также имеет место, так как там $\varphi(x) \equiv 0$. Отсюда

$$\int\limits_{P=0} \frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega = -\int\limits_{P\geqslant 0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx.$$

Левая часть этого равенства есть $\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P), \varphi\right)$, а правая $\left(\frac{\partial \theta(P)}{\partial x_j}, \varphi\right)$. Таким образом, в рассматриваемом случае равенство (7$'$) доказано.

Если область $P \geqslant 0$ не ограничена, то мы заменим ее пересечением G_R с достаточно большим шаром $|x| \leqslant R$, вне которого функция $\varphi(x)$ заведомо обращается в нуль. Если Γ_R — граница G_R, то формула Гаусса–Остроградского дает

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega = -\int\limits_{G_R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx;$$

но так как вне шара $|x| \leqslant R$ функция $\varphi(x)$ равна нулю, то справедливо и равенство

$$\int\limits_{P=0} \frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\omega = -\int\limits_{P\geqslant 0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx,$$

которое нам и требуется.

Пусть теперь x — любая точка поверхности $P = 0$. Мы можем построить здесь новую систему координат $\xi_j = \sum \alpha_{jk}x_k\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы $\frac{\partial P}{\partial \xi_j} \neq 0$ при всех j. Тогда по доказанному в окрестности данной точки будут справедливы все соотношения

$$\frac{\partial \theta(P)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial P}{\partial \xi_j}\delta(P). \tag{8}$$

С другой стороны, мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial \xi_j} = \sum_j \alpha_{jk}\frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

Умножая равенство (8) на α_{jk} и складывая по j, находим, что в окрестности данной точки

$$\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_k} = \sum \alpha_{jk}\frac{\partial\theta(P)}{\partial\xi_j} = \sum \alpha_{jk}\frac{\partial P}{\partial\xi_j}\delta(P) = \frac{\partial P}{\partial x_k}\delta(P).$$

Таким образом, функционалы $\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial P}{\partial x_k}\delta(P)$ совпадают в окрестности любой точки поверхности $P = 0$. Но тогда это равные функционалы, что и завершает доказательство.

Иногда удобно рассматривать *обобщенные вектор-функции*, т.е. векторы $f = (f_1, \ldots, f_n)$, где составляющие $f_1, \ldots, f_n$ — обобщенные функции. Две вектор-функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и $g = (g_1, \ldots, g_n)$ считаются равными, если $f_1 = g_1, \ldots, f_n = g_n$. Если положить для любой обобщенной функции g

$$\operatorname{grad} g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right), \tag{9}$$

то формулу $(7')$ можно записать в виде

$$\operatorname{grad}\theta(P) = \delta(P)\operatorname{grad} P. \tag{7''}$$

В следующем пункте эта формула будет использована для простого вывода формулы Грина.

4. Пример: вывод формулы Грина. В предыдущем пункте мы упомянули о возможности рассматривать обобщенные вектор-функции, т.е. векторы $f = (f_1, \ldots, f_n)$, составляющие f_i которых — обобщенные функции.

Обобщенные вектор-функции можно считать функционалами над основными вектор-функциями: если $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, то мы полагаем

$$(f, \psi) = \sum_{j=1}^{n}(f_j, \psi_j). \tag{1}$$

Например, если g — обобщенная функция, ψ — основная функция, то мы можем записать функционал Δg (Δ — оператор Лапласа) по формуле

$$(\Delta g, \psi) = -(\operatorname{grad} g, \operatorname{grad}\psi), \tag{2}$$

где $\operatorname{grad} g$ — обобщенная вектор-функция $\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$, а $\operatorname{grad}\psi$ — основная вектор-функция $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right)$.

В предыдущем пункте была доказана формула

$$\operatorname{grad}\theta(P) = \delta(P)\operatorname{grad}P. \tag{3}$$

Пользуясь ею, мы сейчас дадим простой вывод формулы Грина.

Заметим, что если g — обобщенная, а $h(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, то, как обычно,

$$\operatorname{grad}(hg) = g\operatorname{grad}h + h\operatorname{grad}g.$$

Пусть $u(x)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция; рассмотрим результат применения к основной функции $\varphi(x)$ функционала $\Delta[u\theta(P)]$. Используя векторную форму записи, мы преобразуем это выражение следующим образом:

$$\begin{aligned}(\Delta[u\theta(P)],\varphi) &= -(\operatorname{grad}[u\theta(P)],\operatorname{grad}\varphi) = \\ &= -(u\operatorname{grad}\theta(P),\operatorname{grad}\varphi) - (\theta(P)\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}\varphi) = \\ &= -(u\delta(P)\operatorname{grad}P,\operatorname{grad}\varphi) - (\theta(P)\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}\varphi).\end{aligned}$$

Вспоминая определение функционалов $\delta(P)$ и $\theta(P)$, мы можем написать:

$$(\Delta[u\theta(P)],\varphi) = -\int\limits_{P\geqslant 0}(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}\varphi)dx - \int\limits_{P=0} u\cdot(\operatorname{grad}P,\operatorname{grad}\varphi)\omega. \tag{4}$$

Это и есть формула Грина в обобщенной записи. В том случае, когда $P(x)$ есть с точностью до малых высшего порядка расстояние от точки x до поверхности $P=0$ и, следовательно, $\operatorname{grad}P$ есть единичный нормальный вектор, $(\operatorname{grad}P,\operatorname{grad}\varphi)$ будет нормальной производной функции φ, а ω сведется к евклидовому элементу $d\sigma$ поверхности $P=0$. В этом случае формула (4) переходит в обычную:

$$\int\limits_{P\geqslant 0}\Delta u\varphi dv = -\int\limits_{P\geqslant 0}(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}\varphi)dx - \int\limits_{P=0} u\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma. \tag{5}$$

Мы доказали ее для бесконечно дифференцируемых функций u и φ; но теперь предельным переходом ее можно распространить на функции u и φ, имеющие производные только того порядка, который требуется самой формулой.

5. Формы $\omega_k(\varphi)$ и обобщенные функции $\delta^{(k)}(P)$. Важную роль играют и производные функционала $\delta(P)$ по аргументу P. Чтобы дать их инвариантные определения, мы введем, кроме формы ω, еще серию дифференциальных форм $(n-1)$-го порядка, $\omega_0(\varphi), \omega_1(\varphi), \ldots,$

зависящих от функции P и от основной функции $\varphi(x)$; эти формы определяются уравнениями

$$\omega_0(\varphi) = \varphi \cdot \omega, \tag{1}$$

$$d\omega_0(\varphi) = dP \cdot \omega_1(\varphi), \tag{2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d\omega_{k-1}(\varphi) = dP \cdot \omega_k(\varphi), \tag{3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

где d — внешний дифференциал.

Существование этих форм в некоторой области, содержащей поверхность $P = 0$, легко проверяется в координатах $u_1 = P$, u_2, …, u_n. Действительно, вспоминая, что

$$\omega = D\binom{x}{u} du_2 \dots du_n$$

и полагая $\varphi(x) = \varphi_1(u)$, мы можем написать уравнение

$$d\omega_0 = d(\varphi_1\omega) = \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\varphi_1 D\binom{x}{u}\right) du_1 \dots du_n = dP \cdot \omega_1(\varphi),$$

откуда видно, что можно положить

$$\omega_1(\varphi) = \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\varphi_1 D\binom{x}{u}\right) du_2 \dots du_n.$$

Далее, таким же образом имеем уравнение

$$d(\omega_1(\varphi)) = \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\left(\varphi_1 D\binom{x}{u}\right) dP du_2 \dots du_n = dP \cdot \omega_2(\varphi),$$

и можно положить

$$\omega_2(\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\left(\varphi_1 D\binom{x}{u}\right) du_2 \dots du_n$$

и т.д.; вообще,

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k}{\partial u_1^k}\left(\varphi_1 D\binom{x}{u}\right) du_2 \dots du_n, \tag{4}$$

где $\varphi_1(u) = \varphi(x)$.

В отличие от формы ω эти новые формы уже не определены однозначно функцией $P(x)$ (и основной функцией $\varphi(x)$) даже на поверхности $P=0$. Но для нас важно лишь то, что *интеграл от формы $\omega_k(\varphi)$ по поверхности $P=0$ определен однозначно.* Чтобы убедиться в этом, мы сейчас проверим, что если форма $\widetilde{\omega}_k(\varphi)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $\omega_k(\varphi)$, то

$$\omega_k - \widetilde{\omega}_k = d\alpha + \beta dP, \tag{5}$$

где α и β — некоторые финитные формы соответственно $(n-1)$-го и $(n-2)$-го порядков. Сначала поясним, почему отсюда следует однозначность интеграла. На поверхности $P=0$ второе слагаемое обращается в нуль, так что

$$\omega_k - \widetilde{\omega}_k = d\alpha.$$

По теореме Стокса

$$\int\limits_{P=0} d\alpha = \int\limits_{\Gamma} \alpha,$$

где Γ — граница поверхности $P=0$. Но поверхность P либо замкнута — и тогда границы вообще нет, — либо уходит в бесконечность; во втором случае $\int\limits_{\Gamma} \alpha = 0$ по той причине, что форма α финитна.

Соотношение (5) мы докажем по индукции. Напомним, что, как было показано в п. 2, если некоторая форма γ ортогональна к dP, то она имеет вид

$$\gamma = \gamma_1 dP,$$

где γ_1 — форма $(n-2)$-го порядка, причем если форма γ финитна, то форма γ_1 также финитна. Отсюда для $k=0$ сразу следует, что

$$\omega_0 - \widetilde{\omega}_0 = \beta dP,$$

где β финитна, поскольку финитны формы ω_0 и $\widetilde{\omega}_0$, содержащие множителем основную функцию φ. Предположим теперь, что соотношение (5) выполнено с финитными формами α и β и сделаем переход от k к $k+1$. Для этого продифференцируем равенство (5); мы получим:

$$d\omega_k - d\widetilde{\omega}_k = d\beta dP,$$

так как дифференциал дифференциала формы равен нулю. По определению форм ω_{k+1} и $\widetilde{\omega}_{k+1}$,

$$dP \cdot (\omega_{k+1} - \widetilde{\omega}_{k+1} - (-1)^{n-1} d\beta) = 0.$$

Следовательно,

$$\omega_{k+1} - \widetilde{\omega}_{k+1} - (-1)^{n-1} d\beta = \gamma dP,$$

и остается установить, что форма γ финитна. Для этого нужно, согласно сказанному выше, проверить финитность форм ω_{k+1} и $\widetilde{\omega}_{k+1}$. Но она видна из их определения (из равенств (1)–(3)).

Таким образом, интеграл от формы $\omega_k(\varphi)$ по поверхности $P = 0$, действительно, однозначно определяется функциями $P(x)$ и $\varphi(x)$. Положим, по определению,

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi) = \int \delta^{(k)}(P)\varphi dx = (-1)^k \int\limits_{P=0} \omega_k(\varphi) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \quad (6)$$

Что это определение обобщенных функций $\delta^{(k)}(P)$ совпадает с их определением, данным в начале этого параграфа, видно из формулы (4).

Примеры. 1. В случае $P(x) \equiv x_1 = 0$ мы имеем по формуле (4)

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x_1^k} dx_2 \ldots dx_n$$

и

$$\int \delta^{(k)}(x_1)\varphi dx = (-1)^k \int \frac{\partial^k \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^k} dx_2 \ldots dx_n. \quad (7)$$

2. Подсчитаем $\delta^{(k)}(\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_n x_n)$, где $\sum \alpha_i^2 = 1$. Совершая такой же поворот координатных осей, как в примере 2 п. 3, находим:

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k \varphi}{du_1^k} du_2 \ldots du_n$$

и

$$\int \delta^{(k)}\left(\sum \alpha_i x_i\right)\varphi(x) dx = (-1)^k \int\limits_{\sum \alpha_i x_i = 0} \frac{\partial^k \varphi}{\partial u_1^k} d\sigma, \quad (8)$$

где дифференцирование справа производится по направлению, ортогональному к гиперплоскости

$$\sum \alpha_i x_i = 0$$

(в сторону увеличения суммы $\sum \alpha_i x_i$), а $d\sigma$ — элемент этой гиперплоскости.

3. Найдем $\delta^{(k)}(xy-c)$. Перейдем, как в примере 3 п. 3, к координатам $u_1 = x$, $u_2 = xy - c$. Так как

$$D\begin{pmatrix} x & y \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1},$$

то

$$\omega_k(\varphi) = -\frac{\partial^k}{\partial u_2^k}\left(\frac{\varphi\left(u_1, \frac{u_2+c}{u_1}\right)}{u_1}\right) du_1$$

и

$$\int \delta^{(k)}(xy-c)\varphi(x,y)dxdy = (-1)^{k+1}\int \frac{\partial^k \varphi\left(x, \frac{c}{x}\right)}{\partial y^k}\frac{dx}{x^{k+1}}. \tag{9}$$

4. Построим $\delta^{(k)}(r-c)$, $r^2 = \sum x_i^2$. Введем сферические координаты $u_1 = r, u_2 = \theta_1, \ldots, u_n = \theta_{n-1}$. В этих координатах легко подсчитывается, что

$$\omega = r^{n-1}d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент единичной сферы $r = 1$; отсюда

$$\omega_0 = \varphi r^{n-1}d\Omega, \quad \omega_1(\varphi) = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi r^{n-1})d\Omega$$

и т. д., вообще,

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k}{\partial r^k}(\varphi r^{n-1})d\Omega,$$

так что

$$\int \delta^{(k)}(r-c)\varphi dx = \frac{(-1)^k}{c^{n-1}}\int\limits_{O_c} \frac{\partial^k}{\partial r^k}(\varphi r^{n-1})dO_c, \tag{10}$$

где O_c — сфера $r - c = 0$ и dO_c — ее евклидов элемент.

5. Наконец, чтобы подсчитать $\delta^{(k)}(r^2-c^2)$, перейдем к координатам $u_1 = r^2 - c^2$, $u_2 = \theta_1, \ldots, u_n = \theta_{n-1}$; мы получим:

$$\omega = \frac{1}{2}r^{n-2}d\Omega$$

и

$$\omega_k(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k \varphi r^{n-2} d\Omega,$$

откуда

$$\int \delta^{(k)}(r^2 - c^2)\varphi dx = \frac{(-1)^k}{2c^{n-1}} \int\limits_{O_c} \left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k (\varphi r^{n-2}) dO_c \qquad (11)$$

и, следовательно,

$$(\delta^{(k)}(x_1^2 + \ldots + x_n^2 - c^2), \varphi) = \frac{(-1)^k}{2c^{n-1}} \int \left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k \varphi r^{n-2}\Big|_{r=c} dO_c. \qquad (12)$$

6. Тождества для $\delta^{(k)}(P)$**.** Покажем, что обобщенную функцию $\delta^{(k)}(P)$ можно дифференцировать как сложную функцию:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(P) = \frac{\partial P}{\partial x_j}\delta^{(k+1)}(P) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (1)$$

Для доказательства достаточно проверить, так же как и в п. 3, что при фиксированном j функционалы в правой и левой частях совпадают в окрестности любой точки поверхности $P = 0$, где $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$.

Для этого применим правую и левую части к основной функции $\varphi(x)$, отличной от нуля только в малой окрестности такой точки, приняв за координаты в этой окрестности $u_1 = x_1, \ldots, u_j = P, \ldots, u_n = x_n$. Тогда $D\binom{u}{u} = \frac{\partial P}{\partial x_j}$, $D\binom{x}{u} = \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}$, и форма ω_k принимает вид

$$\omega_k(\varphi) = \frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\varphi}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}\right) dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n.$$

Функционал в правой части равенства (1) действует по формуле

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta^{(k+1)}(P), \varphi\right) = \left(\delta^{(k+1)}(P), \frac{\partial P}{\partial x_j}\varphi\right) = (-1)^{k+1} \int\limits_{P=0} \omega_{k+1}\left(\varphi \frac{\partial P}{\partial x_j}\right) =$$

$$= (-1)^{k+1} \int\limits_{P=0} \frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial P^{k+1}} dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n.$$

Функционал в левой части равенства (1) действует по формуле

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(P), \varphi\right) = -\left(\delta^{(k)}(P), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = (-1)^{k+1} \int\limits_{P=0} \omega_k\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) =$$

$$= (-1)^{k+1} \int\limits_{P=0} \frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}\right) dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n.$$

Поэтому нам достаточно показать, что имеет место равенство

$$\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial P^{k+1}} = \frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}\right). \tag{2}$$

Для $k = 0$ оно, очевидно, справедливо, так как

$$\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_j(P), \ldots, x_n)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} : \frac{\partial P}{\partial x_j}.$$

Отсюда сразу следует равенство (2) для любого k, так как

$$\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial P^{k+1}} = \frac{\partial^k}{\partial P^k}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial P}\right).$$

Итак, равенство функционалов в правой и левой частях формулы (1) доказано в окрестности любой точки поверхности $P = 0$, где $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$; как мы видели выше, этого достаточно для справедливости самой формулы (1).

Покажем теперь, что имеют место следующие тождества, связывающие значения функции $\delta(P)$ в ее производных:

$$P\delta(P) = 0, \tag{3}$$

$$P\delta'(P) + \delta(P) = 0, \tag{4}$$

$$P\delta''(P) + 2\delta'(P) = 0, \tag{5}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P\delta^{(k)}(P) + k\delta^{(k-1)}(P) = 0, \tag{6}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Первое из этих тождеств очевидно, так как интеграл произведения $P\varphi$ по поверхности $P = 0$ равен нулю. Дифференцируя это тождество по x_j и используя формулу (1), находим:

$$\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta(P) + P\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta'(P) = 0;$$

так как при некотором j заведомо $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$, то можно сократить на $\frac{\partial P}{\partial x_j}$, и мы получим второе тождество[1)].

Продолжая аналогично, можно доказать справедливость остальных тождеств.

Пример. *Обобщенная функция $\delta^{(k)}(r^2 - t^2)$ как решение волнового уравнения в нечетномерном пространстве.* Вычислим результат применения волнового оператора $\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ к обобщенной функции $\delta^{(k)}(r^2 - t^2)$. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^{(k)}(r^2 - t^2) = 2x_j\delta^{(k+1)}(r^2 - t^2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\delta^{(k)}(r^2 - t^2) = 2\delta^{(k+1)}(r^2 - t^2) + 4x_j^2\delta^{(k+2)}(r^2 - t^2),$$

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\delta^{(k)}(r^2 - t^2) = 2n\delta^{(k+1)}(r^2 - t^2) + \\ + 4(r^2 - t^2)\delta^{(k+2)}(r^2 - t^2) + 4t^2\delta^{(k+2)}(r^2 - t^2),$$

что, в силу формулы (6), приводится к виду

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\delta^{(k)}(r^2 - t^2) = [2n - 4(k+2)]\delta^{(k+1)}(r^2 - t^2) + 4t^2\delta^{(k+2)}(r^2 - t^2).$$

С другой стороны, аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta^{(k)}(r^2 - t^2) = -2\delta^{(k+1)}(r^2 - t^2) + 4t^2\delta^{(k+2)}(r^2 - t^2),$$

[1)] Вообще, справедливо следующее утверждение: *если имеют место равенства $a_j(x)f = 0, j = 1, 2, \ldots, m$ причем функции $a_j(x)$ не имеют общих (для всех j) корней на замкнутом множестве F, где сосредоточен функционал f, то $f = 0$.* Действительно, у каждой точки x_0 множества F можно указать окрестность U, где некоторая из функций $|a_j(x)|$ больше положительной постоянной, например функция $a_1(x)$. Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$, отличной от нуля только в пределах окрестности U, можно написать $\varphi(x) = a_1(x)\psi(x)$, где $\psi(x)$ — новая основная функция. Мы имеем $(f, \varphi) = (f, a_1\psi) = (a_1 f, \psi) = 0$, т.е. функционал f равен нулю в окрестности точки x_0. Таким образом, f равен нулю в окрестности любой точки. Отсюда $f = 0$.

откуда

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\delta^{(k)}(r^2-t^2) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta^{(k)}(r^2-t^2) = (2n-4k-6)\delta^{(k+1)}(r^2-t^2).$$

Последнее выражение при $k = \frac{n-3}{2}$ обращается в нуль. Итак, *если n нечетно и $k = \frac{n-3}{2}$, то обобщенная функция $\delta^{(k)}(r^2-t^2)$ есть решение волнового уравнения*

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u = 0.$$

В частности, при $n = 3$ решением волнового уравнения является обобщенная функция $\delta(r^2-t^2)$.

Выясним, каким начальным условиям отвечает найденное решение. По формуле (11) п. 5,

$$(\delta^{(k)}(r^2-t^2), \varphi(x))\frac{(-1)^k}{2} = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k \varphi r^{n-2}\bigg|_{r=t} d\Omega. \tag{7}$$

При

$$n = 2k+3$$

подынтегральная функция принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k \varphi r^{2k+1}.$$

Каждая операция $\frac{\partial}{r\partial r}$ снижает показатель у r^m на две единицы. После k таких операций, примененных к произведению φr^{2k+1}, получится сумма слагаемых, каждое из которых содержит r самое большее в первой степени. Полагая $r = t$ и устремляя t к нулю, получаем:

$$\lim_{t\to 0}\delta^{(k)}(r^2-t^2) = 0. \tag{8}$$

Далее, мы имеем:

$$\frac{\partial\delta^{(k)}(r^2-t^2)}{\partial t} = -2t\delta^{(k+1)}(r^2-t^2) =$$
$$= 2t\frac{(-1)^k}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^{k+1}\left(\varphi r^{2k+1}\right)\bigg|_{r=t} d\Omega.$$

В выражении подынтегральной функции имеется только один член, содержащий r в отрицательной степени; как легко вычислить, он равен

$$\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\frac{\varphi(x)}{r}.$$

Поэтому, полагая $r = t$ и устремляя t к нулю, мы получаем в пределе

$$\left.\frac{\partial\delta^{(k)}(r^2-t^2)}{\partial t}\right|_{t=0} = (-1)^k\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\Omega_n\varphi(0), \tag{9}$$

где Ω_n есть поверхность единичной сферы. Как известно,

$$\Omega_n = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{2k+3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)} = \frac{2\pi^{k+2}}{(2k+1)!!}\pi^{k+1};$$

окончательно мы получаем:

$$\left.\frac{\partial\delta^{(k)}(r^2-t^2)}{\partial t}\right|_{t=0} = (-1)^k 2\pi^{k+1}\varphi(0), \tag{10}$$

т.е. решение

$$u(x,t) = \delta^{(k)}(r^2-t^2)$$

удовлетворяет начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = (-1)^k 2\pi^{k+1}\delta(x). \tag{11}$$

Таким образом, с точностью до числового множителя обобщенная функция $u(x,t)$ дает фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения (ср. гл. I, § 4, п. 4).

7. Тождества для $\delta^{(k)}(a(x)P)$. Рассмотрим функции $P(x)$ и $Q(x)$, для которых соответствующие поверхности $P = 0$ и $Q = 0$, так же как и раньше, не имеют особых точек и, кроме того, не пересекаются, так что поверхность $PQ = 0$ также не имеет особых точек. Тогда имеет место формула

$$\delta(PQ) = P^{-1}\delta(Q) + Q^{-1}\delta(P). \tag{1}$$

Для доказательства обозначим через ω_P форму, отвечающую уравнению $P = 0$, через ω_Q — форму, отвечающую уравнению $Q = 0$, и через ω — форму, отвечающую уравнению $PQ = 0$. Эти формы удовлетворяют уравнениям

$$\omega_P dP = dv \text{ на поверхности } P = 0, \tag{2}$$

$$\omega_Q dQ = dv \text{ на поверхности } Q = 0, \tag{3}$$

$$\omega(PdQ + QdP) = dv \text{ на обеих поверхностях.} \tag{4}$$

Сравнивая (2) с (4) и замечая, что на поверхности $P = 0$ уравнение (4) превращается в уравнение

$$\omega Q dP = dv,$$

мы видим, что $\omega = Q^{-1}\omega_P$; аналогично, на поверхности $Q = 0$ мы имеем $\omega = P^{-1}\omega_Q$. Поэтому

$$(\delta(PQ), \varphi) = \int\limits_{P=0} \varphi\omega + \int\limits_{Q=0} \varphi\omega = \int\limits_{P=0} \varphi Q^{-1}\omega_P + \int\limits_{Q=0} \varphi P^{-1}\omega_Q = \\ = (Q^{-1}\delta(P), \varphi) + (P^{-1}\delta(Q), \varphi),$$

что и утверждается.

В частности, если функция $a(x)$ вообще не обращается в нуль, то

$$\delta(aP) = a^{-1}\delta(P). \tag{5}$$

Новые интересные формулы получаются при дифференцировании равенства (5). В частности, дифференцируя его по x_j, получаем:

$$\delta'(aP)\frac{\partial(aP)}{\partial x_j} = \delta'(aP)P\frac{\partial a}{\partial x_j} + \delta'(aP)a\frac{\partial P}{\partial x_j} = \\ = a^{-1}\delta'(P)\frac{\partial P}{\partial x_j} - a^{-2}\delta(P)\frac{\partial a}{\partial x_j}.$$

Подставляя, согласно формуле (4) п. 6, вместо $\delta'(aP)$ величину $-a^{-1}\delta(aP) = -a^{-2}\delta(P)$ и сокращая, находим:

$$\delta'(aP) = a^{-2}\delta'(P).$$

Аналогично для любого k и любой функции $a(x)$

$$\delta^{(k)}(aP) = a^{-(k+1)}\delta^{(k)}(P). \tag{6}$$

Пример.

$$\delta^{(k)}(r^2 - c^2) = \delta^{(k)}[(r+c)(r-c)] = (r+c)^{-k-1}\delta^{(k)}(r-c). \qquad (7)$$

Эта формула означает, что для любой основной функции φ

$$\int \delta^{(k)}(r^2 - c^2)\varphi(x)dx = \int (r+c)^{-k-1}\delta^{(k)}(r-c)\varphi(x)dx.$$

Конечно, сравнивая формулы (10) и (11) п. 5, это тождество было трудно усмотреть. При $k = 0$ оно принимает вид

$$\int \delta(r^2 - c^2)\varphi(x)dx = \frac{1}{2c}\int \delta(r-c)\varphi(x)dx;$$

это было видно уже из формул (5) и (6) п. 3.

8. Слои. Функционал вида $\mu(x)\delta^{(k-1)}(P)$, или

$$\int \mu(x)\delta^{(k-1)}(P)\varphi(x)dx = \int\limits_{P=0} \omega_{k-1}(\mu\varphi), \qquad (1)$$

называется *k-кратным слоем* на поверхности $P = 0$. В частности, *простой слой* ($k = 1$) отвечает формуле

$$(\mu\delta(P), \varphi) = \int\limits_{P=0} \mu\varphi\omega = \int\limits_{P=0} \omega_0(\mu\varphi); \qquad (2)$$

двойной слой ($k = 2$) отвечает формуле

$$(\mu\delta'(P), \varphi) = \int\limits_{P=0} \omega_1(\mu\varphi). \qquad (3)$$

Функция $\mu(x)$, фигурирующая во всех этих формулах, называется *плотностью* соответствующего слоя.

Приведенное определение было бы некорректным, если бы оно зависело от формы записи уравнения поверхности $P = 0$. Но в действительности тот факт, что данный функционал f есть слой k-го порядка, не зависит от вида уравнения поверхности $P = 0$ и при переходе от записи $P = 0$ к записи $a(x)P = 0$, где $a(x)$ — функция, не обращающаяся в нуль, меняется только выражение функции $\mu(x)$. Действительно, по формуле (17)

$$\mu(x)\delta^{(k-1)}(aP) = \mu(x)a^{-k}(x)\delta^{(k-1)}(P) = \mu_1(x)\delta^{(k-1)}(P),$$

что и утверждалось.

Покажем, что *каждый функционал f вида*

$$(f,\varphi) = \int\limits_{P=0} \sum_j a_j(x) D^j \varphi(x) d\sigma$$

$$\left(j = (j_1, \ldots, j_n),\ D^j = \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}\right)$$

может быть представлен как сумма некоторых слоев различных порядков. Как вытекает из сказанного, при этом можно использовать какую-либо специальную форму записи уравнения поверхности $P = 0$; предположим, что в этом уравнении функция $P(x)$ означает расстояние точки x от поверхности $P = 0$ и, следовательно, форма совпадает с евклидовым элементом $d\sigma$. Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned}(f,\varphi) = \int\limits_{P=0} \sum_j a_j(x) D^j \varphi(x)\omega = \int\limits_{P=0} \omega_0 \left(\sum_j a_j(x) D^j \varphi\right) = \\ = \left(\delta(P), \sum a_j(x) D^j \varphi\right) = \sum_j (-1)^j (D^j a_j(x)\delta(P), \varphi) = \\ = \sum_j (-1)^j \left(\sum_k a_{jk}(x)\delta^{(k)}(P), \varphi\right) = \left(\sum_k b_k(x)\delta^{(k)}(P), \varphi\right),\end{aligned}$$

где

$$b_k T(x) = \sum_j (-1)^j a_{jk}(x).$$

Таким образом,

$$f = \sum_k b_k(x)\delta^{(k)}(P),$$

что и утверждалось.

