

Летняя школа «Современная математика»  
Дубна, июль 2007

И. В. Аржанцев

# Градуированные алгебры и 14-я проблема Гильберта

Учебное пособие

Второе издание, исправленное

Москва  
Издательство МЦНМО  
2019

УДК 512.815.4

ББК 22.14

А80

**Рецензенты:** д. ф.-м. н., профессор Э. Б. Винберг  
д. ф.-м. н., профессор Т. Е. Панов

**Аржанцев И. В.**

А80 Градуированные алгебры и 14-я проблема Гильберта:  
Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2019. —  
64 с.

ISBN 978-5-4439-1441-1

Учебное пособие посвящено классическим задачам коммутативной алгебры и теории инвариантов. Помимо начальных сведений о градуированных алгебрах, их рядах Пуанкаре и многочленах Гильберта, приводятся доказательства теоремы Маколея о размерностях компонент стандартных градуированных алгебр, формулы Молина для ряда Пуанкаре алгебры инвариантов конечной линейной группы и теоремы Нагаты—Стейнберга о том, что алгебра инвариантов некоторой явно заданной линейной алгебраической группы не является конечно порожденной. Последний результат является контрпримером к 14-й проблеме Гильберта. Пособие содержит более 40 задач, к каждой из которых даны подробные указания. Излагаемый материал доступен студентам младших курсов физико-математических специальностей университетов.

Для студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников, интересующихся алгеброй, геометрией и комбинаторикой.

Предыдущее издание вышло в 2009 году.

ББК 22.14

12+

ISBN 978-5-4439-1441-1



9 785443 914411 >

© Аржанцев И. В., 2019.  
© МЦНМО, 2019.

## Оглавление

Введение . . . . .	4
§ 1. Основные понятия и примеры . . . . .	8
§ 2. Ряды Пуанкаре и многочлены Гильберта . . . . .	16
§ 3. Последовательности размерностей компонент . . . . .	20
§ 4. Теорема Маколея . . . . .	23
§ 5. Комбинаторный вариант теоремы Маколея . . . . .	27
§ 6. Теорема Грина . . . . .	31
§ 7. Алгебра инвариантов линейных преобразований . . . . .	35
§ 8. Формула Молина . . . . .	40
§ 9. Контрпример Нагаты—Стейнберга . . . . .	43
§ 10. Указания и комментарии к задачам . . . . .	51
Предметный указатель . . . . .	61
Литература . . . . .	63

## Введение

Что такое современная математика? Это стройные теории, состоящие из цепочки определений, несложных утверждений и эффектных примеров? Или это глубокие и технически сложные теоремы, на разбор только схем доказательств которых может понадобиться несколько часов или дней? Пожалуй, это и то и другое, и для учебного пособия важно отыскать золотую середину, лежащую между двумя описанными крайностями. В этом пособии излагаются как фрагменты классических теорий, так и доказательства двух трудных результатов: теоремы Маколея о последовательностях размерностей компонент стандартных градуированных алгебр и теоремы Нагаты—Стейнберга о том, что алгебра инвариантов некоторой линейной группы не является конечно порожденной. Последний результат обеспечивает контрпример к 14-й проблеме Гильберта. В настоящее время известны доказательства этих теорем, опирающиеся только на факты из курса линейной алгебры. Этот подход и будет реализован ниже.

Остановимся подробнее на содержании пособия. В первых параграфах излагаются стандартные факты о коммутативных градуированных алгебрах, определяются ряды Пуанкаре и многочлены Гильберта, доказывается теорема о представимости ряда Пуанкаре конечно порожденной градуированной алгебры рациональной функцией. Затем мы переходим к изучению последовательностей размерностей компонент  $\dim A_i$  градуированной алгебры  $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ . Какие числовые последовательности так реализуются? Этот вопрос наиболее интересен для конечно порожденных алгебр, которые порождаются элементами первой степени. Такие алгебры являются факторалгебрами  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$  алгебры многочленов со стандартной градуировкой. Несложно показать, что идеал  $I$  можно заменить на идеал, порожденный одночленами, так, что последовательность размерностей компонент не изменится. Трудная часть теоремы Маколея — это обоснование перехода от произвольного мономиального идеала к лексегментному идеалу, т. е. идеалу, являющемуся линейной оболочкой конечных отрезков последовательностей одночленов фиксированных степеней в лексикографическом порядке. В § 5 мы доказываем этот результат, следуя работе [11]. Теперь проверка реализуемости данной числовой последовательности сводится к проверке того, что линейная оболочка некоторого набора одночленов есть идеал. Такой

критерий уже является эффективно проверяемым, однако мы дополнительно переформулируем его в терминах явных формул.

В работе П. Макмюллена [15] в связи с проблемой характеристики  $g$ -векторов симплицальных многогранников возникли числовые неравенства, связанные с разложениями натуральных чисел в суммы биномиальных коэффициентов. Это позволило Р. Стенли включить в теорему Маколея еще одно эквивалентное условие — числовое неравенство на следующий член последовательности, определяемое предыдущим членом. В терминах этого условия М. Грин получил индуктивное доказательство трудной части теоремы Маколея, в котором используется переход от алгебры  $A$  к факторалгебре  $A/(a)$ , где  $a$  — элемент общего положения компоненты  $A_1$ . Результаты Грина приведены в § 6. О приложениях теоремы Маколея в теории выпуклых многогранников и топологии можно прочитать в гл. 1 книги [2].

В последних параграфах обсуждаются подалгебры инвариантов линейных групп в алгебре многочленов. Хорошо известно, что алгебра инвариантов конечной группы конечно порождена. Мы приводим три доказательства этой теоремы. Одно из них, принадлежащее Э. Нётер, показывает, что если основное поле имеет нулевую характеристику, то алгебра инвариантов порождается многочленами, степени которых не превосходят порядка группы. Это позволяет для групп небольших порядков явно находить образующие алгебры инвариантов. Параграф 8 посвящен формуле для ряда Пуанкаре алгебры инвариантов конечной группы, которая была найдена Ф. Э. Молиным в 1897 г. Дальнейшие сведения о рядах Пуанкаре алгебр инвариантов линейных групп можно найти в работах [4, § 3] и [7].

Пусть  $G$  — бесконечная подгруппа группы  $GL_n(\mathbb{K})$ . Верно ли, что алгебра инвариантов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$  конечно порождена? Этот вопрос известен как 14-я проблема Гильберта. История этой проблемы весьма драматична<sup>1</sup>. На втором Международном конгрессе математиков, проходившем в августе 1900 года в Париже, Д. Гильберт поставил несколько проблем, решение которых, по его мнению, должно было определить основные направления развития математики XX века. В самом докладе Гильберт предложил 10 проблем, и интересующая нас проблема там не фигурировала. Однако в опубликованном тексте доклада проблем было уже 23, и проблема о конечной порожденности алгебры инвариантов имела номер 14. На самом деле при постановке

---

<sup>1</sup>Приведенные здесь сведения заимствованы из комментариев В. Л. Попова в книге [5]. Там же дан обзор известных в настоящее время результатов, связанных с 14-й проблемой.

этой проблемы Гильберт ссылается на работу Л. Маурера 1899 г., в которой конечная порожденность алгебры инвариантов была доказана для любой подгруппы  $G \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , и ставит более общий вопрос.

• Пусть  $K \subset \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$  — некоторое подполе поля рациональных функций, содержащее поле  $\mathbb{K}$ . Верно ли, что алгебра  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \cap K$  является конечно порожденной?<sup>1</sup>

Однако, как вскоре выяснилось, работа Маурера содержала ошибку, и с тех пор 14-я проблема Гильберта рассматривается именно как проблема о конечной порожденности алгебры инвариантов. В первой половине XX в. было получено несколько положительных результатов в этом направлении. Однако в 1958 г. на конгрессе в Эдинбурге М. Нагата — весьма неожиданно — привел пример группы, для которой алгебра инвариантов не допускает конечного числа порождающих, см. [17] и [18]. Недавно Р. Стейнбергу удалось модифицировать контрпример Нагаты и заменить в доказательстве тонкие соображения из алгебраической геометрии плоских кривых вполне элементарными аргументами; см. [21]. Эти аргументы мы приводим в §9. В настоящее время 14-ю проблему естественно формулировать так: охарактеризовать те подгруппы  $G \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , для которых алгебра инвариантов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$  конечно порождена. В такой формулировке проблема еще очень далека от окончательного решения.

