# СВОДКА ОСНОВНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ФОРМУЛ ВЫПУСКА 1

## Глава I, § 1

1. *Основная функция* — бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, равная нулю вне ограниченной области $n$-мерного пространства $R_n$.

2. *Основное пространство* $K$ — совокупность всех основных функций. Линейные операции в $K$ определяются обычным образом. Последовательность $\varphi_\nu(x) \in K$ называется сходящейся к нулю, если функции $\varphi_\nu(x)$ стремятся к нулю равномерно вместе со всеми производными и обращаются в нуль вне одной и той же ограниченной области.

3. *Обобщенная функция* — линейный непрерывный функционал на пространстве $K$.

4. *Регулярная* обобщенная функция — функционал на $K$ вида

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx,$$

где $f(x)$ — локально интегрируемая функция.

5. Остальные обобщенные функции называются *сингулярными.*

6. $\theta(x)$ — функция, равная 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$ ($n = 1$).

7. *Дельта-функция* $\delta(x - x_0)$ — сингулярный функционал, действующий по формуле

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0).$$

8. Функционал $f(x)$ называется *равным нулю в области* $G$, если $(f, \varphi) = 0$ для всякой основной функции, равной нулю в такой области $G_1$, что $G$ и $G_1$ покрывают все $R_n$.

9. *Носитель* функционала $f$ — замкнутое множество, на дополнении которого функционал $f$ равен нулю.

10. Последовательность $f_\nu$ обобщенных функций называется *сходящейся к обобщенной функции* $f$, если для любой $\varphi \in K$

$$\lim_{\nu \to \infty} (f_\nu, \varphi) = (f, \varphi).$$

11. Для комплексных основных и обобщенных функций действия производятся по правилам

$$\alpha(f, \varphi) = (f, \alpha\varphi) = (\overline{\alpha} f, \varphi).$$

Функционал $f$ типа функции $f(x)$ определяется по формуле

$$(f,\varphi) = \int \overline{f(x)}\varphi(x)dx.$$

12. Обобщенная функция $\overline{f}$, комплексно сопряженная к данной $f$, определяется формулой

$$(\overline{f},\varphi) = (\overline{f,\overline{\varphi}}).$$

13. Пространство $S$ состоит из бесконечно-дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq} \qquad (n=1; k,q=0,1,2,\ldots)$$

или, для нескольких переменных,

$$\left|x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_n^{q_n}}\right| \leqslant C_{k_1\ldots q_n}$$
$$(k_1,\ldots,q_n = 0,1,2,\ldots)$$

с соответствующей сходимостью.

### Глава I, § 2

1. Производная обобщенной функции $f$ по аргументу $x_j$ определяется равенством

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j},\varphi\right) = \left(f,-\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right).$$

2. $\theta'(x) = \delta(x)$.
3. $\frac{d}{dx}\ln(x+i0) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$, где

$$\left(\frac{1}{x},\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

4. $\Delta\frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)\Omega_n\delta(x)$, где $\Omega_n$ — поверхность единичной сферы в $n$-мерном пространстве ($n>2$).

$$\Delta\ln\frac{1}{r} = -2\pi\delta(x) \qquad (n=2).$$

5. Если последовательность обобщенных функций $f_\nu$ имеет предел $f$, то последовательность $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j}$ имеет предел $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin nx = -\pi \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - 2\pi n)$.

8. $1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{-ix} + e^{-2ix} + \ldots = 2\pi \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

10. $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \delta(x)$ при $\varepsilon \to 0$.

11. $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \to \delta(x)$ при $t \to 0$.

12. $\frac{1}{\pi} \frac{\sin \nu x}{x} \to \delta(x)$ при $\nu \to \infty$.

**Глава I, § 3**

1. Обобщенная функция $x_+^\lambda$ задается следующими формулами: при $\operatorname{Re} \lambda > -1$

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx; \tag{1}$$

при $\operatorname{Re} \lambda > -n-1, \lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$,

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx + \\ + \int\limits_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}; \tag{2}$$

при $-n-1 < \operatorname{Re} \lambda < -n$

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx. \tag{3}$$

Эта обобщенная функция при $x > 0$ совпадает с обычной функцией $x^\lambda$, при $x < 0$ равна нулю. Она аналитична при всех $\lambda$, за исключением точек $\lambda = -1, -2, \ldots, -n, \ldots$, в которых она имеет полюсы 1-го порядка.

Формула дифференцирования по $x$:

$$\frac{d}{dx}x_+^\lambda = \lambda x_+^{\lambda-1} \qquad (\lambda \neq -1, -2, \ldots). \tag{4}$$

2. Обобщенная функция $x_-^\lambda$ задается формулами: при $\operatorname{Re}\lambda > -1$

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int_{-\infty}^{0} |x|^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)dx; \tag{5}$$

при $\operatorname{Re}\lambda > -n-1, \lambda \neq -1, -2, \ldots, -n,$

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \\ \ldots - (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]dx + \\ + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(-x)dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}; \tag{6}$$

при $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \\ \ldots - (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]dx. \tag{7}$$

Эта обобщенная функция при $x<0$ совпадает с $|x|^\lambda$, при $x>0$ — с нулем. Она аналитична при всех $\lambda$, за исключением точек $\lambda = -1, -2, \ldots, -n, \ldots$, в которых она имеет полюсы 1-го порядка.

Формула дифференцирования по $x$:

$$\frac{d}{dx}x_-^\lambda = -\lambda x_-^{\lambda-1} \qquad (\lambda \neq -1, -2, \ldots). \tag{8}$$

3. Обобщенная функция $|x|^\lambda$ задается формулами: при $\operatorname{Re}\lambda > -1$

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^\infty x^\lambda[\varphi(x) + \varphi(-x)]dx; \tag{9}$$

при $\operatorname{Re}\lambda > -2m-1, \lambda \neq -1, -3, \ldots, -2m+1,$

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^1 x^\lambda \Big\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\Big[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots \\ \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\Big]\Big\} dx + \\ + \int\limits_1^\infty x^\lambda [\varphi(x) + \varphi(-x)] dx + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!(\lambda + 2k + 1)}; \quad (10)$$

при $-2m-1 < \operatorname{Re}\lambda < -2m+1$

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \Big\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\Big[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots \\ \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\Big]\Big\} dx. \quad (11)$$

Она совпадает при $x \neq 0$ с обычной функцией $|x|^\lambda$. Эта обобщенная функция имеет особенности (полюсы 1-го порядка) при $\lambda = -1, -3, \ldots, -2m-1, \ldots$

При $\lambda = -2m$ мы пишем $|x|^{-2m} = x^{-2m}$, так что

$$(x^{-2m}, \varphi) = \int\limits_0^\infty x^{-2m} \Big\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2\Big[\varphi(0) + \\ + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\Big]\Big\} dx. \quad (12)$$

В частности,

$$(x^{-2}, \varphi) = \int\limits_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx. \quad (13)$$

4. Обобщенная функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ задается следующими формулами: при $\operatorname{Re}\lambda > -2$

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^\infty |x|^\lambda \operatorname{sgn} x \varphi(x) dx = \int\limits_0^\infty x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(-x)] dx; \quad (14)$$

при $\operatorname{Re}\lambda > -2m-2, \lambda \neq -2, -4, \ldots, -2m$,

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \Big\{\varphi(x) - \varphi(-x) - 2\Big[x\varphi'(0) + \\ + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\Big]\Big\}dx + \\ + \int_1^\infty x^\lambda[\varphi(x) - \varphi(-x)]dx + 2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k+1)!(\lambda+2k+2)}; \quad (15)$$

при $-2m-2 < \operatorname{Re}\lambda < -2m$

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \Big\{\varphi(x) - \varphi(-x) - 2\Big[x\varphi'(0) + \\ + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\Big]\Big\}dx. \quad (16)$$

Она совпадает при $x \neq 0$ с обычной функцией $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Эта обобщенная функция имеет особенности (полюсы 1-го порядка) при $\lambda = -2, -4, \ldots, -2m, \ldots$ При $\lambda = -2m-1$ мы пишем $|x|^{-2m-1}\operatorname{sgn} x = x^{-2m-1}$, так что

$$(x^{-2m-1}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m-1} \Big\{\varphi(x) - \varphi(-x) - 2\Big[x\varphi'(0) + \\ + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\Big]\Big\}dx. \quad (17)$$

В частности,

$$(x^{-1}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}dx, \quad (18)$$

$$(x^{-3}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x) - 2x\varphi'(0)}{x^3}dx. \quad (19)$$

5. $q$-кратный неопределенный интеграл от $|x|^\lambda$ можно записать в виде

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{q}|x|^\lambda dx^q = \frac{|x|^{\lambda+q}(\operatorname{sgn} x)^q}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+q)} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]}\frac{x^{q-2k}}{(2k-1)!(q-2k)!}\frac{1}{\lambda+2k}. \tag{20}$$

6. Обобщенные функции

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)},\ \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)},\ \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)},\ \frac{|x|^\lambda\operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \tag{21}$$

являются целыми функциями по $\lambda$.

В частности, при $\lambda \to -n$

$$\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \to \delta^{(n-1)}(x),\ \frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \to (-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x); \tag{22}$$

при $\lambda \to -2m-1$

$$\frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \to \frac{(-1)^m\delta^{(2m)}(x)m!}{(2m)!} \tag{23}$$

и при $\lambda \to -2m$

$$\frac{|x|^\lambda\operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)} \to \frac{(-1)^m\delta^{(2m-1)}(x)(m-1)!}{(2m-1)!}. \tag{24}$$

7. Функции $\ln(x+i0)$ и $\ln(x-i0)$ определяются следующим образом:

$$\ln(x+i0) = \lim_{y\to+0}\ln(x+iy) = \ln|x| + i\pi\theta(-x), \tag{25}$$

$$\ln(x-i0) = \lim_{y\to+0}\ln(x-iy) = \ln|x| - i\pi\theta(-x), \tag{26}$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ 1 \text{ при } x>0. \end{cases}$$

8. Функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ определяются формулами:

$$(x+i0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x+iy)^\lambda = \begin{cases} e^{i\lambda\pi}|x|^\lambda & \text{при } x<0, \\ x^\lambda & \text{при } x>0; \end{cases} \tag{27}$$

$$(x-i0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x-iy)^\lambda = \begin{cases} e^{-i\lambda\pi}|x|^\lambda & \text{при } x<0, \\ x^\lambda & \text{при } x>0. \end{cases} \tag{28}$$

Эти функции существуют при любом комплексном $\lambda$ и определяют регулярные функционалы при $\operatorname{Re}\lambda > -1$. Соответствующие обобщенные функции строятся следующим образом. При $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

$$(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda, \tag{29}$$

$$(x-i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda, \tag{30}$$

где обобщенные функции $x_+^\lambda$ и $x_-^\lambda$ определены формулами (1)–(3) и (5)–(7). При $\lambda = -n$, $n = 1, 2 \ldots$,

$$(x+i0)^{-n} = x^{-n} - \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x), \tag{31}$$

$$(x-i0)^{-n} = x^{-n} + \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x), \tag{32}$$

где обобщенная функция $x^{-n}$ определена формулой (12) или (17). Таким образом, обобщенные функции $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ определены при всех $\lambda$. Это целые аналитические функции от $\lambda$.