9. Обобщенные функции $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ и $\frac{\partial^m \delta(P_1,\ldots,P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$. В предыдущих пунктах этого параграфа были рассмотрены обобщенные функции, связанные с $(n-1)$-мерной поверхностью $P = 0$. В этом пункте мы будем рассматривать обобщенные функции, связанные с поверхностью S меньшего числа измерений и определяемой уже не одним, а k

уравнениями:

$$\left.\begin{array}{c} P_1(x_1,\ldots,x_n)=0,\ P_2(x_1,\ldots,x_n)=0,\ldots \\ \ldots,P_k(x_1,\ldots,x_n)=0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

При этом мы будем предполагать, что:

1) функции P_i бесконечно дифференцируемы;

2) семейство поверхностей $P_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\xi_i$ $(i=1,\ldots,k)$ образует «правильную сетку», т.е. в окрестности каждой точки поверхности S можно принять за локальную систему координат переменные $u_i=P_i(x_1,\ldots,x_n)$ $(i=1,\ldots,k)$ и некоторые дополнительные переменные $u_{k+1},\ldots,u_n$, так что в этой окрестности якобиан $D\binom{x}{u}>0$.

Рассмотрим элемент объема в R_n

$$dv=dx_1\ldots dx_n$$

как дифференциальную форму n-го порядка в этом пространстве и представим эту форму в виде произведения дифференциальных форм первого порядка $dP_1\ldots dP_k$ на некоторую форму ω порядка $n-k$:

$$dv=dP_1\ldots dP_k\omega. \tag{2}$$

Очевидно, что если такая форма ω существует, то она определена неоднозначно. Действительно, если к некоторой форме ω, определенной равенством (2), добавить форму $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i dP_i$, где α_i — любые дифференциальные формы порядка $n-k-1$, то полученная форма $\omega+\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i dP_i$ также будет удовлетворять равенству (2), так как произведение $dP_i dP_i$ равно нулю.

Чтобы доказать существование формы ω, мы просто выпишем ее в переменных $x_1,\ldots,x_n$. В этих переменных элемент объема $dv=dx_1\ldots dx_n$. Формы dP_i имеют вид

$$dP_i=\frac{\partial P_i}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial P_i}{\partial x_n}dx_n$$

и, как легко проверить (ср. формулы (2) и (3) п. 1),

$$dP_1\ldots dP_k=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_{i_1} & \ldots & x_{i_k}\end{pmatrix} dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}. \tag{3}$$

В силу предположений, сделанных о функциях $P_i(x_1, \ldots, x_n)$, в матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial P_k}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial P_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

имеется хотя бы один минор k-го порядка, отличный от тождественного нуля. Допустим, что в рассматриваемой области отличен от нуля минор из производных по первым k переменным $x_1, \ldots, x_k$:

$$D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тогда можно положить

$$\omega = \frac{dx_{k+1} \ldots dx_n}{D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix}}, \tag{4}$$

так как при умножении на эту форму все слагаемые справа в (3), кроме

$$D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_k,$$

дадут нуль из-за наличия хотя бы двух одинаковых дифференциалов, а

$$D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_k \frac{dx_{k+1} \ldots dx_n}{D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix}} = dx_1 \ldots dx_n = dv.$$

Аналогично, если для каких-то $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$

$$D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_{i_1} & \ldots & x_{i_k} \end{pmatrix} \neq 0,$$

то можно положить

$$\omega = (-1)^{i_1 + \ldots + i_k - \frac{k(k-1)}{2}} \frac{dx_{j_1} \ldots dx_{j_{n-k}}}{D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_{i_1} & \ldots & x_{i_k} \end{pmatrix}}, \tag{4'}$$

где $j_1 < \ldots < j_{n-k}$ и $j_\mu \neq j_\nu$ при любых $\mu \neq \nu$. Итак, существование формы ω доказано.

Более симметричный (но не всегда наиболее удобный для вычислений) вид формы ω получится, если в некоторой малой области выбрать в качестве переменных $u_1 = P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_k = P_k(x_1, \ldots, x_n)$ и какие угодно дополнительные переменные $u_{k+1}, \ldots, u_n$, достаточно гладкие и такие, что $D\binom{x}{u} > 0$. В этих переменных элемент объема имеет вид

$$dv = D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_1 \ldots du_n.$$

Формы 1-го порядка dP_1 при этом совпадают просто с дифференциалами переменных du_i $(i = 1, \ldots, k)$ и интересующую нас форму ω можно положить равной

$$\omega = D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} du_{k+1} \ldots du_n. \tag{5}$$

Докажем простую лемму из теории дифференциальных форм, которая нужна для определения обобщенной функции $\delta(P_1, \ldots, P_k)$.

Лемма. *Если γ — форма порядка $n - k$, такая, что ее произведение на k независимых дифференциалов $dP_1 \ldots dP_k$ равно нулю, то существуют формы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, такие, что*

$$\gamma = \alpha_1 dP_1 + \ldots + \alpha_k dP_k.$$

При этом под дифференциалами понимаются внешние дифференциалы форм нулевого порядка (т.е. функций) $P_1, \ldots, P_k$, а независимость дифференциалов означает, что

$$dP_1 \ldots dP_k \neq 0.$$

Форма k-го порядка в левой части этого неравенства в переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$\sum_{j_1, \ldots, j_k} \frac{\partial P_1}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial P_2}{\partial x_{j_2}} \ldots \frac{\partial P_k}{\partial x_{j_k}} dx_{j_1} \ldots dx_{j_k} = \\ = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} D\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_k \\ x_{j_1} & \ldots & x_{j_k} \end{pmatrix} dx_{j_1} \ldots dx_{j_k}.$$

Поэтому неравенство $dP_1 \ldots dP_k \neq 0$ означает, что матрица из производных $\frac{\partial P_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ имеет ранг k. Отсюда следует, что функции $P_1, \ldots, P_k$ могут быть выбраны за первые k координат в пространстве R_n локально.

Для доказательства леммы перейдем к указанным выше локальным переменным $u_i = P_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$, $u_{k+1}, \ldots, u_n$. Дифференциальная форма γ в этих переменных может состоять, во-первых, из слагаемых, содержащих дифференциалы $du_1, \ldots, du_k$, во-вторых, из слагаемого $q du_{k+1} \ldots du_n$, не содержащего таких дифференциалов. Мы имеем:

$$du_1 \ldots du_k \gamma = q du_1 \ldots du_n = 0$$

по условию леммы. Так как все дифференциалы du_i независимы и их произведение не может быть равно нулю, то отсюда следует, что $q \equiv 0$. Следовательно, форма γ состоит только из слагаемых, содержащих хотя бы один дифференциал $du_i \, (i=1, \ldots, k)$. А значит, γ можно (вообще говоря, различными способами) представить в виде

$$\gamma = \alpha_1 du_1 + \ldots + \alpha_k du_k,$$

т.е.

$$\gamma = \alpha_1 dP_1 + \ldots + \alpha_k dP_k,$$

что и требовалось доказать.

Определим теперь обобщенную функцию $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ равенством

$$(\delta(P_1, \ldots, P_k), \varphi(x_1, \ldots, x_n)) = \int\limits_S \varphi\omega, \tag{6}$$

где ω — форма, о которой шла речь выше, а S — поверхность (1).

Из формулы (5) видно, что это определение совпадает с определением, данным в начале этого параграфа.

Легко показать, что это определение не зависит от выбора формы ω. В самом деле, пусть $dv = dP_1 \ldots dP_k \omega = dP_1 \ldots dP_k \widetilde{\omega}$. Покажем, что $\int \varphi(\omega - \widetilde{\omega}) = 0$ для любой основной функции $\varphi(x)$. Согласно доказанной лемме $\omega - \widetilde{\omega} = \alpha_1 dP_1 + \ldots + \alpha_k dP_k$, т.е. формы ω и $\widetilde{\omega}$ во всем пространстве могут отличаться только на форму вида $\alpha_1 dP_1 + \ldots + \alpha_k dP_k$, где α_i — формы порядка $n-k-1$. Очевидно, что вдоль поверхности $P_1 = 0, \ldots, P_k = 0$ эта форма равна нулю, т.е. *обобщенная функция $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ определена функциями $P_1, \ldots, P_k$ однозначно.*

Нужно иметь в виду, что форма ω и функционал $\delta(P_1, \ldots, P_k)$ изменяются вместе с изменением уравнений, описывающих поверхность S. Выясним, как изменяется форма ω при переходе от уравнений $P_1 = 0$, $\ldots$, $P_k = 0$ поверхности S к уравнениям $Q_1 = 0$, $\ldots$, $Q_k = 0$, где

$$Q_j(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij}(x) P_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

и матрица из бесконечно дифференцируемых функций $a_{ij}(x)$ обратима. (Очевидно, что вторая система уравнений описывает ту же поверхность, что и первая система.) Для этого выпишем уравнения, определяющие исходную форму ω и преобразованную $\widetilde{\omega}$:

$$dP_1 dP_2 \dots dP_k \omega = dv;$$
$$dQ_1 \dots dQ_k \widetilde{\omega} = (\sum \alpha_{i1} dP_i) \dots (\sum \alpha_{ik} dP_i) \widetilde{\omega} = dv.$$

Раскрывая скобки и преобразуя коэффициенты по правилу $dP_i dP_j = -dP_j dP_i$ мы видим, что второе уравнение приводится к следующему:

$$det||\alpha_{ij}|| dP_1 \dots dP_k \omega = dv.$$

Отсюда

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{det||\alpha_{ij}||} \omega.$$

Это и есть искомая формула преобразования формы ω. Соответствующая обобщенная функция $\delta(Q_1, \dots, Q_k)$ связана с обобщенной функцией $\delta(P_1, \dots, P_k)$ равенством

$$(\delta(Q_1, \dots, Q_k), \varphi) = \int \frac{\varphi \omega}{det||\alpha_{ij}||} = \left(\delta(P_1, \dots, P_k), \frac{\varphi}{det||\alpha_{ij}||} \right).$$

Определим теперь производные обобщенной функции $\delta(P_1, \dots, P_k)$ по аргументам P_i, т.е. обобщенные функции $\frac{\partial^m \delta(P_1, \dots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \dots \partial P_k^{\alpha_k}}$. Эти обобщенные функции будут определены как интегралы по поверхности $S(P_1 = 0, \dots, P_k = 0)$ от некоторых дифференциальных форм $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$, зависящих от функций $P_1, \dots, P_k$, и от основной функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ с ее производными до порядка m включительно.

Обозначим форму $\varphi\omega$ через $\omega_{00\dots0}(\varphi)$ (здесь ω — форма, определенная выше равенством $dv = dP_1 dP_2 \dots dP_k \omega$). Чтобы определить, например, форму $\omega_{10\dots0}(\varphi)$ (интеграл от которой по S даст нам значение обобщенной функции $\frac{\partial \delta(P_1, \dots, P_k)}{\partial P_k}$), мы возьмем форму $(n-1)$-го порядка

$$dP_2 \dots dP_k \omega_{00\dots0}(\varphi),$$

продифференцируем ее и представим полученную форму n-го порядка в виде

$$d(dP_2 \dots dP_k \omega_{00\dots0}(\varphi)) = dP_1 \dots dP_k \omega_{10\dots0}(\varphi).$$

Возможность такой операции легко доказывается в локальной системе координат. В самом деле, в координатах $u_i = P_i(x_1,\dots,x_n)$ $(i=1,\dots,k)$, $u_{k+1},\dots,u_n$, если обозначить функцию $\varphi(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_n(u_1,\dots,u_n))$ через $\widetilde{\varphi}_1(u_1,\dots,u_n) = \widetilde{\varphi}_1(u)$, мы получим:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_{00\dots0}(\varphi) &= \widetilde{\varphi} D\binom{x}{u} du_{k+1}\dots du_n,\\
dP_2\dots dP_k\omega_{00\dots0}(\varphi) &= \widetilde{\varphi} D\binom{x}{u} du_2\dots du_k,\\
d(dP_2\dots dP_k\omega_{00\dots0}(\varphi)) &= \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\widetilde{\varphi} D\binom{x}{u}\right] du_1\dots du_n,\\
\omega_{10\dots0}(\varphi) &= \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\widetilde{\varphi}(u) D\binom{x}{u}\right] du_{k+1}\dots du_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Аналогичным образом можно увеличить на единицу любой из k индексов формы $\omega_{00\dots0}(\varphi)$. Вообще, если предположить, что у нас имеется форма $\omega_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}(\varphi)$, то чтобы увеличить на единицу j-й индекс, мы умножим нашу форму слева на все dP_i, за исключением dP_j, продифференцируем ее и представим в виде

$$d(dP_1\dots dP_{j-1}dP_{j+1}\dots dP_k\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}(\varphi)) = \\ = (-1)^{j-1}dP_1\dots dP_k\omega_{\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\alpha_{j+1},\dots,\alpha_k}. \qquad (8)$$

Таким образом определяются формы $\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}(\varphi)$ для любых целых неотрицательных значений индексов.

Очевидно, что если уже исходная форма $\omega_{00\dots0}(\varphi)$ была определена неоднозначно, то формы $\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}(\varphi)$ и подавно могут быть определены разными способами.

Покажем, что формы $\omega_{\alpha_1\dots\alpha_k}(\varphi)$, определенные индуктивно, начиная с $\omega_{00\dots0}(\varphi)$, равенствами вида (8), при любых $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ могут отличаться только на форму вида

$$d\tau + \beta_1 dP_1 + \dots + \beta_k dP_k,$$

где $d\tau$ — дифференциал от некоторой формы τ порядка $n-k-1$, а $\beta_1, \dots, \beta_k$ — произвольные формы порядка $n-k-1$. При этом как форма τ, так и формы $\beta_1, \dots, \beta_k$ финитны, т.е. каждая из этих форм равна тождественному нулю вне некоторого ограниченного множества.

Доказательство этого утверждения будем вести по индукции. Как следует из доказанной выше леммы, во всем пространстве

$$\omega_{00\dots0} - \widetilde{\omega}_{00\dots0} = \beta_1 dP_1 + \dots + \beta_k dP_k$$

для любых двух форм, определяющих $\delta(P_1, \ldots, P_k)$. Так как, во-первых, обе формы $\omega_{00\ldots 0}(\varphi)$ и $\widetilde{\omega}_{00\ldots 0}(\varphi)$ содержат множителем финитную функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и, во-вторых, дифференциалы $dP_1, \ldots, dP_k$ линейно независимы, то, очевидно, все формы $\beta_1, \ldots, \beta_k$, входящие в правую часть равенства, финитны. Предположим теперь, что разность любых двух форм с индексами $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ можно во всем пространстве представить в виде

$$\omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} - \widetilde{\omega}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = d\tau + \beta_1 dP_1 + \ldots + \beta_k dP_k, \tag{9}$$

где $\tau, \beta_1, \ldots, \beta_k$ — финитные формы, и покажем, что при увеличении одного из индексов (для определенности — первого) на единицу это свойство сохраняется. Для доказательства умножим обе части равенства (9) на $dP_2 \ldots dP_k$ и продифференцируем его. Так как $d(dP_i) = d(d\tau) = 0$, то мы получим:

$$d[dP_2 \ldots dP_k(\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} - \widetilde{\omega}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k})] = \\ = dP_1 dP_2 \ldots dP_k \cdot (\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} - \widetilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}) = \\ = (-1)^k dP_1 \ldots dP_k d\beta_1.$$

Отсюда

$$dP_1 dP_2 \ldots dP_k \cdot (\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} - \widetilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} - (-1)^k d\beta_1) = 0$$

и по лемме

$$\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} - \widetilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = (-1)^k d\beta_1 + \gamma_1 dP_1 + \ldots + \gamma_k dP_k,$$

причем, в силу финитности форм $\omega_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ и $\widetilde{\omega}_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$, и формы β_1, формы $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ также финитны. Это и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь равенство (9), справедливое, по доказанному, для любых значений индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ на поверхности S. На этой поверхности $dP_1 = \ldots = dP_k = 0$, а форма $d\tau$ равна некоторой форме $d\tau^*$ (внешнему дифференциалу финитной формы τ^*, полученной из формы τ проектированием на многообразие S). Таким образом, на поверхности S

$$\omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} - \widetilde{\omega}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = d\tau^*,$$

где $d\tau^*$ — дифференциал финитной формы τ^*.

Определим теперь обобщенную функцию $\frac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}$ следующим равенством:

$$\left(\frac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}, \varphi \right) = (-1)^m \int\limits_S \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(\varphi). \tag{10}$$

Из формул типа (7) видно, что это определение совпадает с соответствующим определением, данным в начале этого параграфа. Это определение не зависит от выбора формы $\omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$. Действительно, если $\omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ и $\widetilde{\omega}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ — две формы, полученные из $\omega_{00\ldots0}$ последовательными умножениями, дифференцированиями и делениями, то, по доказанному,

$$\int\limits_S \omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(\varphi) - \int\limits_S \widetilde{\omega}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(\varphi) = \int\limits_S d\tau^*.$$

По теореме Стокса

$$\int\limits_S d\tau^* = \int\limits_\Gamma \tau^*,$$

где Γ — граница поверхности S. Но, в силу предположений, сделанных о функциях $P_i(x_1,\ldots,x_n)$ $(i=1,\ldots,k)$ поверхность S или замкнута, или уходит в бесконечность. В обоих случаях интеграл $\int\limits_\Gamma \tau^* = 0$, так как форма τ^* финитна, и следовательно,

$$\int\limits_S \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \int\limits_S \widetilde{\omega}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}.$$

Тем самым *обобщенная функция* $\frac{\partial^m \delta(P_1,\ldots,P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1}\ldots\partial P_k^{\alpha_k}}$ *определена функциями* $P_1,\ldots,P_k$ *на поверхности* $P_1=0,\ldots,P_n=0$ *однозначно.*

Для обобщенных функций $\delta(P_1,\ldots,P_k)$ и $\frac{\partial^m \delta(P_1,\ldots,P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1}\ldots\partial P_k^{\alpha_k}}$ имеют место следующие теоремы:

1. Обобщенные функции $\delta(P_1,\ldots,P_k)$ и $\frac{\partial^m \delta(P_1,\ldots,P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1}\ldots\partial P_k^{\alpha_k}}$ можно дифференцировать как сложные функции:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(P_1,\ldots,P_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\delta(P_1,\ldots,P_k)}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial x_j}.$$

Здесь производные обобщенных функций по координатам x_j определяются, как обычно, а именно:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(P_1,\ldots,P_k),\varphi\right) = -\left(\delta(P_1,\ldots,P_k),\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right).$$

2. Для обобщенных функций $\delta(P_1,\ldots,P_k)$ и их производных имеют место следующие тождества:

$$\begin{gathered}P_i\delta(P_1,\ldots,P_k)=0,\\ P_iP_j\delta(P_1,\ldots,P_k)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ P_1P_2\ldots P_k\delta(P_1,\ldots,P_k)=0.\end{gathered}$$

а также все тождества, получаемые из этих формальным дифференцированием по $P_1,\ldots,P_k$. Например, последовательно дифференцируя первое тождество по P_i, получаем:

$$\begin{gathered}\delta(P_1,\ldots,P_k)+P_i\delta'_{P_i}(P_1,\ldots,P_k)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ m\delta^{(m-1)}_{P_i\ldots P_i}(P_1,\ldots,P_k)+P_i\delta^{(m)}_{P_i\ldots P_i}(P_1,\ldots,P_k)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

Дифференцировать можно по любому набору переменных: например, дифференцируя второе тождество по P_i, и P_j, получаем:

$$\delta(P_1,\ldots,P_k)+P_i\delta'_{P_i}(P_1,\ldots,P_k)+P_j\delta'_{P_j}(P_1,\ldots,P_k)+\\ +P_iP_j\delta''_{P_iP_j}(P_1,\ldots,P_k)=0.$$

Доказательства этих фактов проводятся аналогично тому, как это выше делалось для $\delta(P)$, и мы их опускаем.

В заключение заметим, что аналогично предыдущему, можно определить *m-кратный слой* как функционал вида

$$\int\sum_{|\alpha|=m}\mu_\alpha(x)\delta^{(\alpha)}(P_1,\ldots,P_k)\varphi(x)dx,$$

где

$$\begin{gathered}\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k),\ |\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_k,\\ \delta^{(\alpha)}(P_1,\ldots,P_k)=\frac{\partial^{|\alpha|}\delta(P_1,\ldots,P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1}\ldots\partial P_k^{\alpha_k}}.\end{gathered}$$

В частности, *простой слой* отвечает формуле

$$(\mu\delta(P_1,\ldots,P_k),\varphi)=\int\mu(x)\delta(P_1,\ldots,P_k)\varphi(x)dx=\int_S\omega_{00\ldots0}(\mu\varphi).$$

Снова можно доказать, что каждый функционал f вида

$$(f,\varphi) = \int\limits_S \sum a_j(x) D^j \varphi(x) d\sigma \quad \left(D^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}} \right),$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности S, представим в виде суммы некоторых слоев различных порядков.

§ 2. Обобщенные функции, связанные с квадратичной формой

В этом параграфе будут рассмотрены различные обобщенные функции, связанные с невырожденной недефинитной квадратичной формой. В пп. 1 и 2 строится конкретная регуляризация некоторых интегралов без использования предельных переходов из комплексной области. В остальных пунктах этого параграфа широко применяется метод, основанный на выходе в комплексную область.

Более простым является комплексный метод, и при первом знакомстве мы рекомендуем начать чтение прямо с п. 3, просмотрев предварительно пп. 1–2, которые содержат ряд полезных сведений о дельта-функциях от квадратичной формы.

1. Определение функций $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$. В § 1 были определены обобщенные функции $\delta^k(P)$ для случая такой бесконечно дифференцируемой функции $P(x_1,\ldots,x_n)$, что поверхность $P(x_1,\ldots,x_n) = 0$ не имеет особых точек. Если теперь

$$P(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 \tag{1}$$

$(p+q=n)$, то поверхность $P(x_1,\ldots,x_n) = 0$ представляет собой конус с особой точкой (вершиной) в начале координат.

В этом случае функцию $\delta^{(k)}(P)$ можно определить следующим образом. Так как единственная особенность конуса $P = 0$ находится в начале координат, то для функций φ, равных нулю в окрестности начала координат, $(\delta^{(k)}(P),\varphi)$ фактически было определено в § 1:

$$(\delta^{(k)}(P),\varphi) = \int \delta^{(k)}(P)\varphi dx = (-1)^k \int\limits_{P=0} \omega_k(\varphi). \tag{2}$$

Если же φ — произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция, то интеграл (2) может расходиться. Тогда мы определим $\big(\delta^{(k)}(P),\varphi\big)$ как регуляризованное значение интеграла (2).

Этот план здесь и будет проводиться; однако мы проведем его элементарно, не опираясь на содержащееся в § 1 определение $\int\limits_{P=0} \omega_k(\varphi)$.

Итак, пусть сначала функция $\varphi(x)$ обращается в нуль в некоторой окрестности начала координат. После удаления этой окрестности поверхность $P=0$ уже не имеет особых точек. Следовательно, в любой достаточно малой окрестности произвольной точки поверхности $P=0$ можно ввести новые координаты $u_1=P, u_2, \ldots, u_n$ с якобианом $D\binom{x}{u}>0$. Тогда, согласно определению функции $\delta^{(k)}(P)$, данному в § 1, имеем:

$$(\delta^{(k)}(P),\varphi) = (-1)^k \int \frac{\partial^k}{\partial u_1^k}\left[\varphi D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\right]\Bigg|_{u_1=0} du_2 \ldots du_n, \tag{3}$$

где интеграл берется по поверхности $P=0$. Это определение не зависит от выбора системы координат $u_1,\ldots,u_n$.

В самом деле, как было показано в § 1, написанное выражение $(\delta^{(k)}(P),\varphi)$ совпадает с $(-1)^k \int\limits_{P=0} \omega_k(\varphi)$, а потому не зависит от выбора системы координат.

Напишем явное выражение для $(\delta^{(k)}(P),\varphi)$, выбрав координаты $u_1,\ldots,u_n$ специальным образом.

Будем предполагать, что $p>1$ и $q>1$; случай, когда p или q равно 1, мы рассмотрим особо в конце этого пункта.

Введем биполярные координаты, положив

$$x_1 = r\omega_1,\ \ldots,\ x_p = r\omega_p,\ x_{p+1} = s\omega_{p+1},\ \ldots,\ x_{p+q} = s\omega_{p+q}, \tag{4}$$

где

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2}, \quad s = \sqrt{x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2}. \tag{5}$$

Элемент объема в этих координатах задается формулой

$$dx = r^{p-1}s^{q-1}dr\,ds\,d\Omega^{(p)}d\Omega^{(q)}, \tag{6}$$

где $d\Omega^{(p)}(d\Omega^{(q)})$ обозначает элемент поверхности сферы единичного радиуса в p-мерном (соответственно q-мерном) пространстве. При этом мы имеем:

$$P = r^2 - s^2.$$

Примем теперь за новую систему координат в пространстве переменные P, r и биполярные координаты ω_i. Выражение (6) для элемента объема принимает в этих координатах вид

$$dx = \frac{1}{2}(r^2-P)^{\frac{q-2}{2}} r^{p-1}\,dP\,dr\,d\Omega^{(p)}d\Omega^{(q)}.$$

Согласно определению (3) имеем:

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi) = (-1)^k \int \frac{\partial^k}{\partial P^k} \left[\frac{1}{2} \varphi (r^2 - P)^{\frac{q-2}{2}} \right] \Bigg|_{P=0} r^{p-1} dr d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}. \tag{7}$$

Переходя от P к переменному $s = \sqrt{r^2 - P}$ и замечая, что $\frac{\partial}{\partial P} = -\frac{\partial}{2s\partial s}$, получаем:

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi) = \int \left(\frac{\partial}{2s\partial s} \right)^k \left[s^{q-2} \frac{\varphi}{2} \right] \Bigg|_{s=r} r^{p-1} dr d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}. \tag{8}$$

Если теперь положить

$$\psi(r, s) = \int \varphi d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}, \tag{9}$$

то формула (8) принимает вид

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial}{2s\partial s} \right)^k \left[s^{q-2} \frac{\psi(r, s)}{2} \right] \Bigg|_{s=r} r^{p-1} dr. \tag{10}$$

При выборе новой системы координат в пространстве вместо координаты r можно было бы взять координату s. Тогда мы пришли бы к эквивалентному выражению

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi) = (-1)^k \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial}{2r\partial r} \right)^k \left[r^{p-2} \frac{\psi(r, s)}{2} \right] \Bigg|_{r=s} s^{q-1} ds. \tag{10$'$}$$

При сделанном с самого начала предположении, что функция равна нулю в некоторой окрестности начала координат, интегралы (10) и (10$'$) сходятся при любом k. Однако, если $(p-1) + (q-2) \geqslant 2k$, т.е. $k < \frac{p+q-2}{2}$, то эти интегралы сходятся и для *любой* финитной функции $\varphi(x)$. Поэтому при $k < \frac{p+q-2}{2}$ любую из формул (10) и (10$'$) можно принять за определение функции $\delta^{(k)}(P)$. Если же $k \geqslant \frac{p+q-2}{2}$, то мы определим $\left(\delta_1^{(k)}(P), \varphi\right)$ и $\left(\delta_2^{(k)}(P), \varphi\right)$ как регуляризованные значения интегралов (10) и (10$'$) в смысле, который несколько ниже будет уточнен.

Таким образом, *при* $p>1$, $q>1$ *обобщенные функции* $\delta_1^{(k)}(P)$ *и* $\delta_2^{(k)}(P)$ *мы определяем по формулам*

$$(\delta_1^{(k)}(P),\varphi) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial}{2s\partial s}\right)^k \left[s^{q-2}\frac{\psi(r,s)}{2}\right]\Bigg|_{s=r} r^{p-1}dr. \tag{11}$$

$$(\delta_2^{(k)}(P),\varphi) = (-1)^k \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k \left[r^{p-2}\frac{\psi(r,s)}{2}\right]\Bigg|_{r=s} s^{q-1}ds, \tag{11$'$}$$

где $\psi(r,s)$ *обозначает интеграл от функции* φ *по поверхности* $x_1^2+\ldots+x_p^2=r^2$, $x_{p+1}^2+\ldots+x_{p+q}^2=s^2$, *деленный на* $r^{p-1}s^{q-1}$. *Написанные здесь интегралы сходятся и совпадают при*

$$k < \frac{p+q-2}{2}.$$

Если же

$$k \geqslant \frac{p+q-2}{2},$$

то эти интегралы следует понимать в смысле регуляризованных значений. Укажем, что мы будем понимать под регуляризованными значениями интегралов (11) и (11$'$). Заметим сначала, что функция $\psi(r,s)$, определенная формулой (9), является финитной бесконечно дифференцируемой функцией от r^2 и s^2. Делая теперь формально в интеграле (11) замену переменных $r^2=u$, $s^2=v$ и полагая

$$\psi(r,s) = \psi_1(u,v),$$

будем иметь:

$$(\delta_1^{(k)}(P),\varphi) = \frac{1}{4}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial v^k}\left(v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,v)\right)\Bigg|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}du.$$

В силу сделанного замечания $\psi_1(u,v)$ является финитной бесконечно дифференцируемой функцией от u и v. Но тогда

$$\frac{\partial^k}{\partial v^k}\left(v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,v)\right)\Bigg|_{v=u} = u^{\frac{q-2}{2}-k}\Psi(u),$$

где снова $\Psi(u)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция. Таким образом,

$$(\delta_1^{(k)}(P), \varphi) = \frac{1}{4}\int_0^\infty u^{\frac{p+q}{2}-2-k}\Psi(u)du. \tag{12}$$

Регуляризация таких интегралов рассматривалась в § 3 гл. I. Правая часть формулы (12) есть значение $\frac{1}{4}(u_+^\lambda, \Psi(u))$ при $\lambda = \frac{p+q}{2} - 2 - k$, где u_+^λ — функция, равная u^λ при $u > 0$ и 0 при $u \leqslant 0$. Регуляризацией этой функции служит обобщенная функция u_+^λ, которая при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ получается аналитическим продолжением u_+^λ из области $\operatorname{Re}\lambda > -1$. При $\lambda = -1, -2, \ldots$ эта аналитическая обобщенная функция имеет простые полюсы; обобщенную функцию u_+^{-n} $(n = 1, 2, \ldots)$ мы определили как свободный член разложения Лорана функции u_+^λ в окрестности точки $\lambda = -n$.