Наш текст включает много заданий для самостоятельного решения. Они разделены на упражнения и задачи. Упражнения — это или совсем простые утверждения, или рутинные проверки. Читатель легко справится с ними самостоятельно. В свою очередь, все задачи снабжены решениями или подробными указаниями.

Для дальнейшего изучения предмета хочется рекомендовать работы Р. Стенли [19] и [20]. Помню свое впечатление от прочтения этих работ: вот каким должен быть математический текст! Часть изложенного ниже материала заимствована оттуда.

Основой для пособия послужили материалы курсов, прочитанных на IV и VII летних школах «Современная математика». Эти школы проводятся ежегодно в июле в доме отдыха «Ратмино» недалеко от города Дубна. Также излагаемые темы обсуждались на совместном с Д. А. Тимашёвым спецсеминаре «Алгебраические группы и теория инвариантов» на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и на спецкурсе в Независимом московском универ-

<sup>1</sup> Вопрос о конечной порожденности алгебры инвариантов является частным случаем этого вопроса: достаточно рассмотреть в качестве подполя  $K$  подполе рациональных функций, инвариантных относительно действия группы.

---

ситете. Я благодарен слушателям этих курсов и семинаров за ценные замечания и оригинальные решения ряда задач.

Хочу поблагодарить рецензентов пособия профессоров Э. Б. Винберга и Т. Е. Панова, а также П. В. Бибикова, А. Ю. Перепечко и Н. А. Печёнкина, прочитавших предварительную версию текста и сделавших ряд ценных замечаний и исправлений.

## § 1. Основные понятия и примеры

Напомним, что алгеброй над полем  $\mathbb{K}$  называется  $\mathbb{K}$ -векторное пространство  $A$  с заданной на нем бинарной операцией (умножением)  $A \times A \rightarrow A$ ,  $(a, b) \rightarrow ab$ , удовлетворяющей следующим требованиям:

- 1)  $a(b + c) = ab + ac$ ,  $(b + c)a = ba + ca$  для любых  $a, b, c \in A$ ;
- 2)  $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$  для любых  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $a, b \in A$ .

Всюду далее мы будем дополнительно предполагать, что

3) в  $A$  имеется единица, т. е. такой элемент  $1 \neq 0$ , что  $1a = a1 = a$  для любого  $a \in A$ ;

4) алгебра  $A$  ассоциативна, т. е.  $(ab)c = a(bc)$  для любых  $a, b, c \in A$ .

Заметим, что наличие единицы позволяет считать поле  $\mathbb{K}$  канонически вложенным в алгебру  $A$  по формуле  $\lambda \rightarrow \lambda 1$  (проверьте, что это вложение).

Укажем несколько примеров алгебр:

- 1) алгебра многочленов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ;
- 2) алгебра квадратных матриц  $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ;
- 3) алгебра  $C[0, 1]$  непрерывных вещественнозначных функций на отрезке  $[0, 1]$  с поточечным умножением на скаляр, сложением и умножением функций. В этом примере  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Для двух подпространств  $U, V \subseteq A$  определим их произведение  $UV$  как линейную оболочку элементов вида  $ab$ , где  $a \in U$  и  $b \in V$ . Аналогично определяется произведение любого конечного набора подпространств.

**Определение 1.** Градуировкой на алгебре  $A$  называется такое разложение  $A$  в прямую сумму подпространств

$$A = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_s,$$

что

$$A_{s_1} A_{s_2} \subseteq A_{s_1 + s_2} \quad \text{для любых } s_1, s_2 \geq 0.$$

Градуированная алгебра — это алгебра с фиксированной градуировкой. Градуировку будем называть тривиальной, если  $A_0 = A$  и, значит,  $A_s = 0$  при  $s > 0$ . Тривиальная градуировка имеется на любой алгебре.

Подпространства  $A_s$  называются (однородными) компонентами градуированной алгебры  $A$ . Элемент  $a$  называют однородным, если  $a \in A_s$  для некоторого  $s \geq 0$ . В этом случае говорят, что элемент  $a$  имеет степень  $s$ , и используют обозначение  $\deg a = s$ . Степень элемента 0

не определена, и можно считать, что она принимает все возможные значения.

Произвольный элемент  $a \in A$  единственным образом записывается в виде суммы  $a = a_{j_1} + \dots + a_{j_k}$  однородных элементов, которые мы будем называть (однородными) *компонентами* этого элемента.

**Задача 1.** Докажите, что единица — это однородный элемент степени нуль.

Приведем примеры градуировок на алгебре многочленов:

1)  $A = \mathbb{K}[x]$ ,  $\deg x = 1$ ,  $\mathbb{K}[x] = \mathbb{K} \oplus \langle x \rangle \oplus \langle x^2 \rangle \oplus \langle x^3 \rangle \oplus \dots$ ;

2) более общим образом,  $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  и  $\deg x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = i_1 + \dots + i_n$ ;

3)  $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  и  $\deg x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = 2i_1$ .

Эти примеры можно обобщить, рассмотрев градуировку алгебры  $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , определенную условиями  $\deg x_i = d_i$ . Целые неотрицательные числа  $d_i$  называют *весами* переменных. Назовем такие градуировки на алгебре многочленов *весовыми*. Для весовой градуировки  $\deg x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = i_1 d_1 + \dots + i_n d_n$ . В частности, во втором примере  $d_1 = \dots = d_n = 1$ , а в третьем  $d_1 = 2$  и  $d_2 = \dots = d_n = 0$ .

**Упражнение 1.** Приведите пример градуировки на  $\mathbb{K}[x]$ , для которой  $x$  не является однородным элементом.

**Задача 2.** Докажите, что алгебры а)  $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ; б)  $C[0, 1]$  допускают только тривиальную градуировку.

Всюду далее мы считаем алгебру  $A$  *коммутативной*, т. е. предполагаем, что  $ab = ba$  для любых  $a, b \in A$ .

**Определение 2.** 1. Элемент  $a \in A$  называется *обратимым*, если найдется такой элемент  $b \in A$ , что  $ab = 1$ .

2. Элемент  $a \in A$  называется *делителем нуля*, если  $a \neq 0$  и найдется такой элемент  $b \in A$ ,  $b \neq 0$ , что  $ab = 0$ .

3. Элемент  $a \in A$  называется *нильпотентным*, если  $a \neq 0$  и найдется такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $a^n = 0$ .

**Упражнение 2.** Докажите, что в конечномерной градуированной алгебре однородный элемент положительной степени является nil-потентным.

**Определение 3.** Подпространство  $U$  градуированной алгебры  $A$  называется *однородным*, если

$$U = \bigoplus_{s \geq 0} (U \cap A_s).$$

**Упражнение 3.** Проверьте, что подпространство  $U$  однородно тогда и только тогда, когда для каждого  $u \in U$  все его компоненты лежат в  $U$ .

Напомним, что *подалгеброй* алгебры  $A$  называется подпространство  $B$ , которое само является алгеброй относительно той же операции умножения. Мы предполагаем, что подалгебра содержит единицу.

Подалгебра  $B$  градуированной алгебры  $A$  называется *однородной*, если она является однородным подпространством в  $A$ . Заметим, что однородная подалгебра  $B$  является градуированной алгеброй с однородными компонентами  $B_s = B \cap A_s$ .