Соотношения

$$(x+i0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x+iy)^\lambda,$$
$$(x-i0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x-iy)^\lambda$$

выполняются как в обычном смысле, так и в смысле обобщенных функций.

Формулы дифференцирования

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x+i0)^\lambda &= \lambda(x+i0)^{\lambda-1} \quad (\lambda\neq 0),\\ \frac{d}{dx}(x-i0)^\lambda &= \lambda(x-i0)^{\lambda-1} \quad (\lambda\neq 0),\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln(x+i0) &= \frac{1}{x+i0},\\ \frac{d}{dx}\ln(x-i0) &= \frac{1}{x-i0}.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

9. Обобщенная функция $r^\lambda$ при $\operatorname{Re}\lambda > -n$ задается формулами

$$(r^\lambda, \varphi) = \int_{R_n} r^\lambda \varphi(x)\,dx = \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} S_\varphi(r)\,dr, \tag{35}$$

где $\Omega_n$ — поверхность единичной сферы $n$-мерного пространства, $S_\varphi(r)$ — среднее из значений функции $\varphi$ по сфере радиуса $r$.

Эта обобщенная функция аналитически продолжается во всю плоскость $\lambda$ с исключенными точками $\lambda = -n, -n-2, -n-4, \ldots$, в которых она обладает полюсами 1-го порядка.

10. Обобщенная функция $\frac{2r^\lambda}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ — целая аналитическая по $\lambda$. При $\lambda = -n$ она обращается в $\delta(x)$, при $\lambda = -n-2k$ — в

$$\frac{(-1)^k \Delta^k \delta(x)}{2^k k! n(n+2)\ldots(n+2k-2)}. \tag{36}$$

11. Формула разложения $r^\lambda$ на плоские волны:

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_\Omega \frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda d\omega}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} = 2\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}. \tag{37}$$

Частные случаи: при $n$ нечетном

$$\delta(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int\limits_\Omega \delta^{(n-1)}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n) d\omega; \tag{38}$$

при $n$ четном

$$\delta(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n} \int\limits_\Omega (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{-n} d\omega, \tag{39}$$

а также при любом $n$

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_\Omega (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n - i0)^{-n} d\omega. \tag{40}$$

## Глава I, § 4

1. Обобщенная функция $x_+^\lambda \ln^m x_+$ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$ определяется по следующим формулам: при Re $\lambda > -1$

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \ln^m x \varphi(x) dx; \tag{1}$$

при $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1, \lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$,

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi) = \\ = \int_0^1 x^\lambda \ln^m x \Big[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big] dx + \\ + \int_1^\infty x^\lambda \ln^m x \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^m m! \varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)^{m+1}}; \quad (2)$$

при $-n-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < -n$

$$(x_+^\lambda \ln^m x_+, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^m x \Big[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots \\ \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big] dx. \quad (3)$$

2. Формула дифференцирования по $\lambda$:

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} x_+^\lambda = x_+^\lambda \ln^m x_+ \qquad (\lambda \neq -1, -2, \ldots). \quad (4)$$

Разложение функции $x_+^\lambda$ в ряд Тейлора в окрестности регулярного значения $\lambda_0$:

$$x_+^\lambda = x_+^{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) x_+^{\lambda_0} \ln x_+ + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 x_+^{\lambda_0} \ln^2 x_+ + \ldots \quad (5)$$

3. Обобщенная функция $x_+^{-n}$ определяется формулой

$$(x_+^{-n}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-n} \Big[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots \\ \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\theta(1-x)\Big] dx; \quad (6)$$

эта обобщенная функция совпадает с функцией $x^{-n}$ при $x > 0$ и равна нулю при $x < 0$. Она не является значением определенной выше функции $x_+^\lambda$ при $\lambda = -n$.

4. Обобщенные функции $x_+^{-n}\ln^m x_+$ задаются формулами

$$(x_+^{-n}\ln^m x_+, \varphi) = \int_0^\infty x^{-n}\ln^m x\Big[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\theta(1-x)\Big]dx. \quad (7)$$

5. В окрестности полюса $\lambda = -n$ разложение $x_+^\lambda$ в ряд Лорана имеет вид

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\frac{1}{\lambda+n} + x_+^{-n} + (\lambda+n)x_+^{-n}\ln x_+ +$$
$$+ \frac{1}{2}(\lambda+n)^2 x_+^{-n}\ln^2 x_+ + \ldots \quad (8)$$

6. Обобщенная функция $x_-^\lambda \ln^m x_-$ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$ определяется по следующим формулам: при Re $\lambda > -1$

$$(x_-^\lambda \ln^m x_-, \varphi) = \int_{-\infty}^0 |x|^\lambda \ln^m |x|\varphi(x)dx = \int_0^\infty x^\lambda \ln^m x\varphi(-x)dx; \quad (9)$$

при Re $\lambda > -n-1, \lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$,

$$(x_-^\lambda \ln x_-^m, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \ln^m x\Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots$$
$$\ldots - (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]dx +$$
$$+ \int_1^\infty x^\lambda \ln^m x\varphi(-x)dx + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{m+k-1}m!\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)^{m+1}}; \quad (10)$$

при $-n-1 < \text{Re}\,\lambda < -n$

$$(x_-^\lambda \ln x_-^m, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \ln^m x\Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots$$
$$\ldots - (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]dx. \quad (11)$$

7. Формула дифференцирования по $\lambda$:

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m} x_-^\lambda = x_-^\lambda \ln^m x_- \qquad (\lambda \neq -1, -2, \ldots). \tag{12}$$

Разложение функции $x_-^\lambda$ в ряд Тейлора в окрестности регулярного значения $\lambda_0$:

$$x_-^\lambda = x_-^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0) x_-^{\lambda_0} \ln x_- + \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 x_-^{\lambda_0} \ln^2 x_- + \ldots \tag{13}$$

8. Обобщенная функция $x_-^{-n}$ определяется формулой

$$(x_-^{-n}, \varphi) = \int\limits_0^\infty x^{-n} \Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \\ \ldots - (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)\theta(1-x)\Big] dx; \tag{14}$$

эта обобщенная функция совпадает с обычной функцией $|x|^{-n}$ при $x<0$ и с нулем при $x>0$. Но она не является значением определенной выше аналитической функции $x_-^\lambda$ при $\lambda=-n$.

9. Обобщенные функции $x_-^{-n} \ln^m x_-$ задаются формулами

$$(x_-^{-n} \ln^m x_-, \varphi) = \int\limits_0^\infty x^{-n} \ln^m x \Big[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \ldots \\ \ldots - (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)\theta(1-x)\Big] dx. \tag{15}$$

10. В окрестности полюса $\lambda=-n$ разложение $x_-^\lambda$ в ряд Лорана имеет вид

$$x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \frac{1}{\lambda+n} + x_-^{-n} + (\lambda+n) x_-^{-n} \ln x_- + \\ + \frac{1}{2!}(\lambda+n)^2 x_-^{-n} \ln^2 x_- + \ldots \tag{16}$$

11. Функционал $|x|^\lambda \ln^k |x|$ определяется по формулам, аналогичным (9)–(11) стр. 367– 368, с заменой всюду $x^\lambda$ на $x^\lambda \ln^k x$.

В окрестности регулярной точки $\lambda_0$ разложение функции $|x|^\lambda$ в ряд Тейлора имеет вид

$$|x|^\lambda = |x|^{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0)|x|^{\lambda_0} \ln|x| + \frac{1}{2!}(\lambda - \lambda_0)^2 |x|^{\lambda_0} \ln^2|x| + \ldots \tag{17}$$

В окрестности полюса $\lambda_0 = -2m - 1$ разложение функции $|x|^\lambda$ в ряд Лорана имеет вид

$$|x|^\lambda = \frac{2\delta^{(2m)}(x)}{(2m)!}\frac{1}{\lambda + 2m + 1} + |x|^{-2m-1} + \\ + (\lambda + 2m + 1)|x|^{-2m-1} \ln|x| + \ldots, \tag{18}$$

где при $-2m - 2 < \operatorname{Re}\lambda < -2m$

$$|x|^{-2m-1} = x_+^{-2m-1} + x_-^{-2m-1}; \tag{19}$$

$$|x|^{-2m-1}\ln^k|x| = x_+^{-2m-1}\ln^k x_+ + x_-^{-2m-1}\ln^k x_-; \tag{19a}$$

в частности,

$$(|x|^{-2m-1}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m-1}\Big\{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\Big[\varphi(0) + \\ + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi^{(2m)}(0)\theta(1 - x)\Big]\Big\}dx. \tag{20}$$

Обобщенная функция $|x|^{-2m-1}$ совпадает с обычной функцией $|x|^{-2m-1}$ при $x \neq 0$.

12. Обобщенная функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x \ln^k|x|$ определяется по формулам, аналогичным (14)–(16) стр. 368, с заменой всюду $x^\lambda$ на $x^\lambda \ln^k x$.

В окрестности регулярной точки $\lambda_0$ разложение функции $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ в ряд Тейлора имеет вид

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = |x|^{\lambda_0} \operatorname{sgn} x + (\lambda - \lambda_0)|x|^{\lambda_0} \ln|x| \operatorname{sgn} x + \\ + \frac{1}{2!}(\lambda - \lambda_0)^2 |x|^{\lambda_0} \ln|x| \operatorname{sgn} x + \ldots \tag{21}$$

В окрестности полюса $\lambda_0 = -2m$ разложение функции $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ в ряд Лорана имеет вид

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = -2\frac{\delta^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!}\frac{1}{\lambda + 2m} + |x|^{-2m} \operatorname{sgn} x + \\ + (\lambda + 2m)|x|^{-2m} \ln|x| \operatorname{sgn} x + \ldots \tag{22}$$

где при $-2m-1 < \operatorname{Re}\lambda < -2m+1$

$$|x|^{-2m}\operatorname{sgn}x = x_+^{-2m} - x_-^{-2m}; \tag{23}$$

$$|x|^{-2m}\ln^k|x|\operatorname{sgn}x = x_+^{-2m}\ln^k x_+ - x_-^{-2m}\ln^k x_-; \tag{23a}$$

в частности,

$$(|x|^{-2m}\operatorname{sgn}x,\varphi) = \int_0^\infty x^{-2m}\Big\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2\Big[x\varphi'(0)+ \\ +\frac{x^3}{3!}\varphi'''(0)+\ldots+\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\theta(1-x)\Big]\Big\}dx. \tag{24}$$

Подчеркнем, что $|x|^{-2m-1}$ не есть значение $|x|^\lambda$ при $\lambda=-2m-1$ и что $|x|^{-2m}\operatorname{sgn}x$ не есть значение $|x|^\lambda\operatorname{sgn}x$ при $\lambda=-2m$.

Обобщенная функция $|x|^{-2m}\operatorname{sgn}x$ совпадает при $x\neq 0$ с обычной функцией $|x|^{-2m}\operatorname{sgn}x$.