Таким образом, *если размерность $n = p + q$ пространства — нечетное число, то регуляризация интеграла* (12) *определяется как аналитическое продолжение функции*

$$f(\lambda) = \frac{1}{4}\int_0^\infty u^\lambda \Psi(u)du$$

в точку $\lambda = \frac{p+q}{2} - 2 - k$ (по формулам, указанным в § 3 гл. I), *а если размерность n пространства четна, то — как свободный член разложения функции $f(\lambda)$ в ряд Лорана в окрестности точки $\lambda = \frac{p+q}{2} - 2 - k$.*

Аналогичным образом определяется регуляризация интеграла (11′). Обобщенные функции $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ могут, вообще говоря, и не совпадать. В п. 3 будет показано, что в случае нечетномерного пространства эти функции всегда совпадают, а в случае четномерного пространства размерности n при $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$ разность $\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^k(P)$ есть обобщенная функция, сосредоточенная в вершине конуса $P = 0$. Кроме того, в п. 3 будет дано иное, более естественное определение однородных функций, сосредоточенных на поверхности конуса $P = 0$.

Отметим, что из определения функций $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ вытекает непосредственно следующее соотношение:

$$\delta_2^{(k)}(P) = (-1)^k \delta_1^{(k)}(P).$$

До сих пор мы предполагали, что $p > 1$ и $q > 1$. Случай, когда p или q равно 1, является особым, поскольку в этом случае теряет смысл переход к биполярным координатам. Приведем определение функций $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ для этого случая.

Пусть сначала $p = q = 1$, т.е. $P = x^2 - y^2$. Выбирая тогда в качестве локальных координат переменные P и x, мы получим по аналогии с формулой (10) следующее определение функции $\delta_1^{(k)}(x^2 - y^2)$:

$$(\delta_1^{(k)}(x^2 - y^2), \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{2y\partial y}\right)^k \left[\frac{\varphi(x,y)}{2y}\right] dx,$$

где интегрирование ведется по паре прямых $x^2 - y^2 = 0$. Следовательно,

$$(\delta_1^{(k)}(x^2 - y^2), \varphi) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{2y\partial y}\right)^k \left[\frac{\varphi(x,y)}{2y}\right]\Bigg|_{y=x} dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{2y\partial y}\right)^k \left[\frac{\varphi(x,y)}{2y}\right]\Bigg|_{y=-x} dx.$$

Интегралы понимаются здесь в смысле регуляризованных значений (здесь снова нетрудно воспользоваться результатами § 3 гл. I).

В частности, имеем:

$$(\delta_1(x^2 - y^2), \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\varphi(x,y)}{2y}\Bigg|_{y=x} + \frac{\varphi(x,y)}{2y}\Bigg|_{y=-x}\right] dx,$$

т.е.

$$\delta_1(x^2 - y^2) = \frac{1}{2y}\delta(x - y) + \frac{1}{2y}\delta(x + y). \tag{13}$$

Аналогично, если $p = 1$, но $q = n - 1 > 1$, то функции $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ определяются по формулам

$$(\delta_1^k(P), \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{2s\partial s}\right)^k \left[s^{n-3}\frac{\psi(x_1, s)}{2}\right]\Bigg|_{s=|x_1|} dx_1, \tag{14}$$

$$(\delta_2^k(P), \varphi) = (-1)^k \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{2x_1\partial x_1}\right)^k \left(\frac{\psi(x_1, s)}{2x_1}\right)\Bigg|_{x_1=s} s^{n-2} ds +$$
$$+ (-1)^k \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{2x_1\partial x_1}\right)^k \left(\frac{\psi(x_1, s)}{2x_1}\right)\Bigg|_{x_1=-s} s^{n-2} ds, \tag{14'}$$

где $\psi(x_1,s)$ есть интеграл функции φ по поверхности $x_1 = \text{const}$, $x_2^2 + \ldots + x_n^2 = s^2$, деленный на s^{q-1}.

Если же $q = 1$, но $p = n - 1 > 1$, то функции $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ определяются по формулам

$$(\delta_2^{(k)}(P),\varphi) = (-1)^k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k \left[r^{n-3}\frac{\psi(r,x_n)}{2}\right]\Bigg|_{r=|x_n|} dx_n, \tag{15}$$

$$(\delta_1^k(P),\varphi) = \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{2x_n\partial x_n}\right)^k \left(\frac{\psi(r,x_n)}{2x_n}\right)\Bigg|_{x_n=r} r^{n-2}dr + {} + \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{2x_n\partial x_n}\right)^k \left(\frac{\psi(r,x_n)}{2x_n}\right)\Bigg|_{x_n=-r} r^{n-2}dr, \tag{15$'$}$$

где $\psi(r,x_n)$ есть интеграл функции φ по поверхности $x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 = r^2$, $x_n = \text{const}$, деленный на r^{p-1}. Все написанные интегралы следует понимать в смысле регуляризованных значений[1)].

2. Обобщенная функция P_+^λ. Пусть снова

$$P(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 \tag{1}$$

$(p + q = n)$. Определим обобщенную функцию P_+^λ, где λ — комплексное число, по формуле

$$(P_+^\lambda,\varphi) = \int\limits_{P>0} P^\lambda(x)\varphi(x)dx, \tag{2}$$

где $x = (x_1,\ldots,x_n)$ и $dx = dx_1\ldots dx_n$. При $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ интеграл (2) сходится и представляет собой аналитическую функцию от λ. Продолжая аналитически эту функцию на область $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, мы определим функционал (P_+^λ,φ) для других λ.

[1)] Отметим, что в случае, когда $p = 1$ или $q = 1$, можно иногда не усреднять функции φ по сферическим поверхностям. Формулы $(14')$ и $(15')$ можно также представить в следующем виде: если $p = 1$, то

$$(\delta_2^{(k)}(P),\varphi) = (-1)^k \int \left(\frac{\partial}{2x_1\partial x_1}\right)^k \left(\frac{\varphi}{2x_1}\right) dx_2\ldots dx_n,$$

где интегрирование ведется по поверхности конуса $P = 0$; если же $q = 1$, то

$$(\delta_1^{(k)}(P),\varphi) = \int \left(\frac{\partial}{2x_n\partial x_n}\right)^k \left(\frac{\varphi}{2x_n}\right) dx_1\ldots dx_{n-1},$$

где снова интегрирование ведется по поверхности конуса $P = 0$.

Будем искать полюсы функционала (P_+^λ, φ). Для этого перейдем в интеграле (2) к биполярным координатам

$$x_1 = r\omega_1, \; \ldots, \; x_p = r\omega_p, \; x_{p+1} = s\omega_{p+1}, \; \ldots, \; x_{p+q} = s\omega_{p+q}, \tag{3}$$

где

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2}, \; s = \sqrt{x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2}\,^{1)}. \tag{4}$$

Тогда интеграл (2) перепишется в виде

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \int\limits_{P>0} (r^2 - s^2)^\lambda \varphi r^{p-1} s^{q-1} dr ds d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}, \tag{5}$$

где $d\Omega^{(p)} (d\Omega^{(q)})$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса в p-мерном (соответственно, q-мерном) пространстве. Полагая теперь, как и в п. 1,

$$\psi(r, s) = \int \varphi d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}, \tag{6}$$

получим:

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^r (r^2 - s^2)^\lambda \psi(r, s) r^{p-1} s^{q-1} ds dr. \tag{7}$$

Поскольку основная функция $\varphi(x)$ финитна и бесконечно дифференцируема, функция $\psi(r, s)$, определенная по формуле (6), финитна и бесконечно дифференцируема по r^2 и s^2. Сделав в интеграле (7) замену переменных $u = r^2$, $v = s^2$ и положив

$$\psi(r, s) = \psi_1(u, v), \tag{8}$$

получим:

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{4} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^u (u - v)^\lambda \psi_1(u, v) u^{\frac{p-2}{2}} v^{\frac{q-2}{2}} dv du. \tag{9}$$

---

[1] Для простоты мы предполагаем всюду дальше, что $p > 1$ и $q > 1$. Однако все получаемые результаты остаются справедливыми и в специальном случае, когда $p = 1$ или $q = 1$.

Наконец, заменой переменной $v = ut$ мы приведем интеграл (9) к виду

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{4}\int_0^\infty u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}du\int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,tu)dt. \tag{10}$$

Из формулы (10) следует, что функционал (P_+^λ, φ) имеет две серии полюсов. Первая серия состоит из полюсов функции

$$\Phi(\lambda, u) = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,tu)dt. \tag{11}$$

Подобно функции (x_+^λ, φ), рассмотренной в § 3 гл. I, эта функция регулярна при всех значениях λ, за исключением точек

$$\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots,$$

в которых она имеет простые полюсы. При этом

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\,\Phi(\lambda, u) = \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left[t^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,tu)\right]\Bigg|_{t=1}. \tag{12}$$

Следовательно, $\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\,\Phi(\lambda, u)$ — представляет собой функционал, сосредоточенный на поверхности конуса $P = 0$.

С другой стороны, если $\Phi(\lambda, u)$ — регулярная функция, то интеграл

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}\Phi(\lambda, u)du \tag{13}$$

может иметь еще полюсы в точках

$$\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots,$$

где $n = p + q$ — размерность пространства. При этом

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial u^k}\Phi\left(-\frac{n}{2}-k, u\right)\Bigg|_{u=0}. \tag{14}$$

Таким образом, $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda, \varphi)$ есть функционал, сосредоточенный в вершине конуса.

Итак, *имеется две серии особых точек функционала* (P_+^λ,φ):

$$\lambda=-1,-2,\ldots,-k,\ldots \tag{15}$$

и

$$\lambda=-\frac{n}{2},-\frac{n}{2}-1,\ldots,-\frac{n}{2}-k,\ldots; \tag{15$'$}$$

выч.(P_+^λ,φ) *в особой точке* λ *есть функционал, сосредоточенный на поверхности конуса* $P=0$, *если* λ *принадлежит первой серии, и в вершине конуса* $P=0$, *если* λ *принадлежит второй серии особых точек.* В случае, когда λ принадлежит одновременно обеим сериям, картина естественно может усложниться. Разберем теперь подробно все случаи в отдельности.

Случай 1. *Особая точка* $\lambda=-k$ *принадлежит первой серии особых точек, но не принадлежит второй серии.* Это имеет место всегда, когда размерность пространства $n=p+q$ — нечетное число, а также в случае четномерного пространства, если $\lambda>-\frac{n}{2}$.

Представим функцию (11) в окрестности точки $\lambda=-k$ в виде

$$\Phi(\lambda,u)=\frac{\Phi_0(u)}{\lambda+k}+\Phi_1(\lambda,u), \tag{16}$$

где $\Phi_0(u)=\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\Phi(\lambda,k)$, а функция $\Phi_1(\lambda,u)$ регулярна в окрестности точки $\lambda=-k$. Подставляя это выражение в формулу (13), мы получаем:

$$(P_+^\lambda,\varphi)=\frac{1}{\lambda+k}\int_0^\infty u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}\Phi_0(u)du+\int_0^\infty u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}\Phi_1(\lambda,u)du. \tag{17}$$

При сделанном предположении относительно λ интегралы в формуле (17) являются регулярными функциями в окрестности точки $\lambda=-k$. Следовательно, функция (P_+^λ,φ) имеет в этой точке полюс первого порядка, причем

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda,\varphi)=\int_0^\infty u^{-k+\frac{p+q}{2}-1}\Phi_0(u)du,$$

где интеграл при $k\geqslant\frac{p+q}{2}$ следует понимать в смысле регуляризованного значения. Подставляя сюда выражение (12) для $\Phi_0(u)=\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\Phi(\lambda,u)$, мы получаем:

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda,\varphi)=\frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!}\int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left[t^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,tu)\right]\Bigg|_{t=1}u^{-k+\frac{p+q}{2}-1}du. \tag{18}$$

Итак, $\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\, P_+^\lambda$ есть обобщенная функция, сосредоточенная на конусе $P = 0$.

Установим связь этой функции с определенной в п. 1 функцией $\delta_1^{(k)}(P)$. Заметим, что если положить $tu = v$, то

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left[t^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,tu)\right]\bigg|_{t=1} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,v)\right]\bigg|_{v=u} u^{-\frac{q}{2}+k}.$$

Следовательно, формула (18) может быть переписана в виде

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda,\varphi) = \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,v)\right]\bigg|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}du,$$

где при $k \geqslant \frac{n}{2}$ интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения. С другой стороны, согласно определению, данному в п. 1,

$$(\delta_1^{(k-1)}(P),\varphi) = \frac{1}{4}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,v)\right]\bigg|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}du,$$

где снова при $k \geqslant \frac{n}{2}$ интеграл понимается в смысле регуляризованного значения. Но в случае, когда размерность $n = p + q$ пространства — нечетное число, регуляризация написанного интеграла определяется методом аналитического продолжения. Следовательно,

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda,\varphi) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}(\delta_1^{(k-1)}(P),\varphi).$$

Итак, *в точке* $\lambda = -k\,(k = -1, -2, \ldots)$ *в случае, когда пространство имеет нечетную размерность* n, *а также в случае, когда размерность пространства* n *— четное число и* $k < \frac{n}{2}$, *обобщенная функция* P_+^λ *имеет простой полюс с вычетом*

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\, P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta_1^{(k-1)}(P). \tag{19}$$

Полученный результат не является неожиданным. В самом деле, еще в гл. I мы установили, что

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\, x_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(x).$$

Из формулы (19) вытекает, что в *случае нечетномерного пространства, а также в случае четномерного пространства при* $k < \frac{n}{2}$ *функция* $\delta_1^{(k-1)}(P)$ *полностью определяется заданием квадратичной формы* P.

В п. 1 было отмечено, что функция $\delta_1^{(k)}(P)$ может быть определена формулой

$$(\delta_1^{(k)}(P), \varphi) = (-1)^k \int\limits_{P=0} \omega_k(\varphi),$$

причем написанный интеграл сходится при $k < \frac{n-2}{2}$, а при $k \geqslant \frac{n-2}{2}$ его следует понимать в смысле регуляризованного значения. Следовательно,

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_{P=0} \omega_k(\varphi).$$

В частности, имеем:

$$\underset{\lambda=-1}{\text{выч.}}(P_+^\lambda, \varphi) = \int \frac{\varphi(x) d\sigma}{|\operatorname{grad} P|},$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности конуса $P = 0$.

Случай 2. *Особая точка* λ *принадлежит второй серии особых точек, но не принадлежит первой серии.* Это имеет место, когда $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, причем размерность пространства n — нечетное число.

В этом случае функция $\Phi(\lambda, u)$ регулярна в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2} - k$, а потому функция $(P_+^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^\infty u^{\lambda + \frac{n}{2} - 1} \Phi(\lambda, u) du$ имеет в этой точке простой полюс с вычетом

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda, \varphi) = \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} \int\limits_0^\infty u^{\lambda + \frac{n}{2} - 1} \Phi\left(-\frac{n}{2} - k, u\right) du,$$

откуда

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \Phi\left(-\frac{n}{2} - k, u\right)}{\partial u^k} \Bigg|_{u=0}. \tag{20}$$

Таким образом, $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda, \varphi)$ есть функционал, сосредоточенный в начале координат.

Выразим значение этого функционала непосредственно через производные функции $\varphi(x)$ в начале координат.

При $\lambda = -\frac{n}{2}$ формула (20) дает

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}(P_+^\lambda, \varphi) = \Phi\left(-\frac{n}{2}, 0\right).$$

Используя выражение (11) для функции $\Phi(\lambda,u)$, получаем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}(P_+^\lambda,\varphi)=\frac{1}{4}\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{n}{2}}t^{\frac{q-2}{2}}dt\psi_1(0,0).$$

Но

$$\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{n}{2}}t^{\frac{q-2}{2}}dt=\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{p}{2}+1\right)}.$$

Если p — четное число, то $\Gamma\left(-\frac{p}{2}+1\right)=\infty$, а потому

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}(P_+^\lambda,\varphi)=0. \tag{21}$$

Пусть теперь p нечетно, а q четно. Согласно определениям (8) и (6) имеем:

$$\psi_1(0,0)=\psi(0,0)=\int\varphi(0)d\Omega^{(p)}d\Omega^{(q)},$$

откуда

$$\psi_1(0,0)=\Omega_p\Omega_q\varphi(0),$$

где Ω_p и Ω_q обозначают площади поверхностей единичных сфер в пространствах соответствующих размерностей. Следовательно,

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}(P_+^\lambda,\varphi)=\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}{4\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)}\Omega_p\Omega_q\varphi(0),$$

т.е.

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}P_+^\lambda=\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}{4\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)}\Omega_p\Omega_q\delta(x). \tag{22}$$

Как известно, площадь поверхности Ω_s сферы единичного радиуса в s-мерном пространстве выражается формулой

$$\Omega_s=\frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Подставляя в (22) выражения для Ω_p и Ω_q, мы получим после элементарных преобразований

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\, P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta(x). \tag{23}$$

Чтобы найти вычеты функции P_+^λ при $\lambda = -\frac{n}{2} - k$, где $k = 1, 2, \ldots$, рассмотрим однородный дифференциальный оператор

$$L = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

т.е.

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}. \tag{24}$$

Как показывает непосредственный подсчет,

$$LP^{\lambda+1} = 2(\lambda+1)(2\lambda+n)P^\lambda, \tag{25}$$

где $n = p + q$.

С другой стороны, для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ справедлива формула

$$\int\limits_{P>0} [\varphi(LP^{\lambda+1}) - P^{\lambda+1}(L\varphi)]dx = 0^{1)}. \tag{26}$$

Подставляя в формулу (26) выражение (25) для $LP^{\lambda+1}$, получаем:

$$\int\limits_{P>0} P^\lambda \varphi dx = \frac{1}{2^2(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)} \int\limits_{P>0} P^{\lambda+1}(L\varphi)dx,$$

т.е.

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{2^2(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}(P_+^{\lambda+1}, L\varphi). \tag{27}$$

---

[1] В самом деле, если $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, то по формуле Грина этот интеграл сводится к интегралу по поверхности $P = 0$. Но так как на этой поверхности функция $P^{\lambda+1}$ и ее частные производные обращаются в нуль, то интеграл равен нулю. В силу единственности аналитического продолжения формула (26) остается справедливой и при $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

Применив формулу (27) k раз, будем иметь:

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{2^{2k}(\lambda+1)\dots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\dots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)}(P_+^{\lambda+k}, L^k\varphi). \tag{28}$$

Следовательно,

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda, \varphi) = \\ = \frac{1}{2^{2k}(\lambda+1)\dots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\dots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)}\Bigg|_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} \times \\ \times \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P^{\lambda+k}, L^k\varphi). \tag{29}$$

Но

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P^{\lambda+k}, L^k\varphi) = \underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}(P^\lambda, L^k\varphi).$$

Поэтому, если p — четное число, то этот вычет согласно (21) равен нулю. Если же p — нечетное число, то, согласно (23), имеем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P^{\lambda+k}, L^k\varphi) = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\delta(x), L^k\varphi\right).$$

Подставляя это выражение в формулу (29) и учитывая, что

$$\left(\delta(x), L^k\varphi\right) = \left(L^k\delta(x), \varphi\right),$$

мы получим после элементарного преобразования коэффициента

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k}k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\left(L^k\delta(x), \varphi\right).$$

Итак, *если размерность пространства — нечетное число, то в случае, когда p — нечетное, а q — четное число, обобщенная функция P_+^λ имеет в точках $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ $(k = 0, 1, \dots)$ простые полюсы с вычетами*

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k}k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \times \\ \times \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^k \delta(x). \tag{30}$$

Если же, наоборот, p — четное, а q — нечетное число, то функция P_+^λ в этих точках регулярна.

Случай 3. *Точка λ принадлежит одновременно двум сериям особых точек.* Это имеет место в случае четномерного пространства для всех

$$\lambda = -\frac{n}{2} - k \qquad (k = 0,1,\ldots).$$

Как и в случае 1, мы представим сперва выражение для (P_+^λ,φ) в виде

$$(P_+^\lambda,\varphi) = \frac{1}{\lambda + \frac{n}{2} + k}\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_0(u)du + \int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{p+q}{2}-1}\Phi_1(\lambda,u)du, \quad (31)$$

где $\Phi_0(u) = \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\Phi(\lambda,u)$, а $\Phi_1(\lambda,u)$ есть функция, регулярная в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2} - k$. В силу сделанного предположения каждый из стоящих в формуле (31) интегралов может иметь в точке $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ простой полюс.

Поэтому *функция (P_+^λ,φ) может иметь в точке $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ полюс кратности 2.*

В окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ функция P_+^λ может быть разложена, таким образом, в ряд Лорана:

$$P_+^\lambda = \frac{c_{-2}^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{\lambda + \frac{n}{2} + k} + \ldots$$

Будем искать коэффициенты $c_{-2}^{(k)}$ и $c_{-1}^{(k)}$ этого разложения.

Прежде всего, в силу (31),

$$(c_{-2}^{(k)},\varphi) = \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_0(u)du = \frac{1}{k!}\Phi_0^{(n)}(0). \quad (32)$$

Таким образом, обобщенная функция $c_{-2}^{(k)}$ сосредоточена в вершине конуса $P = 0$.

Выразим непосредственно функцию $c_{-2}^{(k)}$ через производные функции $\delta(x)$. Прежде всего при $k = 0$ формула (32) дает

$$c_{-2}^{(0)} = \Phi_0(0).$$

При этом, согласно определению,

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{4} \underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}} \int\limits_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u,tu)dt.$$

Отсюда получаем:

$$\Phi_0(0) = \frac{1}{4}\psi_1(0,0) \underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}} \int\limits_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}} dt = \psi_1(0,0) \underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}{4\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)}.$$

В силу известного соотношения для гамма-функции

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

имеем:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)} = \frac{\sin\pi\left(-\frac{q}{2}-\lambda\right)}{\sin\pi(-\lambda)} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(-\lambda-\frac{q}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}.$$

Так как, с другой стороны,

$$\lim_{\lambda=-\frac{n}{2}} \frac{\lambda+\frac{n}{2}}{\sin(-\pi\lambda)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{\pi},$$

то

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)} = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \left[\sin\pi\left(-\frac{q}{2}-\lambda\right) \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(-\lambda-\frac{q}{2}\right)}{\pi\Gamma(-\lambda)}\right]_{\lambda=-\frac{n}{2}}.$$

Таким образом,

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)} = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \sin\frac{\pi p}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{33}$$

Учитывая теперь, что

$$\psi_1(0,0) = \Omega_p\Omega_q\varphi(0),$$

где Ω_p и Ω_q — площади поверхностей сфер единичного радиуса, мы получаем:

$$(c_{-2}^0,\varphi) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \sin\frac{\pi p}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{4\pi\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Omega_p\Omega_q\varphi(0). \tag{34}$$

Если p — четное число, то $c_{-2}^{(0)}=0$, так как $\sin\frac{\pi p}{2}=0$; следовательно, *когда p и q — четные числа, функция P_+^λ имеет при $\lambda=-\frac{n}{2}$ лишь простой полюс.* Если же p и q — нечетные числа, то формула (34) дает нам, поскольку

$$\sin\frac{\pi p}{2}=(-1)^{\frac{p-1}{2}},\quad \Omega_p=\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \text{ и } \Omega_q=\frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)},$$

$$(c_{-2}^{(0)}\varphi)=(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\varphi(0),$$

т.е. *при нечетных p и q*

$$c_{-2}^{0}=(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta(x). \tag{35}$$

Применяя теперь формулу (28) и повторяя дословно соответствующие выкладки, проведенные для случая 2, мы установим, что *при четных p и q $c_{-2}^{(k)}=0$, т.е. функция P_+^λ имеет в точке $\lambda=-\frac{n}{2}-k$ лишь простой полюс. Если же p и q — нечетные числа, то*

$$c_{-2}^{(k)}=(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k}k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\right)^k\delta(x). \tag{36}$$

Определим теперь функции $c_{-1}^{(k)}$. Из формулы (31) имеем:

$$(c_{-1}^{(k)},\varphi)=\int\limits_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)du+\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,u\right)du. \tag{37}$$

При этом первый из интегралов в формуле (37) следует понимать как свободный член лорановского разложения функции

$$f(\lambda)=\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_0(u)du$$

в окрестности точки $\lambda=-\frac{n}{2}-k$. Значение этого интеграла есть функционал, сосредоточенный на поверхности $P=0$, который мы сейчас определим. Поскольку

$$\Phi_0(u)=\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\Phi(\lambda,u),$$

мы заключаем на основании формулы (12):

$$\Phi_0(u) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{4\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial t^{\frac{n}{2}+k-1}}\left[t^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,tu)\right]\Bigg|_{t=1} = \\ = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{4\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial v^{\frac{n}{2}+k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,v)\right]\Bigg|_{v=u} u^{\frac{n}{2}+k-\frac{q}{2}}.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)du = \\ = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{4\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial v^{\frac{n}{2}+k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,v)\right]\Bigg|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}du.$$

С другой стороны, согласно определению, данному в п. 1,

$$\left(\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P),\varphi\right) = \frac{1}{4}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^{\frac{n}{2}+k-1}}{\partial v^{\frac{n}{2}+k-1}}\left[v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u_1,v)\right]\Bigg|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}}du.$$

При этом регуляризация интеграла была там определена в точности так же, как и регуляризация интеграла $\int\limits_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)du$. Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty u^{-k-1}\Phi_0(u)du = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\left(\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P),\varphi\right). \tag{38}$$

Из формулы (38) вытекает, в частности, что *в случае четномерного пространства при $k \geqslant \frac{n}{2}$ функция $\delta_1^{(k-1)}(P)$ полностью определяется заданием квадратичной формы P.*

Рассмотрим теперь второй член в формуле (37). Имеем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\int\limits_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,u\right)du = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,u\right)}{\partial u^k}\Bigg|_{u=0}. \tag{39}$$

Определяемый этим членом функционал сосредоточен, следовательно, в вершине конуса $P = 0$.

Итак,

$$c_{-1}^{(k)}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P)+\alpha^{(k)}, \tag{40}$$

где $\alpha^{(k)}$ — обобщенная функция, сосредоточенная в вершине конуса $P=0$ и выражающаяся с помощью функционала (39):

$$(\alpha^{(k)},\varphi)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,u\right)}{\partial u^k}\bigg|_{u=0}. \tag{41}$$

Найдем явное выражение функции $\alpha^{(k)}$ через производные функции $\delta(x)$. Рассмотрим сперва случай $k=0$. Согласно формуле (41)

$$(\alpha^{(0)},\varphi)=\Phi_1\left(-\frac{n}{2},0\right).$$

Но $\Phi_1\left(-\frac{n}{2},0\right)$ есть свободный член лорановского разложения функции $\Phi(\lambda,0)$ в окрестности точки $\lambda=-\frac{n}{2}$. Имеем:

$$\Phi(\lambda,0)=\frac{1}{4}\int_0^1(1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}}dt\psi_1(0,0)=\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{4\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)}\Omega_p\Omega_q\varphi(0).$$

Используя соотношение $\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$, а также выражения для Ω_p,Ω_q, мы можем переписать эту формулу в виде

$$\Phi(\lambda,0)=\frac{\sin\pi\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)}{\sin\pi\lambda}\frac{\Gamma\left(-\lambda-\frac{q}{2}\right)\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(-\lambda)}\varphi(0).$$

Если p и q — четные числа, то стоящая здесь функция регулярна при $\lambda=-\frac{n}{2}$. Следовательно, $\Phi_1\left(-\frac{n}{2},0\right)=\Phi\left(-\frac{n}{2},0\right)$, откуда

$$(\alpha^{(0)},\varphi)=(-1)^{\frac{q}{2}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\varphi(0).$$

Если же p и q — нечетные числа, то функция $\Phi(\lambda,0)$ имеет полюс в точке $\lambda=-\frac{n}{2}$. В этом случае

$$(\alpha^{(0)},\varphi)=\Phi_1\left(-\frac{n}{2},0\right)=\kappa\varphi(0),$$

где κ есть свободный член лорановского разложения функции $\frac{\sin\pi\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)}{\sin\pi\lambda}\frac{\Gamma\left(-\lambda-\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(-\lambda)}\pi^{\frac{n}{2}}$ в окрестности точки $\lambda=-\frac{n}{2}$. Элементарные вычисления, которые мы опустим, приводят к следующему выражению для коэффициента κ:

$$\kappa = (-1)^{\frac{q+1}{2}} \frac{\Gamma'\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \pi^{\frac{n}{2}-1},$$

т.е.

$$\kappa = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right), \tag{42}$$

где пси-функция $\psi(x)$ определяется по формуле

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}{}^{1)}.$$

Подставляя полученные выражения для функции $\alpha^{(0)}$ в формулу (40), для $k = 0$ получим:

$$c_{-1}^{(0)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[(-1)^{\frac{n}{2}-1} \delta_1^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(P) + \theta \pi^{\frac{n}{2}} \delta(x)\right], \tag{43}$$

причем $\theta = (-1)^{\frac{q}{2}}$, если p и q — четные числа, и $\theta = (-1)^{\frac{q+1}{2}} \frac{1}{\pi} \times$ $\times \left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right)$, если p и q — нечетные числа.