Для изучения градуированных алгебр важно уметь эффективно задавать такие алгебры, а также конструировать новые градуированные алгебры из уже имеющихся. Помимо перехода к однородной подалгебре нам будет полезна конструкция градуировки на факторалгебре.

Напомним, что *идеал* алгебры  $A$  — это такое подпространство  $I \subseteq A$ , что  $aI \subseteq I$  для любого  $a \in A$ . Отметим, что идеал  $I \neq A$  не является подалгеброй в  $A$ , так как не содержит единицу. На множестве  $A/I$  смежных классов по подпространству  $I$  формулы

$$(a+I) + (b+I) = a+b+I, \quad \lambda(a+I) = \lambda a+I, \quad (a+I)(b+I) = ab+I$$

корректно определяют операции сложения, умножения на скаляр и умножения. Полученная таким образом алгебра называется *факторалгеброй* алгебры  $A$  по идеалу  $I$ . Предположим, что идеал  $I$  является однородным подпространством градуированной алгебры  $A$ . Тогда  $A/I$  есть прямая сумма подпространств  $A_s + I$ , причем  $(A_{s_1} + I)(A_{s_2} + I) \subseteq A_{s_1+s_2} + I$ . Тем самым, для однородного идеала  $I$  факторалгебра  $A/I$  имеет каноническую градуировку.

С каждым подмножеством  $F \subseteq A$  можно связать идеал

$$I = \{r_1 f_1 + \dots + r_k f_k : k \in \mathbb{N}, r_i \in A, f_i \in F\}.$$

Этот идеал называется идеалом, *порожденным* подмножеством  $F$ , и обозначается  $(F)$ . Легко проверить, что  $(F)$  является наименьшим идеалом в  $A$ , содержащим  $F$ . Если алгебра  $A$  градуирована и все элементы подмножества  $F$  однородны, то идеал  $(F)$  также однороден. Обратное, в однородном идеале можно выбрать однородные порождающие.

**Пример 1.** Пусть

$$A = \mathbb{K}[x_1, x_2]/(x_1^2, x_1 x_2), \quad \deg x_1 = \deg x_2 = 1.$$

Тогда

$$A = \mathbb{K} \oplus \langle x_1, x_2 \rangle \oplus \langle x_2^2 \rangle \oplus \langle x_2^3 \rangle \dots,$$

$\dim A_1 = 2$ , а прочие компоненты одномерны.

**Упражнение 4.** Можно ли градуированную алгебру из примера 1 реализовать в качестве однородной подалгебры некоторой градуированной алгебры многочленов?

**Задача 3.** Приведите пример градуированной алгебры, в которой есть неоднородный обратимый элемент.

Напомним, что *гомоморфизм* из алгебры  $A$  в алгебру  $A'$  — это такое линейное отображение  $\varphi: A \rightarrow A'$ , что  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$  для любых  $a, b \in A$  и  $\varphi(1) = 1'$ , где  $1$  (соответственно  $1'$ ) — это единичный элемент алгебры  $A$  (соответственно  $A'$ ). Легко проверить, что ядро гомоморфизма  $\text{Ker } \varphi$  является идеалом алгебры  $A$ .

Подмножество  $S \subseteq A$  называется системой *порождающих* (или *образующих*) алгебры  $A$ , если каждый элемент алгебры  $A$  выражается как многочлен от конечного числа элементов множества  $S$ . Последнее условие равносильно тому что  $A$  совпадает с наименьшей подалгеброй  $\mathbb{K}[S]$  в  $A$ , содержащей  $S$ . Алгебра  $A$  называется *конечно порожденной*, если систему порождающих можно выбрать конечной.

**Упражнение 5.** Докажите, что факторалгебра конечно порожденной алгебры конечно порождена.

Алгебра многочленов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  обладает следующим универсальным свойством: для каждой алгебры  $A$  и каждого набора ее элементов  $a_1, \dots, a_n$  существует единственный гомоморфизм  $\varphi: \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$ , для которого  $\varphi(x_i) = a_i$ . образом многочлена  $f(x_1, \dots, x_n)$  при этом гомоморфизме является элемент  $f(a_1, \dots, a_n)$ . В частности, алгебра  $A$  может быть порождена  $n$  элементами тогда и только тогда, когда имеется сюръективный гомоморфизм  $\varphi: \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$ . Согласно теореме Гильберта о базисе (см. [3, гл. 9, § 4, теорема 2]), каждый идеал в алгебре  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  может быть порожден конечным множеством. Следовательно, каждая  $n$ -порожденная алгебра  $A$  может быть представлена в виде

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m),$$

где  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

Если алгебра градуирована, то образующие можно считать однородными. В самом деле, произвольную систему образующих можно заменить на набор их однородных компонент.

**Определение 4.** Конечно порожденная градуированная алгебра  $A = \bigoplus_{s \geq 0} A_s$  называется *стандартной*, если  $A_0 = \mathbb{K}$  и алгебра  $A$  порождается компонентой  $A_1$ .

**Упражнение 6.** 1. Докажите, что если  $A = \bigoplus_{s \geq 0} A_s$  — конечно порожденная градуированная алгебра и  $A_0 = \mathbb{K}$ , то  $\dim A_s < \infty$  для любого  $s$ .

2. Приведите пример градуированной алгебры  $A$ , которая не конечно порождена и для которой  $\dim A_s < \infty$  для любого  $s$ .

3. Докажите, что если  $A_0 = \mathbb{K}$ , то условие  $\dim A_s < \infty$  для любого  $s$  равносильно тому, что в алгебре  $A$  можно выбрать систему порождающих, содержащую конечное число элементов каждой степени.

Выбор системы порождающих неоднозначен. Однако градуировка накладывает некоторые ограничения на такой выбор.

**Упражнение 7.** Проверьте, что элементы  $-x_3$ ,  $-x_1 + x_3^3 + 2x_2x_3$ ,  $x_2 - 2x_3^3$  порождают алгебру  $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ .

**Задача 4.** а) Пусть  $A = \bigoplus_{s \geq 0} A_s$  — конечно порожденная градуированная алгебра и  $A_0 = \mathbb{K}$ . Назовем однородную систему образующих *минимальной*, если никакое собственное подмножество этой системы не является системой образующих. Докажите, что число элементов в минимальной системе не зависит от выбора минимальной системы.

б) Покажите, что без ограничения  $A_0 = \mathbb{K}$  утверждение предыдущего пункта неверно.

**Задача 5.** Докажите, что каждая подалгебра в алгебре  $\mathbb{K}[x]$  конечно порождена.

Приведем два примера не конечно порожденных подалгебр в алгебре  $\mathbb{K}[x, y]$ . В обоих примерах подалгебра  $A$  порождается одночленами, поэтому является однородной для любой весовой градуировки алгебры  $\mathbb{K}[x, y]$ .

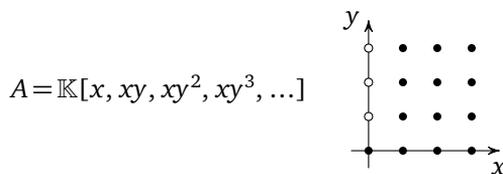


Рис. 1

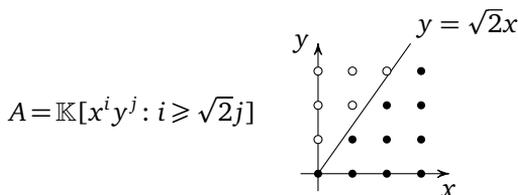


Рис. 2

**Задача 6.** Докажите, что эти две подалгебры не являются конечно порожденными.

Подалгебра алгебры многочленов называется *мономиальной*, если она может быть порождена одночленами.

**Упражнение 8.** Докажите, что мономиальная подалгебра является линейной оболочкой некоторого множества одночленов.

**Упражнение 9.** Докажите, что подалгебра алгебры многочленов мономиальна тогда и только тогда, когда она однородна относительно любой весовой градуировки.