13. Производные по $\lambda$ обобщенных функций $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$ обозначаются соответственно через

$$(x+i0)^\lambda\ln(x+i0) \text{ и } (x+i0)^\lambda\ln(x-i0);$$

это целые функции от $\lambda$, которые выражаются формулами:

$$(x+i0)^\lambda\ln(x+i0) = \\ =\begin{cases} x_+^\lambda\ln x_+ + i\pi e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda\ln x_- & \text{при } \lambda\neq -n,\\ (-1)^n i\pi x_-^{-n} + (-1)^{n-1}\frac{\pi^2}{2}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n}\ln|x| & \text{при } \lambda=-n; \end{cases} \tag{25}$$

$$(x-i0)^\lambda\ln(x-i0) = \\ =\begin{cases} x_+^\lambda\ln x_+ - i\pi e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda + e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda\ln x_- & \text{при } \lambda\neq -n,\\ (-1)^{n-1} i\pi x_-^{-n} + (-1)^{n-1}\frac{\pi^2}{2}\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + x^{-n}\ln|x| & \text{при } \lambda=-n. \end{cases} \tag{26}$$

14. В окрестности полюса $\lambda=-n-2k$ функция $r^\lambda$ разлагается в ряд Лорана

$$r^\lambda = \Omega_n\frac{\delta^{(2k)}(r)}{(2k)!}\frac{1}{\lambda+n+2k} + \Omega_n r^{-n-2k} + \\ + \Omega_n(\lambda+n+2k)r^{-n-2k}\ln r + \ldots \tag{27}$$

Здесь функционалы $\delta^{(2k)}(r)$, $r^{-n-2k}$, $r^{-n-2k}\ln^m r$ применяются к функциям $S_\varphi(r)$ по формулам:

$$\left(\delta^{(2k)}(r), S_\varphi(r)\right) = S_\varphi^{(2k)}(0), \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \left(r^{-n-2k}, S_\varphi(r)\right) = \int_0^\infty r^{-2k-n}\Big[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \ldots \\ \ldots - \frac{r^{2k-2}}{(2k-2)!}S_\varphi^{(2k-2)}(0) - \frac{r^{2k}}{(2k)!}S_\varphi^{(2k)}(0)\theta(1-r)\Big]dr, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \left(r^{-n-2k}\ln^m r, S_\varphi(r)\right) = \int_0^\infty r^{-2k-n}\ln^m r\Big[S_\varphi(r) - \varphi(0) - \ldots \\ \ldots - \frac{r^{2k}}{(2k)!}S_\varphi^{(2k)}(0) - \theta(1-r)\Big]dr. \end{aligned} \tag{30}$$

Величина $S_\varphi^{(2k)}(0)$ выражается непосредственно через функцию $\varphi(x)$ и ее производные по формуле

$$S_\varphi^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!\Omega_n\Delta^n\varphi(0)}{2^k k! n(n+2)\ldots(n+2k-2)}. \tag{31}$$

### Глава I, § 5

1. *Прямым произведением* $f(x)\times g(y)$ функционалов $f(x)$ и $g(y)$ называется функционал в пространстве основных функций $\varphi(x,y)$, действующий по формуле

$$(f(x)\times g(y), \varphi(x,y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y))).$$

2. *Сверткой* $f(x) * g(x)$ функционалов $f$ и $g$ называется функционал в пространстве основных функций $\varphi(x)$, действующий по формуле

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x+y))).$$

Свертка определена при выполнении одного из следующих условий:

а) один из функционалов $f, g$ имеет ограниченный носитель;

б) носители обоих функционалов ограничены с одной и той же стороны.

При выполнении этих условий свертка коммутативна и ассоциативна.

3. $\delta * f = f$ для любого $f$.
4. $\frac{\partial\delta}{\partial x_j} * f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.
5. $\frac{\partial}{\partial x_j}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}$.
6. Из $f_\nu \to f$ следует $f_\nu * g \to f * g$ при каждом из следующих предположений:

а) *все функционалы $f_\nu$ сосредоточены на одном и том же ограниченном множестве;*

б) *функционал $g$ сосредоточен на ограниченном множестве;*

в) *носители функционалов $f_\nu$ и $g$ ограничены с одной и той же стороны и притом не зависящей от $\nu$ константой.*

7. *Фундаментальным решением уравнения*

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = g \tag{1}$$

называется обобщенная функция $E(x)$, удовлетворяющая условию

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E = \delta(x).$$

Решение уравнения (1) может быть выражено по формуле

$$u = E * g$$

при условии существования этой свертки. См. также гл. I, § 6, пп. 1–3, гл. II, п. 8, гл. III, § 2, п. 5.

8. *Фундаментальным решением задачи Коши* для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \tag{2}$$

называется обобщенная функция $E(x,t)$, зависящая непрерывно от параметра $t$, являющаяся при $t > 0$ решением уравнения (2) и обращающаяся в $\delta(x)$ при $t \to 0$.

Решение уравнения (2) с начальным условием $u(x,0) = u_0(x)$ может быть представлено в форме

$$u(x,t) = E(x,t) * u_0(x),$$

при условии существования этой свертки.

9. *Фундаментальным решением задачи Коши* для уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0 \tag{3}$$

$m$-го порядка по $t$ называется обобщенная функция $E(x,t)$, зависящая непрерывно от параметра $t$, являющаяся при $t > 0$ решением уравнения (3) и обладающая свойствами

$$\lim_{t\to 0} E(x,t) = 0,\ \lim_{t\to 0} \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \lim \frac{\partial^{m-2} E(x,t)}{\partial t} = 0,\ \lim \frac{\partial^{m-1} E(x,t)}{\partial t} = \delta(x).$$

Решение уравнения (3) с начальными условиями

$$u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{m-2} u(x,0)}{\partial t^{m-2}} = 0,$$
$$\frac{\partial^{m-1} u(x,0)}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x)$$

может быть представлено в форме

$$u(x,t) = E(x,t) * u_{m-1}(x)$$

при условии существования этой свертки, См. также гл. I, § 6, пп. 4–5, гл. II, п. 8, гл. III, § 1 п. 6.

10. *Интеграл порядка* $\lambda$ от обобщенной функции $g(x)$, равной нулю при $x < 0$ $(n = 1)$, определяется формулой

$$g_\lambda(x) = g(x) * \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}.$$

При Re $\lambda < 0$ эта формула определяет *производную* от $g(x)$ порядка $-\lambda$.

11. Гипергеометрическая функция

$$\Gamma(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha} dt$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{d^{\beta-\gamma}}{dx^{\beta-\gamma}} \left[\frac{x_+^{\beta-1}(1-x)_+^{-\alpha}}{\Gamma(\beta)}\right]$$

или

$$\frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}\left[\frac{x_+^{\gamma-\beta-1}(1-x)_+^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\gamma-\beta)}\right].$$

12. Бесселева функция $J_\lambda(\sqrt{u})$ связана с элементарными функциями следующей формулой дробного дифференцирования:

$$2^\lambda\sqrt{\pi}\,u^{\lambda/2}J_\lambda(\sqrt{u}) = \frac{d^{-\lambda-\frac{1}{2}}}{du^{-\lambda-\frac{1}{2}}}\frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u}}.$$

## Глава I, § 6

1. Фундаментальное решение эллиптического уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x) = \delta(x)$ может быть записано в форме

$$E(x) = \int\limits_\Omega \upsilon_\omega(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n, -n)\,d\Omega,$$

где

$$\upsilon_\omega(\xi,\lambda) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\xi-\eta,\omega)|\eta|^\lambda d\eta, \tag{1}$$

причем $G(\xi,\omega)$ есть решение уравнения

$$P\left(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ldots,\omega_n\frac{d}{d\xi}\right)G(\xi,\omega) = \delta(\xi).$$

При $n$ нечетном выражение (1) приводится к виду $(\xi = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)$

$$E(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Omega_n(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}1\cdot 3\ldots(n-2)}\int\limits_\Omega \frac{\partial^{n-1}G(\xi,\omega)}{d\xi^{n-1}}d\Omega.$$

2. Если $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — однородный многочлен от $\frac{\partial}{\partial x_j}$ степени $m$, то $E(x)$ имеет вид

$$E(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{4(2\pi)^{m-1}(2m-n)!}\int\limits_{\Omega} |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{2m-n}\frac{d\Omega}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}$$

$$(2m > n,\ n \text{ нечетно});$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^n(2m-n)!}\int\limits_{\Omega}\frac{(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)^{2m-n}\ln|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}d\Omega$$

$$(2m \geqslant n,\ n \text{ четно});$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\Omega}\delta^{(n-2m-1)}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)\frac{d\Omega}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}$$

$$(2m < n,\ n \text{ нечетно});$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-2m-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Omega}\frac{|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{2m-n}}{P(\omega_1,\ldots,\omega_n)}d\Omega$$

$$(2m < n,\ n \text{ четно}).$$

3. Указанные формулы остаются справедливыми и для однородных операторов $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, у которых $\operatorname{grad} P(\omega)$ не обращается в нуль при $P(\omega) = 0$, $\omega \neq 0$; но интегралы в этих формулах понимаются как регуляризованные (в смысле главного значения по Коши).

4. Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_{\Omega}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\omega(t,\xi-\eta)\frac{|\eta|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-n} d\eta\right\}d\omega,$$

где $G_\omega(t,\xi)$ — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \omega_1\frac{d}{d\xi}, \ldots, \omega_n\frac{d}{d\xi}\right)u(t,\xi) = 0.$$

В частности, при $n$ нечетном

$$u(x,t) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!}\int\limits_{\Omega}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}G_\omega(t,\xi)d\Omega.$$

5. Если $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — однородный гиперболический многочлен порядка $m$, то $u(x,t)$ принимает вид

$$u(x,t) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}(m-n-1)!} \times \\ \times \int\limits_{P(1,\xi)=0} \left(\sum x_k\xi_k + t\right)^{m-n-1} \operatorname{sgn}^{m-1}\left(\sum x_k\xi_k + t\right) d\omega$$

$(m \geqslant n-1,\ n$ нечетно);

$$= \frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n(m-n-1)!} \int\limits_{P(1,\xi)=0} \left(\sum x_k\xi_k + t\right)^{m-n-1} \ln\left|\frac{\sum x_k\xi_k + t}{\sum x_k\xi_k}\right| d\omega$$

$(m \geqslant n-1,\ n$ четно);

$$= \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{P(1,\xi)=0} \delta^{(n-m)}\left(\sum x_k\xi_k + t\right) d\omega$$

$(m < n-1,\ n$ нечетно);

$$= \frac{(-1)^{\frac{n+2}{2}}(n-m)!}{(2\pi)^n} \int\limits_{P(1,\xi)=0} \frac{d\omega}{\left(\sum x_k\xi_k + t\right)^{n-m+1}}$$

$(m < n-1,\ n$ четно).

## Глава II

1. *Преобразование Фурье основной функции* $\varphi(x)$

$$\psi(x) = \int \varphi(x) e^{i(x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n)} dx_1 \ldots dx_n$$

есть целая аналитическая функция комплексных переменных $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1, \ldots, s_n = \sigma_n + i\tau_n$; она удовлетворяет неравенствам

$$|s_1^{q_1} \ldots s_n^{q_n} \psi(s_1, \ldots, s_n)| \leqslant C_p e^{a_1|\tau_1| + \ldots + a_n|\tau_n|},$$

где $\{|x_j| \leqslant a_j\}$ — область, вне которой основная функция $\varphi(x)$ обращается в нуль.

2. Совокупность всех функций $\psi(s)$ указанного вида называется *пространством* $Z$. Последовательность $\psi_\nu(s) \in Z$ называется *сходящейся к нулю в* $Z$, если их прообразы Фурье $\varphi_\nu(x) \in K$ сходятся к нулю в $K$.