Наконец, чтобы найти $c_{-1}^{(k)}$ для произвольного k, можно снова воспользоваться «понижающей» формулой (28). Мы получим:

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \left[(-1)^{\frac{n}{2}+k-1} \delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) + \right.$$
$$\left. + \theta_{p,q} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k} k!} P^k \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \delta(x)\right]. \tag{44}$$

При этом числовой коэффициент $\theta_{p,q}$ равен $(-1)^{\frac{q}{2}}$, когда p и q — четные числа.

---

1) Значения пси-функции $\psi(x)$ при целых и полуцелых значениях аргумента выражаются следующими формулами:

$$\psi(k) = -C + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k+1},$$

$$\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) = -C - 2\ln 2 + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2k-1}\right),$$

где C — постоянная Эйлера (см. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы, раздел 6.35).

Выражение для функции $\alpha^{(k)}$ можно получить также из следующих соображений. Так как $c_{-1}^{(k)} = \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda$ есть однородная функция степени $-n-2k$, то это же справедливо и для функции $\alpha^{(k)}$. Но функция $\alpha^{(k)}$ сосредоточена в начале координат, а потому она имеет вид[1])

$$\alpha^{(k)} = Q_{2k}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\delta(x),$$

где Q_{2k} — однородный многочлен степени $2k$.

С другой стороны, функция $\alpha^{(k)}$, так же как и функция P_+^λ, при любом значении λ инвариантна относительно линейных преобразований, сохраняющих квадратичную форму:

$$P(x_1, \dots, x_{p+q}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2.$$

Следовательно, и оператор $Q_{2k}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p+q}}\right)$ должен быть инвариантен относительно таких преобразований. Единственным оператором, удовлетворяющим этим требованиям, является оператор

$$Q_{2k} = c_{k,p,q} P^k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p+q}}\right).$$

Таким образом,

$$\alpha^{(k)} = c_{k,p,q} P^k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p+q}}\right)\delta(x).$$

Коэффициент $c_{k,p,q}$ может быть найден из выражения (41), если в это выражение подставить какую-нибудь фиксированную функцию.

Возьмем функцию φ, имеющую вблизи начала координат следующий вид:

$$\varphi(x) = (x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2)^k.$$

Тогда, как показывают выражения (6) и (8), функция $\psi_1(u, tu)$ имеет в окрестности точки $u = 0$ вид

$$\psi_1(u, tu) = \Omega_p \Omega_q u^k (1-t)^k.$$

[1])Во втором выпуске (гл. II,§ 4) будет доказано, что обобщенная функция, сосредоточенная в одной точке, представляет собой линейную комбинацию δ-функции и ее производных.

Следовательно, согласно формуле (11),

$$\Phi(\lambda,u) = \left(\frac{1}{4}\int\limits_0^1 (1-t)^{\lambda+k} t^{\frac{q-2}{2}} dt\Omega_p\Omega_q\right) u^k,$$

т.е.

$$\Phi(\lambda,u) = \frac{\Gamma(\lambda+k+1)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{4\Gamma\left(\lambda+k+\frac{q}{2}+1\right)}\Omega_p\Omega_q u^k.$$

Функция $\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,u\right)$, через которую выражается $(\alpha^{(k)},\varphi)$, есть свободный член лорановского разложения функции $\Phi(\lambda,u)$ в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2}-k$.

Рассмотрим для определенности случай, когда p и q — нечетные числа. Так как коэффициенты лорановского разложения функции $\frac{\Gamma(\lambda+k+1)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+k+\frac{q}{2}+1\right)}$ в окрестности $\lambda = -\frac{n}{2}-k$ совпадают с коэффициентами лорановского разложения функции $\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{q}{2}+1\right)}$ в окрестности $\lambda = -\frac{n}{2}$, то

$$\Phi_1\left(-\frac{n}{2}-k,u\right) = \kappa u^k,$$

где коэффициент κ определяется формулой (42). Формула (41) даст нам:

$$(\alpha^{(k)},\varphi) = \kappa = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\psi\left(\frac{p}{2}\right)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)\right). \tag{45}$$

С другой стороны,

$$(\alpha^{(k)},\varphi) = c_{k,p,q}P^k\varphi(x)|_{x=0}.$$

Согласно формуле (25), применяемой k раз,

$$P^k\varphi(x) = 2^{2k}k!\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}+k-1\right). \tag{46}$$

Сравнивая выражения (45) и (46), получим:

$$c_{k,p,q} = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k}k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\left(\psi\left(\frac{p}{2}\right)-\psi\left(\frac{n}{2}\right)\right),$$

где p и q — нечетные числа.

Таким образом, коэффициент $\theta_{p,q}$ в формуле (44) для случая, когда p и q — нечетные числа, имеет вид

$$\theta_{p,q} = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}}{\pi}\left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right).$$

Итак, *если размерность пространства n — четное число, причем p и q — также четные числа, то функция P_+^λ имеет в точке $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ простой полюс с вычетом*

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) + \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k}k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}L^k\delta(x),$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}.$$

Если же p и q — нечетные числа, то в точке $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ функция P_+^λ имеет полюс кратности 2. Коэффициенты $c_{-2}^{(k)}$ и $c_{-1}^{(k)}$ разложения функции P_+^λ в ряд Лорана

$$P_+^\lambda = \frac{c_{-2}^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{\lambda + \frac{n}{2} + k} + \ldots$$

в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ выражаются формулами

$$c_{-2}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k}k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}L^k\delta(x)$$

и

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) + \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}\left(\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right)}{2^{2k}k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}L^k\delta(x),$$

где $\psi(x)$ — пси-функция: $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Наряду с функцией P_+^λ можно определить также функцию P_-^λ согласно формуле

$$(P_-^\lambda, \varphi) = \int\limits_{-P>0} (-P)^\lambda \varphi\, dx. \tag{47}$$

Все сказанное выше по поводу функции P_+^λ остается справедливым и для функции P_-^λ; следует лишь поменять ролями числа p и q. При этом в написанных выше формулах $\delta_1^{(k)}(P)$ заменится на $\delta_1^{(k)}(-P) = (-1)^k \delta_2^{(k)}(P)$.

3. Обобщенные функции $\mathcal{P}^\lambda$, отвечающие квадратичным формам с комплексными коэффициентами. До сих пор мы рассматривали исключительно квадратичные формы с вещественными коэффициентами. В этом пункте мы рассмотрим пространство всех квадратичных форм

$$\mathcal{P} = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs} x_r x_s \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами.

Нашей задачей является определение обобщенной функции $\mathcal{P}^\lambda$ где λ — комплексное число. Однако в общем случае $\mathcal{P}^\lambda$ не будет однозначной аналитической функцией от λ. Поэтому в пространстве всех квадратичных форм

$$\mathcal{P} = P_1 + iP_2$$

мы выделим «верхнюю полуплоскость» квадратичных форм *с положительно определенной мнимой частью* и определим для них функцию $\mathcal{P}^\lambda$. А именно, если квадратичная форма $\mathcal{P}$ принадлежит этой «полуплоскости», то положим

$$\mathcal{P}^\lambda = e^{\lambda(\ln|\mathcal{P}| + i\arg\mathcal{P})},$$

где $0 < \arg\mathcal{P} < \pi$. Такая функция $\mathcal{P}^\lambda$ является однозначной аналитической функцией от λ.

Сопоставим теперь функции $\mathcal{P}^\lambda$ обобщенную функцию $\mathcal{P}^\lambda$:

$$(\mathcal{P}^\lambda, \varphi) = \int \mathcal{P}^\lambda \varphi\, dx, \tag{2}$$

где интегрирование ведется по всему пространству. Интеграл (2) сходится при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией от λ. Продолжая аналитически эту функцию, мы определим функционал $(\mathcal{P}^\lambda, \varphi)$ для других значений λ.

Для квадратичных форм $\mathcal{P}$ с положительно определенной мнимой частью мы найдем теперь особые точки функций $\mathcal{P}^\lambda$ и вычислим вычеты этих функций в особых точках. Вычисления можно существенно упростить за счет приема, которым мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Обобщенная функция $\mathcal{P}^\lambda$ аналитически зависит не только от λ, но и от коэффициентов квадратичной формы $\mathcal{P}$. Тем самым $\mathcal{P}^\lambda$ является аналитической функцией в верхней «полуплоскости» всех квадратичных форм вида $\mathcal{P} = P_1 + iP_2$, где P_2 есть положительно определенная форма. Следовательно, $\mathcal{P}^\lambda$ однозначно определяется своими значениями на «мнимой полуоси», т.е. на множестве квадратичных форм вида $\mathcal{P} = iP_2$, где P_2 — положительно определенная форма. Поэтому нам достаточно рассмотреть случай обобщенных функций вида $(iP_2)^\lambda$. Но для этого случая задача была уже решена в § 3 гл. I, ибо положительно определенную форму P_2 можно всегда невырожденным линейным преобразованием привести к сумме квадратов.

Итак, пусть сначала форма $\mathcal{P} = \sum\limits_{r,s=1}^{n} g_{rs}x_rx_s$ принадлежит «мнимой полуоси». Это значит, что $g_{rs} = ia_{rs}$ $(r, s = 1, \ldots, n)$, где a_{rs} — вещественные числа, и форма $\sum\limits_{r,s=1}^{n} a_{rs}x_rx_s$ положительно определена. Тогда

$$(\mathcal{P}^\lambda, \varphi) = e^{\frac{\pi\lambda i}{2}} \int \left(\sum a_{rs}x_rx_s\right)^\lambda \varphi dx.$$

Линейным преобразованием $x_r = \sum\limits_{s=1}^{n} \alpha_{rs}x'_s$ мы можем привести форму $\sum\limits_{r,s=1}^{n} a_{rs}x_rx_s$ к виду $r^2 = x_1'^2 + \ldots + x_n'^2$. Якобиан этого преобразования есть $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$, где $|a|$ — дискриминант квадратичной формы $\sum\limits_{r,s=1}^{n} a_{rs}x_rx_s$:

$$|a| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$(\mathcal{P}^\lambda, \varphi) = \frac{e^{\frac{\pi\lambda i}{2}}}{\sqrt{|a|}} \int r^{2\lambda}\varphi dx',$$

или

$$(\mathcal{P}^\lambda, \varphi) = \frac{e^{\frac{\pi\lambda i}{2}}}{\sqrt{(-i)^n|g|}} \int r^{2\lambda}\varphi dx', \tag{3}$$

где $|g|$ — дискриминант квадратичной формы $\mathcal{P}$, а $\sqrt{(-i)^n|g|}$ понимается в смысле арифметического значения $[(-i)^n|g|$ есть вещественное положительное число$]$.

Функционал $(r^{2\lambda},\varphi)$ был уже рассмотрен в п. 9 § 3 гл. I. Согласно приведенным там формулам единственными особенностями этого функционала, а следовательно и функционала $(\mathcal{P}^{\lambda},\varphi)$, являются простые полюсы в точках $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots$; при этом

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\, r^{2\lambda} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta(x).$$

Следовательно,

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\, \mathcal{P}^{\lambda} = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}}\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{(-i)^n|g|}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta(x). \tag{4}$$

Найдем вычеты функции $\mathcal{P}^{\lambda}$ в других особых точках. Для этого сопоставим форме $\mathcal{P}$ дифференциальный оператор

$$L_{\mathcal{P}} = \sum g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}, \tag{5}$$

где коэффициенты g^{rs} определяются из соотношений

$$\sum_{s=1}^{n} g^{rs}g_{st} = \delta_t^r$$

($\delta_t^r = 1$ при $r = t$ и $\delta_t^r = 0$ при $r \neq t$). Таким образом, матрица $||g^{rs}||$ коэффициентов оператора $L_{\mathcal{P}}$ является обратной к матрице $||g_{st}||$ квадратичной формы. Имеем тогда

$$L_{\mathcal{P}}\mathcal{P}^{\lambda+1} = 4(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\mathcal{P}^{\lambda}.$$

В справедливости этого соотношения можно убедиться непосредственной проверкой. Применяя это соотношение k раз, получаем:

$$L_{\mathcal{P}}^k\mathcal{P}^{\lambda+k} = 4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)\mathcal{P}^{\lambda},$$

откуда

$$\mathcal{P}^{\lambda} = \frac{1}{4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)}L_{\mathcal{P}}^k\mathcal{P}^{\lambda+k}. \tag{6}$$

Следовательно,

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\,\mathcal{P}^\lambda =$$

$$= \frac{1}{4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)}\Bigg|_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} \times$$

$$\times \underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}\, L_{\mathcal{P}}^k \mathcal{P}^\lambda,$$

откуда, применяя формулу (4), получаем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}\,\mathcal{P}^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{(-i)^n|g|}} L_{\mathcal{P}}^k \delta(x). \tag{7}$$

Формула (7) получена в предположении, что квадратичная форма $\mathcal{P}$ принадлежит «мнимой полуоси». Полученное выражение необходимо теперь аналитически продолжить в «верхнюю полуплоскость» всех квадратичных форм $\mathcal{P} = P_1 + iP_2$ с положительно определенной мнимой частью. Но аналитическое продолжение оператора $L_{\mathcal{P}}$ известно, поскольку его коэффициенты аналитически выражаются через коэффициенты квадратичной формы $\mathcal{P}$. Остается невыясненным лишь, как продолжить на всю «верхнюю полуплоскость» функцию $\sqrt{(-i)^n|g|}$. Следовательно, задача будет полностью решена, если мы сумеем определить $\sqrt{(-i)^n|g|}$ как однозначную аналитическую функцию в «верхней полуплоскости» квадратичных форм.

Для этого снова представим форму $\mathcal{P}$ в виде

$$\mathcal{P} = P_1 + iP_2,$$

где P_1 и P_2 — квадратичные формы с вещественными коэффициентами, причем форма P_2 положительно определена. Существует невырожденное линейное преобразование

$$x_r = \sum_{s=1}^n b_{rs} y_s$$

с вещественными коэффициентами, приводящее формы P_1 и P_2 к виду:

$$P_1 = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$
$$P_2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2.$$

Вещественные коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ формы P_1 не зависят от специального выбора такого преобразования и являются, таким образом, инвариантами самой квадратичной формы $\mathcal{P}$. Имеем:

$$|g| = |b|^2(\lambda_1 + i)\ldots(\lambda_n + i),$$

где $|b|$ — определитель матрицы $||b_{ij}||$, а потому

$$(-i)^n|g| = |b|^2(1-\lambda_1 i)\ldots(1-\lambda_n i).$$

Положим тогда

$$\sqrt{(-i)^n|g|} = \sqrt{|b|^2}(1-\lambda_1 i)^{\frac{1}{2}}\ldots(1-\lambda_n i)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

где значения квадратных корней определяются формулой

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}\arg z}, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Функция, определяемая формулой (8), будет искомой однозначной аналитической функцией в «верхней полуплоскости» комплексных квадратичных форм с положительно определенной мнимой частью.

Итак, *если*

$$\mathcal{P} = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs}x_r x_s$$

— произвольная квадратичная форма с положительно определенной мнимой частью, то обобщенная функция $\mathcal{P}^\lambda$ является регулярной аналитической функцией от λ всюду, за исключением точек $\lambda = -\frac{n}{2}$, $-\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots$, в которых эта функция имеет простые полюсы. При этом

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} \mathcal{P}^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{(-i)^n|g|}}\left(\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}\right)^k \delta(x), \tag{9}$$

где $|g|$ — дискриминант квадратичной формы $\mathcal{P}$ и функция $\sqrt{(-i)^n|g|}$ определяется формулой (8).

Аналогичным образом можно рассмотреть «нижнюю полуплоскость» квадратичных форм с отрицательно определенной мнимой частью.

Если форма

$$\mathcal{P} = P_1 - iP_2 = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs}x_r x_s$$

принадлежит «нижней полуплоскости», то обобщенная функция $\mathcal{P}^\lambda$ также является регулярной аналитической функцией от λ всюду, за *исключением точек* $\lambda = -\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2} - 1, \ldots,\ -\frac{n}{2} - k, \ldots,$ *в которых эта функция имеет простые полюсы. При этом*

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} \mathcal{P}^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{i^n|g|}} \left(\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}\right)^k \delta(x), \qquad (9')$$

где снова $|g|$ *есть дискриминант формы* $\mathcal{P}$ *и* $\sqrt{i^n|g|}$ *выражается формулой, аналогичной формуле* (8)*:*

$$\sqrt{i^n|g|} = \sqrt{|b|^2}(1+\lambda_1 i)^{\frac{1}{2}} \ldots (1+\lambda_n i)^{\frac{1}{2}}.$$

4. Обобщенные функции $(P+i0)^\lambda$ **и** $(P-i0)^\lambda$**.** Используя результаты п. 3, мы можем теперь изучить любую вещественную квадратичную форму в степени λ.

Пусть

$$P = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs}x_r x_s$$

невырожденная квадратичная форма с *вещественными* коэффициентами. Тогда, по аналогии с функциями $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$, рассмотренными в § 3 гл. I, мы определим обобщенные функции $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$.

Для этого рассмотрим квадратичную форму

$$\mathcal{P} = P + iP',$$

где P' — положительно определенная форма (с вещественными коэффициентами). Нетрудно показать, что когда коэффициенты квадратичной формы P' стремятся к нулю, обобщенная функция $(P+iP')^\lambda$ стремится к вполне определенному пределу. Этот предел мы и обозначим через $(P+i0)^\lambda$.

Действительно, это утверждение очевидно при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, ибо в этом случае предельный переход можно производить под знаком интеграла $\int \mathcal{P}^\lambda \varphi dx$. С другой стороны, в силу соотношения (6) п. 3

$$\mathcal{P}^\lambda = \frac{1}{4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{n}{2}+k-1\right)} L^k_{\mathcal{P}}\mathcal{P}^{\lambda+k}$$

оно остается справедливым и во всех точках регулярности функции $\mathcal{P}^\lambda$.[1)]

[1)]Мы не останавливаемся на специальном случае, когда λ — целое отрицательное число, не принадлежащее серии особых точек функции $\mathcal{P}^\lambda$. Отметим, не проводя доказательства, что в этих точках функция $(P+i0)^\lambda$ не имеет особенностей.

Аналогично, обобщенную функцию $(P - i0)^\lambda$ мы определим как предел обобщенной функции $(P - iP')^\lambda$, где P' — положительно определенная форма, когда коэффициенты формы P' стремятся к нулю.

Из определения обобщенных функций $(P + i0)^\lambda$ и $(P - i0)^\lambda$ вытекает, что они являются аналитическими функциями от λ всюду, за исключением точек $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots, -\frac{n}{2} - k, \ldots$

Нетрудно убедиться также, применяя соотношение (6) п. 3, что в указанных точках эти функции имеют простые полюсы, причем

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P + i0)^\lambda = \lim_{P'\to 0} \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P + iP'),$$

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P - i0)^\lambda = \lim_{P'\to 0} \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P - iP').$$

Чтобы отыскать эти вычеты, достаточно поэтому найти предельные значения функций $\sqrt{(-i)^n|g|}$ и $\sqrt{i^n|g|}$, где $|g|$ — дискриминант соответствующей комплексной квадратичной формы $P \pm iP'$, когда P' обращается в нуль.

Не нарушая общности, можно предполагать, что форма P' имеет вид

$$P' = \varepsilon(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда выражение для $\sqrt{(-i)^n|g|}$ можно представить в виде

$$\sqrt{(-i)^n|g|} = (\varepsilon - i\lambda_1)^{\frac{1}{2}} \ldots (\varepsilon - i\lambda_n)^{\frac{1}{2}},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы формы P. Предположим, что форма P имеет в каноническом представлении p положительных и q отрицательных квадратов. Тогда при $\varepsilon \to 0$ получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{(-i)^n|g|} = \sqrt{|\lambda_1 \ldots \lambda_n|}(-i)^{\frac{p}{2}} i^{\frac{q}{2}},$$

т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{(-i)^n|g|} = e^{-\frac{\pi}{4}(p-q)i} \sqrt{|\Delta|},$$

где Δ — дискриминант вещественной квадратичной формы P. Применяя теперь формулу (9) п. 3 для $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} \mathcal{P}^\lambda$, получаем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P + i0)^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right) \sqrt{|\Delta|}} \left(\sum_{r,s=1}^n g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} \right)^k \delta(x). \quad (1)$$

Аналогично, имеем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P-i0)^\lambda = \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{|\Delta|}}\left(\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}\right)^k \delta(x). \quad (1')$$

Таким образом, *вычетами функций* $(P+i0)^\lambda$ *и* $(P-i0)^\lambda$ *в точках* $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots$ *являются обобщенные функции, сосредоточенные в вершине конуса* $P=0$.

Функции $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$ выражаются следующим образом через обобщенные функции P_+^λ и P_-^λ, определенные в п. 2:

$$(P+i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pi\lambda i}P_-^\lambda, \quad (2)$$

$$(P-i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{-\pi\lambda i}P_-^\lambda. \quad (2')$$

В самом деле, при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ функционалам (P_+^λ, φ) и (P_-^λ, φ) соответствуют функции

$$P_+^\lambda = \begin{cases} P^\lambda, & \text{когда} P \geqslant 0, \\ 0, & \text{когда} P \leqslant 0; \end{cases}$$

$$P_-^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{когда} P \geqslant 0, \\ (-P)^\lambda, & \text{когда} P \leqslant 0. \end{cases}$$

В этом случае соотношения (2) и (2′) вытекают непосредственно из определения функций $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$. Но тогда, в силу единственности аналитического продолжения, формулы (2) и (2′) остаются справедливыми и при других значениях λ.

Отметим попутно, что в силу соотношений (2) и (2′), при $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ функции $(P+i0)^\lambda$, $(P-i0)^\lambda$ и P^λ совпадают.

Установим теперь на основании формул (2) и (2′) связь между вычетами функций P_+^λ и P_-^λ при $\lambda = -\frac{n}{2}-k$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Лорановские разложения этих функций в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2}-k$ имеют вид:

$$P_+^\lambda = \frac{c_{-2}^{(k)}}{\left(\lambda+\frac{n}{2}+k\right)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{\lambda+\frac{n}{2}+k} + \ldots,$$

$$P_-^\lambda = \frac{c_{-2}^{\prime(k)}}{\left(\lambda+\frac{n}{2}+k\right)^2} + \frac{c_{-1}^{\prime(k)}}{\lambda+\frac{n}{2}+k} + \ldots$$

Согласно (2) и (2′)

$$P_+^\lambda = \frac{e^{-\pi\lambda i}(P+i0)^\lambda - e^{\pi\lambda i}(P-i0)^\lambda}{-2i\sin\pi\lambda},$$

$$P_-^\lambda = \frac{(P+i0)^\lambda - (P-i0)^\lambda}{2i\sin\pi\lambda}. \quad (3)$$

Отсюда, используя выражения (1) и (1′) для вычетов функций $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$, получаем: *если размерность пространства n — нечетное число, а также если n — четное число и p, q — четные числа, то $c_{-2}^{(k)} = c_{-2}^{\prime(k)} = 0$; если же p и q — нечетные числа, то*

$$c_{-2}^{(k)} = (-1)^{\frac{n}{2}+k+1} c_{-2}^{\prime(k)} = \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^k k! \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{|\Delta|}} L_P^k \delta(x),$$

где $L_P = \sum\limits_{r,s=1}^{n} g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}$. Эти же результаты были уже получены другим методом в п. 2. Далее, из соотношения (2) имеем:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} (P+i0)^\lambda = \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda + \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} e^{\pi\lambda i} P_-^\lambda,$$

откуда

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} (P+i0)^\lambda = c_{-1}^{(k)} + e^{-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)i} c_{-1}^{\prime(k)} + \pi i e^{-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)i} c_{-2}^{\prime(k)}.$$

Подставляя сюда выражения для $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} (P+i0)^\lambda$ и $c_{-2}^{\prime(k)}$, получаем: *если размерность пространства n — нечетное число, а также если n — четное число и p, q — четные числа, то*

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda + e^{-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)i} \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_-^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k! \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)\sqrt{|\Delta|}} L_P^k \delta(x); \qquad (4)$$

если же p и q — нечетные числа, то

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda + e^{-\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)i} \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_-^\lambda = 0. \qquad (5)$$

Отметим, кроме того, что *если n — нечетное число, а также если n — четное число и $k < \frac{n}{2}$, то, согласно формуле* (2),

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda + (-1)^k \underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} P_-^\lambda = \underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} (P+i0)^\lambda = 0. \qquad (6)$$

Будем предполагать с этого момента, что квадратичная форма P имеет канонический вид:

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2.$$

В п. 2 были найдены явные выражения для вычетов функций P_+^λ и P_-^λ через обобщенные функции $\delta_1^{(k)}(P)$, $\delta_1^{(k)}(-P) = (-1)^k \delta_2^{(k)}(P)$ и $\delta(x)$. Подстановка этих выражений в равенства (4), (5) и (6) дает:

$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P) = c_{p,q,k} L^{k-\frac{n}{2}+1} \delta(x),$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}$$

и $c_{p,q,k} = 0$, если размерность пространства n — нечетное число, а также если n — четное число и $k < \frac{n}{2} - 1$; в остальных случаях коэффициент $c_{p,q,k}$ может быть легко подсчитан на основании формул п. 2.

Итак, *если размерность пространства n — нечетное число, а также если n — четное число и $k < \frac{n}{2} - 1$, то $\delta_1^{(k)}(P) = \delta_2^{(k)}(P)$. Если же n — четное число, то при $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$ разность $\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P)$ есть обобщенная функция, сосредоточенная в вершине конуса $P = 0$.*

Согласно общей теории, которая будет рассмотрена в § 4, более естественные определения однородных обобщенных функций, сосредоточенных на поверхности $P = 0$, состоят в следующем (см. ниже, стр. 362):

$$\delta^{(k)}(P_+) = (-1)^k k! \underset{\lambda=-k-1}{\text{выч.}} P_+^\lambda$$

и аналогично

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k k! \underset{\lambda=-k-1}{\text{выч.}} P_-^\lambda.$$

В случае нечетномерного пространства, а также в случае четномерного пространства размерности n при $k < \frac{n}{2} - 1$, имеем

$$\delta^{(k)}(P_+) = \delta_1^k(P), \quad \delta^{(k)}(P_-) = \delta_1^k(-P);$$

в случае же четномерного пространства при $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$ разности

$$\delta^{(k)}(P_+) - \delta_1^k(P) \text{ и } \delta^{(k)}(P_-) - \delta_1^k(-P)$$

являются обобщенными функциями, сосредоточенными в вершине конуса $P = 0$. В силу соотношений (4)–(6), *если p и q являются одновременно четными числами и $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$, то*

$$(-1)^k \delta^{(k)}(P_+) - \delta^{(k)}(P_-) = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k+1-\frac{n}{2}} \left(k + 1 - \frac{n}{2}\right)!} L^{k+1-\frac{n}{2}} \delta(x);$$

во всех же остальных случаях

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k \delta^{(k)}(P_+).$$

5. Фундаментальные решения линейных дифференциальных уравнений. Используем результаты, полученные в пп. 3 и 4, для отыскания фундаментальных решений уравнений

$$L^k u = f(x), \tag{1}$$

где L — однородный линейный дифференциальный оператор вида

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}$$

и $k = 1, 2, \ldots$

Напомним, что фундаментальным решением уравнения (1) называется такая обобщенная функция K, что

$$L^k K = \delta(x). \tag{2}$$

К уравнению (1) при $k = 1$ приводится, в частности, любое линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, содержащее только старшие производные. Это уравнение обычно называют *ультрагиперболическим.* При p или q, равных нулю, оно превращается в уравнение Лапласа, а при p или q, равных 1, — в волновое уравнение.

Решение уравнения (2) естественно искать в виде однородной функции, поскольку оператор L и стоящая в правой части функция $\delta(x)$ однородны (либо присоединенной к однородной; см. определение в § 1). Так как после $2k$-кратного дифференцирования функции K получается функция $\delta(x)$, имеющая степень однородности $-n$, где $n = p + q$ — размерность пространства, то степень однородности функции K должна быть равна $-n + 2k$.

С другой стороны, уравнение (2) инвариантно относительно линейных преобразований, сохраняющих форму

$$P = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2.$$

Решение этого уравнения будем строить в виде

$$K = f(P).$$

В п. 4 были рассмотрены однородные обобщенные функции от P: $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$. При $\lambda = -\frac{n}{2} + k$ эти функции имеют нужную степень однородности $-n+2k$. Мы покажем сейчас, что *за исключением случая, когда размерность n пространства — четное число и $k \geqslant \frac{n}{2}$, каждая из функций $(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ и $(P-i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ является, с точностью до постоянного множителя, фундаментальным решением уравнения $L^k u = f(x)$.*

Воспользуемся соотношением, установленным в пп. 3 и 4:

$$L^k (P + i0)^{\lambda + k} = \\ = 4^k (\lambda + 1) \ldots (\lambda + k) \left(\lambda + \frac{n}{2}\right) \ldots \left(\lambda + \frac{n}{2} + k - 1\right) (P + i0)^\lambda. \tag{3}$$

Отсюда при $\lambda = -\frac{n}{2}$ получаем:

$$L^k(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} = 4^k\left(1-\frac{n}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n}{2}\right)(k-1)!\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}(P+i0)^{\lambda}. \quad (4)$$

Отсюда видно, что *если размерность n пространства — четное число и $k \geqslant \frac{n}{2}$, то правая часть равенства* (4) *обращается в нуль, и мы получаем:*

$$L^k(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} = 0,$$

т.е. функция $(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ является решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (1).