Было бы интересно найти геометрическое описание не конечно порожденных мономиальных подалгебр в  $\mathbb{K}[x, y]$ .

Мы завершим этот параграф несколькими полезными определениями и задачами.

**Задача 7.** Пусть  $A = \bigoplus_{s \geq 0} A_s$  — конечно порожденная градуированная алгебра и  $A_0 = \mathbb{K}$ . Определим *m-разрежение* алгебры  $A$  как однородную подалгебру

$$A^{(m)} = \bigoplus_{k \geq 0} A_{km}.$$

Введем на алгебре  $A^{(m)}$  новую градуировку, считая, что  $A_k^{(m)} = A_{km}$ . Докажите, что число  $m$  можно подобрать так, что  $A^{(m)}$  будет стандартной алгеброй.

**Пример 2.** Пусть  $A = \mathbb{K}[x, y]$ ,  $\deg x = 2$ ,  $\deg y = 3$ . Тогда  $A_1^{(2)} = \langle x \rangle$ , но  $y^2 \in A^{(2)}$ . Поэтому алгебра  $A^{(2)}$  не стандартна. С другой стороны,  $A_1^{(6)} = \langle x^3, y^2 \rangle$ , и если  $x^i y^j \in A^{(6)}$ , то либо  $i \geq 3$ , либо  $j \geq 2$ . Отсюда с помощью индукции заключаем, что  $x^i y^j = (x^3)^{i_1} (y^2)^{j_1}$ , и, значит, алгебра  $A^{(6)}$  стандартна.

**Определение 5.** Элементы  $a_1, \dots, a_n$  алгебры  $A$  называются *алгебраически независимыми*, если  $F(a_1, \dots, a_n) \neq 0$  для любого ненулевого многочлена  $F$  от  $n$  переменных. Алгебра  $A$  называется *свободной*, если она порождается алгебраически независимыми элементами.

Свободные алгебры — это в точности алгебры, изоморфные алгебрам многочленов.

**Задача 8.** Пусть  $A = \bigoplus_{s \geq 0} A_s$  — свободная градуированная алгебра, для которой  $A_0 = \mathbb{K}$ . Докажите, что алгебраически независимые образующие можно выбрать однородными.

Пусть  $A$  — произвольная алгебра без делителей нуля. Нам понадобится конструкция *поля частных*  $QA$ . Рассмотрим множество пар элементов из  $A$ , второй элемент которых отличен от нуля. Нам будет

удобно записывать пары как дроби  $\frac{a}{b}$ . Элементами множества  $QA$  будут классы эквивалентности пар, где  $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$  тогда и только тогда, когда  $ad = bc$ . По аналогии с рациональными числами на классах вводятся операции сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевой класс, и множество  $QA$  становится полем. Алгебру  $A$  можно рассматривать как подалгебру в  $QA$ , отобразив элемент  $a$  в  $\frac{a}{1}$ .

**Определение 6.** Алгебра  $A$  без делителей нуля называется *целозамкнутой*, если для любых  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,  $p \in QA$  из соотношения  $p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0$  следует, что  $p \in A$ .

**Задача 9.** Докажите, что алгебра многочленов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  целозамкнута.

**Пример 3.** Пусть  $A$  — подалгебра в  $\mathbb{K}[x]$ , порожденная элементами  $a = x^2$  и  $b = x^3$ . Тогда  $x = \frac{b}{a} \in QA \setminus A$  и  $x^2 = a$ . Значит, алгебра  $A$  не является целозамкнутой.

Наша ближайшая цель — найти критерий целозамкнутости мономиальной подалгебры  $A \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . С каждым одночленом  $m = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$  свяжем точку  $p(m) = (i_1, \dots, i_n)$  с целыми неотрицательными координатами. Определим  $P(A) = \{p(m) : m \in A\}$ . Тогда  $P(A)$  — подмножество в решетке  $\mathbb{Z}^n$ , которое содержит нуль и вместе с любыми двумя элементами содержит их сумму. Такие подмножества называют *моноидами*. Пусть  $H(A)$  — множество элементов из  $P(A)$ , которые нельзя представить в виде суммы двух ненулевых элементов из  $P(A)$ . Множество  $H(A)$  называется *базисом Гильберта* моноида  $P(A)$ . Пусть  $G(A) = \{m : p(m) \in H(A)\}$ .

**Упражнение 10.** Докажите, что  $G(A)$  порождает  $A$  и каждая система порождающих алгебры  $A$ , состоящая из одночленов, содержит  $G(A)$ . В частности, подалгебра  $A$  конечно порождена тогда и только тогда, когда базис Гильберта конечен.

С каждым подмножеством  $H$  решетки  $\mathbb{Z}^n$  свяжем порожденные им подрешетку

$$L(H) = \{z_1 h_1 + \dots + z_k h_k : k \in \mathbb{N}, z_i \in \mathbb{Z}, h_i \in H\},$$

моноид

$$M(H) = \{n_1 h_1 + \dots + n_k h_k : k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, h_i \in H\}$$

и конус

$$K(H) = \{q_1 h_1 + \dots + q_k h_k : k \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, h_i \in H\}.$$

Ясно, что  $M(H) \subseteq L(H) \cap K(H)$ .

**Определение 7.** Подмножество  $H \subseteq \mathbb{Z}^n$  называется *насыщенным*, если  $M(H) = L(H) \cap K(H)$ .

**Пример 4.** Рассмотрим подмножество

$$H = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

Для него  $L(H)$  — это решетка целых точек с четной суммой координат, а конус  $K(H)$  изображен на рис. 3.

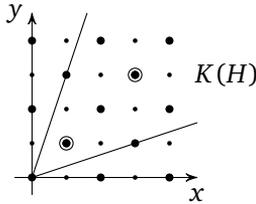


Рис. 3

Точка  $(1, 1)$  лежит в  $L(H) \cap K(H)$ , но в  $M(H)$  не попадает, поэтому подмножество  $H$  не насыщенно.

**Упражнение 11.** Проверьте, что подмножество  $H \subseteq \mathbb{Z}^n$  насыщенно тогда и только тогда, когда из условия  $ka \in M(H)$  для некоторых  $k \in \mathbb{N}$  и  $a \in L(H)$  следует, что  $a \in M(H)$ .

**Упражнение 12.** Докажите, что для мономиальной подалгебры  $A$  следующие условия эквивалентны:

- 1) базис Гильберта  $H(A)$  является насыщенным подмножеством;
- 2) существует такое насыщенное подмножество  $H$ , что  $H(A) \subseteq H \subseteq P(A) \subseteq P(A)$ ;
- 3) любое такое подмножество  $H$ , что  $H(A) \subseteq H \subseteq P(A)$ , насыщенно.

**Задача 10.** Докажите, что мономиальная подалгебра  $A$  целозамкнута тогда и только тогда, когда  $P(A)$  является насыщенным подмножеством в  $\mathbb{Z}^n$ .

**Задача 11.** Перенесите предыдущие результаты на мономиальные подалгебры в алгебре многочленов Лорана  $\mathbb{K}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ .

**Задача 12.** Пусть  $A \subseteq \mathbb{K}[x, y]$  — целозамкнутая однородная относительно стандартной градуировки подалгебра, содержащая элемент  $x$ . Предположим, что поле частных  $QA$  совпадает с полем рациональных дробей  $\mathbb{K}(x, y)$ . Докажите, что подалгебра  $A$  мономиальна.