3. Преобразованием Фурье обобщенной функции $f$, т.е. функционала, действующего на пространстве $K$, называется функционал $g=F(f)$, определенный на пространстве $Z$ и действующий по формуле

$$(g,\psi) = (2\pi)^n(f,\varphi),$$

где $\psi(s) \in Z$ есть преобразование Фурье основной функции $\varphi(x) \in K$.

4. Дифференцирование и умножение на независимое переменное при преобразовании Фурье:

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\right] = P(-is)F[f],$$

$$F[P(x)f] = P\left(-i\frac{\partial}{\partial s}\right)F[f].$$

5. Преобразование Фурье прямого произведения:

$$F[f \times g] = F[f] \times F[g].$$

6. Преобразование Фурье функционала, сосредоточенного в ограниченной области, есть функционал типа функции

$$F[f] = (\overline{f(x)}, e^{i(x,s)}) = (\overline{f(x), e^{-i(x,s)}}).$$

7. $F[S] = S$.

8. Если $u(x,t)$ есть фундаментальное решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$, то

$$E(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x,t) = \delta(x,t).$$

9. Преобразования Фурье конкретных обобщенных функций даны ниже в сводной таблице (стр. 396– 402).

### Глава III, § 1

1. *Форма Лерея* $\omega$ на поверхности $P(x_1,\ldots,x_n) = 0$ определяется равенством

$$dP \cdot \omega = dx_1 \ldots dx_n;$$

в точках, где $\frac{\partial P}{\partial x_j} \neq 0$, ее можно представить в виде

$$\omega = (-1)^{j-1} - \frac{dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}.$$

2. Функционал $\delta(P)$ определяется по формуле

$$(\delta(P), \varphi) = \int\limits_{P=0} \varphi(x)\omega.$$

3. $\theta(P)$ есть характеристическая функция области $P(x) \geqslant 0$. Имеет место формула дифференцирования

$$\theta'(P) = \delta(P),$$

иными словами,

$$\frac{\partial \theta(P)}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta(P).$$

4. Формы $\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots$ задаются условиями:

$$\begin{gathered}\omega_0(\varphi) = \varphi \cdot \omega,\\ d\omega_0(\varphi) = dP \cdot \omega_1(\varphi),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ d\omega_{k-1}(\varphi) = dP \cdot \omega_k(\varphi).\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

Интеграл от формы $\omega_k(\varphi)$ по поверхности $P = 0$ определен однозначно.

5. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} P\delta(P) &= 0,\\ P\delta'(P) + \delta(P) &= 0,\\ P\delta''(P) + 2\delta(P) &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\ P\delta^{(k)}(P) + k\delta^{(k-1)}(P) &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\end{aligned}$$

6. Фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения $\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = 0$ при $n = 2k + 3$ имеет вид

$$E(x, t) = \frac{(-1)^k}{2\pi^{k+1}} \delta^{(k)}(r^2 - t^2) \qquad (r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

7. Если поверхности $P=0$ и $Q=0$ не имеют общих точек, то

$$\delta(PQ)=P^{-1}\delta(Q)+Q^{-1}\delta(P).$$

8. Если $a(x)$ не обращается в нуль, то

$$\begin{gathered}\delta(aP)=a^{-1}\delta(P),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \delta^{(k)}(aP)=a^{-(k+1)}\delta^{(k)}(P),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{gathered}$$

9. На поверхности $P_1=P_2=\ldots=P_k=0$ форма Лерея $\omega$ определяется из условия

$$dP_1\ldots dP_k\cdot\omega=dx_1\ldots dx_n.$$

В частности, если якобиан $D\begin{pmatrix}P_1 & \ldots & P_k\\ x_1 & \ldots & x_k\end{pmatrix}\neq 0$, можно положить

$$\omega=\frac{dx_{k+1}\ldots dx_n}{D\begin{pmatrix}P_1 & \ldots & P_k\\ x_1 & \ldots & x_k\end{pmatrix}}.$$

10. Обобщенная функция $\delta(P_1,\ldots,P_k)$ определяется формулой

$$(\delta(P_1,\ldots,P_k),\varphi(x_1,\ldots,x_n))=\int\limits_{P_1=\ldots=P_k=0}\varphi\cdot\omega.$$

11. Форма $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_{j+1},\ldots\alpha_k}(\varphi)$ определяется через форму $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_j,\ldots\alpha_k}(\varphi)$ уравнением

$$d(dP_1\ldots dP_{j-1}dP_{j+1}\ldots dP_k\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_j\ldots\alpha_k})=(-1)^{j-1}dP_1\ldots dP_k\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_{j+1}\ldots\alpha_k}.$$

12. Обобщенная функция $\frac{\partial^m\delta(P_1\ldots P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1}\ldots\partial P_k^{\alpha_k}}$ определяется равенством

$$\left(\frac{\partial^m\delta(P_1\ldots P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1}\ldots\partial P_k^{\alpha_k}},\varphi\right)=(-1)^m\int\limits_{P_1=\ldots=P_k=0}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(\varphi)\quad(m=\alpha_1+\ldots+\alpha_k).$$

13. Имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(P_1,\ldots,P_k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\delta(P_1,\ldots,P_k)}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial x_j},$$
$$P_i\delta(P_1,\ldots,P_k)=0,$$
$$P_iP_j\delta(P_1,\ldots,P_k)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_1P_2\ldots P_k\delta(P_1,\ldots,P_k)=0,$$

и равенства, получаемые из указанных формальным дифференцированием по $P_1,\ldots,P_k$.

### Глава III, § 2

1. *Обозначения*

$$P=x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2,$$
$$Q=s_1^2+\ldots+s_p^2-s_{p+1}^2-\ldots-s_{p+q}^2,$$
$$L=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2},$$

$n=p+q$ — размерность пространства; $p,q>0$.

2. *Определение обобщенных функций* $\delta_1^{(k)}(P)$, $\delta_2^{(k)}(P)$, $\delta^{(k)}(P_+)$, $\delta^{(k)}(P_-)$, $P_+^\lambda$, $P_-^\lambda$, $(P+i0)^\lambda$, $(P-i0)^\lambda$.

2.1. При $p>1$, $q>1$

$$\left(\delta_1^{(k)}(P),\varphi\right)=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\frac{\partial^k}{\partial v^k}\left(v^{\frac{q-2}{2}}\psi_1(u,v)\right)\Big|_{v=u}u^{\frac{p-2}{2}}du,$$

$$\left(\delta_2^{(k)}(P),\varphi\right)=\frac{(-1)^k}{4}\int\limits_0^\infty\frac{\partial^k}{\partial u^k}\left(u^{\frac{p-2}{2}}\psi_1(u,v)\right)\Big|_{u=v}v^{\frac{q-2}{2}}dv,$$

где через $\psi_1(u,v)$ обозначен интеграл от функции $\varphi$ по поверхности $x_1^2+\ldots+x_p^2=u$, $x_{p+1}^2+\ldots+x_{p+q}^2=v$, деленный на $u^{\frac{p-1}{2}}v^{\frac{q-1}{2}}$.

Написанные интегралы сходятся при $k<\frac{n}{2}-1$; при $k\geqslant\frac{n}{2}-1$ они понимаются в смысле регуляризованных значений в соответствии с § 3 гл. I.

Аналогичным образом определяются $\delta_1^{(k)}(P)$ и $\delta_2^{(k)}(P)$ в исключительных случаях, когда $p=1$ или $q=1$.

2.2.

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \int\limits_{P>0} P^\lambda \varphi dx_1 \ldots dx_n;$$

$$(P_-^\lambda, \varphi) = \int\limits_{P<0} (-P)^\lambda \varphi dx_1 \ldots dx_n.$$

Эти интегралы сходятся при $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$ и представляют собой аналитические функции от $\lambda$; при $\operatorname{Re} \lambda < 0$ они понимаются в смысле аналитических продолжений по $\lambda$.

2.3.

$$\delta^{(k)}(P_+) = (-1)^k k! \underset{\lambda=-k-1}{\text{выч.}} P_+^\lambda,$$

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k k! \underset{\lambda=-k-1}{\text{выч.}} P_-^\lambda.$$

2.4.

$$(P+i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pi i \lambda} P_-^\lambda,$$

$$(P-i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{-\pi i \lambda} P_-^\lambda$$

3. *Особые точки функций* $P_+^\lambda, P_-^\lambda$, $(P+i0)^\lambda$, $(P-i0)^\lambda$.

3.1. $p$ — *четное*, $q$ — *нечетное число.* Функция $P_+^\lambda$ имеет простые полюсы в точках $\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots$;

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta_1^{(k-1)}(P).$$

3.2. $p$ — *нечетное*, $q$ — *четное число.* Функция $P_+^\lambda$ имеет простые полюсы в точках $\lambda = -1, -2, \ldots, -k, \ldots$, а также в точках $\lambda = -\frac{n}{2}$, $-\frac{n}{2} - 1, \ldots -\frac{n}{2} - k, \ldots$;

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta_1^{(k-1)}(P),$$

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k! \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

3.3. $p$ *и* $q$ — *четные числа.* Функция $P_+^\lambda$ имеет простые полюсы в точках $\lambda = -1, -2; \ldots, -k, \ldots$;

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta_1^{(k-1)}(P), \quad \text{если } k < \frac{n}{2};$$

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!} \delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) + \frac{(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k! \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

3.4. *$p$ и $q$ — нечетные числа.* Функция $P_+^\lambda$ имеет простые полюсы в точках $\lambda = -1, -2, -3, \ldots, -\left(\frac{n}{2}-1\right)$; в точках $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots$ эта функция имеет полюсы кратности 2.

При $k < \frac{n}{2}$

$$\underset{\lambda=-k}{\text{выч.}}\, P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta_1^{(k-1)}(P).$$

В окрестности $\lambda = -\frac{n}{2} - k$

$$P_+^\lambda = \frac{c_{-2}^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{\left(\lambda + \frac{n}{2} + k\right)} + \ldots,$$

где

$$c_{-2}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^k k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x_1, \ldots, x_n)$$

и

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)!}\delta_1^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)}(P) + \\ + \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}\left[\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right]}{4^k k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

3.5. При переходе от $P_+^\lambda$ к $P_-^\lambda$ следует в 3.1– 3.4 поменять ролями индексы $p$ и $q$, а также заменить $L$ на $-L$ и $\delta_1^{(k-1)}(P)$ на $\delta_1^{(k-1)}(-P)$.

3.6. Функции $(P + i0)^\lambda$ и $(P - i0)^\lambda$ имеют особенностями лишь простые полюсы в точках $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \ldots, -\frac{n}{2}-k, \ldots$

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P+i0)^\lambda = \overline{\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-k}{\text{выч.}}(P-i0)^\lambda} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} L^k \delta(x_1, \ldots, x_n).$$

4. *Связь между функциями $\delta_1^{(k)}(P)$, $\delta_2^{(k)}(P)$, $\delta^{(k)}(P_+)$ и $\delta^{(k)}(P_-)$.*

4.1. $\delta_1^{(k)}(-P) = (-1)^k \delta_2^{(k)}(P)$.