Во всех же остальных случаях, подставляя в (4) выражение для $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}}(P+i0)^{\lambda}$, получаем:

$$L^k(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} = 4^k\left(1-\frac{n}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n}{2}\right)(k-1)!\frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta(x).$$

Следовательно, функция

$$K_1 = (-1)^k\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}}}(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}$$

является фундаментальным решением уравнения $L^k u = f(x)$.

Таким образом, *за исключением случая, когда размерность n пространства — четное число и $k \geqslant \frac{n}{2}$, функция*

$$K_1 = (-1)^k\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}}}(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} \quad (5)$$

и, аналогично, функция

$$K_2 = (-1)^k\frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}}}(P-i0)^{-\frac{n}{2}+k} \quad (5')$$

являются фундаментальными, решениями уравнения $L^k u = f(x)$. Если же n — четное число и $k \geqslant \frac{n}{2}$, то функция $(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} = (P-i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ является решением соответствующего однородного уравнения $L^k u = 0$.

Заметим, что фундаментальные решения K_1 и K_2 комплексно сопряжены.

Формулы (5) и (5′) представляют собой наиболее удобное задание фундаментальных решений уравнения $L^k u = f(x)$. Можно было бы искать вещественные фундаментальные решения этого уравнения, комбинируя вещественные и мнимые части функций K_1 и K_2. Однако в зависимости от того, четна или нечетна размерность пространства n, а также четны или нечетны числа p и q, формулы для вещественных фундаментальных решений уравнения $L^k u = f(x)$ оказываются при этом существенно различными.

Формулы для фундаментальных решений K_1 и K_2 уравнения $L^k u = f(x)$ можно преобразовать, выразив эти функции непосредственно через обобщенные функции P_+^λ и P_-^λ.

Воспользуемся для этого формулами п. 4, выражающими функции $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$ через функции P_+^λ и P_-^λ. Если размерность пространства n нечетна, то функции P_+^λ и P_-^λ регулярны при $\lambda = -\frac{n}{2}+k$, и мы получаем:

$$K_1 = \overline{K_2} = (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}}}\left(P_+^{-\frac{n}{2}+k} + e^{\pi\left(-\frac{n}{2}+k\right)i}P_-^{-\frac{n}{2}+k}\right). \tag{6}$$

Если же n — четное число и $k < \frac{n}{2}$, то функции P_+^λ и P_-^λ имеют в точке $\lambda = -\frac{n}{2}+k$ простые полюсы с вычетами

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}+k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = (-1)^{\frac{n}{2}-k-1} \underset{\lambda=-\frac{n}{2}+k}{\text{выч.}} P_-^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-k-1}}{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)!}\delta^{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)}(P_+).$$

Обозначая через $P_+^{-\frac{n}{2}+k}$ и $P_-^{-\frac{n}{2}+k}$ свободные члены лорановских разложений функций P_+^λ и P_-^λ в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2}+k$, получаем:

$$K_1 = \overline{K_2} = (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}}}\left[P_+^{-\frac{n}{2}+k} + (-1)^{-\frac{n}{2}+k}P_-^{-\frac{n}{2}+k} + \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{-\frac{n}{2}+k}\pi i}{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)!}\delta^{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)}(P_+)\right]. \tag{7}$$

Из формул (6) и (7) вытекает, в частности, что функции K_1 и K_2 линейно независимы. Обобщенная функция $K_1 - K_2$ является при этом решением однородного уравнения $L^k u = 0$.

Рассмотрим, наконец, особый случай, когда размерность пространства n — четное число и $k \geqslant \frac{n}{2}$. Разлагая функцию $(P+i0)^{\lambda+k}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2}$, имеем

$$(P+i0)^{\lambda+k} = (P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} + \left(\lambda+\frac{n}{2}\right)(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}\ln(P+i0) + \ldots$$

Подставляя это разложение в равенство (3) и сравнивая затем коэффициенты при $\lambda + \frac{n}{2}$ в левой и в правой частях этого равенства, получаем:

$$L^k \left[(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} \ln(P+i0)\right] = \\ = 4^k(-1)^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{n}{2}-1\right)!\left(k-\frac{n}{2}\right)!(k-1)! \underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}} (P+i0)^\lambda.$$

Подставляя сюда выражение для $\underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\text{выч.}} (P+i0)^\lambda$, мы установим, что *в случае пространства четной размерности n фундаментальным решением уравнения $L^k u = f(x)$ при $k \geqslant \frac{n}{2}$ является присоединенная функция*

$$K_1 = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}}{4^k\left(k-\frac{n}{2}\right)!(k-1)!}(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}\ln(P+i0).$$

Аналогично, *другим фундаментальным решением уравнения $L^k u = f(x)$ является в этом случае функция*

$$K_2 = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}}{4^k\left(k-\frac{n}{2}\right)!(k-1)!}(P-i0)^{-\frac{n}{2}+k}\ln(P-i0).$$

Отметим, что формулы для фундаментальных решений уравнения $L^k u = f(x)$ сохраняют смысл и в том случае, когда L — произвольный линейный однородный дифференциальный оператор 2-го порядка

$$L = \sum_{r,s=1}^{n} g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}.$$

В этом случае под P следует понимать квадратичную форму вида

$$P = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs} x_r x_s,$$

где $\sum\limits_{s=1}^{n} g_{rs} g^{st} = \delta_r^t (r,t = 1, \ldots, n)$. В выражении для коэффициента при $(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ и $(P-i0)^{-\frac{n}{2}+k}$ при этом добавится в качестве множителя $\sqrt{|\Delta|}$, где Δ — дискриминант квадратичной формы P.

Например, фундаментальными решениями уравнения

$$\left(2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u = f(x_1, x_2, x_3)$$

являются функции

$$K_1 = \frac{1}{4\pi i}(2x_1x_3 + x_2^2 + i0)^{-\frac{1}{2}}$$

и

$$K_2 = \overline{K_1}.$$

6. Преобразования Фурье функций $(P+i0)^\lambda$ **и** $(P-i0)^\lambda$**.** Для отыскания преобразований Фурье функций $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$ применим идею аналитического продолжения по коэффициентам квадратичной формы, развитую нами в п. 3.

Пусть

$$\mathcal{P} = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2 \tag{1}$$

— квадратичная форма с комплексными коэффициентами, причем $\operatorname{Im}\mathcal{P}$ есть положительно определенная форма, т.е. $\operatorname{Im}\alpha_s > 0$ ($s = 1,\ldots,n$). Обобщенная функция $\mathcal{P}^\lambda$, а потому и ее преобразование Фурье $\widetilde{\mathcal{P}^\lambda}$, являются аналитическими функциями от $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ в области $\operatorname{Im}\alpha_s > 0$ ($s = 1,\ldots,n$). Для отыскания $\widetilde{\mathcal{P}^\lambda}$ достаточно поэтому рассмотреть случай, когда все коэффициенты α_s — мнимые числа: $\alpha_s = ib_s$, причем $b_s > 0$ ($s = 1,\ldots,n$). Но в этом случае

$$\widetilde{\mathcal{P}}^\lambda = e^{\frac{\pi}{2}\lambda i}\int (b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2)^\lambda e^{i(x_1s_1+\ldots+x_ns_n)}\,dx.$$

После соответствующей замены переменных получаем:

$$\widetilde{\mathcal{P}}^\lambda = \frac{e^{\frac{\pi}{2}\lambda i}}{\sqrt{b_1}\ldots\sqrt{b_n}}\int r^{2\lambda} e^{i\left(x_1\frac{s_1}{\sqrt{b_1}}+\ldots+x_n\frac{s_n}{\sqrt{b_n}}\right)}\,dx,$$

где $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Преобразование Фурье обобщенной функции r^λ было вычислено в п. 3 § 3 гл. II. Используя полученную там формулу, имеем:

$$\widetilde{\mathcal{P}}^\lambda = \frac{e^{\frac{\pi}{2}\lambda i}2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{b_1}\ldots\sqrt{b_n}\,\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{s_1^2}{b_1}+\ldots+\frac{s_n^2}{b_n}\right)^{-\lambda-\frac{n}{2}},$$

или

$$\widetilde{\mathcal{P}}^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}}2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{-i\alpha_1}\ldots\sqrt{-i\alpha_n}\,\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{s_1^2}{\alpha_1}+\ldots+\frac{s_n^2}{\alpha_n}\right)^{-\lambda-\frac{n}{2}}. \tag{2}$$

В силу единственности аналитического продолжения, формула (2) остается справедливой для произвольной квадратичной формы вида (1) с положительно определенной мнимой частью; при этом значения квадратных корней выражаются формулой $\sqrt{z}=|z|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}i\arg z}$. Заметим, что квадратичная форма $\frac{s_1^2}{\alpha_1}+\ldots+\frac{s_n^2}{\alpha_n}$ имеет *отрицательно определенную* мнимую часть.

Пусть теперь

$$P=x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2,$$
$$Q=s_1^2+\ldots+s_p^2-s_{p+1}^2-\ldots-s_{p+q}^2.$$

Выполняя в формуле (2) предельный переход, мы получим при $\alpha_1=$ $=\ldots=\alpha_p=1$, $\alpha_{p+1}=\ldots=\alpha_{p+q}=-1$

$$F[(P+i0)^\lambda]=\frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} \tag{3}$$

и аналогично

$$F[(P-i0)^\lambda]=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}. \tag{3$'$}$$

Применяя формулы (14) п. 3, получаем также после элементарных преобразований коэффициентов:

$$\widetilde{P_+^\lambda}=2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{2i}\left[e^{-\pi\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)i}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}-e^{\pi\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)i}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right], \tag{4}$$
$$\widetilde{P_-^\lambda}=-2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{2i}\left[e^{-\frac{\pi qi}{2}}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}-e^{\frac{\pi qi}{2}}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right]. \tag{4$'$}$$

Отметим, что формулы преобразований Фурье, полученные здесь, остаются справедливыми и для случая, когда P — произвольная вещественная невырожденная квадратичная форма

$$P=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}g_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta.$$

В этом случае под Q следует понимать сопряженную квадратичную форму

$$Q=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}g^{\alpha\beta}s_\alpha s_\beta,$$

где $\sum\limits_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ $(\alpha,\gamma = 1,\ldots,n)$. Кроме того, во все формулы следует добавить справа в качестве дополнительного сомножителя $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$, где Δ — дискриминант квадратичной формы P.

7. Обобщенные функции, связанные с функциями Бесселя. Рассмотрим класс обобщенных функций вида $\mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P},\lambda)$, где $f(z,\lambda)$ — целая функция от z и λ, а $\mathcal{P}$ — комплексная квадратичная форма с положительно определенной мнимой частью. Эти обобщенные функции при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ определяются равенством

$$(\mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P},\lambda),\varphi(x)) = \int \mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P},\lambda)\varphi(x)dx. \tag{1}$$

Очевидно, что $\mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P},\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ является аналитической функцией от λ. С помощью аналитического продолжения мы определяем обобщенную функцию $\mathcal{P}^\lambda f(\mathcal{P},\lambda)$ и для других значений λ. Аналогично определяются функции $\mathcal{P}^\lambda \ln^m \mathcal{P} f(\mathcal{P},\lambda)$.

Нетрудно показать (исходя, например, из разложения функции $f(z,\lambda)$ в степенной ряд по z), что для любой вещественной квадратичной формы P существует предел

$$(P+i0)^\lambda f(P+i0,\lambda) = \lim_{P_1\to 0}(P+iP_1)^\lambda f(P+iP_1,\lambda), \tag{2}$$

где P_1 — положительно определенная квадратичная форма.

Совершенно аналогично определяется для любой вещественной квадратичной формы P обобщенная функция

$$(P-i0)^\lambda f(P-i0,\lambda).$$

Очевидно, что если форма P положительно определена, то

$$(P+i0)^\lambda f(P+i0,\lambda) = (P-i0)^\lambda f(P-i0,\lambda) = P^\lambda f(P,\lambda).$$

Кроме того, так как для всех целых положительных значений n справедливо равенство

$$(P+i0)^n = (P-i0)^n = P^n,$$

то

$$f(P+i0,\lambda) = f(P-i0,\lambda) = f(P,\lambda).$$

Выразим теперь обобщенные функции $(P+i0)^{\lambda}f(P,\lambda)$ и $(P-i0)^{\lambda}f(P,\lambda)$ через аргументы P_+ и P_-. Для этого мы заметим, что, как показано в п. 4,

$$(P+i0)^{\lambda}=P_+^{\lambda}+e^{i\lambda\pi}P_-^{\lambda},$$
$$(P-i0)^{\lambda}=P_+^{\lambda}+e^{-i\lambda\pi}P_-^{\lambda}.$$

Так как

$$P_+^{\lambda}f(P,\lambda)=P_+^{\lambda}f(P_+,\lambda), \text{ и } P_-^{\lambda}f(P,\lambda)=P_-^{\lambda}f(P_-,\lambda)$$

то отсюда следует, что

$$(P+i0)^{\lambda}f(P,\lambda)=P_+^{\lambda}f(P_+,\lambda)+e^{i\lambda\pi}P_-^{\lambda}f(P_-,\lambda) \tag{3}$$

и

$$(P-i0)^{\lambda}f(P,\lambda)=P_+^{\lambda}f(P_+,\lambda)+e^{-i\lambda\pi}P_-^{\lambda}f(P_-,\lambda). \tag{4}$$

Определенный нами класс обобщенных функций достаточно широк. К нему принадлежат, в частности, такие обобщенные функции, как $\mathcal{P}^{\frac{\lambda}{2}}J_{\lambda}(\mathcal{P}^{1/2})$ и $\mathcal{P}^{-\frac{\lambda}{2}}J_{\lambda}(\mathcal{P}^{1/2})$, где $J_{\lambda}(z)$ — бесселева функция. В этом легко убедиться, рассматривая разложение

$$J_{\lambda}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!\Gamma(\lambda+m+1)} \tag{5}$$

бесселевой функции в степенной ряд.

Наряду с функцией $J_{\lambda}(z)$ мы будем рассматривать функции $N_{\lambda}(z)$, $H_{\lambda}^{(1)}(z)$, $H_{\lambda}^{(2)}(z)$, $I_{\lambda}(z)$, $K_{\lambda}(z)$, которые при нецелых значениях λ определяются формулами:

$$\begin{aligned}
N_{\lambda}(z)&=\frac{1}{\sin\lambda\pi}[\cos\lambda\pi I_{\lambda}(z)-J_{-\lambda}(z)],\\
H_{\lambda}^{(1)}(z)&=J_{\lambda}(z)+iN_{\lambda}(z),\\
H_{\lambda}^{(2)}(z)&=J_{\lambda}(z)-iN_{\lambda}(z),\\
I_{\lambda}(z)&=e^{-\frac{\pi\lambda i}{2}}J_{\lambda}(iz),\\
K_{\lambda}(z)&=\frac{\pi}{2\sin\lambda\pi}[I_{-\lambda}(z)-I_{\lambda}(z)].
\end{aligned}$$

Значения этих функций при целых значениях λ определяются с помощью предельного перехода по λ.

Разложения функций $N_\lambda(z^{1/2})$, $H_\lambda^{(1)}(z^{1/2})$, $H_\lambda^{(2)}(z^{1/2})$, $I_\lambda(z^{1/2})$, $K_\lambda(z^{1/2})$ в степенной ряд при нецелых значениях λ легко получаются из разложения (5) функции $J_\lambda(z)$. При этом оказывается, что *эти функции принадлежат к рассматриваемому нами классу функций*, что позволяет ввести такие обобщенные функции, как $K_\lambda\left[(P+i0)^{\frac{1}{2}}\right]$, $(P+i0)^{-\frac{\lambda}{2}}K_\lambda\left[(P+i0)^{\frac{1}{2}}\right]$ и т.д.

8. Преобразования Фурье обобщенных функций $(c^2+P+i0)^\lambda$ **и** $(c^2+P-i0)^\lambda$**.** Мы видели уже в п. 6 § 2 гл. II, что преобразования Фурье обобщенных функций $(x^2-1)^\lambda$, $(1-x^2)^\lambda$, $(1+x^2)^\lambda$ выражаются через бесселевы функции. В этом и следующем пунктах мы покажем, что то же самое имеет место и для преобразований Фурье обобщенных функций $(c^2+P)_+^\lambda$ и $(c^2+P)_-^\lambda$, являющихся n-мерными аналогами обобщенных функций $(x^2-1)^\lambda$, $(1-x^2)^\lambda$, $(1+x^2)^\lambda$.

Начнем с рассмотрения обобщенной функции $(c^2+P)^\lambda$ для положительно определенных квадратичных форм P. Преобразование Фурье обобщенной функции $(c^2+P)^\lambda$ при Re $\lambda<-\frac{n}{2}$ задается интегралом

$$F[(c^2+P)^\lambda]=\int(c^2+P)^\lambda e^{i(x,s)}dx, \tag{1}$$

где $(x,s)=x_1s_1+\ldots+x_ns_n$.

Рассмотрим сначала случай, когда форма P имеет канонический вид $\sum\limits_{k=1}^n x_k^2$. Очевидно, что в этом случае обобщенная функция $F[(c^2+P)^\lambda]$ зависит только от $|s|$ — длины вектора s. Поэтому, не теряя общности, мы можем считать, что вектор s имеет вид $s=(|s|,0,0,\ldots,0)$, и, следовательно, интеграл (1) имеет вид

$$\int(c^2+|x|^2)^\lambda e^{ix_1|s|}dx, \tag{2}$$

где Re $\lambda<-\frac{n}{2}$.

Для вычисления интеграла (2) перейдем к полярным координатам. Проинтегрировав по углам $\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}$ и приняв во внимание, что $\Omega_{n-1}=\frac{2(\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$, мы получим, что интеграл (2) равен

$$\frac{2(\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi(c^2+r^2)^\lambda e^{ir|s|\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1 r^{n-1}d\varphi_1dr.$$

Но известно, что

$$\int\limits_0^\pi e^{ir|s|\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\left(\frac{r|s|}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(r|s|),$$

а

$$\int\limits_0^\infty r^{\frac{n}{2}}(c^2+r^2)^\lambda J_{\frac{n}{2}-1}(r|s|)dr = \left(\frac{2}{|s|}\right)^{\lambda+1}\frac{c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)} K_{\frac{n}{2}+\lambda}(c|s|).$$

Поэтому интеграл (2) равен при Re $\lambda < -\frac{n}{2}$ следующему выражению:

$$\int (c^2+|x|^2)^\lambda e^{ix_1|s|}dx = \frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{c}{|s|}\right)^{\frac{n}{2}+\lambda} K_{\frac{n}{2}+\lambda}(c|s|). \tag{3}$$

При остальных значениях λ справедливость формулы (3) устанавливается с помощью аналитического продолжения по λ.

Чтобы получить формулу для преобразования Фурье любой положительно определенной квадратичной формы, запишем равенство (3) в виде

$$\sqrt{\Delta}\int (c^2+|x|^2)^\lambda e^{i(x,s)}dx = \frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{c}{|s|}\right)^{\frac{n}{2}+\lambda} K_{\frac{n}{2}+\lambda}(c|s|) \tag{4}$$

(дискриминант Δ квадратичной формы $|x|^2 = \sum\limits_{k=1}^n x_k^2$ равен единице). При преобразовании координат, переводящем форму $|x|^2$ в форму $P = \sum\limits_{k,r=1}^n g_{kr}x_k x_r$, выражение $\sqrt{\Delta}dx$ остается инвариантным, а квадрат длины вектора s из сопряженного пространства принимает вид $\sum\limits_{k,r=1}^n g^{kr}s_k s_r$ $\left(Q = \sum\limits_{k,r=1}^n g^{kr}s_k s_r\right.$ — квадратичная форма, двойственная форме $\left.P = \sum\limits_{k,r=1}^n g_{kr}s_k s_r\right)$. Поэтому при таком преобразовании координат равенство (4) переходит в равенство

$$\sqrt{\Delta}\int (c^2+P)^\lambda e^{i(x,s)}dx = \frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left(cQ^{\frac{1}{2}}\right)}{Q^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}.$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом.

Пусть P — положительно определенная квадратичная форма, а Q — двойственная ей форма. Тогда преобразование Фурье обобщенной функции $(c^2+P)^\lambda$ равно

$$F[(c^2+P)^\lambda] = \frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left(cQ^{\frac{1}{2}}\right)}{Q^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}, \tag{5}$$

где Δ — дискриминант формы P.

Пусть теперь P — произвольная вещественная квадратичная форма. В этом случае мы будем рассматривать обобщенные функции $(c^2+P+i0)^\lambda$ и $(c^2+P-i0)^\lambda$, определяемые соответственно равенствами

$$(c^2+P+i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0}(c^2+P+i\varepsilon P_1)^\lambda \tag{6}$$

и

$$(c^2+P-i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0}(c^2+P-i\varepsilon P_1)^\lambda, \tag{7}$$

где $\varepsilon>0$, а P_1 — положительно определенная квадратичная форма. Существование пределов (6) и (7) при $c=0$ было доказано в п. 4, а существование их при $c\neq 0$ следует из отсутствия особых точек на поверхности $c^2+P=0$.

Если квадратичная форма $\mathcal{P}$ изменяется в «верхней полуплоскости», то двойственная ей форма Q изменяется в «нижней полуплоскости». Поэтому в силу единственности аналитического продолжения из формулы (5) следует, что

$$F[(c^2+P+i0)^\lambda] = \frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}. \tag{8}$$

Через $\sqrt{\Delta}$ в формуле (8) обозначено аналитическое продолжение ветви этой функции, принимающей положительные значения для положительно определенных квадратичных форм[1)]. Отметим, что $\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|}e^{\frac{q\pi i}{2}}$, если каноническое представление формы P имеет q отрицательных членов.

Аналогично доказывается, что

$$F[(c^2+P-i0)^\lambda] = \frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}. \tag{9}$$

[1)] Аналогичное аналитическое продолжение было подробно рассмотрено в п. 3, и мы не проводим соответствующих рассмотрений в этом месте.

В этом случае имеет место равенство $\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|}e^{-\frac{q\pi i}{2}}$, где q — число отрицательных членов в каноническом представлении формы P.

Выразим теперь обобщенные функции $F[(c^2+P+i0)^\lambda]$ и $F[(c^2+P-i0)^\lambda]$ через обобщенные функции Q_+ и Q_-. Используя разложение $K_\lambda(z)$ в степенной ряд и формулу (4) из п. 7, мы получаем после несложных преобразований:

$$F[(c^2+P+i0)^\lambda] = \\ = \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{q\pi i}{2}}c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \cdot \left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} + \frac{\pi i}{2}\frac{H^{(1)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right] \quad (10)$$

и

$$F[(c^2+P-i0)^\lambda] = \\ = \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}}e^{\frac{q\pi i}{2}}c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}} \cdot \left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} - \frac{\pi i}{2}\frac{H^{(2)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]. \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) значительно упрощаются, если форма P знакоопределена: если P — положительно определенная форма, то в квадратных скобках остаются лишь первые слагаемые, а если P — отрицательно определенная форма, то лишь вторые слагаемые.

9. Преобразования Фурье обобщенных функций $(c^2+P)_+^\lambda$ и $(c^2+P)_-^\lambda$. Рассмотрим теперь обобщенные функции $(c^2+P)_+^\lambda$ и $(c^2+P)_-^\lambda$. Они являются линейными комбинациями обобщенных функций $(c^2+P+i0)^\lambda$ и $(c^2+P-i0)^\lambda$. Поэтому их преобразования Фурье являются линейными комбинациями преобразований Фурье обобщенных функций $(c^2+P+i0)^\lambda$ и $(c^2+P-i0)^\lambda$, а именно:

$$F[(c^2+P)_+^\lambda] = \frac{i}{2\sin\lambda\pi}\{e^{-i\lambda\pi}F[(c^2+P+i0)^\lambda] - e^{i\lambda\pi}F[(c^2+P-i0)^\lambda]\} \quad (1)$$

и

$$F[(c^2+P)_-^\lambda] = -\frac{i}{2\sin\lambda\pi}\{F[(c^2+P+i0)^\lambda] - F[(c^2+P-i0)^\lambda]\}. \quad (2)$$

Подставим в эти формулы вместо $F[(c^2+P+i0)^\lambda]$ и $F[(c^2+P-i0)^\lambda]$ выражения (8) и (9) из п. 8. Мы получим:

$$\frac{F[(c^2+P)_+^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)} = -\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}} i\pi^{\frac{n}{2}-1} c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}} \times$$
$$\times \left\{ e^{-i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} - e^{i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} \right\} \quad (3)$$

и

$$\frac{F[(c^2+P)_-^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}} i\pi^{\frac{n}{2}-1} c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}} \times$$
$$\times \left\{ e^{-\frac{q\pi i}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} - e^{\frac{q\pi i}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} \right\}. \quad (4)$$

Можно выразить обобщенные функции $\frac{F[(c^2+P)_+^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)}$ и $\frac{F[(c^2+P)_-^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)}$ через обобщенные функции Q_+^λ и Q_-^λ. Для этого надо подставить в формулы (1) и (2) вместо $F[(c^2+P+i0)^\lambda]$ и $F[(c^2+P-i0)^\lambda]$ выражения (10) и (11) из п. 8. При этом мы получаем

$$\frac{F[(c^2+P)_+^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}-1} c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}} \times$$
$$\times \left\{ -\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi \frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} + \frac{\pi}{2\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi \frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} + \sin\frac{p\pi}{2} \frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} \right] \right\}. \quad (5)$$

Через p в этой формуле обозначено число положительных членов в каноническом представлении формы P, $p+q=n$.

Формула для $\frac{F[(c^2+P)_-^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)}$ получается из формулы для $\frac{F[(c^2+P)_+^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)}$ заменой $\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi$ на $-\sin\frac{q}{2}\pi$ и $\sin\frac{p\pi}{2}$ на $-\sin\left(\lambda+\frac{p}{2}\right)\pi$. Она имеет вид

$$\frac{F[(c^2+P)_-^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{\sin\frac{q\pi}{2}\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\pi}{2\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi}\left[\sin\frac{q\pi}{2}\frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} + \sin\left(\lambda+\frac{p}{2}\right)\pi\frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]\right\}. \tag{6}$$

Если в формулах (3) и (4) положить $c=0$, то эти формулы перейдут в выведенные в п. 6 формулы (4) и (4′) для $\widetilde{P_+^\lambda}$ и $\widetilde{P_-^\lambda}$. Частными случаями этих формул являются установленные в п. 6 § 2 гл. II формулы для преобразований Фурье обобщенных функций $(1-x^2)^\lambda$, $(1+x^2)^\lambda$, $(x^2-1)^\lambda$.

10. Преобразования Фурье обобщенных функций $\frac{(c^2+P)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ и $\frac{(c^2+P)_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ при целых значениях λ. Преобразования Фурье обобщенной функции $\delta(c^2+P)$ и ее производных. Выведенные в п. 9 формулы преобразований Фурье обобщенных функций $\frac{(c^2+P)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ и $\frac{(c^2+P)_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ требуют дополнительного исследования при целых значениях λ. Это связано с тем, что обобщенные функции

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} \text{ и } \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$$

имеют полюсы при целых значениях λ.

Обобщенная функция $\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$ определяется следующим разложением:

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} = \frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\lambda}}{2\sin\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)\pi} \times$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{-2\lambda-n+2m}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}+m}}{m!\Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}+m+1\right)} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2m}(Q+i0)^m}{m!\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}+m+1\right)}\right]. \tag{1}$$

Но согласно п. 4 обобщенная функция $(Q+i0)^\lambda$ имеет при $\lambda=-\frac{n}{2}-k$ полюс с вычетом[1)]

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(Q+i0)^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi q i}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{4^k k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\left(\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}\right)^k \delta(x).$$

Поэтому обобщенная функция $\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$ имеет при $\lambda=s$, $s>0$ полюс с вычетом

$$\underset{\lambda=s}{\text{выч.}}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} = \\ = \frac{(-1)^s\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{c}{2}\right)^{s-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi q i}{2}}\sqrt{|\Delta|}}{2}\sum_{m=0}^{s}\frac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{-2m}}{4^m m!(s-m)!}L^m\delta(x), \quad (2)$$

где положено

$$L=\sum_{r,t=1}^{n} g^{rt}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_t}$$

(при вычислении вычета мы воспользовались известным соотношением $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$).

Найдем теперь правильную часть обобщенной функции $\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$ при $\lambda=s$. Это легко сделать, если n — нечетное число. В этом случае правильная часть обобщенной функции $\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$ при $\lambda=s$ является суммой двух слагаемых. Первое из них выражается рядом (1) при $\lambda=s$, в котором под $(Q+i0)^{-s-\frac{n}{2}+m}$ при $m\leqslant s$ понимается значение правильной части обобщенной функции $(Q+i0)^\lambda$ при $\lambda=-s-\frac{n}{2}+m$. Второе слагаемое имеет вид $\sum_{m=0}^{s}\alpha_m\beta_m$, где

$$\alpha_m = \underset{\lambda=-s-\frac{n}{2}+m}{\text{выч.}}(Q+i0)^\lambda,$$

$$\beta_m=\frac{(-1)^m}{2(m!)}\left(\frac{c}{2}\right)^{2m-\frac{n}{2}}\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{-\lambda}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}-m\right)}\right]_{\lambda=s}.$$

[1)] Дискриминант формы Q равен $\frac{1}{\Delta}$, где Δ — дискриминант формы P.

Эту правильную часть мы обозначим через $\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}$.