## § 2. Ряды Пуанкаре и многочлены Гильберта

Пусть  $A = \bigoplus_{s \geq 0} A_s$  и все компоненты  $A_s$  конечномерны. Определим ряд Пуанкаре градуированной алгебры  $A$  как формальный ряд от переменной  $t$ :

$$P(A, t) = \sum_{s \geq 0} \dim A_s t^s.$$

**Пример 5.** Пусть  $A = \mathbb{K}[x]$  и  $\deg x = d > 0$ . Тогда

$$P(A, t) = 1 + t^d + t^{2d} + t^{3d} + \dots = \frac{1}{1 - t^d}.$$

Пусть  $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  — алгебра многочленов с весовой градуировкой  $\deg x_i = d_i > 0$ . Тогда размерность  $\dim A_s$  равна числу способов разбить  $s$  в сумму слагаемых  $d_1, \dots, d_n$  (с повторениями). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} P(A, t) &= (1 + t^{d_1} + t^{2d_1} + \dots)(1 + t^{d_2} + t^{2d_2} + \dots) \dots (1 + t^{d_n} + t^{2d_n} + \dots) = \\ &= \frac{1}{(1 - t^{d_1})(1 - t^{d_2}) \dots (1 - t^{d_n})}. \end{aligned}$$

Пусть  $A = \mathbb{K}[x_1, x_2]/(x_1 x_2)$ ,  $\deg x_1 = \deg x_2 = 1$ . Тогда при  $s \geq 1$  компонента  $A_s$  есть линейная оболочка элементов  $x_1^s$  и  $x_2^s$ . Поэтому  $\dim A_0 = 1$  и  $\dim A_s = 2$  при  $s \geq 1$ . Значит,

$$P(A, t) = (1 + t + t^2 + t^3 + \dots) + (t + t^2 + t^3 + \dots) = \frac{1}{1-t} + \frac{t}{1-t} = \frac{1+t}{1-t}.$$

**Задача 13.** Приведите пример конечно порожденной градуированной алгебры  $A$ , для которой  $P(A, t) = \frac{2}{1-t}$ .

**Задача 14.** Пусть для конечно порожденной градуированной алгебры  $A$  без делителей нуля ряд Пуанкаре имеет вид

$$\frac{1}{(1 - t^{d_1})(1 - t^{d_2}) \dots (1 - t^{d_n})}.$$

Верно ли, что  $A$  изоморфна алгебре многочленов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  с весовой градуировкой  $\deg x_i = d_i$ ?

**Задача 15.** Пусть градуированная алгебра  $A$  порождена однородными элементами  $a_1, a_2, \dots, a_n$  степеней  $d_1, d_2, \dots, d_n$  соответственно. Докажите, что  $a_1, a_2, \dots, a_n$  алгебраически независимы тогда и только тогда, когда

$$P(A, t) = \frac{1}{(1 - t^{d_1})(1 - t^{d_2}) \dots (1 - t^{d_n})}.$$

В рассмотренных примерах нам удавалось записать ряд Пуанкаре в виде рациональной функции от переменной  $t$ . Оказывается, для конечно порожденной алгебры  $A$  такая запись всегда возможна. Соответствующую теорему естественно формулировать и доказывать в более широком контексте градуированных модулей.

Напомним, что *модуль* над  $\mathbb{K}$ -алгеброй  $A$  — это  $\mathbb{K}$ -векторное пространство  $M$  с заданным билинейным отображением  $A \times M \rightarrow M$ ,  $(a, m) \rightarrow am$ , удовлетворяющим набору аксиом, аналогичным аксиомам векторного пространства над полем; см. [3, гл. 9, § 3]. Модуль  $M$  называется *конечно порожденным*, если найдутся такие элементы  $m_1, \dots, m_n \in M$ , что любой элемент  $m \in M$  можно представить в виде  $m = a_1 m_1 + \dots + a_n m_n$  для некоторых  $a_1, \dots, a_n \in A$ . *Подмодуль*  $A$ -модуля  $M$  — это такое подпространство  $L \subseteq M$ , что  $al \in L$  для любых  $a \in A$  и  $l \in L$ . Например, каждая алгебра  $A$  является  $A$ -модулем относительно естественного умножения. Этот модуль порождается одним элементом — единицей. Подмодули такого модуля — это идеалы алгебры  $A$ . Заметим также, что 1-порожденные  $A$ -модули — это в точности факторалгебры алгебры  $A$ .

Хорошо известное обобщение теоремы Гильберта о базисе утверждает, что если алгебра  $A$  конечно порождена, то каждый подмодуль конечно порожденного  $A$ -модуля конечно порожден; см. [3, гл. 9, § 4].

Предположим, что алгебра  $A$  градуирована. Тогда *градуированный*  $A$ -модуль — это  $A$ -модуль  $M$  с таким разложением в прямую сумму подпространств  $M = \bigoplus_{k \geq 0} M_k$ , что  $am \in M_{s+k}$  для любых  $a \in A_s$  и  $m \in M_k$ . Если все подпространства  $M_k$  конечномерны, можно определить ряд Пуанкаре градуированного модуля

$$P(M, t) = \sum_{k \geq 0} \dim M_k t^k.$$

**Теорема 1** (Д. Гильберт, Ж.-П. Серр). Пусть  $A$  — градуированная алгебра, порожденная элементами  $a_1, \dots, a_n$  положительных степеней  $d_1, \dots, d_n$ , и  $M$  — конечно порожденный градуированный  $A$ -модуль. Тогда найдется такой многочлен  $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ , что

$$P(M, t) = \frac{f(t)}{(1-t^{d_1})(1-t^{d_2}) \dots (1-t^{d_n})}.$$

**Доказательство.** Будем вести индукцию по  $n$ . Если  $n = 0$ , то  $A = \mathbb{K}$ ,  $M$  — конечномерное векторное  $\mathbb{K}$ -пространство и  $P(M, t)$  является многочленом с целыми неотрицательными коэффициентами. Пусть  $n > 0$ . Рассмотрим алгебру  $B = A/(a_1)$ , которая порождена образами элементов  $a_2, \dots, a_n$ , и фактормодуль  $N = M/a_1 M$ . Определим однородный подмодуль  $S$  модуля  $M$  как  $S = \{m \in M : a_1 m = 0\}$ . Тогда  $S$

является также  $B$ -модулем и его конечный набор образующих как  $A$ -модуля является и набором образующих над  $B$ . Рассмотрим точную последовательность линейных отображений векторных пространств:

$$0 \rightarrow S_k \rightarrow M_k \rightarrow M_{k+d_1} \rightarrow N_{k+d_1} \rightarrow 0,$$

где вторая стрелка — это естественное вложение, третья — умножение на  $a_1$  и четвертая — естественная проекция на фактормодуль. Отсюда для любого  $k \geq 0$  получаем

$$\dim S_k - \dim M_k + \dim M_{k+d_1} - \dim N_{k+d_1} = 0.$$

Заметим, что при  $r < d_1$  выполняется равенство  $M_r = N_r$ , поэтому

$$t^{d_1} P(S, t) - t^{d_1} P(M, t) + P(M, t) - P(N, t) = 0.$$

Значит,

$$P(M, t) = \frac{P(N, t) - t^{d_1} P(S, t)}{1 - t^{d_1}}.$$

Поскольку к  $B$ -модулям  $N$  и  $S$  применимо предположение индукции, мы получаем требуемый вид для  $P(M, t)$ .  $\square$

**Задача 16.** Существует ли градуированная алгебра  $A = \bigoplus_{s \geq 0} A_s$  без делителей нуля, для которой все компоненты  $A_s$  конечномерны, но ряд Пуанкаре не представим в виде рациональной функции от переменной  $t$ ?

**Задача 17.** Верно ли, что если ряд Пуанкаре градуированной алгебры без делителей нуля представим в виде рациональной функции, то эта алгебра конечно порождена?

Предположим, что алгебра  $A$  стандартна. Ряд Пуанкаре такой алгебры можно задать более явно.

**Упражнение 13.** Докажите, что число одночленов степени  $s$  в стандартной алгебре многочленов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  равно  $\frac{(s+n-1)!}{s!(n-1)!}$ .

Тем самым, ряд Пуанкаре стандартной алгебры многочленов имеет вид  $\sum_{s \geq 0} \frac{(s+n-1)!}{s!(n-1)!} t^s$ .