4.2. *Если $n$ — нечетное, а также если $n$ четное и $k < \frac{n}{2} - 1$, то*

$$\delta_1^{(k)}(P) = \delta_2^{(k)}(P) = \delta^{(k)}(P_+),$$

*если $n$ — четное и $k \geqslant \frac{n}{2}-1$, то*

$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P) = c_{p,q,k} L^{k-\frac{n}{2}+1}\delta(x_1,\dots,x_n),$$
$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta^{(k)}(P_+) = c'_{p,q,k} L^{k-\frac{n}{2}+1}\delta(x_1,\dots,x_n),$$

где $c_{p,q,k}$ и $c'_{p,q,k}$ — числовые коэффициенты.

4.3. *Если $p$ и $q$ — четные числа и $k \geqslant \frac{n}{2}-1$, то*

$$(-1)^k\delta^{(k)}(P_+) - \delta^{(k)}(P_-) = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k+1-\frac{n}{2}}\left(k+1-\frac{n}{2}\right)!} L^{k+1-\frac{n}{2}}\delta(x_1,\dots,x_n),$$

во всех остальных случаях

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k\delta^{(k)}(P_+).$$

5. *Фундаментальное решение $K$ дифференциального уравнения $L^k u = f(x)$.*

5.1. *Если $n$ — нечетное число, то*

$$K_1 = (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}}}(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} =$$
$$= (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}}}\left(P_+^{-\frac{n}{2}+k} + e^{\pi\left(-\frac{n}{2}+k\right)i}P_-^{-\frac{n}{2}+k}\right),$$

$K_2 = \overline{K_1}$.

5.2. *Если $n$ — четное число и $k < \frac{n}{2}$, то*

$$K_1 = (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}}}(P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} =$$
$$= (-1)^k \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!\pi^{\frac{n}{2}}}\Bigg[P_+^{-\frac{n}{2}+k} + (-1)^{-\frac{n}{2}+k}P_-^{-\frac{n}{2}+k} +$$
$$+ \frac{(-1)^{-\frac{n}{2}+k}\pi i}{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)!}\delta^{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)}(P_+)\Bigg],$$

где $P_+^{-\frac{n}{2}+k}$ и $P_-^{-\frac{n}{2}+k}$ обозначают свободные члены лорановских разложений функций $P_+^{\lambda}$ и $P_-^{\lambda}$ в окрестности точки $\lambda = -\frac{n}{2}+k$;

$$K_2 = \overline{K_1}.$$

5.3. *Если $n$ — четное число и $k \geqslant \frac{n}{2}$, то*

$$K_1 = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}}{4^k \left(k-\frac{n}{2}\right)!(k-1)!} (P+i0)^{-\frac{n}{2}+k} \ln(P+i0),$$

$K_2 = \overline{K_1}$.

6. Формулы пп. 3, 5 остаются справедливыми для произвольной невырожденной квадратичной формы

$$P = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta.$$

В этом случае

$$L = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

$$Q = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta,$$

где коэффициенты $g^{\alpha\beta}$ определяются из условий $\sum\limits_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ ($\delta_\alpha^\gamma = 1$ при $\gamma = \alpha$, $\delta_\alpha^\gamma = 0$ при $\gamma \neq \alpha$).

В формулы п. 3 нужно при этом добавить справа в качестве множителя $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$, а в формулы п. 5 добавить $\sqrt{|\Delta|}$ , где $\Delta$ — дискриминант квадратичной формы $P$.

7. Преобразования Фурье функций, перечисленных в пп. 1–6, приведены в сводной таблице преобразований Фурье (ниже).

## Глава III, § 3

1. Обобщенная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *однородной функцией степени $\lambda$,* если для любой основной функции $\varphi(x)$ и $\alpha > 0$

$$\left(f, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+n}(f, \varphi).$$

2. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ положительная непрерывная однородная функция 1-й степени, то обобщенная функция

$$(f^\lambda, \varphi) = \int f^\lambda \varphi dx,$$

определенная этим интегралом при $\operatorname{Re}\lambda > -n$, может быть аналитически продолжена во всю плоскость $\lambda$, за исключением точек $\lambda = -n$, $-n-1, \ldots, -n-k, \ldots$, где она имеет простые полюсы. Аналитическое продолжение $f^\lambda$ в область $\operatorname{Re}\lambda > -n-k-1$ задается формулой

$$(f^\lambda, \varphi) = \int\limits_G f^\lambda(x)\Big[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{k!}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial^k\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big]dx + \int\limits_{R-G} f^\lambda(x)\varphi(x)dx +$$

$$+\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!(\lambda+n+m)}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m}\frac{\partial^m\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\int\limits_\Gamma f^\lambda(x)x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\cdot\omega,$$

где $G$ — область, содержащая начало координат, $\Gamma$ — ее граница, а $\omega$ — дифференциальная форма

$$x_1dx_2\ldots dx_n - x_2dx_1dx_3\ldots dx_n + \ldots + (-1)^{n+1}x_ndx_1\ldots dx_{n-1}.$$

В полосе $-n-k-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n-k$ эта же формула может быть записана в виде

$$(f^\lambda, \varphi) = \int f^\lambda(x)\Big[\varphi(x) - \varphi(0) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{k!}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial^k\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big]dx.$$

Вычет функции $f^\lambda$ в точке $\lambda = -n-k$ равен

$$\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k}\frac{\partial^k\delta(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\int\limits_\Gamma\frac{x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}}{f^{n+k}(x)}\omega.$$

В частности, в точке $\lambda = -n$ он равен

$$\delta(x)\cdot\int\limits_\Gamma\frac{\omega}{f^n(x)}.$$

3. По произвольной формально однородной функции $\Phi(x)$ степени $-n$ и области $G$, содержащей начало координат, строится обобщенная функция

$$\Phi|_G = \int\limits_G \Phi(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]dx + \int\limits_{R-G}\Phi(x)\varphi(x)dx,$$

локально совпадающая с $\Phi(x)$ всюду, кроме нуля. Эта обобщенная функция $\Phi|_G$ однородна степени $-n$ тогда и только тогда, когда

$$\int_\Gamma \Phi \cdot \omega = 0,$$

где $\Gamma$ — граница области $G$ и $\omega$ — дифференциальная форма, указанная выше.

4. По произвольной формально однородной функции $\Phi(x)$ степени $-n-m$ и области $G$, содержащей начало координат, строится обобщенная функция

$$\Phi\,\Big|_G =$$

$$= \int_G \Phi(x) \left[ \varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{1}{k!} \sum_{\sum \alpha_j = m} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^m \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right] dx +$$

$$+ \int_{R-G} \Phi(x) \left[ \varphi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\sum \alpha_j = m-1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^{m-1} \varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}} \right] dx,$$

локально совпадающая с $\Phi(x)$ всюду, кроме нуля. Эта обобщенная функция однородна степени $-n-m$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int_\Gamma \Phi(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \cdot \omega = 0 \qquad \left(\sum \alpha_j = m\right).$$

5. Однородная функция $\Phi$ степени $-n+1$ может быть продифференцирована (как обобщенная функция) по формуле

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\bigg|_G + (-1)^{j-1} \delta(x_1, \ldots, x_n) \int_\Gamma \Phi(x) dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n,$$

причем результат не зависит от выбора области $G$.

## Глава III, § 4

1. Функция $G(x) = G(x_1, \ldots, x_n)$ называется *эквивалентной однородной функции в окрестности точки $M$*, если в этой окрестности существует локальная система координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$, в которой функция $G(x)$ становится однородной функцией.

2. *Индуктивное определение приводимой точки.* Точка $x_0$ на вещественной оси называется *приводимой* (относительно функции $G(x)$, $G(x_0)=0$), если $G(x)$ в окрестности точки $x_0$ эквивалентна однородной функции.

Точка $M$ на поверхности $G(x_1,\dots,x_n)=0$ называется *приводимой*, если в некоторой окрестности точки $M$ функция $G$ эквивалентна однородной функции и пересечение поверхности $G=0$ со всякой достаточно малой сферой с центром в точке $M$ дает поверхность, каждая точка которой приводима на этой сфере.

3. Если локальные координаты в окрестности точки $M$ можно выбрать так, чтобы однородная функция $G$ степени $m$ зависела от $k$ переменных и нельзя выбрать так, чтобы она зависела от $k-1$ переменных, то точка $M$ называется *точкой $k$-го порядка, и степени $m$.*

4. Предположим, что поверхность $G=0$ состоит лишь из приводимых точек. Функционал, определяемый сходящимся при $\operatorname{Re}\lambda>0$ интегралом

$$(G^\lambda,\varphi)=\int\limits_{G>0} G^\lambda(x_1,\dots,x_n)\varphi(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n,$$

представляет собою аналитическую функцию от $\lambda$. Эта аналитическая функция может быть продолжена во всю плоскость $\lambda$ как мероморфная функция, полюсы которой лежат на конечном числе арифметических прогрессий. Именно, каждой связной компоненте поверхности $G=0$, состоящей из точек порядка $r$ и степени $m$, отвечает серия полюсов в точках $-\frac{r}{m}$, $-\frac{r+1}{m}$, $\dots$, $-\frac{r+k}{m}$,$\dots$ Если имеется несколько вложенных друг в друга связных компонент, состоящих из точек различных порядков, и значение $\lambda=\lambda_0$ принадлежит нескольким сериям, отвечающим этим компонентам, то кратность полюса в точке $\lambda_0$ соответственно увеличивается.

В частности, если на поверхности $G=0$ нет особых точек (т.е. все ее точки — приводимые порядка 1 и степени 1), то полюсы функции $(G^\lambda,\varphi)$ исчерпываются серией $-1,-2,\dots,-n$.

5. Предположим, что поверхность $G=0$ состоит только из приводимых точек, а поверхность $G=c$ при $c>0$ не имеет особых точек. Пусть, далее, форма $\omega$ определена равенством $dG\cdot\omega=dv$. Для интеграла

$$I(c)=\int\limits_{G=0}\varphi(x_1,\dots,x_n)\cdot\omega=(\delta(G-c),\varphi)$$

имеет место асимптотическое разложение

$$I(c)\cong\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{m_k}a_{km}c^{\lambda_k-1}\ln^{m-1}c,$$

где $0 > -\lambda_1 > -\lambda_2 > \ldots$ — полюсы функции $(G^\lambda, \varphi)$, $m_k$ — кратность полюса в точке $\lambda_k$ и $a_{km}$ есть коэффициент при $\frac{1}{(\lambda+\lambda_k)^m}$ в разложении Лорана для $(G^\lambda, \varphi)$ в окрестности полюса $-\lambda_k$, умноженный на $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$.