Несколько сложнее обстоит дело при четных значениях n[1]. В этом случае определим обобщенную функцию

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}$$

как сумму двух слагаемых, из которых одно опять равно $\sum\limits_{m=0}^{s}\alpha_m\beta_m$, а второе есть сумма ряда

$$(-1)^{\frac{n}{2}+s}\left(\ln\frac{c(Q+i0)}{2}+\gamma\right)\frac{I_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}+ \\ +\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+s}}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n}{2}+s}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}+s}\frac{(-1)^m(m-1)!}{\left(\frac{n}{2}+s-m\right)!}\left(\frac{c}{2}\right)^{-2m}(Q+i0)^{-m}+ \\ +\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+s}}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n}{2}+s}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h_{m+\frac{n}{2}+s}+h_m}{m!\left(\frac{n}{2}+s-m\right)!}\left(\frac{c}{2}\right)^{2m}(Q+i0)^m, \quad (3)$$

где γ — постоянная Эйлера, а $h_m=\sum\limits_{r=1}^{m}\frac{1}{r}$.

Как и выше, здесь под $(Q+i0)^{-m}$, $m\geqslant\frac{n}{2}$, понимается правильная часть обобщенной функции $(Q+i0)^\lambda$ при $\lambda=-m$. Обобщенная функция $\frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}$ равна значению правильной части обобщенной функции $\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$ при $\lambda=s$.

Рассмотрим теперь обобщенную функцию

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} \quad (4)$$

при целых отрицательных значениях λ, $\lambda=-s$. В этом случае она равна $\frac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}$, где при нечетном значении n обобщенная функция

[1] Разложение (1), определяющее обобщенную функцию $\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$, теряет при этом смысл.

$\frac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}}$ определяется рядом (1), а при четном значении n — рядом (3).

Аналогичные утверждения справедливы и для функции $\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}}$ с той лишь разницей, что вычет этой функции при $\lambda = s$ равен

$$\underset{\lambda=s}{\text{выч.}}\, \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} = \\ = \frac{(-1)^s \pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{c}{2}\right)^{s-\frac{n}{2}} e^{\frac{\pi q i}{2}} \sqrt{|\Delta|}}{2} \sum_{m=0}^{s} \frac{(-1)^m \left(\frac{c}{2}\right)^{-2m}}{4^m m!(s-m)!}. \quad (5)$$

Мы можем теперь перейти к рассмотрению обобщенных функций $\frac{F[(c^2+P)_+^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)}$ и $\frac{F[(c^2+P)_-^\lambda]}{\Gamma(\lambda+1)}$ при целых значениях λ. Если $\lambda=-s$, где s — целое положительное число, то левая часть равенства (3) из п. 9 обращается в $\delta^{(s-1)}(c^2+P)$. Поэтому из формулы (3) п. 9 следует, что

$$F[\delta^{(s-1)}(c^2+P)] = (-1)^{s+1} \frac{i}{\sqrt{|\Delta|}} 2^{\frac{n}{2}-s} \pi^{\frac{n}{2}-1} c^{\frac{n}{2}-s} \times \\ \times \left[e^{-\frac{\pi i q}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}-s} c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}} - e^{\frac{\pi i q}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-s\right)}} \right]. \quad (6)$$

В частности, имеет место формула

$$F[\delta(c^2+P)] = -\frac{i}{\sqrt{|\Delta|}} (2\pi c)^{\frac{n}{2}-1} \times \\ \times \left[-e^{-\frac{\pi q i}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}-1}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}} + e^{\frac{\pi q i}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}-1}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}} \right]. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь целые положительные значения s. Имеет место формула

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} = \frac{c_1}{\lambda - s} + \frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}} + \ldots,$$

где через c_1 обозначен вычет обобщенной функции

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$$

в точке $\lambda = s$, а невыписанные члены стремятся к нулю при $\lambda \to s$. Аналогично,

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} = \frac{c_2}{\lambda - s} + \frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}} + \ldots,$$

где c_2 — вычет обобщенной функции

$$\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}}$$

в точке $\lambda = s$.

Подставляя эти разложения в формулы (3) и (4) из п. 9 и переходя к пределу при $\lambda \to s$, мы получаем:

$$\frac{F[(c^2+P)_-^s]}{\Gamma(s+1)} = \frac{i \cdot 2^{s+\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1} c^{\frac{n}{2}+s}}{\sqrt{|\Delta|}} \times \\ \times \left[e^{-\frac{q\pi i}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}} - e^{\frac{q\pi i}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}} \right] \quad (8)$$

и

$$\frac{F[(c^2+P)_+^s]}{\Gamma(s+1)} = (-1)^{s+1} i 2^{s+\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1} c^{\frac{n}{2}+s} \times \\ \times \left[e^{-\frac{q\pi i}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}} - e^{\frac{q\pi i}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+s\right)}} \right] + \\ + (2\pi)^n \sum_{m=0}^{s} \frac{(-1)^m \left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m! (s-m)!} L^m \delta(x). \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует, что

$$\frac{F[(c^2+P)^s]}{\Gamma(s+1)} = (2\pi)^n \sum_{m=0}^{s} \frac{(-1)^m \left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m! (s-m)!} L^m \delta(x). \quad (10)$$

§ 3. Однородные функции

1. Введение. Мы встречались уже с различными типами обобщенных однородных функций в главе I (§ 3–4), а также в § 2 этой главы. В этом параграфе мы рассмотрим произвольные обобщенные однородные функции любой степени в n-мерном пространстве.

Напомним, что обобщенная функция $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ называется однородной функцией степени λ, если при любом $\alpha>0$

$$f(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)=\alpha^{\lambda}f(x_1,\dots,x_n) \tag{1}$$

или, что то же,

$$\left(f,\varphi\left(\frac{x_1}{\alpha_1},\dots,\frac{x_n}{\alpha_n}\right)\right)=\alpha^{\lambda+n}(f,\varphi(x_1,\dots,x_n)). \tag{2}$$

В частности, обычной непрерывной при $x\neq 0$ однородной функции $f(x)$ степени λ с $\mathrm{Re}\,\lambda>-n$ соответствует обобщенная функция

$$(f,\varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx,$$

которая также является однородной функцией степени λ. Если же $f(x)$ обычная однородная функция степени λ с $\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant -n$, то ее особенность в начале координат не интегрируема, и вопрос о том, можно ли этой функции сопоставить ее регуляризацию, которая была бы также однородной функцией степени λ, требует специального рассмотрения. Подчеркивая это, мы будем называть такую (обычную) функцию $f(x)$ *формально однородной.*

Нам понадобится в дальнейшем следующее свойство, характеризующее обобщенные однородные функции степени λ.

Для того чтобы обобщенная функция f была однородной степени λ, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lambda f. \tag{3}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что в применении к любой основной функции $\varphi(x)$ это уравнение записывается в виде

$$-\left(f,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(x_i\varphi)}{\partial x_i}\right)=\lambda(f,\varphi),$$

т.е.

$$-\left(f, \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = (\lambda + n)(f, \varphi). \tag{4}$$

Пусть обобщенная функция f — однородная степени λ:

$$\left(f, \varphi\left(\frac{x_1}{\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f, \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Продифференцируем это равенство по α. При этом слева, как нетрудно проверить, операция дифференцирования переносится на основную функцию, и мы получаем:

$$-\left(f, \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi\left(\frac{x_1}{\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{\alpha}\right)\right) = (\lambda + n)\alpha^{\lambda+n-1}(f, \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Остается положить $\alpha = 1$, чтобы прийти к равенству (4).

Обратно, пусть обобщенная функция f удовлетворяет уравнению (4). Рассмотрим дробь

$$\frac{\left(f, \varphi\left(\frac{x_1}{\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{\alpha}\right)\right)}{\alpha^{\lambda+n}}$$

при $\alpha > 0$. Дифференцируя ее по α, из условия (4) получаем, что производная равна нулю. Значит,

$$\frac{\left(f, \varphi\left(\frac{x_1}{\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{\alpha}\right)\right)}{\alpha^{\lambda+n}} = \text{const} = \frac{(f, \varphi(x_1, \ldots, x_n))}{1},$$

т.е. f — однородная функция степени λ.

2. Положительные однородные функции нескольких независимых переменных. Рассмотрим непрерывную однородную функцию первой степени от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, положительную во всем пространстве, за исключением начала координат; например, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ или вообще $P^{\frac{1}{2m}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — положительно определенная форма степени $2m$. Обозначим эту функцию через $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и для $\mathrm{Re}\,\lambda > -n$ рассмотрим обобщенную функцию

$$(f^\lambda(x), \varphi(x)) = \int f^\lambda(x)\varphi(x)dx. \tag{1}$$

Здесь $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, как обычно, — основная (т.е. финитная бесконечно дифференцируемая) функция. Легко проверить, что для тех λ, для которых интеграл сходится, формула (1) определяет однородную обобщенную функцию степени λ, аналитически зависящую от λ. Покажем, что *обобщенная функция f^λ допускает аналитическое продолжение во всю плоскость комплексного переменного λ, за исключением точек $\lambda = -n, \ldots, -n-k, \ldots$, в которых f^λ может иметь простые полюсы.*

Полученная обобщенная функция является регуляризованным значением интеграла $\int f^\lambda \varphi dx$ (см. гл. I, § 1, п. 7), и так как регуляризованное значение интеграла при $\lambda > -n$ совпадает с обычным интегралом, то мы сохраним для регуляризованного значения интеграла обозначение $\int f^\lambda \varphi dx$.

Для доказательства сформулированного утверждения выберем в n-мерном пространстве произвольную область G с гладкой границей Γ, содержащую начало координат, и представим интеграл (1), где $\mathrm{Re}\,\lambda > -n$, в виде

$$(f^\lambda, \varphi) = \int\limits_G f^\lambda(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]dx + \int\limits_{R-G} f^\lambda(x)\varphi(x)dx + \varphi(0)\int\limits_G f^\lambda(x)dx \tag{2}$$

($R - G$ — дополнение к области G). Преобразуем $\int f^\lambda(x)dx$. Так как $f^\lambda(x)$ — однородная функция степени λ, то

$$\sum x_k \frac{\partial f^\lambda(x)}{\partial x_k} = \lambda f^\lambda(x)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_G f^\lambda(x)dx = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^n \int\limits_G x_k \frac{\partial f^\lambda(x)}{\partial x_k}dx. \tag{3}$$

Проинтегрировав по частям по соответствующей переменной каждое слагаемое правой части, получим, что правая часть формулы (3) может быть представлена в виде

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_\Gamma f^\lambda(x)[x_1 dx_2 \ldots dx_n - x_2 dx_1 dx_3 \ldots dx_n + \ldots$$
$$\ldots \pm x_n dx_1 \ldots dx_{n-1}] - \frac{n}{\lambda}\int\limits_G f^\lambda(x)dx$$

(Γ — граница области G) и, значит,

$$\int\limits_G f^\lambda(x)dx = \frac{1}{\lambda+n}\int\limits_G f^\lambda(x)[x_1 dx_2 \ldots dx_n - \ldots \pm x_n dx_1 \ldots dx_{n-1}]. \quad (4)$$

Подставляя найденное значение $\int\limits_G f^\lambda(x)dx$ в формулу (2), мы получаем:

$$(f^\lambda, \varphi) = \int\limits_G f^\lambda(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]dx + \int\limits_{R-G} f^\lambda(x)\varphi(x)dx + \\ + \frac{\varphi(0)}{\lambda+n}\int\limits_\Gamma f^\lambda(x)[x_1 dx_2 \ldots dx_n - \ldots \pm x_n dx_1 \ldots dx_{n-1}]. \quad (5)$$

Так как $f^\lambda(x)$ — однородная функция степени λ, а $\varphi(x) - \varphi(0)$ имеет при $x=0$ нуль 1-го порядка, то первый интеграл правой части сходится для $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$. Второй и третий интегралы сходятся для всех λ, так как при интегрировании исключена окрестность начала и $\varphi(x)$ финитна. Таким образом, правая часть формулы (5) имеет смысл при $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$ и представляет собой аналитическую функцию λ, первый полюс которой зависит от размерности пространства, а именно находится в точке $\lambda = -n$.

Формула (2) дает, следовательно, явный вид аналитического продолжения обобщенной функции $\int f^\lambda(x)\varphi(x)dx$ на область $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -n$. Прежде чем перейти к дальнейшему аналитическому продолжению функции, изучим более подробно важный для дальнейшего вычет при $\lambda = -n$. Вычет $\int f^\lambda(x)\varphi(x)dx$ в точке $\lambda = -n$, как это видно из формулы (5), равен

$$\varphi(0)\int\limits_\Gamma \frac{x_1 dx_2 \ldots dx_n - \ldots \pm x_n dx_1 \ldots dx_{n-1}}{f^n(x)}. \quad (6)$$

Будем в дальнейшем дифференциальную форму

$$x_1 dx_2 \ldots dx_n - x_2 dx_1 dx_3 \ldots dx_n + \ldots \pm x_n dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

коротко обозначать ω. Легко проверить, что если σ — элемент поверхности, то $\frac{1}{n}\int\limits_\sigma \omega$ есть объем конуса с вершиной в начале координат, опирающегося на площадку σ.

Предположим, что поверхность Γ задается уравнением $P(x) = 1$, где $P(x)$ — вспомогательная однородная функция размерности 1, и покажем, что тогда форма ω

связана с поверхностью $P(x)-1=0$ в смысле п. 2 § 1. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что в точках поверхности Γ

$$dP\cdot\omega = dx_1\dots dx_n.$$

Подставим сюда $dP=\frac{\partial P}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial P}{\partial x_n}dx_n$ и выражение формы ω. Используя правила $dx_i dx_j = -dx_j dx_i (i\neq j)$ и $dx_i dx_i=0$, получаем слева

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}x_1+\dots+\frac{\partial P}{\partial x_n}x_n\right)dx_1\dots dx_n.$$

По формуле Эйлера величина, стоящая в скобках, есть просто P и остается воспользоваться тем, что $P=1$ на поверхности Γ.

Вычет функции $\int f^\lambda(x)\varphi(x)dx$ при $\lambda=-n$ запишется коротко в виде

$$\varphi(0)\int\limits_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}. \tag{7}$$

Выражение (7), будучи вычетом аналитической функции, не зависит от выбора поверхности Γ[1]. Следовательно, $\int\limits_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}$ определяется значениями функции $f^{-n}(x)$ в любой окрестности начала координат.

Мы назовем величину $\int\limits_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}$ *вычетом (обычной однородной степени $-n$) функции $f^{-n}(x)$ в начале координат.* (Подчеркнем, что он не совпадает с вычетом аналитической обобщенной функции f^λ в точке $\lambda=-n$: последний равен $\int\limits_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}\delta(x)$.) Отметим, что если вычет функции $f^{-n}(x)$ в начале координат равен нулю, то аналитическая обобщенная функция $f^\lambda(x)$ не имеет полюса при $\lambda=-n$; в силу предложения 4 из п. 1 формула (5) определяет тогда при $\lambda=-n$ однородную обобщенную функцию степени $-n$. Это обстоятельство мы будем иметь в виду в следующем пункте этого параграфа.

Вычет однородной функции степени $-n$ имеет простой геометрический смысл. Действительно, выберем в качестве замкнутой поверхности Γ поверхность уровня $f(x)=1$. Тогда вычет перепишется в виде $\int\limits_\Gamma\omega$. Поскольку $\int\limits_\sigma\omega$ есть n-кратный объем конуса, опирающегося на площадку σ, мы получаем, что вычет функции $f^{-n}(x)$, т.е. $\int\limits_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}$ равен nV, где V — объем области $f(x)\leqslant 1$.

Перейдем теперь к дальнейшему аналитическому продолжению интеграла. Тем же самым способом, что и ранее, вычитая из $\varphi(x)$ и добавляя дальнейшие члены ее ряда Тейлора, можно получить формулу, аналогичную (5) и дающую аналитическое продолжение нашей

[1] Мы предоставляем читателю доказать это непосредственно

обобщенной функции в полуплоскость $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-k-1$. Для этого нужно только преобразовать интегралы вида

$$\int_G f^\lambda(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\, dx,$$

подобно тому как это сделано для

$$\int_G f^\lambda(x) dx,$$

в интегралы по поверхности Γ, ограничивающей G, пользуясь однородностью функции $f^\lambda(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Окончательная формула будет иметь следующий вид:

$$\int_G f^\lambda(x)\varphi(x)dx = \int_G f^\lambda(x) \Big[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^k \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\Big] dx + \int_{R-G} f^\lambda(x)\varphi(x)dx +$$
$$+ \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!(\lambda+n+m)} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m} \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \int_\Gamma f^\lambda(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \omega. \quad (8)$$

Из этой формулы следует, что $\int f^\lambda(x)\varphi(x)dx$ представляет собой аналитическую функцию для $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-k-1$, $\lambda \neq -n, -n-1, \ldots, -n-k$ (при $\lambda = -n-k-1$ перестает сходиться первый интеграл). В точках $\lambda = -n-m$ $(m = 0, 1, \ldots, k)$ $\int f^\lambda(x)\varphi(x)dx$ имеет простые полюсы, вычеты которых очевидны из последнего слагаемого формулы (8). А именно, вычет обобщенной функции $f^\lambda(x)$ при $\lambda = -n-m$ равен

$$\frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m} \frac{\partial^m \delta(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \int_\Gamma \frac{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+m}(x)} \omega. \quad (9)$$

Таким образом, для обобщенной функции $f^\lambda(x)$ справедливы, например, соотношения:

$$\lim_{\lambda\to -n} (\lambda+n) f^\lambda(x) = \delta(x) \int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)},$$

$$\lim_{\lambda\to -n-1} (\lambda+n+1) f^\lambda(x) = -\frac{\partial\delta(x)}{\partial x_1} \int_\Gamma \frac{x_1\omega}{f^{n+1}(x)} - \ldots - \frac{\partial\delta(x)}{\partial x_n} \int_\Gamma \frac{x_n\omega}{f^{n+1}(x)}$$

и т.д.

Интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+m}(x)}\omega$ не зависит от выбора поверхности Γ. Если принять за Γ поверхность $f(x)=1$, то мы получим для этого интеграла выражение $\int\limits_{f=1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\omega$, равное с точностью до множителя одному из моментов m-го порядка области, ограниченной поверхностью $f=1$.

Это доказывается следующим образом. Рассмотрим момент области $f \leqslant 1$, равный интегралу

$$I = \int\limits_{f\leqslant 1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,dx.$$

Введем в области $f \leqslant 1$ новые координаты $u_1 = f$, $u_2, \ldots, u_n$ с якобианом $D\binom{x}{u} \neq 0$. В этих координатах

$$dx = D\binom{x}{u}du_1 du_2\ldots du_n.$$

Обозначим

$$\omega = D\binom{x}{u}du_2\ldots du_n;$$

на поверхности $f = 1$ эта форма совпадает с рассматриваемой в тексте. Запишем интеграл I в виде

$$I = \int\limits_0^1 \int\limits_{f=c} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega dc.$$

Очевидно, что внутренний интеграл есть однородная функция аргумента c степени $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n - n + 1$. Значит,

$$\int\limits_{f=c} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega = c^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n-n+1}\int\limits_{f=1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega$$

и

$$I = \int\limits_{f=1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega\int\limits_0^1 c^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n-n+1}dc,$$

так что

$$\int\limits_{f\leqslant 1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,dx = \frac{1}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n-n+2}\int\limits_{f=1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\,\omega.$$

Таким образом, вычет *обобщенной аналитической функции* $f^\lambda(x)$ *в точке* $\lambda = -n-m$ *представляет собой линейный дифференциальный оператор* m*-го порядка от* $\delta(x)$ *с постоянными коэффициентами. Коэффициенты с точностью до множителя, не зависящего от* f*,* *равны всевозможным моментам m-го порядка области, ограниченной поверхностью* $f = 1$.

Интегралы

$$\int_{\Gamma} \frac{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+m}(x)} \omega \qquad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m)$$

мы аналогично предыдущему назовем *вычетами (обычной однородной степени $-n-m$) функции* $f^{-n-m}(x)$. Вычет обобщенной аналитической функции $f^\lambda(x)$ в точке $\lambda = -n-m$ равен их линейной комбинации с коэффициентами $\frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m \delta(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Если все вычеты обычной однородной функции $f^{-n-m}(x)$ равны нулю, то по формуле (8) при $\lambda = -n-m$ ей отвечает обобщенная однородная функция степени $-n-m$. Это обстоятельство мы будем иметь в виду в п. 5 этого параграфа.

Для вычисления обобщенной функции f^λ при $\operatorname{Re} \lambda < -n$ можно дать вместо формулы (8) более удобную и симметричную формулу. Для этого заметим, что при $\operatorname{Re} \lambda < -n-k$ интегралы вида

$$\int_{R-G} f^\lambda(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \, dx \qquad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m < k) \tag{10}$$

сходятся. Граница области $R-G$ есть та же поверхность Γ (граница G) с противоположной ориентацией, и поэтому, преобразуя интеграл (10) в поверхностный, мы получим:

$$\int_{R-G} f^\lambda(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \, dx = -\frac{1}{\lambda + m + n} \int_{\Gamma} f^\lambda(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \omega.$$

Заменяя, таким образом, в формуле (8) поверхностные интегралы по Γ интегралами по области $R-G$ и объединяя затем все интегралы в один, мы получим для регуляризованного значения интеграла представление

$$\int f^\lambda(x) \varphi(x) dx = \int f^\lambda(x) \Big[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots \\ \ldots - \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^k \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \Big] dx, \tag{11}$$

справедливое в полосе $-n-k-1 < \operatorname{Re} \lambda < -n-k$.

Заметим, что если $\Phi(x)$ — произвольная обычная однородная функция степени λ (не обязательно знакоположительная), имеющая особенность только в начале координат, и $-n-k-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n-k$, то формула (11) применима для регуляризации интеграла

$$\int \Phi(x)\varphi(x)dx.$$

Получаемый при этом функционал представляет собой однородную обобщенную функцию степени λ. Таким образом, всякой формально однородной (обычной) функции $\Phi(x)$ степени λ при $\lambda \neq -n-k$ отвечает по формуле (11) обобщенная однородная функция той же степени, являющаяся регуляризацией функции $\Phi(x)$. Так как однородную функцию любой степени, имеющую особенность только в начале координат, можно определить, задав произвольно ее значения на любой замкнутой поверхности Γ, пересекающейся только в одной точке с каждым выходящим из начала координат лучом, мы можем сказать, что *всякой непрерывной функции на замкнутой поверхности* Γ *отвечает обобщенная однородная функция степени* λ *при* $\lambda \neq -n-k$.

3. Обобщенные однородные функции степени $-n$**.** Рассмотрим (обычную) формально однородную функцию $\Phi(x) \equiv \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не обязательно знакоположительную, степени $-n$, с особенностью (т.е. с точкой локальной неинтегрируемости) только в начале координат. Чтобы определить соответствующую обобщенную функцию и тем самым регуляризовать расходящийся интеграл

$$\int \Phi(x)\varphi(x)dx,$$

выберем произвольную область G, содержащую начало координат, и положим

$$\int \Phi(x)\varphi(x)dx = \int\limits_G \Phi(x)[\varphi(x)-\varphi(0)]dx + \int\limits_{R-G} \Phi(x)\varphi(x)dx. \qquad (1)$$

Определенное таким образом регуляризованное значение интеграла

$$\int \Phi(x)\varphi(x)dx$$

зависит, естественно, от выбора области G. Обозначим полученную обобщенную функцию символом $\Phi|_G$ и выясним, что происходит с этой функцией при замене области G другой областью G_1. Непосредственно очевидно, что заменяя G на $G_1 \subset G$, мы получим значение функционала, отличающееся на

$$\varphi(0)\int\limits_{G-G_1} \Phi(x)dx$$

от исходного. Таким образом,

$$\Phi|_G - \Phi|_{G_1} = \delta(x) \int\limits_{G-G_1} \Phi(x)dx. \tag{2}$$

Так как из формулы (2) следует, что разность обобщенных функций $\Phi|_G$ и $\Phi|_{G_1}$ есть однородная обобщенная функция порядка $-n$, то *однородность или неоднородность* обобщенной функции, определенной формулой (1), не зависит от выбора области G.

Теперь нас интересует вопрос, когда обобщенная функция, определенная формулой (1), будет однородной, степени $-n$, т.е. когда выполняется условие

$$\left(\Phi, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = (\Phi, \varphi).$$

Прежде чем проводить вычисление, сравним формулу (1) этого пункта с формулой (5) п. 2. Если в первую из этих формул подставить $\Phi = f^{-n}$, где $f(x)$ — положительная однородная функция первой степени, то получится формула (5) п. 2, в которой интеграл $\int\limits_{\Gamma} f^{-n}(x)\omega$, т.е. вычет функции $f^{-n}(x)$, заменен нулем. С другой стороны, обращение в нуль этого вычета необходимо и достаточно для того, чтобы обобщенная аналитическая функция $f^{\lambda}(x)$ не имела полюса при $\lambda = -n$, т.е., как мы отмечали в п. 2, для того, чтобы формула (5) п. 2 определяла при $\lambda = -n$ обобщенную однородную функцию степени $-n$.

Сейчас мы покажем, что в общем случае для того, чтобы обобщенная функция (1) была однородной степени $-n$, необходимо и достаточно аналогичное условие.

Сделав в интеграле

$$\int\limits_G \Phi(x)\left[\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \varphi(0)\right]dx + \int\limits_{R-G} \Phi(x)\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx$$

замену переменных $\frac{x_k}{\alpha} = x'_k$ и обозначив через αG область, получаемую из области G подобным преобразованием с коэффициентом α, будем иметь:

$$\int\limits_G \Phi(x)\left[\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \varphi(0)\right]dx + \int\limits_{R-G} \Phi(x)\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx =$$

$$= \int\limits_G \Phi(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]dx + \int\limits_{R-G} \Phi(x)\varphi(x)dx + \varphi(0) \int\limits_{G-\alpha G} \Phi(x)dx.$$

Очевидно, что для однородности обобщенной функции $\int \Phi(x)\varphi(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{G-\alpha G} \Phi(x)dx = 0$$

для любого α.

Преобразуем это условие. Для этого введем в области $G - \alpha G$ систему координат $\rho, u_1, \ldots, u_{n-1}$, где $\rho = 1$ и $\rho = \alpha$ — уравнения поверхностей Γ и $\alpha\Gamma$ соответственно, а $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ координаты на поверхностях $\rho = \text{const}$.

Обозначим $x_k = \rho x'_k$. Тогда

$$dx_1 \ldots dx_n = D\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \rho & u_1 & \ldots & u_{n-1} \end{pmatrix} d\rho du_1 \ldots du_{n-1} = \\ = \rho^{n-1} d\rho (x'_1 dx'_2 \ldots dx'_n - x'_2 dx'_1 dx'_3 \ldots dx'_n + \ldots \\ \ldots \pm x'_n dx'_1 \ldots dx'_{n-1} = \rho^{n-1} d\rho\omega,$$

где дифференциальная форма ω рассматривается на поверхности $\rho = 1$. С другой стороны, $\Phi(x) = \rho^{-n}\Phi(x')$. Поэтому

$$\int\limits_{G-\alpha G} \Phi(x)dx = \int\limits_1^\alpha \frac{d\rho}{\rho} \int\limits_\Gamma \Phi(x)\omega = \ln\alpha \int\limits_\Gamma \Phi(x)\omega. \tag{3}$$

Таким образом, *необходимое и достаточное условие того, чтобы регуляризованное значение* (1) *интеграла от формально однородной функции* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, *т.е. обобщенная функция* $\Phi|_G$, *представляло собой однородную обобщенную функцию степени* $-n$, *состоит в следующем*

$$\int\limits_\Gamma \Phi\omega = 0. \tag{4}$$

Если это условие не выполнено, то функция $\Phi|_G$ является не однородной, а присоединенной обобщенной функцией.

Интеграл в формуле (4) мы будем называть *вычетом функции* $\Phi(x)$ *относительно начала координат* (это обобщение определения, данного в п. 3). Таким образом, для того чтобы обобщенная функция (1) была однородной, степени $-n$, необходимо и достаточно, чтобы вычет функции $\Phi(x)$ относительно начала координат равнялся нулю.

Дифференцирование однородных функций степени $-n+1$. Мы неоднократно встречались уже в гл. I с такой ситуацией, когда обычная локально интегрируемая функция f имеет всюду, за исключением отдельных точек, обычную производную, но эта производная уже не является локально интегрируемой функцией (так что правильнее называть ее *формальной производной*). При этом нам недоставало автоматизма при подсчете производных в обобщенном смысле от функции f, и каждый раз приходилось проводить специальные рассмотрения. Например, в п. 3 § 2 гл. I при подсчете оператора Лапласа от $\frac{1}{r}$ в трехмерном пространстве по существу пришлось повторить обычное классическое рассуждение с вырезанием окрестности нуля и применением формулы Грина. Такой автоматизм в известной степени вносится следующей формулой, которую мы сейчас докажем. *Пусть* Φ — *обычная локально интегрируемая функция степени* $-n+1$. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)\bigg|_G + (-1)^{i-1}\delta(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_\Gamma \Phi dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n. \quad (5)$$

Здесь слева $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ — *производная функции* Φ *в смысле обобщенных функций, а справа* $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\Big|_G$ *обозначает обобщенную функцию, построенную по формальной, т.е. обычной, производной функции* Φ; Γ — *граница области* G.