**Определение 8.** Многочлен  $F(x)$  с рациональными коэффициентами называется *целозначным*, если для некоторого натурального  $m$  значение  $F(s)$  цело для любого натурального  $s \geq m$ .

**Задача 18.** Докажите, что для целозначного многочлена  $F(x)$  значение  $F(s)$  является целым для любого целого  $s$ .

**Задача 19.** Докажите, что для целозначного многочлена  $F(x)$  степени  $d$  найдутся целые  $c_0, c_1, \dots, c_d$  такие, что

$$F(x) = c_d C_x^d + \dots + c_1 C_x^1 + c_0, \quad \text{где } C_x^s = \frac{1}{s!} x(x-1)\dots(x-s+1).$$

Обратно, каждый многочлен такого вида целозначен.

**Теорема 2.** Для стандартной алгебры  $A$  найдутся такое натуральное  $m$  и такой целозначный многочлен  $H(x)$ , что  $\dim A_s = H(s)$  для любого  $s \geq m$ .

**Доказательство.** Из теоремы 1 следует, что  $P(A, t) = \frac{f(t)}{(1-t)^n}$  для некоторого  $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ . Тогда

$$P(A, t) = f(t) \left( \sum_{s \geq 0} \frac{(s+n-1)!}{s!(n-1)!} t^s \right).$$

Пусть  $f(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$ . Тогда для любого  $s \geq m$  получаем

$$\dim A_s = \sum_{i=0}^m b_i \frac{(s-i+n-1)!}{(s-i)!(n-1)!}.$$

Остается положить

$$H(x) = \sum_{i=0}^m \frac{b_i}{(n-1)!} (x-i+n-1)(x-i+n-2)\dots(x-i+1).$$

Этот многочлен целозначен, поскольку при  $s \geq m$  значение  $H(s) = \dim A_s$  — целое число.  $\square$

**Определение 9.** Многочлен  $H(x)$  называется *многочленом Гильберта* стандартной алгебры  $A$ .

**Задача 20.** Пусть  $P(A, t) = \frac{f(t)}{(1-t)^n}$  и  $f(t) = (1-t)^r g(t)$ , где  $g(1) \neq 0$ . Докажите, что старший член многочлена Гильберта равен

$$\frac{g(1)}{(n-r-1)!} x^{n-r-1}.$$

**Задача 21.** Найдите многочлен Гильберта алгебры

$$\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]/(h),$$

где  $h \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$  — однородный многочлен степени  $d$ .

### § 3. Последовательности размерностей компонент

Пусть  $A = \bigoplus_{s \geq 0} A_s$  — градуированная алгебра, для которой  $A_0 = \mathbb{K}$  и  $\dim A_s < \infty$  для любого  $s$ .

Рассмотрим последовательность размерностей компонент

$$p_0 = \dim A_0 = 1, \quad p_1 = \dim A_1, \quad p_2 = \dim A_2, \quad p_3 = \dim A_3, \quad \dots$$

Какие числовые последовательности могут так возникать? Если не накладывать на алгебру дополнительных ограничений, этот вопрос малоинтересен.

**Задача 22.** Докажите, что для любой последовательности  $1, p_1, p_2, p_3, \dots$  целых неотрицательных чисел найдется такая градуированная алгебра  $A$ , что  $\dim A_s = p_s$  для каждого  $s$ .

Если ограничиться конечно порожденными алгебрами, вопрос становится более содержательным, но, как показывает следующая задача, на конструктивное решение рассчитывать все равно не приходится.

**Задача 23.** а) Докажите, что любая конечная последовательность  $1, p_1, p_2, \dots, p_m$  целых неотрицательных чисел может выступать в качестве начального отрезка последовательности размерностей компонент конечно порожденной градуированной алгебры.

б) Приведите пример последовательности  $1, p_1, p_2, p_3, \dots$  целых неотрицательных чисел, которая не совпадает с последовательностью размерностей компонент ни для какой конечно порожденной градуированной алгебры.

Ниже мы будем изучать числовые последовательности, которые реализуются в качестве последовательностей размерностей компонент стандартных алгебр.

**Упражнение 14.** Докажите, что минимальное число образующих стандартной алгебры равно  $p_1 = \dim A_1$ .

Отсюда для стандартной алгебры  $A$  вытекает неравенство

$$p_s \leq \frac{(s+n-1)!}{s!(n-1)!},$$

где  $n = p_1$ . Однако это необходимое условие на последовательность размерностей компонент не является достаточным.

**Задача 24.** Докажите, что последовательность  $\{1, 2, 2, 4, 0, 0, 0, \dots\}$  не является последовательностью размерностей компонент стандартной алгебры.

Перейдем к изложению результатов Ф. С. Маколя; см. [14] (1927). Будем рассматривать стандартную алгебру  $A$  как факторалгебру алгебры многочленов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , где  $n = p_1$ . При изучении последовательности размерностей компонент естественно начать с нахождения удобного базиса алгебры  $A$  как векторного пространства.

Обозначим через  $\mathcal{M}$  множество одночленов от переменных  $x_1, \dots, x_n$  с коэффициентом 1.

**Определение 10.** Назовем подмножество  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$  *нормальным*, если  $\mathcal{N} \neq \emptyset$  и из условий  $t_1 \in \mathcal{N}$ ,  $t_2$  делит  $t_1$  следует, что  $t_2 \in \mathcal{N}$ .

**Упражнение 15.** Докажите, что подмножество  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  нормально тогда и только тогда, когда линейная оболочка одночленов из  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$  является идеалом в  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Предложение 1.** Пусть  $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$  — стандартная алгебра. Тогда найдется нормальное множество одночленов  $\mathcal{N}$ , образ которого в  $A$  является базисом  $A$  как векторного пространства.

**Доказательство.** Введем на множестве  $\mathcal{M}$  лексикографический порядок. Напомним, что в этом порядке  $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \prec x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ , если найдется такое  $k$ , что  $i_1 = j_1, \dots, i_{k-1} = j_{k-1}, i_k < j_k$ . Лексикографический порядок позволяет линейно упорядочить члены произвольного многочлена  $f$ , в частности однозначно определить старший член  $\tilde{f}$  многочлена  $f$ . Рассмотрим векторное пространство  $\tilde{I}$ , порожденное одночленами  $\{\tilde{f} : f \in I\}$ , и множество  $\mathcal{N} = \mathcal{M} \setminus \tilde{I}$ .

**Упражнение 16.** Проверьте, что  $\tilde{I}$  — идеал в алгебре  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  и множество  $\mathcal{N}$  нормально.

Покажем, что множество  $\mathcal{N}$  является искомым.

1. *Элементы из  $\mathcal{N}$  линейно независимы в  $A$ .* В самом деле, линейная комбинация таких элементов равна нулю в  $A$  тогда и только тогда, когда эта комбинация лежит в  $I$ . Тогда ее старший член лежит в  $\tilde{I}$ .

2. *Любой элемент из  $A$  есть линейная комбинация элементов из  $\mathcal{N}$ .* Для данного  $a \in A$  рассмотрим его прообраз  $f$  в  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Выберем среди членов многочлена  $f$  старший одночлен  $t$ , который лежит в  $\tilde{I}$ . Найдется  $F \in I$ , для которого  $\tilde{F} = t$ . Заменим в  $f$  член  $t$  на  $t - F$ . При этом новый элемент будет соответствовать тому же элементу  $a$  в факторалгебре и старший член многочлена  $f$ , лежащий в  $\tilde{I}$ , уменьшится. Остается заметить, что в лексикографическом порядке нет бесконечных строго убывающих цепочек одночленов.  $\square$



## § 4. Теорема Маколея

Напомним, что биномиальный коэффициент  $C_m^s$  определяется для целых чисел  $m$  и  $s$  как  $\frac{m!}{s!(m-s)!}$  при  $m \geq s \geq 0$  и как 0, если  $m < s$  или если хотя бы одно из чисел отрицательно. При этом мы полагаем  $0! = 1$ .