6. В частности,

$$\int\limits_{xy=c} \varphi \cdot \omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,y)}{y} dy = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,y)dx}{x} =$$
$$= -2\varphi(0,0)\ln c + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,0)}{x} dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(0,y)}{y} dy + \ldots,$$

где многоточие заменяет члены, стремящиеся к нулю при $c \to 0$. Эквивалентная формула

$$\delta(xy - c) = -2\delta(x,y)\ln c + \frac{\delta(y)}{x} + \frac{\delta(x)}{y} + o(c).$$

7. Для $G \equiv x^2 + y^2 + z^2 - t^2$

$$\delta(G - c) = \delta(G) + c \ln c \frac{\delta(x,y,z,t)}{8} + c\delta'(G) + o(c).$$

# СВОДНАЯ ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

### Функции одного переменного

| №№ п/п | Обобщенная функция $f$ | Преобразование Фурье $F[f]$ |
|---|---|---|
| 1 | Обычная интегрируемая функция $f(x)$ | $F[f]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\sigma}\,dx$ |
| 2 | $\delta(x)$ | 1 |
| 3 | 1 | $2\pi\delta(\sigma)$ |
| 4 | Многочлен $P(x)$ | $2\pi P\left(-i\dfrac{d}{d\sigma}\right)\delta(\sigma)$ |
| 5 | $\delta^{(2m)}(x)$ | $(-1)^m\sigma^{2m}$ |
| 6 | $\delta^{(2m+1)}(x)$ | $(-1)^{m+1}i\sigma^{2m+1}$ |
| 7 | $e^{bx}$ | $2\pi\delta(s-ib)$ |
| 8 | $\sin bx$ | $-i\pi[\delta(s+b)-\delta(s-b)]$ |
| 9 | $\cos bx$ | $\pi[\delta(s+b)+\delta(s-b)]$ |
| 10 | $\operatorname{sh} bx$ | $\pi[\delta(s-ib)-\delta(s+ib)]$ |
| 11 | $\operatorname{ch} bx$ | $\pi[\delta(s-ib)+\delta(s+ib)]$ |
| 12 | $e^{\frac{x^2}{2}}$ | Аналитический функционал $i\sqrt{2\pi}e^{\frac{s^2}{2}}$ (интегрирование по мнимой оси) |
| 13 | $\lvert x\rvert^\lambda$ $(\lambda\neq -1,-3,\ldots)$ | $-2\sin\dfrac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}$ |
| 14 | $f_\lambda(x)=2^{-\frac{\lambda}{2}}\dfrac{\lvert x\rvert^\lambda}{\Gamma\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)}$ | $\sqrt{2\pi}f_{-\lambda-1}(\sigma)=\sqrt{2\pi}\dfrac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}}{\Gamma\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)}$ |
| 15 | $\lvert x\rvert^\lambda\operatorname{sgn}x$ $(\lambda\neq -2,-4,\ldots)$ | $2i\cos\dfrac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma$ |
| 16 | $g_\lambda(x)=2^{-\frac{\lambda}{2}}\dfrac{\lvert x\rvert^\lambda\operatorname{sgn}x}{\Gamma\left(\dfrac{\lambda+2}{2}\right)}$ | $\sqrt{2\pi}ig_{-\lambda-1}(\sigma)=\sqrt{2\pi}i\dfrac{2^{\frac{\lambda+1}{2}}\lvert\sigma\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\sigma}{\Gamma\left(\dfrac{1-\lambda}{2}\right)}$ |
| 17 | $x^m$ | $2(-i)^m\pi\delta^{(m)}(\sigma)$ |
| 18 | $x^{-m}$ | $i^m\dfrac{\pi}{(m-1)!}\sigma^{m-1}\operatorname{sgn}\sigma$ |
| 19 | $x^{-1}$ | $i\pi\operatorname{sgn}\sigma$ |
| 20 | $x^{-2}$ | $-\pi\lvert\sigma\rvert$ |
| 21 | $x_+^\lambda$ $(\lambda\neq -1,-2,\ldots)$ | $ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}=$ |

*Продолжение*

| №№ п/п | Обобщенная функция $f$ | Преобразование Фурье $F[f]$ |
|---|---|---|
| | | $= i\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1}\right]$ [1] |
| 22 | $x_+^n$ | $i^{n+1}n!\sigma^{-n-1} + (-1)^n\pi\delta^{(n)}(x)$ |
| 23 | $\theta(x)$ | $i\sigma^{-1} + \pi\delta(\sigma)$ |
| 24 | $x_-^\lambda$ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$ | $-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(\sigma - i0)^{-\lambda-1} =$ |
| | | $= i\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_-^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\sigma_+^{-\lambda-1}\right]$ [1] |
| 25 | $(x+i0)^\lambda$ | $\dfrac{2\pi e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\sigma_-^{-\lambda-1}$ |
| 26 | $(x-i0)^\lambda$ | $\dfrac{2\pi e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(-\lambda)}\sigma_+^{-\lambda-1}$ |

В дальнейших формулах 27–38 введены следующие обозначения:

$$ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1) = \frac{a_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$

$$-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1) = \frac{b_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + b_0^{(n)} + b_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$

$$-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1) = \frac{c_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + c_0^{(n)} + c_1^{(n)}(\lambda+n) + \ldots,$$

$$2\cos\frac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1) = \frac{d_{-1}^{(n)}}{\lambda+n} + d_0^{(n)} + d_1^{(n)}(\lambda+n).$$

Коэффициенты $a_{-1}^{(n)}$, $a_0^{(n)}, \ldots$ имеют следующие значения:

$$a_{-1}^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$a_0^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \Gamma'(1) + i\frac{\pi}{2}\right];$$

$$a_1^{(n)} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^2} + \sum_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j,k\leqslant n-1}}\frac{1}{j^k} - \frac{\pi^2}{8} + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots + \frac{1}{n-1}\right)\Gamma'(1) + \Gamma''(1) + i\frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \Gamma'(1)\right]\right\};$$

$$b_i^{(n)} = a_i^{-(n)};\; c_i^{(n)} = 2\,\mathrm{Re}\,a_i^{(n)};\; d_i^{(n)} = 2\,\mathrm{Im}\,a_i^{(n)}.$$

В частности,

$$b_{-1}^{(n)} = \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!};\; c_{-1}^{(n)} = \frac{2(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cos(n-1)\frac{\pi}{2};$$

$$d_{-1}^{(n)} = \frac{2(-1)^n}{(n-1)!}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}.$$

| | | |
|---|---|---|
| 27 | $\lvert x\rvert^{-2m-1}$ | $c_0^{(2m+1)}\sigma^{2m} - c_{-1}^{(2m+1)}\sigma^{2m}\ln\lvert\sigma\rvert$ |
| 28 | $x^{-2m}\,\mathrm{sgn}\,x$ | $id_0^{(2m)}\sigma^{2m-1} - id_{-1}^{(2m)}\sigma^{2m-1}\ln\lvert\sigma\rvert$ |

[1] Второе — при $\lambda \neq 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

*Продолжение*

| №№ п/п | Обобщенная функция $f$ | Преобразование Фурье $F[f]$ |
|---|---|---|
| 29 | $x_+^\lambda \ln x_+$ | $ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Big[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma+i0)^{-\lambda-1}-$ |
| | $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$ | $-\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)\Big\}$ |
| 30 | $x_-^\lambda \ln x_-$ | $-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Big[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma-i0)^{-\lambda-1}-$ |
| | $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$ | $-\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0)\Big\}$ |
| 31 | $\ln x_+$ | $i\Big\{\Big(\Gamma'(1)+i\frac{\pi}{2}\Big)[(\sigma+i0)^{-1}-(\sigma+i0)^{-1}\ln(\sigma+i0)]\Big\}$ |
| 32 | $\ln x_-$ | $-i\Big\{\Big(\Gamma'(1)-i\frac{\pi}{2}\Big)[(\sigma-i0)^{-1}-$ |
| | | $-(\sigma-i0)^{-1}\ln(\sigma-i0)]\Big\}$ |
| 33 | $\lvert x\rvert^\lambda \ln\lvert x\rvert$ | $ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Big[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma+i0)^{-\lambda-1}-$ |
| | $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$ | $-\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)\Big\}-$ |
| | | $-ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Big[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma-i0)^{-\lambda-1}-$ |
| | | $-\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0)\Big\}$ |
| 34 | $\lvert x\rvert^\lambda \ln\lvert x\rvert\operatorname{sgn}x$ | $ie^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Big[\Gamma'(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma+i0)^{-\lambda-1}-$ |
| | $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$ | $-\Gamma(\lambda+1)(\sigma+i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma+i0)\Big\}+$ |
| | | $+ie^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\Big\{\Big[\Gamma'(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\Big](\sigma-i0)^{-\lambda-1}-$ |
| | | $-\Gamma(\lambda+1)(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma-i0)\Big\}$ |
| 35 | $x^{-2m}\ln\lvert x\rvert$ | $c_1^{(2m)}\lvert\sigma\rvert^{2m-1}-c_0^{(2m)}\lvert\sigma\rvert^{2m-1}\ln\lvert\sigma\rvert$ |
| 36 | $x^{-2m-1}\ln\lvert x\rvert$ | $id_1^{(2m+1)}\sigma^{2m}\operatorname{sgn}\sigma-id_0^{(2m+1)}\sigma^{2m}\ln\lvert\sigma\rvert\operatorname{sgn}\sigma$ |
| 37 | $\lvert x\rvert^{-2m-1}\ln\lvert x\rvert$ | $c_1^{(2m+1)}\sigma^{2m}-c_0^{(2m+1)}\sigma^{2m}\ln\lvert\sigma\rvert+$ |
| | | $+\frac{1}{2}c_{-1}^{(2m+1)}\sigma^{2m}\ln^2\lvert\sigma\rvert$ |
| 38 | $\lvert x\rvert^{-2m}\ln\lvert x\rvert\operatorname{sgn}x$ | $id_1^{(2m)}\sigma^{2m-1}-id_0^{(2m)}\sigma^{2m-1}\ln\lvert\sigma\rvert+$ |
| | | $+\frac{1}{2}d_{-1}^{(2m)}\sigma^{2m-1}\ln^2\lvert\sigma\rvert$ |
| 39 | $(1-x^2)_+^\lambda$ | $\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1)\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}J_{\lambda+\frac{1}{2}}(\sigma)$ |
| | $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$ | |
| 40 | $(1+x^2)_+^\lambda$ | $\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{\lvert\sigma\rvert}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}K_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\lvert\sigma\rvert)$ |
| 41 | $(x^2-1)_+^\lambda$ | $-\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left\lvert\frac{\sigma}{2}\right\rvert^{-\lambda-\frac{1}{2}}N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\lvert\sigma\rvert)=$ |
| | $(\lambda\neq-1,-2,\ldots)$ | $=\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left\lvert\frac{\sigma}{2}\right\rvert^{-\lambda-\frac{1}{2}}\times$ |

*Продолжение*

| №№ п/п | Обобщенная функция $f$ | Преобразование Фурье $F[f]$ |
|---|---|---|
| | | $\times \dfrac{\cos\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\|\sigma\|)-J_{\lambda+\frac{1}{2}}(\|\sigma\|)}{\sin\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}$ |
| 42 | $(x^2-1)_+^n$ | $(-1)^n 2\pi\left(1+\dfrac{d^2}{d\sigma^2}\right)\delta(\sigma)+$ $+(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(\sigma)$ |

## Функции нескольких переменных

| №№ п/п | Обобщенная функция $f$ | Преобразование Фурье $F[f]$ |
|---|---|---|
| 1 | $\delta(x_1,\ldots,x_n)$ | 1 |
| 2 | 1 | $(2\pi)^n\delta(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ |
| 3 | Многочлен $P(x_1,\ldots x_n)$ | $(2\pi)^n P\left(-i\dfrac{\partial}{\partial\sigma_1},\ldots,-i\dfrac{\partial}{\partial\sigma_n}\right)\delta(\sigma)$ |
| 4 | $r^\lambda\left(r=\sqrt{\sum x_j^2}\right)$ | $2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)}\rho^{-\lambda-n}\quad\left(\rho=\sqrt{\sum\sigma_j^2}\right)$ |
| 5 | $f_\lambda(r)=\dfrac{2^{-\frac{\lambda}{2}}r^\lambda}{\Gamma\left(\dfrac{\lambda+n}{2}\right)}$ | $f_{-\lambda-n}(\rho)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\dfrac{2^{\frac{\lambda+n}{2}}r^{-\lambda-n}}{\Gamma\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)}$ |