Действительно, мы имеем:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i},\varphi\right) = -\left(\Phi,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = -\int \Phi(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}dx_1\ldots dx_n =$$
$$= -\int\limits_G \Phi(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}[\varphi(x_1,\ldots,x_n)-\varphi(0,\ldots,0)]dx_1\ldots dx_n -$$
$$- \int\limits_{R-G}\Phi(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial\varphi(0,\ldots,0)}{\partial x_i}dx_1,\ldots,dx_n.$$

Здесь $R-G$ — дополнение к области G.

Произведя теперь интегрирование по частям, мы получаем функционал $\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\Big|_G,\varphi\right)$, а контурные интегралы по поверхности Γ сократятся, кроме интеграла

$$(-1)^{i-1}\varphi(0)\int\limits_\Gamma \Phi dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n.$$

Тем самым формула (5) доказана. Так как ее левая часть от области G не зависит, то не зависит и правая. В последнем можно убедиться непосредственно, что предоставляется читателю.

Примеры. 1. Докажем формулу

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln(x^2+y^2)=2\pi\delta(x,y). \tag{6}$$

Мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2)=\frac{2x}{x^2+y^2}.$$

Это верно как в смысле обычных, так и в смысле обобщенных функций, поскольку функция $\frac{2x}{x^2+y^2}$ еще локально интегрируема. Теперь по формуле (5) получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln(x^2+y^2)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{x^2+y^2}=\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}\right)\Bigg|_G+2\delta(x,y)\int\limits_\Gamma\frac{xdy}{x^2+y^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln(x^2+y^2)=\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\Bigg|_G-2\delta(x,y)\int\limits_\Gamma\frac{ydx}{x^2+y^2}.$$

Складывая обе формулы, мы получаем:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln(x^2+y^2)=\delta(x,y)\int\limits_\Gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

Выбрав в качестве кривой Γ окружность с центром в начале координат, легко находим, что $\int\limits_\Gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=2\pi$. Это и доказывает формулу (6). Из нее следует, что в двумерном пространстве

$$\Delta\ln\frac{1}{r}=2\pi\delta(x,y)$$
$$\left(r^2=x^2+y^2,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

2. Подсчитаем $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ в трехмерном пространстве ($r^2=x^2+y^2+z^2$). Один раз можно продифференцировать в обычном смысле:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}=-\frac{x}{r^3},\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}=-\frac{y}{r^3},\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}=-\frac{z}{r^3}.$$

Формальные производные правых частей равны соответственно

$$\frac{3x^2 - r^2}{r^5},\ \frac{3y^2 - r^2}{r^5},\ \frac{3z^2 - r^2}{r^5},$$

их сумма равна нулю. Применяя трижды формулу (5) и складывая результаты, находим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r} = \delta(x,y,z)\int\limits_{\Gamma}\frac{xdydz - ydxdz + zdxdy}{r^3}.$$

Выбирая в качестве Γ сферу и переходя к полярным координатам, получаем, что интеграл справа равен -4π. Таким образом, в трехмерном пространстве

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(x,y,z). \tag{7}$$

Аналогичным способом нетрудно подсчитать $\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)$ в n-мерном пространстве ($n \geqslant 3$) и получить формулу, приведенную в п. 3 § 2 гл. I.

Поясним теперь несколько в ином плане, почему обращение вычета обычной однородной функции $\Phi(x)$ степени $-n$ в нуль есть условие однородности соответствующей обобщенной функции, а также роль понятия вычета.

Так как $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ — формально однородная функция степени $-n$, то, согласно уравнению Эйлера,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} = -n\Phi,$$

или в дивергентной форме

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_k\Phi) = 0.$$

Это равенство является формальным, т.е. удовлетворяется во всех точках, кроме начала координат, где Φ имеет особенность. С другой стороны, как мы знаем из п. 1, уравнение Эйлера, понимаемое в смысле обобщенных функций, характеризует однородные обобщенные функции соответствующей степени.

Покажем, что если понимать $x_k\Phi$ как обобщенные функции, то имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(x_k\Phi)}{\partial x_k} = c\delta(x), \tag{8}$$

где c — вычет функции Φ. Действительно, по формуле (5) мы имеем:

$$\frac{\partial(x_k\Phi)}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial(x_k\Phi)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_G + \\ + \delta(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_{\Gamma} \Phi(-1)^{k-1}x_k dx_1\ldots dx_{k-1}dx_{k+1}\ldots dx_n.$$

Суммируя по k, мы получаем:

$$\sum_k \frac{\partial(x_k\Phi)}{\partial x_k} = \left(\sum_k \frac{\partial(x_k\Phi)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_G + \delta(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_{\Gamma} \Phi\omega,$$

и так как $\sum\limits_k \frac{\partial(x_k\Phi)}{\partial x_k} = 0$, мы и приходим к формуле (8).

Следовательно, если $c = \int\limits_{\Gamma} \Phi\omega \neq 0$, то однородность функции $\Phi(x)$ в начале координат нарушается. Если $\Phi(x)$ — потенциал некоторого поля, то это нарушение однородности — свидетельство наличия в особой точке источников, зарядов и т.п.

Мы показали, что условие, при котором формально однородная функция $\Phi(x)$ степени $-n$ определяет однородную обобщенную функцию (регуляризованное значение интеграла $\int \Phi\varphi dx$), состоит в том, чтобы вычет $\Phi(x)$ в начале координат равнялся нулю.

У знакоположительной функции $\Phi(x)$, очевидно, вычет не обращается в нуль; поэтому знакоположительная однородная функция степени $-n$ не может определять однородной обобщенной функции. Так, на прямой обобщенная функция $\frac{1}{|x|}$ (см. гл. I, § 3) неоднородна. На плоскости обобщенная функция $\frac{1}{x^2+y^2}$ $\left(\text{точнее, } \frac{1}{x^2+y^2}\Big|_G\right)$, действующая по формуле

$$\int \frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_G \frac{\varphi(x,y)-\varphi(0,0)}{x^2+y^2}dxdy + \int\limits_{R-G} \frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2}dxdy$$

неоднородна; в то же время обобщенная функция $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, определенная аналогичной формулой:

$$\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\varphi(x,y)dxdy = \int\limits_G \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}[\varphi(x,y)-\varphi(0,0)]dxdy + \int\limits_{R-G} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\varphi(x,y)dxdy,$$

однородна, так как вычет обычной функции $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ равен нулю (по соображениям симметрии).

4. Обобщенные однородные функции степени $-n-m$. Пусть теперь $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ — обычная однородная функция степени $-n-m$, где m — натуральное число. Зададим снова произвольную область G, содержащую начало координат, и определим регуляризованное значение интеграла $\int\Phi(x)\varphi(x)dx$ по формуле

$$\int \Phi(x)\varphi(x)dx = \int\limits_G \Phi(x)\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-\ldots \ldots - \frac{1}{k!}\sum_{\sum\alpha_j=m} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial^{m-1}\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big]dx + \int\limits_{R-G}\Phi(x)\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-\ldots \ldots - \frac{1}{(k-1)!}\sum_{\sum\alpha_j=m-1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial^{m-1}\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big]dx. \quad (1)$$

Для однородности обобщенной функции, определенной равенством (1), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int\limits_{G-\alpha G}\Phi(x)x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}dx = 0 \qquad (\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m)$$

для любого α или, что то же самое (см. пп. 3 и 4), условий

$$\int\limits_\Gamma \Phi(x)x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\omega = 0 \qquad (\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m). \quad (2)$$

Интегралы слева в (2) мы назовем аналогично предыдущему вычетами обычной однородной функции $\Phi(x)$ степени $n-m$.

Таким образом, *для того чтобы обычной однородной функции* $\Phi(x)$ *целого порядка* $-n-m$ *отвечала по формуле* (1) *однородная обобщенная функция степени* $-n-m$, *необходимо и достаточно, чтобы все вычеты этой функции были равны нулю.*

Чтобы пояснить этот результат, сравним формулу (1) с формулой (8) п. 3. Если в первую из этих формул подставить $\Phi(x)=f^{-n-m}(x)$, где $f(x)$ — положительная однородная функция степени 1, то получится формула (8) п. 3, в которой интегралы $\int\limits_{\Gamma} f^{-n-m}(x)x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\omega$, т.е. вычеты функции $f^{-n-m}(x)$, заменены нулями. С другой стороны, равенство нулю этих вычетов необходимо и достаточно для того, чтобы обобщенная аналитическая функция $f^{\lambda}(x)$ не имела полюса при $\lambda=-n-m$, т.е. чтобы формула (8) определяла при $\lambda=-n-m$ однородную обобщенную функцию степени $-n-m$. Если хотя бы один из вычетов $f^{-n-m}(x)$ отличен от нуля, то регуляризация (1) интеграла

$$\int f^{-n-k}(x)\varphi(x)dx$$

дает уже присоединенную однородную функцию степени $-n-m$.

Заметим, что для целых значений $\lambda\leqslant -n$, кроме обобщенных однородных функций, определяемых обычными функциями, нам известны еще однородные обобщенные функции, не связанные ни с какими обычными функциями, а именно $\delta(x)$ и ее производные. Производные k-го порядка от $\delta(x)$ представляют собой однородные обобщенные функции степени $-n-k$. Число различных производных k-го порядка в точности равно числу условий (2). В этом смысле общий запас однородных функций степени $-n-m$ оказывается, как и для произвольной нецелой степени λ, совпадающим с запасом непрерывных функций на замкнутой поверхности Γ, охватывающей начало координат.

5. Обобщенная функция вида $r^{\lambda}f$, где f — обобщенная функция, заданная на единичной сфере. Всякую обычную однородную функцию размерности λ можно представить в виде

$$\Phi(x_1,\dots,x_n)=\Phi(r\omega_1,r\omega_2,\dots,r\omega_n)=r^{\lambda}f(\omega_1,\dots,\omega_n), \qquad (1)$$

где $f(\omega_1,\dots,\omega_n)$ — некоторая функция, заданная на единичной сфере Ω: $\sum\omega_i^2=1$. Пусть для простоты $\operatorname{Re}\lambda>-n$. Соответствующий регулярный функционал можно представить в виде

$$(\Phi(x_1,\dots,x_n),\varphi(x_1,\dots,x_n))=\int\Phi\varphi dx_1\dots dx_n=$$
$$=\int\limits_0^{\infty} r^{\lambda+n-1}\int\limits_{\Omega} f(\omega_1,\dots,\omega_n)\varphi(r\omega_1,\dots,r\omega_n)d\omega=\int\limits_0^{\infty} r^{\lambda+n-1}u(r)dr,$$

где $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ — любая основная функция (из K), а

$$u(r) = \int\limits_{\Omega}\cdots\int f(\omega_1,\dots,\omega_n)\varphi(r\omega_1,\dots,r\omega_n)d\Omega.$$

Здесь, как обычно, $d\Omega$ — элемент поверхности на единичной сфере Ω.

Пусть теперь $f(\omega_1,\dots,\omega_n)$ — произвольная обобщенная функция, заданная на сфере Ω. Тогда мы можем определить обобщенную функцию

$$\Phi_\lambda(x_1,\dots,x_n) = r^\lambda f(\omega_1,\dots,\omega_n) \tag{2}$$

по формуле

$$(\Phi_\lambda,\varphi) = \int\limits_0^\infty r^{\lambda+n-1}u(r)dr, \tag{3}$$

где

$$u(r) = (f,\varphi(r\omega_1,\dots,r\omega_n). \tag{4}$$

Функция $u(r)$ финитна и бесконечно дифференцируема, ибо $\varphi(r\omega_1,\dots,r\omega_n)$ финитна и бесконечно дифференцируема по r. Бесконечная дифференцируемость видна, например, из того, что

$$\frac{\partial\varphi(r\omega_1,\dots,r\omega_n)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\varphi(r\omega_1,\dots,r\omega_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

и т.д.

Из формулы (2) видно, что *функционал Φ_λ является при $\lambda\neq -n$, $-n-1,\dots$ аналитической функцией λ; в точках $\lambda=-n$, $-n-1,\dots$ он имеет простые полюсы.*

Определим вычет этой аналитической функции при $\lambda=-n$. Мы имеем:

$$(\Phi,\varphi) = \int\limits_0^\infty r^{\lambda+n-1}(f,\varphi(r\omega_1,\dots,r\omega_n))dr = \int\limits_0^\infty r^{\lambda+n-1}u(r)dr =$$

$$= \int\limits_0^1 r^{\lambda+n-1}(u(r)-u(0))dr + \int\limits_1^\infty r^{\lambda+n-1}u(r)dr + \frac{u(0)}{\lambda+n}.$$

В полученном выражении первый и второй интегралы регулярны при $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$. Поэтому при $\lambda = -n$ вычет (Φ_λ, φ) равен

$$u(0) = c\varphi(0),$$

где $c = (f,1)$ — значение функционала f на основной функции, равной единице на единичной сфере Ω. Таким образом, *вычет обобщенной функции Φ_λ при $\lambda = -n$ равен $c\delta(x_1,\dots,x_n)$.*

Легко показать, что если обобщенная функция f также аналитически зависит от λ, $f = f_\lambda$, и если эта аналитическая функция регулярна при $\lambda = -n$, то обобщенная функция $\Phi_\lambda = r^\lambda f_\lambda$ при $\lambda = -n$ имеет вычет, равный $c_{-n}\delta(x_1,\dots,x_n)$, где $c_{-n} = (f_\lambda,1)$ при $\lambda = -n$. Определим теперь вычет обобщенной функции $\Phi_\lambda = r^\lambda f(\omega_1,\dots,\omega_n)$ при $\lambda = -n-k$. Вычет числовой аналитической функции (Φ_λ,φ) при $\lambda = -n-k$ равен $\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}u(r)\Big|_{r=0}$. Но

$$u(r) = (f, \varphi(r\omega_1,\dots,r\omega_n)).$$

Поэтому

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}u(r)\Big|_{r=0} \left(f, \frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}}\varphi(r\omega_1,\dots r\omega_n)\right) =$$
$$= \sum_{\sum\alpha_j = k-1}\left(f, \omega_1^{\alpha_1}\dots\omega_n^{\alpha_n}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi(x_1,\dots,x_n)\right)\Big|_{x_1=\dots=x_n=0} =$$
$$= \sum_{\sum\alpha_j=k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi(0,\dots,0)\,(f,\omega_1^{\alpha_1}\dots\omega_n^{\alpha_n}).$$

Так как функционал $f(\omega_1,\dots,\omega_n)$ определен на поверхности $r=1$, где $\omega_i = x_i$, мы получаем, что вычет функционала Φ_λ при $\lambda = -n-k$ равен

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{\sum\alpha_j=k-1} c_{\alpha_1\dots\alpha_n}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\delta(x_1,\dots,x_n),$$

где $c_{\alpha_1\dots\alpha_n} = (f, x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n})$.

§ 4. Произвольные функции в степени λ

1. Определение приводимых особых точек. Пусть $G(x_1,\dots,x_n)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция. В этом параграфе мы рассмотрим обобщенную функцию $G^\lambda(x_1,\dots,x_n)$, т.е. изучим функционал

$$(G^\lambda, \varphi) = \int\limits_{G>0} G^\lambda(x_1, \dots, x_n)\varphi(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n \tag{1}$$

как аналитическую функцию от λ. Особые точки этой аналитической функции тесно связаны с характером поверхности $G(x_1, \dots, x_n) = 0$. Мы не будем заниматься случаем, когда поверхность $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ произвольна, а ограничимся наиболее существенным во всех приложениях случаем, когда эта поверхность состоит лишь из точек, которые мы назовем *приводимыми.*

Функция $G(x_1, \dots, x_n)$ называется *эквивалентной однородной функции в окрестности некоторой точки* M, если в этой окрестности существует локальная система координат $\xi_1, \dots, \xi_n$, в которой функция $G(x_1, \dots, x_n)$ превращается в однородную функцию. Ясно, что мы можем определить функцию, эквивалентную однородной, не только в аффинном пространстве, но и на любом аналитическом многообразии, например на сфере.

Определение приводимой точки поверхности мы дадим индуктивно по числу измерений пространства или поверхности. Предположим, что для поверхности в пространстве или на поверхности меньше чем n измерений приводимые точки определены. Точку M поверхности $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ мы будем называть *приводимой*, если:

1) в некоторой окрестности точки M функция $G(x_1, \dots, x_n)$ эквивалентна однородной функции;

2) пересечение поверхности $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ с достаточно малой сферой с центром в M дает поверхность, каждая точка которой приводима на этой сфере.

Для функции $G(x)$ на прямой второе требование, естественно, отпадает. В этом случае точка x_0, для которой $G(x_0) = 0$, называется приводимой, если в окрестности x_0 существует такая обратимая бесконечно дифференцируемая функция $\xi = X(x)$, $X(x_0) = 0$, что

$$G[X^{-1}(\xi)] \equiv \xi^m.$$

В окрестности приводимой точки M можно ввести локальные координаты $\xi_1, \dots, \xi_n$, в которых функция G превратится в однородную функцию от $\xi_1, \dots, \xi_n$ степени m.

Если при этом локальные координаты можно выбрать так, чтобы функция G зависела от k переменных, и нельзя выбрать так, чтобы она зависела от меньшего числа переменных, то точка M называется *точкой k-го порядка и степени m.*

Таким образом, каждой точке поверхности мы можем отнести два числа: порядок k и степень m этой точки. В частности, если на поверхности $G=0$ $\operatorname{grad} G \neq 0$, то каждая точка этой поверхности будет точкой 1-го порядка и первой степени. Действительно, в окрестности любой такой точки можно выбрать в качестве одной из координат саму функцию $G(x_1,\ldots,x_n)=\xi_1$ и какие угодно другие координаты $\xi_2,\ldots,\xi_n$. Ясно, что в этой системе координат функция $G(x_1,\ldots,x_n)$ превращается в ξ_1, т.е. в однородную функцию первой степени от одной переменной. Значит, обыкновенная точка поверхности есть точка 1-го порядка и первой степени. Если поверхность $G=0$, например, в трехмерном пространстве состоит из трех координатных плоскостей $[G=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}]$, то начало координат является точкой 3-го порядка, координатные оси состоят из точек 2-го порядка, а все остальные точки на координатных плоскостях суть точки 1-го порядка. Мы предоставляем читателю найти степени каждой из этих особых точек.

Ввиду того, что изучение интеграла (1) в общем случае может вызвать у читателя затруднения, мы предварительно в п. 2 рассмотрим случаи, когда поверхность $G=0$ состоит только из точек 1-го порядка, в п. 3 рассмотрим случай, когда на поверхности $G=0$ имеются особые точки не выше 2-го порядка, и только в п. 4 рассмотрим общий случай.

В этом пункте нам понадобится теорема, которую мы приведем без доказательства.

Пусть $G(x_1,\ldots,x_n)$ — многочлен. Если поверхность $G=0$ состоит лишь из приводимых точек, то она разлагается на конечное число связных компонент, каждая из которых состоит из точек одного и того же порядка и одной и той же степени. А именно, на поверхности $G=0$ имеется конечное число точек n-го порядка, конечное число линий $(n-1)$-го порядка и т.д., наконец, конечное число $(n-1)$-мерных компонент 1-го порядка.

Так как в окрестности точки 1-го порядка можно ввести локальные координаты, в которых наша функция G зависит от одного переменного, в окрестности точки 2-го порядка в соответствующих локальных координатах функция G зависит от двух переменных и т.д., то рассмотрение функций с приводимыми точками 1-го порядка сводится к изучению обобщенных функций от одной независимой переменной, рассмотрение функции с приводимыми точками 2-го порядка — к изучению обобщенных функций двух независимых переменных и т.д.

В заключение этого пункта заметим, что, как показано в п. 2 добавления 1 к гл. I, если имеется покрытие пространства счетной системой открытых областей D_i, такое, что каждый шар пересекается только с конечным числом этих областей, то любая основная функция $\varphi(x)$ представима в виде конечной суммы $\varphi(x)=\sum\varphi_i(x)$ основных функций φ_i, где φ_i равна нулю вне D_i. Поэтому там, где это нам понадобится, мы можем считать, что функция $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ отлична от нуля только в сколь угодно малой окрестности интересующей нас точки.

Изучение интеграла (1), зависящего от одного комплексного параметра, проводится путем рассмотрения вспомогательной функции двух комплексных переменных. Этот прием для простейшего случая изложен в п. 3.

2. Исследование обобщенной функции G^λ в случае, когда поверхность $G(x_1,\ldots,x_n)=0$ целиком состоит из точек 1-го порядка. Пусть $G(x_1,\ldots,x_n)$ — бесконечно дифференцируемая функция, для которой поверхность $G=0$ ограничена и состоит из приводимых точек 1-го порядка.

Рассмотрим функционал, зависящий от λ:

$$(G^\lambda,\varphi)=\int\limits_{G>0}\cdots\int G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n. \tag{2}$$

При $\operatorname{Re}\lambda>0$ этот интеграл сходится и представляет собой аналитическую функцию λ. Покажем, что *обобщенная функция G^λ представляет собой мероморфную функцию λ. Каждой связной компоненте многообразия $G=0$, состоящей из точек степени l, отвечает последовательность простых полюсов*

$$\lambda=-\frac{1}{l},-\frac{2}{l},\ldots,-\frac{n}{l},\ldots \tag{3}$$

В частности, если на поверхности $G=0$ вообще нет особых точек, то G^λ имеет полюсы только в точках

$$\lambda=-1,-2,\ldots,-n,\ldots$$

Для доказательства этого утверждения выберем произвольную точку M поверхности $G=0$. В силу сделанного выше замечания без ограничения общности можно предполагать, что $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ вне фиксированной малой окрестности D точки M. Обозначим через D_1, пересечение области D с областью $G\geqslant 0$. Тогда

$$(G^\lambda,\varphi)=\int\limits_{G>0}\cdots\int G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n=$$
$$=\int\limits_{D_1}\cdots\int G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n.$$

Так как M — точка 1-го порядка (и степени l), то мы можем ввести в области D_1 систему координат, в которой $G(x_1 \dots, x_n) = \xi_1^l$, а остальные $n-1$ координат $\xi_2, \dots, \xi_n$ выбраны произвольными бесконечно дифференцируемыми функциями от $x_1, \dots, x_n$ с единственным ограничением, чтобы в D_1 выполнялось условие

$$D\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} > 0.$$

В новых координатах

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

и

$$\int_{D_1} \cdots \int G^\lambda(x_1, \dots, x_n)\varphi(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n =$$
$$= \int_{D_1} \cdots \int \xi_1^{\lambda l} \varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) D\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Положим

$$\psi(\xi_1) = \int \cdots \int \varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) D\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_2 \dots d\xi_n, \tag{4}$$

где интеграл вычисляется по пересечению области D_1 с поверхностью $G(x_1, \dots, x_n) = \xi_1^l = \text{const}$. Функция $\psi(\xi_1)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция от ξ_1, определенная в области D_1. С помощью этой функции (G^λ, φ) перепишется в виде

$$(G^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty \xi_1^{\lambda l} \psi(\xi_1) d\xi_1. \tag{5}$$

Вспоминая результаты п. 2 § 3 гл. I о полюсах и вычетах функционала $\int_0^\infty x^\lambda \psi(x)dx$, мы получаем, что каждой точке M 1-го порядка и степени l многообразия $G = 0$ отвечает последовательность полюсов обобщенной функции $G^\lambda(x_1, \dots, x_n)$

$$\lambda = -\frac{1}{l}, -\frac{2}{l}, \dots, -\frac{n}{l}, \dots$$

При этом вычет интеграла (5) при $\lambda l = -n$, т.е. при $\lambda = -\frac{n}{l}$, просто выражается через функцию ψ из формулы (4): он равен $\frac{\psi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$.

Найдем теперь вычеты G^λ.

Вычет (G^λ, φ) при $\lambda = -\frac{1}{l}$ равен $\psi(0)$, т.е.

$$\int \ldots \int \varphi_1(0, \xi_2, \ldots, \xi_n) D \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} \Bigg|_{\xi_1 = 0} d\xi_2 \ldots d\xi_n,$$

где $\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим через ω дифференциальную форму, стоящую множителем при φ_1 в интеграле (4):

$$\omega = D \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_2 \ldots d\xi_n. \tag{6}$$

Тогда вычет можно записать в виде

$$\int\limits_G \varphi(x_1, \ldots, x_n)\omega. \tag{7}$$

Но

$$dx_1 \ldots dx_n = dv = d\xi_1 \omega,$$

и если положить

$$G^{\frac{1}{l}}(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n),$$

то мы будем иметь:

$$dv = dP\omega.$$

Вспоминая определение обобщенной функции $\delta(P)$, данное в п. 3 § 1 гл. III, мы видим, что вычет (7) есть не что иное, как $(\delta(P), \varphi)$. Таким образом, *вычет* G^λ *при* $\lambda = -\frac{1}{l}$ *равен* $\delta\left(G^{\frac{1}{l}}\right)$.

Найдем дальнейшие вычеты. При этом мы воспользуемся тем, что функцию

$$\psi(\xi_1) = \int \ldots \int \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) D \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

можно дифференцировать под знаком интеграла. Вычет (G^λ, φ) при $\lambda = \frac{-k-1}{l}$ равен

$$\frac{1}{k!} \int \ldots \int \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k} \left[\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) D \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} \right] \Bigg|_{\xi_1 = 0} d\xi_2 \ldots d\xi_n =$$
$$= \frac{1}{k!} \int\limits_{P=0} \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k} \left[\varphi \cdot D \binom{x}{\xi} \right] d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Вспоминая определения и формулы п. 5 § 1 гл. III, мы видим, что вычет (G^λ, φ) при $\lambda = \frac{-k-1}{l}$ равен

$$\frac{1}{k!} \int\limits_{P=0} \omega_k(\varphi) = \left(\frac{(-1)^k}{k!} \delta^{(k)}(P), \varphi \right). \tag{8}$$

Таким образом, *вычет обобщенной функции* G^λ *при* $\lambda = -\frac{k+1}{l}$ *равен*

$$\frac{(-1)^k}{k!} \delta^{(k)} \left(G^{\frac{1}{l}} \right). \tag{9}$$

В силу замечания, сделанного в п. 1, мы можем теперь считать основную функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ отличной от нуля в любой конечной области. При этом, подсчитывая вычет при $\lambda = \frac{k+1}{l}$, в формуле (8) нужно интегрировать по тем компонентам поверхности $G = 0$, которые состоят из точек степени l. Разумеется, если λ принадлежит более чем одной последовательности вида (3), то вычет в точке λ получается сложением значений, относящихся к соответствующим l.

Отметим, что в случае, когда поверхность $G = 0$ состоит из точек 1-го порядка и степени l, аналитическая функция G^λ имеет полюсы при тех же λ, что и обобщенная функция одного переменного $(x^l)_+^\lambda$ (см. § 3 гл. I). Вычет $(x^l)_+^\lambda$ при $\lambda = -\frac{k+1}{l}$ равен $\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}(x)$, а вычет G^λ при $\lambda = -\frac{k+1}{l}$ равен $\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}\left(G^{\frac{1}{l}}\right)$. Таким образом, случай, когда поверхность $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ состоит из точек 1-го порядка, полностью аналогичен случаю одной независимой переменной.

3. Исследование обобщенной функции G^λ в случае, когда поверхность $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ состоит из точек не выше 2-го порядка. Предположим теперь, что поверхность $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ состоит из приводимых точек не выше 2-го порядка. Каждая достаточно малая окрестность точки 1-го порядка этой поверхности порождает у обобщенной функции $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, действующей по формуле

$$(G^\lambda, \varphi) = \int\limits_{G>0} \cdots \int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n) \varphi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

последовательность полюсов, рассмотренную в п. 2. Нам осталось, следовательно, выяснить, как влияют на поведение этого функционала, как функции от λ, приводимые точки 2-го порядка (это, естественно, особые точки поверхности $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n) = 0$).

Мы докажем, что *окрестность каждой точки M 2-го порядка и степени m порождает у обобщенной функции $G^\lambda(x_1,\dots,x_n)$ последовательность полюсов*

$$\lambda = -\frac{2}{m}, -\frac{3}{m}, \dots, -\frac{k}{m}, \dots \tag{1}$$

При этом сколь угодно малая окрестность точки 2-го порядка, вообще говоря, содержит точки 1-го порядка и, может быть, различных степеней. Если какое-либо значение $\lambda = \lambda_0$ принадлежит одновременно последовательности (1) *и одной или нескольким последовательностям, относящимся к точкам 1-го порядка, попадающим в любую окрестность точки M, т.е. точкам 1-го порядка, инцидентным точке M, то при $\lambda = \lambda_0$ обобщенная функция $G^\lambda(x_1,\dots,x_n)$ имеет полюс 2-го порядка.*

Для доказательства возьмем в интеграле

$$\int_{G>0}\cdots\int G^\lambda(x_1,\dots,x_n)\varphi(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$$

функцию φ отличной от нуля только в малой окрестности точки M и выберем локальную систему координат $\xi_1,\dots,\xi_n$ в этой окрестности. Так как M — точка 2-го порядка, то эту локальную систему координат можно выбрать так, что функция G в новых координатах обращается в однородную функцию P от переменных ξ_1 и ξ_2, и мы приходим, таким образом, к задаче об изучении функционалов

$$\int_{P>0}\cdots\int P^\lambda(\xi_1,\xi_2)\varphi_1(\xi_1,\dots,\xi_n)D\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \xi_1 & \dots & \xi_n\end{pmatrix}d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_n, \tag{2}$$

где $\varphi_1(\xi_1,\dots,\xi_n) \equiv \varphi(x_1,\dots,x_n)$. Положим

$$\psi(\xi_1,\xi_2) = \int\dots\int \varphi_1(\xi_1,\dots,\xi_n)D\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \xi_1 & \dots & \xi_n\end{pmatrix}d\xi_3\dots d\xi_n. \tag{3}$$

Тогда интеграл (2) превращается в интеграл

$$\int_{P>0}\cdots\int P^\lambda(\xi_1,\xi_2)\psi(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2, \tag{4}$$

где $P(\xi_1,\xi_2)$ — однородная функция двух переменных степени m, а $\psi(\xi_1,\xi_2)$ — основная функция, отличная от нуля только в малой окрестности начала координат.