**Предложение 3.** Пусть  $m$  и  $d$  — фиксированные натуральные числа. Тогда найдется ровно одна такая последовательность целых неотрицательных чисел

$$k(d) > k(d-1) > \dots > k(1) \geq 0,$$

что

$$m = C_{k(d)}^d + C_{k(d-1)}^{d-1} + \dots + C_{k(1)}^1.$$

**Определение 12.** Данное выражение называется  $d$ -разложением Маколея числа  $m$ , а числа  $k(d), k(d-1), \dots, k(1)$  —  $d$ -коэффициентами Маколея числа  $m$ .

**Пример 7.** Пусть  $m = 5$  и  $d = 7$ . Тогда

$$5 = C_7^7 + C_6^6 + C_5^5 + C_4^4 + C_3^3 + C_1^2 + C_0^1.$$

Пусть теперь  $m = 8$  и  $d = 2$ . Здесь  $8 = C_4^2 + C_2^1$ .

**Доказательство предложения 3.** Воспользуемся индукцией по  $d$ . При  $d = 1$  имеем  $k(1) = m$ . Пусть теперь  $d > 1$ .

**Лемма 1.** Если  $k(d) > k(d-1) > \dots > k(1) \geq 0$ , то

$$C_{k(d)}^d + \dots + C_{k(1)}^1 < C_{k(d)+1}^d.$$

**Доказательство.** Вновь используем индукцию по  $d$ . При  $d = 1$  имеем  $C_{k(1)}^1 < C_{k(1)+1}^1$  — верно. Теперь утверждение леммы следует из равенства  $C_{k(d)+1}^d - C_{k(d)}^d = C_{k(d)}^{d-1}$  и неравенств

$$C_{k(d-1)}^{d-1} + C_{k(d-2)}^{d-2} + \dots + C_{k(1)}^1 < C_{k(d-1)+1}^{d-1} \leq C_{k(d)}^{d-1},$$

первое из которых верно по предположению индукции. □

Итак, из существования разложения следует, что  $C_{k(d)}^d \leq m < C_{k(d)+1}^d$ . Заметим, что для данных  $m$  и  $d$  найдется ровно одно число  $k(d)$ , для которого  $C_{k(d)}^d \leq m < C_{k(d)+1}^d$ . По предположению индукции

$$m - C_{k(d)}^d = C_{k(d-1)}^{d-1} + \dots + C_{k(1)}^1,$$

и последовательность  $k(d-1) > \dots > k(1) \geq 0$  определена однозначно. Остается показать, что  $k(d) > k(d-1)$ , или что  $m - C_{k(d)}^d < C_{k(d)}^{d-1}$ . Последнее неравенство равносильно неравенству  $m < C_{k(d)+1}^d$ , которое верно в силу выбора числа  $k(d)$ .  $\square$

Как показывает доказательство, коэффициенты  $k(i)$  удобно находить последовательно:  $k(i)$  — это наибольшее число, для которого

$$C_{k(i)}^i \leq m - C_{k(d)}^d - \dots - C_{k(i+1)}^{i+1}.$$

**Лемма 2.** Если  $k(d), \dots, k(1)$  —  $d$ -коэффициенты Маколея числа  $n$ , а  $k'(d), \dots, k'(1)$  —  $d$ -коэффициенты Маколея числа  $n'$ , то  $n > n'$  тогда и только тогда, когда лексикографически

$$(k(d), \dots, k(1)) > (k'(d), \dots, k'(1)).$$

**Доказательство.** Если  $k(d) = k'(d)$ , то вычтем из  $n$  и  $n'$  число  $C_{k(d)}^d$  и воспользуемся индукцией по  $d$ . Если  $k(d) > k'(d)$ , то достаточно доказать, что

$$C_{k(d)}^d > C_{k'(d)}^d + C_{k'(d-1)}^{d-1} + \dots + C_{k'(1)}^1.$$

Это следует из того, что  $C_{k(d)}^d \geq C_{k'(d)+1}^d$ , и из леммы 1.  $\square$

Объясним, как разложение Маколея связано с лексикографическим порядком на множестве одночленов. Ниже мы рассматриваем одночлены с коэффициентом единица. Пусть  $u$  — одночлен степени  $d$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Обозначим через  $\mathcal{L}(u)$  множество одночленов степени  $d$ , меньших  $u$ . Нам удобно будет записать  $u$  в виде  $x_{j(1)}x_{j(2)}\dots x_{j(d)}$ , где  $1 \leq j(1) \leq j(2) \leq \dots \leq j(d) \leq n$ . Обозначим через  $[x_k, \dots, x_n]_s$  множество одночленов от  $x_k, \dots, x_n$  степени  $s$  при  $k \leq n$ . При  $k > n$  полагаем  $[x_k, \dots, x_n]_s$  пустым множеством.

Если одночлен  $v$  имеет степень  $d$  и  $v < u$ , то некоторые начальные отрезки одночленов  $u$  и  $v$  совпадают, а затем в  $v$  следует переменная с большим номером. Отсюда получаем разложение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) = [x_{j(1)+1}, \dots, x_n]_d \sqcup x_{j(1)}[x_{j(2)+1}, \dots, x_n]_{d-1} \sqcup \dots \\ \dots \sqcup (x_{j(1)}\dots x_{j(d-1)})[x_{j(d)+1}, \dots, x_n]_1, \end{aligned}$$

которое определяет  $d$ -разложение Маколея числа  $|\mathcal{L}(u)|$ :

$$|\mathcal{L}(u)| = C_{n-j(1)+d-1}^d + C_{n-j(2)+d-2}^{d-1} + \dots + C_{n-j(d)}^1.$$

**Определение 13.** Пусть

$$m = C_{k(d)}^d + C_{k(d-1)}^{d-1} + \dots + C_{k(1)}^1.$$

Тогда определим число

$$m^{(d)} = C_{k(d)+1}^{d+1} + C_{k(d-1)+1}^d + \dots + C_{k(1)+1}^2.$$

**Лемма 3.** Для произвольного одночлена и степени  $d$  выполняется равенство

$$|\mathcal{L}(ux_n)| = |\mathcal{L}(u)|^{(d)}.$$

**Доказательство.** Поскольку  $ux_n = x_{j(1)}x_{j(2)}\dots x_{j(d)}x_n$ , получаем

$$|\mathcal{L}(ux_n)| = C_{n-j(1)+d}^{d+1} + C_{n-j(2)+d-1}^d + \dots + C_{n-j(d)+1}^2 + C_{n-n+1-1}^1,$$

и последнее слагаемое равно нулю.  $\square$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат.

**Теорема 3** (Ф. С. Маколей, П. Макмюллен, Р. Стенли). Пусть  $P = \{1, p_1, p_2, p_3, \dots\}$  — последовательность целых неотрицательных чисел. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1)  $P$  — это последовательность размерностей компонент некоторой стандартной алгебры;

(2)  $P$  является  $O$ -последовательностью;

(3)  $p_{d+1} \leq p_d^{(d)}$  для любого  $d \geq 1$ .

Импликация (2)  $\Rightarrow$  (1) доказана в предыдущем параграфе.