В формулах 6–9 используется функция

$$C_\lambda=2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)}=\frac{c_{-1}^{(n+2m)}}{\lambda+n+2m}+c_0^{(n+2m)}+c_1^{(n+2m)}(\lambda+n+m)+\ldots;$$

в правой части выписано ее лорановское разложение в окрестности точки $\lambda=-n-2m$. Кроме того,

$$\Omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$$

есть поверхность единичной сферы в $n$-мерном пространстве.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | $r^\lambda\ln r$ $(\lambda\neq-n,-n-2,\ldots)$ | $\dfrac{dC_\lambda}{\partial\lambda}\rho^{-\lambda-n}+C_\lambda\rho^{-\lambda-n}\ln\rho$ |
| 7 | $r^\lambda\ln^2 r$ $(\lambda\neq-n,-n-2,\ldots)$ | $\dfrac{\partial^2C_\lambda}{\partial\lambda^2}\rho^{-\lambda-n}+2\dfrac{dC_\lambda}{\partial\lambda}\rho^{-\lambda-n}\ln\rho+C_\lambda\rho^{-\lambda-n}\ln^2\rho$ |

*Продолжение*

| №№ п/п | Обобщенная функция $f$ | Преобразование Фурье $F[f]$ |
|---|---|---|
| 8 | $\Omega_n r^{-2n-m}$ | $c_{-1}^{(n+2m)} \rho^{2m} \ln\rho + c_0^{(n+2m)} \rho^{2m}$ |
| 9 | $\Omega_n r^{-2n-m} \ln r$ | $\frac{1}{2} c_{-1}^{(n+2m)} \rho^{2m} \ln^2\rho + c_0^{(n+2m)} \rho^{2m} \ln\rho + {}$ $+ c_1^{(n+2m)} \rho^{2m}$ |
| 10 | $\delta(r-a)\ (n \geqslant 1)$ | $\Omega_{n-1} a^{\frac{n}{2}} \rho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(a\rho)$ |
| 11 | То же при $n = 3$ | $4\pi a \frac{\sin a\rho}{\rho}$ |
| 12 | $\left(\frac{d}{ada}\right)^m \frac{\delta(r-a)}{a}$ | $\Omega_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\rho}{\rho}$ |

Обозначения в дальнейших формулах 13–25 см. выше. в разделе «Сводка основных определений и формул», стр. 387, пп. 1–2.

| | | |
|---|---|---|
| 13 | $(P + i0)^\lambda$ | $\frac{1}{\Gamma(-\lambda)} e^{-\frac{\pi}{2} q i} 2^{n+2\lambda} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) (Q - i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$ |
| 14 | $(P - i0)^\lambda$ | $\frac{e^{\frac{\pi}{2} q i} 2^{n+2\lambda} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)} (Q + i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$ |
| 15 | $P_+^\lambda$ | $2^{n+2\lambda} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) \times$ $\times \frac{1}{2i} \left[e^{-i\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)\pi} (Q - i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - \right.$ $\left. - e^{i\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)\pi} (Q + i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right]$ |
| 16 | $P_-^\lambda$ | $-2^{n+2\lambda} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) \times$ $\times \frac{1}{2i} \left[e^{-\frac{\pi}{2} q i} (Q - i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - \right.$ $\left. - e^{\frac{\pi}{2} q i} (Q + i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right]$ |
| 17 | $(c^2 + P + i0)^\lambda$ | $\frac{2^{\lambda+1} (\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q - i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q - i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} =$ $= \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{q\pi i}{2}} c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}} \times$ $\times \left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_+^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_+^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} + \frac{\pi i}{2} \frac{H^{(1)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_-^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_-^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]$ |
| 18 | $(c^2 + P - i0)^\lambda$ | $\frac{2^{\lambda+1} (\sqrt{2\pi})^n c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q + i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q + i0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}} =$ $= \frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1} \pi^{\frac{n}{2}} e^{\frac{q\pi i}{2}} c^{\lambda+\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\lvert\Delta\rvert}} \times$ |

*Продолжение*

| №№ п/п | Обобщенная функция $f$ | Преобразование Фурье $F[f]$ |
|---|---|---|
| | | $\times \left[\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_{+}^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_{+}^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}} - \frac{\pi i}{2}\frac{H^{(2)}_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_{-}^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_{-}^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\right]$ |
| 19 | $\frac{(c^2+P)_{+}^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$ | $-\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}i\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$<br>$\times\Bigl\{e^{-i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-$<br>$-\ e^{i\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\Bigr\}=$<br>$=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$<br>$\times\Bigl\{-\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_{+}^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_{+}^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+$<br>$+\frac{\pi}{2\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi}\Bigl[\sin\left(\lambda+\frac{q}{2}\right)\pi\frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_{-}^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_{-}^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+$<br>$+\ \sin\frac{p\pi}{2}\frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_{-}^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_{-}^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\Bigr]\Bigr\}$ |
| 20 | $\frac{(c^2+P)_{-}^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$ | $\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}i\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\Bigl\{e^{-\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-$<br>$-e^{\frac{q\pi i}{2}}\frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\Bigr\}=$<br>$=\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}+1}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times$<br>$\times\Bigl\{\sin\frac{q\pi}{2}\frac{K_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_{+}^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_{+}^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}-\frac{\pi}{2\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi}\times$<br>$\times\Bigl[\sin\frac{q\pi}{2}\frac{J_{\lambda+\frac{n}{2}}\left(cQ_{-}^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_{-}^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}+$<br>$+\sin\left(\lambda+\frac{p}{2}\right)\pi\frac{J_{-\lambda-\frac{n}{2}}\left(cQ_{-}^{\frac{1}{2}}\right)}{Q_{-}^{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}}\Bigr]\Bigr\}$ |

*Продолжение*

| №№ п/п | Обобщенная функция $f$ | Преобразование Фурье $F[f]$ |
|---|---|---|
| 21 | $\lvert\Delta\rvert^{(s-1)}(c^2+P)$ | $(-1)^{s+1}\dfrac{i}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}2^{\frac{n}{2}-s}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}-s}\times \times\left[e^{-\frac{\pi i q}{2}}\dfrac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-s)}}- -e^{\frac{\pi i q}{2}}\dfrac{K_{\frac{n}{2}-s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-s)}}\right]$ |
| 22 | $\lvert\Delta\rvert(c^2+P)$ | $-\dfrac{i}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}(2\pi c)^{\frac{n}{2}-1}\left[-e^{-\frac{\pi q i}{2}}\dfrac{K_{\frac{n}{2}-1}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)}}+ +e^{\frac{\pi q i}{2}}\dfrac{K_{\frac{n}{2}-1}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)}}\right]$ |
| 23 | $\dfrac{(c^2+P)_+^s}{\Gamma(s+1)}$ | $(-1)^{s+1}i2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}\times \times\left[e^{-\frac{q\pi i}{2}}\dfrac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+s)}}- -e^{\frac{q\pi i}{2}}\dfrac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+s)}}\right]+ +(2\pi)^n\sum\limits_{m=0}^{s}\dfrac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!(s-m)!}L^m\lvert\Delta\rvert(x)$ |
| 24 | $\dfrac{(c^2+P)_-^s}{\Gamma(s+1)}$ | $\dfrac{i\cdot 2^{s+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}c^{\frac{n}{2}+s}}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\left[e^{-\frac{q\pi i}{2}}\dfrac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q-i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q-i0)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+s)}}- -e^{\frac{q\pi i}{2}}\dfrac{K_{\frac{n}{2}+s}\left[c(Q+i0)^{\frac{1}{2}}\right]}{(Q+i0)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+s)}}\right]$ |
| 25 | $\dfrac{(c^2+P)^s}{\Gamma(s+1)}$ | $(2\pi)^n\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{(-1)^m\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-2m}}{4^m m!(s-m)!}L^m\lvert\Delta\rvert(x)$ |

# ДОБАВЛЕНИЕ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОЛНОТЫ ПРОСТРАНСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Мы указывали в гл. I (§ 1, п. 8), что пространство обобщенных функций является полным относительно введенной там сходимости; иначе говоря, *если последовательность функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ такова, что для каждой основной функции $\varphi$ существует предел числовой последовательности $(f_\nu, \varphi)$, то этот предел $f(\varphi) = \lim\limits_{\nu\to\infty} (f_\nu, \varphi)$ снова задает линейный непрерывный функционал на пространстве $K$.* В настоящем Добавлении это предложение будет доказано.

Тот факт, что функционал $f(\varphi)$ линеен, весьма прост:

$$f(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \lim\{f_\nu(\alpha_1\varphi_1) + f_\nu(\alpha_2\varphi_2)\} = \\ = \alpha_1 f(\varphi_1) + \alpha_2 f(\varphi_2).$$

Существенно доказать непрерывность функционала $f(\varphi)$. Пусть последовательность основных функций $\varphi_\nu$, стремится к нулю в пространстве $K$; мы должны показать, что $f(\varphi_\nu) \to 0$.

Допустим противное. Тогда, перейдя, если нужно, к некоторой подпоследовательности, можно считать, что $|f(\varphi_\nu)| \geqslant c > 0$.

Сходимость последовательности $\varphi_\nu$ к нулю в пространстве $K$ означает, что все функции $\varphi_\nu(x)$ равны нулю вне ограниченной области и стремятся к нулю равномерно в $R_n$, так же как и их производные любых порядков. Еще раз перейдя к подпоследовательности, можем полагать, что $|D_\nu^k \varphi(x)| \leqslant \frac{1}{4^\nu}$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu)$.

Положим $\psi_\nu = 2^\nu \varphi_\nu$; тогда функции $\psi_\nu$ также будут стремиться к нулю в пространстве $K$, а в то же время $f(\psi_\nu) \to \infty$.

Теперь будем строить некоторую подпоследовательность $f'_\nu$ и некоторую подпоследовательность $\psi'_\nu$ следующим образом.

Выберем сначала $\psi'_1$ так, чтобы иметь $|f(\psi'_1)| > 1$. Поскольку $(f_\nu, \psi) \to f(\psi)$, выберем дальше $f'_1$ так, чтобы иметь $(f'_1, \psi'_1) > 1$.