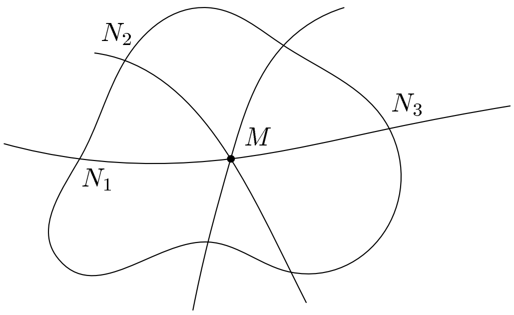

Рис. 7.

Итак, аналогично тому, как изучение G^λ в окрестности точки 1-го порядка сводится к изучению однородных функций от одной независимой переменной, изучение G^λ в окрестности точки 2-го порядка сводится к изучению произвольных однородных функций от двух переменных.

Приводимая точка 2-го порядка кривой $P(\xi_1, \xi_2) = 0$ есть изолированная особая точка кривой или точка пересечения ветвей с различными касательными (рис. 7). Для исследования интеграла (4) при тех значениях λ, при которых обеспечена сходимость, перейдем к полярной системе координат (r, u)[1)] и, пользуясь однородностью, запишем интеграл $(G^\lambda, \varphi) = \int \cdots \int_{P>0} P^\lambda(\xi_1, \xi_2)\psi(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2$ в виде

$$(G^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty r^{\lambda m+1} dr \int P^\lambda(\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\xi_2})\psi(\xi_1, \xi_2)du, \tag{5}$$

где $\xi_1 = r\widetilde{\xi_1}$, $\xi_2 = r\widetilde{\xi_2}$, $\widetilde{\xi_k} = \widetilde{\xi_k}(u)$ — координаты точки на кривой $r = \text{const}$.

Рассмотрим теперь вспомогательный функционал, зависящий от двух не связанных между собой комплексных параметров λ и μ:

$$I_{\lambda,\mu}[\psi] = \int r^\mu dr \int P^\lambda(\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\xi_2})\psi(\xi_1, \xi_2)du. \tag{6}$$

Очевидно, что при $\mu = \lambda m + 1$ интеграл (6) обращается в (5), и нам достаточно исследовать $I_{\lambda,\mu}[\psi]$. Имеет место следующая лемма:

Пусть заданы мероморфная функция двух комплексных переменных $F(\lambda, \mu)$ и две последовательности чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots, \tag{7}$$

[1)]Вместо полярной системы координат можно взять любую криволинейную систему, в которой координатные линии $r = \text{const}$ охватывают начало координат.

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots . \tag{8}$$

Пусть $F(\lambda, \mu)$ имеет как функция от λ при любом фиксированном $\mu \neq \mu_n$ простые полюсы в точках последовательности (7), причем в лорановском разложении в окрестности каждого такого полюса

$$F(\lambda, \mu) = \frac{c_{-1}(\mu)}{\lambda - \lambda_n} + c_0(\mu) + c_1(\mu)(\lambda - \lambda_n) + \ldots$$

коэффициенты $c_{-1}(\mu), c_0(\mu), \ldots$ являются мероморфными функциями от μ, имеющими простые полюсы в точках последовательности (8).

Тогда аналитическая функция от одной переменной $F(\lambda, \lambda)$ имеет полюсы в точках обеих последовательностей (7) и (8). Если при этом значение λ_0 принадлежит одновременно обеим последовательностям, то при $\lambda = \lambda_0$ $F(\lambda, \lambda)$ имеет полюс 2-го порядка с коэффициентом при $\frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^2}$ в лорановском разложении, равным вычету при $\mu = \lambda_0$ коэффициента $c_{-1}(\mu)$.

Доказательство леммы непосредственно вытекает из разложения функции $F(\lambda, \mu)$ в ряд Лорана по двум переменным в окрестности точки (λ_n, μ_m).

Найдем теперь полюсы функции двух комплексных переменных, задаваемой интегралом (6). Обозначим интеграл по du в этой формуле через $f_\lambda(r)$, т.е. положим

$$f_\lambda(r) = \int\limits_\Gamma P^\lambda(\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\xi_2}) \psi(\xi_1, \xi_2) du \tag{9}$$

(через Γ обозначена та часть кривой $r = 1$, на которой $P(\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\xi_2}) > 0$). Особые точки по λ функции $f(r)$ могут возникнуть лишь от тех точек $N_1, N_2, \ldots$ на кривой, в которых $P(\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\xi_2})$ обращается в нуль. Но эти точки кривой $P(\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\xi_2}) = 0$ приводимы на линии интегрирования Γ[1]. Пусть N_i — одна из таких точек.

Ее приводимость на кривой Γ означает просто, что в окрестности N_i на Γ можно ввести локальную координату ξ, в которой P однородно и, значит, имеет вид ξ^{l_i}.

Предполагая, что функция ψ отлична от нуля только в окрестности точки N_i, мы сводим изучение особенностей $f_\lambda(r)$ к изучению особенностей интегралов $\int \xi^{\lambda l} \psi_1(r, \xi) d\xi$, где $\psi_1(r, \xi) = \psi(\xi_1, \xi_2)$.

[1] Можно доказать, что если поверхность $F(x) = 0$ приводима в n-мерном пространстве, причем функция F зависит, скажем, только от первых двух координат x_1, x_2 то линия $F(x) = 0$ на плоскости также приводима.

Но особенности такого интеграла нам хорошо известны из § 3 гл. I. А именно, такой интеграл имеет простые полюсы в точках

$$\lambda = -\frac{1}{l_i}, -\frac{2}{l_i}, \ldots, -\frac{k}{l_i}, \ldots$$

Таким образом, мы получаем, что интеграл (9), т.е. функция $f_\lambda(r)$, имеет простые полюсы в точках последовательностей

$$\lambda = -\frac{1}{l_i}, -\frac{2}{l_i}, \ldots, -\frac{k}{l_i}, \ldots \tag{10}$$

где l_i — степени точек нулевого порядка, инцидентных исследуемой точке M, т.е. на плоскости — степени точек ветвей кривой, проходящих через точку M (см. рис. 7).

Функция двух комплексных переменных (6) запишется через рассмотренную функцию $f_\lambda(r)$ следующим образом:

$$I_{\lambda,\mu}[\psi] = \int_0^\infty r^\mu f_\lambda(r)dr. \tag{11}$$

Применяя к интегралу (11) снова результаты § 3 гл. I, мы получаем, что $I_{\lambda,\mu}[\psi]$ при фиксированном λ, не принадлежащем ни одной из последовательностей (10), аналитически продолжается во всю плоскость комплексного переменного μ, за исключением точек

$$\mu = -1, -2, \ldots, -k-1, \ldots,$$

в которых эта функция имеет простые полюсы. Полагая $\mu = \lambda m + 1$ и применяя лемму, мы получаем отсюда, что интеграл

$$\int_0^\infty r^{\lambda m+1}dr \int P^\lambda(\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\xi_2})\psi(\xi_1, \xi_2)du = I_{\lambda, m\lambda+1}[\psi]$$

имеет полюсы в точках последовательностей (10)

$$\lambda = -\frac{1}{l_i}, -\frac{2}{l_i}, \ldots, -\frac{k+1}{l_i}, \ldots$$

и в точках последовательности

$$\lambda = -\frac{2}{m}, -\frac{3}{m}, \ldots, -\frac{k+2}{m}, \ldots \tag{12}$$

Если $\lambda = \lambda_0$ принадлежит одновременно последовательности (12) и одной из последовательностей (10), то в точке $\lambda = \lambda_0$ рассматриваемый интеграл имеет, вообще говоря, полюс 2-го порядка.

Так как в локальной системе координат

$$\int\limits_{G>0}\cdots\int G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n =$$
$$= \int\limits_{P>0}\cdots\int P^\lambda(\xi_1,\xi_2)\psi(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 =$$
$$= \int\limits_0^\infty r^{\lambda m+1}dr\int P^\lambda\left(\frac{\xi_1}{r},\frac{\xi_2}{r}\right)\psi(\xi_1,\xi_2)du,$$

то сформулированная в начале этого пункта теорема доказана.

Определим вычеты обобщенной функции $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ в ее простых полюсах.

Пусть сначала $\lambda_0 = -\frac{k+1}{l_i}$ есть полюс функции $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$, возникающий благодаря обращению функции $G(x_1,\ldots,x_n)$ в нуль в точках 1-го порядка. Выше, в п. 2, мы показали, что вычет (G^λ,φ) в таком полюсе равен интегралу $\frac{1}{k!}\int\omega_k(\varphi)$, где $\omega_k(\varphi)$ — дифференциальные формы, определенные в окрестности любой точки 1-го порядка поверхности $G(x_1,\ldots,x_n) = 0$. Если участок поверхности, по которому интегрируется $\omega_k(\varphi)$, граничит с точками 2-го порядка поверхности $G(x_1,\ldots,x_n) = 0$, то $\int\omega_k(\varphi)$ может оказаться расходящимся. Вычет равен в этом случае регуляризованному значению соответствующего интеграла[1)].

Рассмотрим теперь простой полюс $\lambda_0 = -\frac{k+2}{m}$, возникающий у обобщенной функции $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ из-за обращения функции $G(x_1,\ldots,x_n)$ в нуль в точках 2-го порядка. Интеграл

$$\int\limits_{G>0}\cdots\int G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

[1)] Так как рассматриваемый полюс λ_0 простой, то существует

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)\int\limits_{G>0}\cdots\int G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n.$$

Регуляризованное значение $\frac{1}{k!}\int\omega_k(\varphi)$ можно определить, например, как этот предел.

мы представили в окрестности точки 2-го порядка как

$$\int_0^\infty r^{\lambda m+1} f_\lambda(r)\,dr, \text{ где } f_\lambda(r) = \int_\Gamma P^\lambda(\widetilde{\xi_1},\widetilde{\xi_2})\psi(r\widetilde{\xi_1},r\widetilde{\xi_2})\,du,$$

$P(\xi_1,\xi_2)$ — значение функции $G(x_1,\ldots,x_n)$ в локальных координатах,

$$\psi(\xi_1,\xi_2) = \int\ldots\int \varphi_1(\xi_1,\ldots,\xi_n) D\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_3\ldots d\xi_n,$$

а $\varphi_1(\xi_1,\ldots,\xi_n) \equiv \varphi(x_1,\ldots,x_n)$. Для тех значений λ, для которых интеграл расходится, функция $f_\lambda(r)$ равна регуляризованному значению интеграла (аналитическому продолжению по λ функции $f_\lambda(r)$ от положительных значений λ).

Вычет интеграла $\int\limits_0^\infty r^{\lambda m+1} f_\lambda(r)\,dr$ при $\lambda=\lambda_0=-\frac{k+r}{m}$ равен $\frac{(-1)^k f_{\lambda_0}^{(k)}(0)}{k!}$.

Продифференцируем функцию $f_{\lambda_0}(r)$ по r под знаком интеграла (это допустимо при положительных λ, следовательно, допустимо и в регуляризованном значении интеграла) и положим $r = 0$. Мы получим тогда для вычета обобщенной функции $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ при $\lambda_0 = -\frac{k+2}{m}$ выражение

$$\frac{1}{k!}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^k\psi(0,0)}{\partial\xi_1^\alpha\partial\xi_2^\beta}\int_\Gamma \widetilde{\xi}_1^\alpha\widetilde{\xi}_2^\beta P^{-\frac{k+2}{m}}(\widetilde{\xi_1},\widetilde{\xi_2})\,du = \\ = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^k\psi(0,0)}{\partial\xi_1^\alpha\partial\xi_2^\beta}\int_\Gamma \frac{\xi_1^\alpha\xi_2^\beta(\xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1)}{P^{\frac{k+2}{m}}(\xi_1,\xi_2)}. \quad (13)$$

В § 1 мы получили формулу для вычетов аналитической обобщенной функции f^λ, где f — положительная однородная функция первой степени (см. формулу (8) п. 3 § 1). Сравнивая полученное выражение с этой формулой, мы видим, что вычет обобщенной функции $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ записывается в локальных координатах аналогично вычету положительной однородной функции, с той разницей, что интеграл по кривой Г понимается как регуляризованное значение интеграла (для функции, положительной в окрестности точки 2-го порядка, этот интеграл всегда сходится).

4. Обобщенная функция $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ в общем случае. Перейдем к обобщенным функциям $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$, для которых поверхность

$G(x_1,\ldots,x_n)=0$ состоит из приводимых особых точек произвольного порядка от 1-го до n-го включительно.

Предположим для простоты, что $G(x_1,\ldots,x_n)$ есть многочлен. Мы докажем следующую теорему.

Обобщенная функция $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$, определенная равенством

$$(G^\lambda,\varphi)=\int\limits_{G>0}\cdots\int G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

для $\operatorname{Re}\lambda>0$ *и как аналитическое продолжение этого интеграла для остальных λ, есть мероморфная функция от λ, полюсы которой лежат на конечном числе арифметических прогрессий. Каждой связной компоненте поверхности $G(x_1,\ldots,x_n)=0$, состоящей из точек порядка r и степени m (см. п. 1), отвечает множество полюсов функционала $G^\lambda[\varphi]$, расположенных в точках*

$$\lambda=-\frac{r}{m},-\frac{r+1}{m},\ldots,-\frac{r+k}{m},\ldots \tag{1}$$

При этом, если имеются две, три и т.д. последовательные инцидентные друг другу связные компоненты поверхности $G=0$, состоящие из точек различных порядков, и значение $\lambda=\lambda_0$ принадлежит двум, трем и т.д. последовательностям (1), *отвечающим этим компонентам, то в точке $\lambda=\lambda_0$ обобщенная функция $G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ имеет полюс 2-го, 3-го и т.д. порядков.*

Предположим, что полюсы по λ интеграла

$$\int\limits_{G>0}\cdots\int G^\lambda(x_1,\ldots,x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n, \tag{2}$$

возникающие благодаря точкам порядка $\leqslant n-1$, нам известны. Тогда достаточно исследовать интеграл (2) по сколь угодно малой окрестности точки M n-го порядка.

Введем в этой окрестности локальную систему координат $\xi_1,\ldots,\xi_n$, в которой $P(\xi_1,\ldots,\xi_n)=G(x_1,\ldots,x_n)$ — однородная функция степени m, и предположим, что $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ вне этой окрестности. Интеграл (2) обратится тогда в интеграл

$$I_\lambda[\varphi]=\int\limits_{D}\cdots\int P^\lambda(\xi_1,\ldots,\xi_n)\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)d\xi_1\ldots d\xi_n, \tag{3}$$

где

$$\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)\equiv\varphi(x_1,\ldots,x_n)D\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n\\ \xi_1 & \ldots & \xi_n\end{pmatrix},$$

а D — пересечение окрестности, в которой $\varphi_1 \neq 0$, с областью $P(\xi_1,\dots,\xi_n) > 0$.

При тех λ, для которых интеграл (3) сходится, перейдем к сферическим координатам. В силу однородности $P(\xi_1,\dots,\xi_n)$ получим

$$I_\lambda[\psi] = \int_0^\infty r^{\lambda m+n-1}dr \int_\Gamma P^\lambda(\widetilde{\xi_1},\dots,\widetilde{\xi_n})\psi(\xi_1,\dots,\xi_n)d\Omega, \tag{4}$$

где область Γ есть пересечение единичной сферы с областью $P(\widetilde{\xi_1},\dots,\widetilde{\xi_n}) > 0$, $(\widetilde{\xi_1},\dots,\widetilde{\xi_n})$ — точка на Γ, $\xi_k = r\widetilde{\xi_k}$, $d\Omega$ — элемент площади поверхности сферы.

Интеграл по Γ есть интеграл по $(n-1)$-мерной сфере, на которой поверхность $P(\xi_1,\dots,\xi_n) = 0$, по предположению, имеет только приводимые точки и притом не выше $(n-1)$-го порядка.

Согласно предположению нам известны также полюсы этого интеграла и их кратности.

Вводя снова, как в п. 3, функционал, зависящий от двух комплексных параметров:

$$I_{\lambda,\mu}[\psi_1] = \int r^\mu dr \int_\Gamma P^\lambda(\widetilde{\xi_1},\dots,\widetilde{\xi_n})\psi_1(\xi_1,\dots,\xi_n)d\Omega, \tag{5}$$

и обозначая внутренний интеграл по Γ через $f_\lambda(r)$:

$$f_\lambda(r) = \int_\Gamma P^\lambda(\widetilde{\xi_1},\dots,\widetilde{\xi_n})\psi(\xi_1,\dots,\xi_n)d\Omega, \tag{6}$$

мы придем к ситуации, рассмотренной в п. 3. А именно, при фиксированном $\mu \neq -n$ функционал $I_{\lambda,\mu}[\psi_1]$ имеет полюсы по λ на конечном числе последовательностей и при фиксированном λ, не принадлежащем ни одной из этих последовательностей, $I_{\lambda,\mu}[\varphi_1]$ имеет полюсы при $\mu = -1, -2, \dots, -n, \dots$ Единственное отличие от рассмотренного в п. 3 случая, когда поверхность $G(x_1,\dots,x_n) = 0$ состоит из точек не выше 2-го порядка, заключается в том, что благодаря индукции полюсы по λ могут быть не только простыми, но и кратными.

Легко проверить, что лемма, сформулированная в п. 3, распространяется и на этот случай.

Полагая $\mu = \lambda m + n - 1$, мы получаем, что интеграл

$$\int_0^\infty r^{\lambda m+n-1} dr \int_\Gamma P^\lambda\left(\frac{\xi_1}{r}, \frac{\xi_2}{r}, \ldots, \frac{\xi_n}{r}\right) \psi(\xi_1, \ldots, \xi_n) d\Omega =$$

$$= \int \cdots \int_D P^\lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n) \psi(\xi_1, \ldots, \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n =$$

$$= \int \cdots \int_{G>0} G^\lambda(x_1, \ldots, x_n) \varphi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

кроме полюсов по λ, тех же, что у функции $f_\lambda(r)$ (возникающих из-за точек поверхности $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$, имеющих порядок меньше чем n), имеет полюсы в точках последовательности

$$\lambda = -\frac{n}{m}, -\frac{n+1}{m}, \ldots, -\frac{n+k}{m}, \ldots \tag{7}$$

При этом если в точке $\lambda = \lambda_0$ функция $f_\lambda(r)$ имеет полюс кратности p и λ_0 принадлежит последовательности (7), то обобщенная функция $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в точке $\lambda = \lambda_0$ полюс кратности $p+1$. Тем самым наша теорема доказана.

Мы определили, при каких значениях λ имеются полюсы у обобщенной функции

$$\int \cdots \int_{G>0} G^\lambda(x_1, \ldots, x_n) \varphi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Для простейшего случая однородной неотрицательной функции G мы в § 1 видели, что с самых разных точек зрения естественно ввести понятие вычетов формально однородной функции, которые характеризовали бы особенности этой функции в начале координат, подобно тому как вычет аналитической функции характеризует ее изолированную особую точку. Для произвольной рассмотренной здесь функции $G(x_1, \ldots, x_n)$ с приводимыми особенностями мы можем аналогичным образом определить вычеты, связанные с функцией G.

А именно, если D есть максимальная связная компонента многообразия $G = 0$ порядка r и степени m, то под *вычетом* функции $G^{-\frac{r+k}{m}}(x_1, \ldots, x_n)$ относительно этой компоненты можно понимать обобщенную функцию (функционал), являющуюся вычетом по λ аналитической функции $G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ при $\lambda = -\frac{r+k}{m}$.

В частности, если $G(x_1, \ldots, x_n)$ — однородная функция степени m, то такой вычет $G^{-\frac{n+k}{m}}(x_1, \ldots, x_n)$ в начале координат равен линейной комбинации производных k-го порядка от δ-функции с коэффициентами, равными интегралам по замкнутой поверхности, окружающей начало координат.

Если $G(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция, имеющая в начале координат приводимую особую точку $(n-1)$-го порядка и степени m, то вычет функции $G^{-\frac{n+k}{m}}(x_1, \ldots, x_n)$ относительно этой точки также равен линейной комбинации производных от δ-функции не выше k-го порядка с коэффициентами, определяемыми по функции G. Аналогично можно определить вычет не только относительно точки, но и относительно любой связной компоненты многообразия $G = 0$ степени m и порядка r.

5. Интегралы от бесконечно дифференцируемой функции φ по поверхностям уровня $G(x_1, \ldots, x_n) = c$. Сделаем из полученных результатов вывод о поведении интегралов от функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ по поверхностям уровня многочлена $G(x_1, \ldots, x_n)$. Мы ограничимся случаем, когда поверхность $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ состоит только из приводимых точек, а поверхность $G = c$ при $c > 0$ не имеет особых точек, и рассмотрим интегралы

$$I(c) = \int\limits_{G=c} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\omega, \tag{1}$$

где ω — форма на поверхности $G(x_1, \ldots, x_n) = c$, определенная равенством $dv = dG\omega$. Имеет место очевидное тождество (по λ):

$$\int\limits_0^\infty I(c)c^\lambda dc = \int\limits_{G>0}\cdots\int G^\lambda(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Выше мы установили, что интеграл, стоящий в правой (и следовательно, в левой) части равенства, есть мероморфная функция λ и определили ее полюсы в зависимости от характера особенностей поверхности $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Так как поведение функции $I(c)$ при $c > \varepsilon > 0$ не влияет на особенности интеграла $\int\limits_0^\infty I(c)c^\lambda dc$, то, зная эти особенности, мы можем, наоборот, написать асимптотическое разложение функции $I(c)$ при малых значениях c.

А именно, можно показать, что если расположить полюсы функции $F(\lambda)$, задаваемой интегралом $\int\limits_0^\infty I(c)c^\lambda dc$ и его аналитическим продолжением, в порядке их убывания в последовательность

$$-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_k, \ldots \quad (0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots)$$

и обозначить кратность k-го полюса через m_k, то функция $I(c)$ при малых c имеет следующее асимптотическое разложение:

$$I(c) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{k,m} c^{\lambda_k - 1} \ln^{m-1} c. \tag{3}$$

Нетрудно убедиться в том, что каждое слагаемое справа дает в интеграле $\int\limits_0^\infty I(c)c^\lambda dc$ m-кратный полюс (см. гл. I, § 3). Коэффициент $a_{k,m}$ при этом равен коэффициенту при $\frac{1}{(\lambda+\lambda_k)^m}$ в разложении Лорана для $F(\lambda)$ в окрестности точки $\lambda = -\lambda_k$, умноженному на $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$. Вспоминая определение функции $\delta(G)$, мы можем переписать интеграл $I(c)$ в виде:

$$I(c) = \int\limits_{G=0} \varphi\omega = (\delta(G-c), \varphi).$$

Отсюда следует, что, имея асимптотическое разложение $I(c)$ в ряд по степеням c, мы имеем тем самым разложение $(\delta(G-c), \varphi)$ по степеням c. Из формулы (3) получается, таким образом, асимптотическое разложение $\delta(G-c)$ при малых c.

Примеры. 1. Пусть $G(x,y) = xy$. Тогда первый полюс обобщенной функции $(xy)^\lambda$, определенной интегралом $\int\cdots\int_{xy>0}(xy)^\lambda\varphi(x,y)dxdy$, будет при $\lambda = -1$. Разложение интеграла $\int\cdots\int_{xy>0}(xy)^\lambda\varphi(x,y)dxdy$ по степеням $\lambda+1$ имеет вид

$$\int\limits_{xy>0}\cdots\int (xy)^\lambda \varphi(x,y)dxdy =$$

$$= \frac{2\varphi(0,0)}{(\lambda+1)^2} + \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,0)}{x}dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(0,y)}{y}dy\right]\frac{1}{\lambda+1} + \ldots$$

Интеграл $I(c) = \int\limits_{xy=c} \varphi(x,y)\omega$[1] допускает, следовательно, асимптотическое разложение:

$$I(c) = -2\varphi(0,0)\ln c + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,0)}{x}dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(0,y)}{y}dy + \ldots,$$

где многоточием заменены члены, стремящиеся к нулю при $c \to 0$.

В соответствии со сказанным выше можно получить отсюда разложение по степеням c обобщенной функции $\delta(xy-c)$. Оно будет иметь следующий вид:

$$\delta(xy-c) = -2\delta(x,y)\ln c + \left(\frac{\delta(y)}{x} + \frac{\delta(x)}{y}\right) + o(c). \tag{4}$$

2. $G = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. В этом случае интеграл

$$\int\limits_{G>0}\cdots\int (x^2+y^2+z^2-t^2)^\lambda \varphi(x,y,z,t)dv$$

имеет при $\lambda = -1$ простой полюс с вычетом $\delta(x^2+y^2+z^2-t^2)$ и при $\lambda = -2$ полюс 2-го порядка, в окрестности которого этот интеграл допускает следующее разложение:

$$\int\limits_{G>0}\cdots\int G^\lambda \varphi dv = -\frac{1}{8}\frac{\varphi(0,0,0,0)}{(\lambda+2)^2} + \frac{1}{(\lambda+2)}\Bigg\{\varphi(0,0,0,0)\ln 2 + $$

$$+\frac{8\pi}{3}\left[\int\limits_0^1 \frac{\varphi(0,0)-\varphi(r,r)}{r}dr - \int\limits_1^\infty \frac{\varphi(r,r)}{q}dr + \int\limits_0^\infty \frac{\partial\varphi(r,\rho)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=r} dr\right]\Bigg\} + \ldots$$

Поэтому $\delta(G-c)$ мы можем теперь представить в виде:

$$\delta(G-c) = \delta(G) + c\ln c\frac{\delta(x,y,z,t)}{8} + c\delta'(G) + \ldots, \tag{5}$$

где $G \equiv x^2+y^2+z^2-t^2$.

[1] При этом, как указывалось выше, можно получить $\omega = \frac{dy}{y}$ или $\omega = -\frac{dx}{x}$, т.е. рассмотреть интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,y)dy}{y}$ или $-\int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{\varphi(x,y)dx}{x}$.

Многоточие здесь заменяет члены порядка $o(c)$, а под $\delta'(G)$ понимается расходящийся интеграл $\int\limits_{G=0}\omega_1$, регуляризованный так, как указано в фигурных скобках.

Вообще, если G — функция, для которой поверхность $G=0$ имеет только приводимые особенности, то разложение обобщенной функции $\delta(G-c)$ при малых c может служить для определения обобщенных функций $\delta(G), \delta'(G)$ и т.д. в тех случаях, когда интегралы от соответствующих дифференциальных форм расходятся.

А именно, если

$$\delta(G-c)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{m_k}T_{k,m}c^{\lambda_k-1}\ln^{m-1}c,$$

где $T_{k,m}$ — обобщенные функции, такие, что

$$(T_{k,m},\varphi)=a_{k,m}$$

($a_{k,m}$ — коэффициенты разложения интеграла $I(c)=\int\limits_{G=c}\varphi\omega$ по степеням c и $\ln c$ (см. формулу (3)), то через $\delta(G)$ мы обозначим свободный член этого разложения, через $\delta'(G)$ — взятый с обратным знаком коэффициент при первой степени c и т.д. В частности, формула (4) перепишется в виде

$$\delta(xy-c)=-2\ln c\,\delta(x,y)+\delta(x,y)+\ldots, \tag{4'}$$

так что[1)]

$$\delta(xy)=\frac{\delta(x)}{y}+\frac{\delta(y)}{x}. \tag{6}$$

В случае, когда поверхность $G=0$ не имеет особых точек, такое определение, естественно, совпадает с данным выше. Действительно, в этом случае интеграл $\int\limits_{G>0}G^{\lambda}\varphi\,dv$ имеет только простые полюсы

[1)]Эта формула не могла быть получена в § 1, так как там при выводе формулы

$$\delta(PQ)=\frac{\delta(P)}{Q}+\frac{\delta(Q)}{P} \tag{*}$$

поверхности $P=0$ и $Q=0$ предполагались непересекающимися. Однако когда они пересекаются «правильно», т.е. так, что можно взять систему координат $u_1,\ldots,u_n$, где $u_1=P$ и $u_2=Q$, то формула (*) легко выводится при помощи этих самых координат из формулы (6).

$\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots$ и вычет его при $\lambda = -k$ равен $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(G)$, поэтому

$$\delta(G-c) = \delta(G) - c\delta'(G) + \frac{c^2}{2}\delta''(G) + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}(G) + \ldots$$

Из формулы (4) можно сделать интересный вывод. Продифференцируем равенство (4) по c:

$$-\delta'(xy-c) = -\frac{2}{c}\delta(x,y) + \ldots$$

Умножив на $-c$ и устремив его к нулю, получим:

$$c\delta'(xy-c) \to 2\delta(x,y).$$

Аналогично, дважды продифференцировав по c равенство (5) и умножив его после этого на c, мы при стремлении c к нулю получим

$$c\delta''(x^2+y^2+z^2-t^2-c) \to \frac{\delta(x,y,z,t)}{8}.$$

Если применить эти формулы к основной функции φ, то мы сможем вычислить значение функции φ в начале координат, зная ее интегралы по гиперболам $xy = c$ или гиперболоидам $x^2+y^2+z^2-t^2 = c$.