Пусть $f'_j, \psi'_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$ построены. Возьмем в качестве $\psi'_\nu$ элемент последовательности $\psi_\nu$ с настолько большим номером, что

$$|(f'_k, \psi'_\nu)| < \frac{1}{2^{\nu-k}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu - 1); \tag{а}$$

$$|(f(\psi'_\nu)| > \sum_{j=1}^{\nu-1} |f(\psi'_j)| + n. \tag{б}$$

Первое возможно, потому что функции $\psi_\nu$ стремятся к нулю в пространстве $K$, и, следовательно, для любой обобщенной функции $f_0$

мы имеем $(f_0, \psi_\nu) \to 0$. Второе возможно потому, что $f(\psi_\nu) \to \infty$. Так как $(f_\nu, \psi) \to f(\psi)$, то выберем $f'_\nu$ из последовательности $f_\nu$ с таким расчетом, чтобы иметь

$$|(f'_\nu, \psi'_\nu)| > \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f'_\nu, \psi'_j)| + n. \tag{б$'$}$$

Таким образом, построение $\psi'_\nu$ и $f'_\nu$ можно продолжить неограниченно. Положим далее

$$\psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi'_\nu.$$

По построению, ряд в правой части сходится в пространстве $K$ и, следовательно, его сумма $\psi$ есть элемент $K$. Далее

$$(f'_\nu, \psi) = \sum_{j=1}^{\nu-1} (f'_\nu, \psi'_j) + (f'_\nu, \psi'_\nu) + \sum_{j=\nu+1}^{\infty} (f'_\nu, \psi'_j).$$

Но в силу (б$'$) и того, что

$$\sum_{j=\nu+1}^{\infty} (f'_\nu, \psi'_j) < \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-\nu}} = 1,$$

получаем

$$|(f'_\nu, \psi)| > \nu - 1,$$

т.е. при $\nu \to \infty$ также $(f'_\nu, \psi) \to \infty$. Но это противоречит соотношению $\lim\limits_{\nu \to \infty} (f'_\nu, \psi) = f(\psi)$.

Отсюда следует, что $f(\varphi_\nu) \to 0$, и непрерывность предельного функционала $f$ доказана.

# ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

В этой книге затрагивались вопросы классического анализа, имеющие в большинстве своем достаточно длинную историю. Поэтому ссылки, которые мы приводим ниже, во многих случаях приблизительны или условны. Например, понятие регуляризации расходящихся интегралов мы связываем с именами Ж. Адамара и М. Рисса, хотя оно встречалось уже у Коши (при определении Г-функции вне области сходимости интеграла), и, несомненно, еще Эйлер пользовался в своих вычислениях близкими соображениями.

К § 1 гл. I. Понятие обобщенной функции, как функционала над некоторым пространством функций, было сформулировано С.Л. Соболевым [20]. В той форме, которую мы приводим, оно было предложено Л. Шварцем [14].

К § 2 гл. I. Содержание этого параграфа заимствовано в основном из книги Л. Шварца [14].

К § 3–4 гл. I. Идея регуляризации расходящихся интегралов для применения к задачам дифференциальных уравнений восходит к Ж. Адамару [8]. М. Риссу [13] принадлежит общий метод регуляризации путем аналитического продолжения (см. также Л. Шварц [14]). Приведенный в этом параграфе материал является расширением и переработкой соответствующего материала из статьи И.М. Гельфанда и З.Я. Шапиро [16]. Новым по сравнению с этой статьей является введение и систематическое использование функционалов $(x+i0)^\lambda$ и $(x-i0)^\lambda$, а также постановка проблемы о канонической регуляризации и ее решение для функций одного переменного.

В классе функций двух (и более) переменных с особенностями не выше степенных проблема канонической регуляризации уже не разрешима; как обнаружили В. Грушин и Р. Исмагилов, даже функциям $\frac{\alpha(x,y)}{r^k}$ (здесь $\alpha(x,y)$ — бесконечно дифференцируемая функция) невозможно сопоставить функционалы так, чтобы выполнялись условия канонической регуляризации. В более узких классах функций нескольких переменных каноническая регуляризация возможна; В. Паламодов нашел несколько таких классов. Например, каноническая регуляризация возможна в классе функций $\frac{\alpha(x,y)}{P(x,y)}$, если расстояние между корнями каждого из многочленов $P(x,y)$, лежащими в верхней полуплоскости, и его корнями, лежащими в нижней полуплоскости, остается в каждой ограниченной области на оси $x$ больше положительной постоянной.

Задача о разложении дельта-функции на плоские волны (п. 11) в классической формулировке (вычисление значения функции в точке по известным интегралам этой функции по гиперплоскостям) была поставлена Радоном в 1917 г. и решена Ф. Джоном [10] и другими авторами; отметим по этому поводу заметку А. Хачатурова [22].

К § 5 гл. I. Содержание этого параграфа заимствовано в основном из книги Л. Шварца [14]. В разработке последних примеров п. 5 принимал участие Н.Я. Виленкин,

К § 6 гл. I. Содержание пп. 1 и 3 взято из статьи И.М. Гельфанда и З.Я. Шапиро [16]. Результаты п. 1 близким методом получены Ф. Джоном [10], результаты п. 3 независимо и приблизительно одновременно найдены Р. Курантом и А. Лаксом [4]. Впервые формула общего решения гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами была дана Герглотцем [9] и И.Г. Петровским [19] для тех случаев, когда она могла быть выражена в классических терминах теории функций, т.е. для уравнений достаточно высокого порядка ($m \geqslant n+1$). Гиперболические уравнения с постоянными коэффициентами были исследованы в важных работах Л. Гординга [7], с помощью метода Рисса, и Лерея [11], с помощью общего преобразования Лапласа. Пункт 2 написан В.А. Боровиковым по собственным результатам [24].

К Добавлению I. Содержание этого Добавления заимствовано из книги Л. Шварца [14].

К гл. II. Определение преобразования Фурье функций степенного роста, как обобщенных функций, принадлежит Л. Шварцу [14]. Другое определение аппарата преобразований Фурье таких функций имелось у С. Бохнера [1] и Т. Карлемана [3]. Приведенное в § 2 и § 3 определение преобразования Фурье функции произвольного порядка роста принадлежит И.М. Гельфанду и Г.Е. Шилову [17]. В статье [17] дано более общее определение, о котором будет идти речь в гл. III второго выпуска. Пространство $Z$ было введено И.М. Гельфандом и Г.Е. Шиловым [17] (под обозначением $Z^1$)[1)], а также одновременно и независимо Б. Мальгранжем [12] и Л. Эренпрейсом [5]. Текст § 2, п. 6 принадлежит Н.Я. Виленкину и З.Я. Шапиро.

К § 1 гл. III. Определение дифференциальных форм $\omega_j$ $(j>0)$, функционала $\delta(P)$ и его производных принадлежит И.М. Гельфанду и З.Я. Шапиро [16]. Форма $\omega_0$ введена впервые Ж. Лереем [11]. Пункт 9 заимствован из статьи З.Я. Шапиро [23].

К § 2 гл. III. Изучение полюсов и вычетов квадратичной формы в степени $\lambda$ для случая, когда в квадратичной форме имеется не больше одного минуса, было проведено М. Риссом [13] и явилось у него основой для исследования решений волнового уравнения. Исследование квадратичной формы в общем случае для целей теории представлений провели И.М. Гельфанд и М.И. Граев [15]. Фундаментальные решения ультрагиперболических уравнений $Lu=\delta$ построены впервые И. Фурэ-Брюа [6]; в приведенной здесь форме они указаны З.Я. Шапиро; для $L^k u=\delta$ публикуются здесь впервые. Пункты 1, 2 следуют работам М. Рисса [13] и И.М. Гельфанда и М.И. Граева [15]. Идея, положенная в основу пп. 3–10 — продолжение в комплексную область, — принадлежит И.М. Гельфанду. Она изложена в п. 3. Результаты пп. 4–6 принадлежат И.М. Гельфанду и М.И. Граеву, а пп. 7–10 Н.Я. Виленкину, И.М. Гельфанду и З.Я. Шапиро. Соответствующие пункты написаны авторами полученных результатов.

К § 3 гл. III. Результаты этого параграфа взяты в основном из статьи И.М. Гельфанда и З.Я. Шапиро [16]. Пункт 6 написан В.А. Боровиковым.

К § 4 гл. III. Материал этого параграфа в основном взят из статьи И.М. Гельфанда и З.Я. Шапиро [16]. М.В. Федорюк построил $P^\lambda$ для любого многочлена от двух переменных с одним нулем в начале координат.

К Добавлению. Приведенное в Добавлении доказательство полноты пространства $K'$ предложено М.С. Бродским.

## БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Bochner S., *Vorlesungen über Fouriersche Integrale.* Leipzig, 1932.

[2] Bureau F., *Divergent integrals and partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 143–202.

[3] Carleman T., *L'intégral de Fourier et questions qui s'y rattachent.* Uppsala, 1944.

[4] Courant R. and Lax A., *Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with constant coefficients in several independent variables*, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), n° 4.

[5] Ehrenpreis L., *Solution of some problems of division*, Amer. J. Math. **76** (1954), №4, 883–903.

[1)] Более подробное изложение методов, основанных на использовании пространства $Z$, и связей с аналитическими функционалами Фантаппи и работами Лерея, составит содержание пятого выпуска.

[6] Foures-Bruhat Y., *Solution élémentaire d'équations ultrahyperboliques*, J. Math. Pures Appl. **35** (1956), n° 3, 277–288.

[7] Garding L., *Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients*, Acta Math. **85** (1950), 1–62.

[8] Hadamard J., *Le problème de Cauchy et les équations eux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris, 1932.

[9] Herglotz G., *Über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten*, Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl., vol. 78, 1926, S. 93–126, 287–318; vol 80, 1928, S. 60–144; Abh, Math. Sem. Univ. Gamburg, vol. 6, 1928, pp. 189–197.

[10] John F., *Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten*. Math. Annalen, vol. 100 (1934), 488–520; *The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analityc coefficients*, Comm. pure and appl. math., vol. 3 (1950), 273–304; см. также его книгу *Plane waves and spherical means, applied to partial differential equations*. New York, 1955.

[11] Leray J., *Les solutions élémentaires d'une équation aux derivees partielles à coefficients constants*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **234** (1952), 1112–1115. См. также его книгу *Hyperbolic differential equations*, New York, 1955.

[12] Malgrange B., *Equations aux dérivées partielles à coefficients constants, 1.* Comptes Rendus Acad. Sci., **237** (1953), №25 1620–1622.

[13] Riesz M., *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Math. **81** (1949), 1–223.

[14] Schwartz L., *Théorie des distributions I, II*, Paris,1950–51.

[15] Гельфанд И. М. и Граев М. И., *Аналог формулы Планшереля для классических групп*. Труды Моск. матем. о-ва **4** (1955), 375–404.

[16] Гельфанд И. М. и Шапиро З. Я., *Однородные функции и их приложения*. Успехи матем. наук **10** (1955), №3, 3–70.

[17] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., *Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши*. Успехи матем. наук **8** (1953), №4, 3–51.

[18] Микусинский Я., *Операторное исчисление*, ИЛ, М., 1956.

[19] Петровский И. Г., *On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations*. Матем. сб., №17 (59), (1945), 289–370.

[20] Соболев С. Л., *Méthode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*. Матем сб., №1 (43), (1936), 39–72.

[21] Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1950.

[22] Хачатуров А. А., *Определение значения меры для области n-мерного пространства по ее значениям для всех полупространств*. Успехи матем. наук, 9 (1954) №3 (61), 205–212.

[23] Шапиро З. Я., *Об одном классе обобщенных функций*. Успехи матем. наук, 13 (1958), №3 (81), 205–212.

[24] Боровиков В. А., *Фундаментальные решения линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами*. ДАН СССР, 119, №3; Диссертация, МГУ, 1958.

# АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