**Доказательство эквивалентности условий (2) и (3).** Условие (2) означает, что в множестве  $\mathcal{M}$  одночленов от  $n = p_1$  переменных подмножество  $\mathcal{N} = \bigcup_{s=0}^{\infty} \mathcal{M}_{p_s}^s$  нормально. Это равносильно тому, что для любого одночлена, не попавшего в  $\mathcal{N}$ , все кратные ему одночлены также не попали в  $\mathcal{N}$ . Для каждой степени  $d$  одночлены, не попавшие в  $\mathcal{N}$ , — это одночлены  $w$ , имеющие в лексикографическом порядке (по возрастанию) номера  $p_d + 1$  и выше. Значит, условие нормальности множества  $\mathcal{N}$  равносильно тому, что номер одночлена  $wx_i$  не меньше  $p_{d+1} + 1$  для любых  $d, w$  и  $i$ . Но номер одночлена  $wx_i$  не меньше номера одночлена  $w_0x_n$ , где  $w_0$  — одночлен степени  $d$  с номером  $p_d + 1$ . Согласно лемме 3, номер многочлена  $w_0x_n$  равен  $p_d^{(d)} + 1$ , поэтому условие (2) равносильно условию  $p_{d+1} \leq p_d^{(d)}$  для любого  $d \geq 1$ .

Трудной частью доказательства теоремы 3 является вывод последних условий из первого. В следующих параграфах приводятся независимые друг от друга доказательства импликаций (1)  $\Rightarrow$  (2) и (1)  $\Rightarrow$  (3) соответственно.

**Задача 26.** Является ли  $O$ -последовательностью последовательность 1, 40, 100, 134, 148, 152, 248, 290, 0, 0, 0, 0, ...?

**Задача 27.** Докажите, что для произвольной  $O$ -последовательности 1,  $p_1, p_2, p_3, \dots$  найдется такое  $m \in \mathbb{N}$ , что  $p_{s+1} = p_s^{(s)}$  для любого  $s \geq m$ .

**Задача 28.** Докажите, что для произвольной  $O$ -последовательности найдутся такое натуральное  $m$  и такие целые  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m \geq -1$ , что

$$p_s = C_{s+a_1}^{a_1} + C_{s+a_2-1}^{a_2} + \dots + C_{s+a_m-m+1}^{a_m}$$

для любого  $s \geq m$ .

**Задача 29.** Пусть для  $O$ -последовательности  $1, p_1, p_2, p_3, \dots$  найдется такое  $m \in \mathbb{N}$ , что  $p_m \leq m$ . Докажите, что  $p_{s+1} \leq p_s$  для любого  $s \geq m$ .

## § 5. Комбинаторный вариант теоремы Маколея

В этом параграфе мы следуем работе [11], см. также [8, § 3.4.1]. Обозначим через  $F$  множество всех наборов из  $n$  целых неотрицательных чисел. Упорядочим  $F$  лексикографически. Для каждого  $v \in \mathbb{N}$  определим

$$F_v = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 + \dots + a_n = v\}.$$

Пусть  $H \subseteq F$  — подмножество и  $H_v = H \cap F_v$ . Обозначим через  $CH_v$  первые (т. е. наименьшие)  $|H_v|$  элементов множества  $F_v$ , где  $|H_v|$  — число элементов в  $H_v$ , и положим  $CH = \bigcup_v CH_v$ . С каждым  $a \in F$  свяжем подмножество

$$\Gamma(a) = \{(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n), (a_1, a_2 - 1, \dots, a_n), \dots, (a_1, a_2, \dots, a_n - 1)\} \cap F.$$

Определим  $\Gamma H = \bigcup_{a \in H} \Gamma(a)$ .

**Теорема 4.** *Справедливо включение  $\Gamma(CH_v) \subseteq C(\Gamma H_v)$ .*

**Доказательство.** Будем называть подмножество  $M \subseteq F_v$  *сжатым*, если  $CM = M$ .

**Лемма 4.** *Если множество  $M \subseteq F_v$  сжато, то и  $\Gamma M \subseteq F_{v-1}$  сжато.*

**Доказательство.** Пусть  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$ ,  $a, b \in F_{v-1}$  и  $a < b$ . Надо доказать, что из условия  $(b_1, \dots, b_j + 1, \dots, b_n) \in M$  следует, что  $a \in \Gamma M$ . Но  $(a_1, \dots, a_j + 1, \dots, a_n) < (b_1, \dots, b_j + 1, \dots, b_n)$ , и в силу сжатости множества  $M$  имеем  $(a_1, \dots, a_j + 1, \dots, a_n) \in M$ , откуда следует, что  $a \in \Gamma M$ .  $\square$

Теперь для доказательства теоремы 4 достаточно доказать, что  $|\Gamma(CH_v)| \leq |\Gamma H_v|$ . В самом деле,  $C(\Gamma H_v)$  — это первые  $|\Gamma H_v|$  элементов множества  $F_{v-1}$ , а как следует из леммы 4,  $\Gamma(CH_v)$  — это первые  $|\Gamma(CH_v)|$  элементов множества  $F_{v-1}$ .

**Лемма 5.** *Теорема 4 верна при  $n = 2$ .*

**Доказательство.** Надо показать, что  $|\Gamma(CH_v)| \leq |\Gamma H_v|$ . При  $H_v = F_v$  утверждение очевидно. При  $|H_v| = k < v + 1$  имеем  $|\Gamma(CH_v)| = k$ ,

$$(0, 5) \quad (1, 4) \quad (2, 3) \quad (3, 2) \quad (4, 1) \quad (5, 0)$$

$$(0, 4) \quad (1, 3) \quad (2, 2) \quad (3, 1) \quad (4, 0),$$

а проверка неравенства  $|\Gamma H_v| \geq k$  предоставляется читателю.  $\square$

Далее будем использовать индукцию по  $n$ . Определим

$$H_{i;d} = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i = d\} \cap H,$$

и через  $(VH_v)_{i;d}$  обозначим множество первых  $|(H_v)_{i;d}|$  элементов множества  $(F_v)_{i;d}$ . Будем говорить, что подмножество  $H_v$  является  $i$ -сжатым, если  $(VH_v)_{i;d} = (H_v)_{i;d}$  для всех значений  $d$ .

**Упражнение 17.** Покажите, что при  $n = 2$  каждое подмножество в  $F_v$  является 1- и 2-сжатым. При  $n \geq 3$  приведите пример подмножества в  $F_v$ , которое  $i$ -сжато для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , но сжатым не является.

**Лемма 6.** Пусть  $n \geq 3$  и  $g = (g_1, \dots, g_{n-1}, g_n) < h = (h_1, \dots, h_{n-1}, 0)$ , причем  $g, h \in F_v$ . Если подмножество  $S \subseteq F_v$   $i$ -сжато при  $i = 1, 2, n$  и  $h \in S$ , то  $g \in S$ .

**Доказательство.** Достаточно построить возрастающую цепочку элементов из  $F_v$ , начинающуюся в  $g$  и заканчивающуюся в  $h$ , в которой у любых двух соседних элементов хотя бы одна из координат с номерами 1, 2 или  $n$  совпадает.

1. Пусть  $g_1 = h_1$ . Подходит цепочка  $g < h$ .

2. Пусть  $h_1 = g_1 + 1$  и хотя бы одно из чисел  $g_2, \dots, g_{n-1}$  отлично от нуля. Положим  $\tilde{g} = (g_1 + 1, 0, \dots, 0, g_2 + \dots + g_{n-1} - 1, g_n)$ . Тогда  $g < \tilde{g} \leq h$  — искомая цепочка, так как если у многочлена  $h$  только  $h_1$  и  $h_{n-1}$  отличны от нуля, то  $h_{n-1} = (g_1 + \dots + g_n) - h_1 = g_2 + \dots + g_{n-1} \geq g_2 + \dots + g_{n-1} - 1$ , причем равенство достигается только при  $g_n = 0$ .

3. Пусть  $h_1 = g_1 + 1$  и  $g_2 = \dots = g_{n-1} = 0$ . Тогда  $g < (g_1, g_n, 0, \dots, 0) < h$ .

4. Пусть  $h_1 = g_1 + k$ ,  $k \geq 2$ . Тогда заменим  $g$  на  $(g_1 + 1, g_2, \dots, g_i - 1, \dots, g_n)$ ,  $g_i > 0$  и воспользуемся индукцией по  $k$ .  $\square$

Определим множества  $H_v^j$  индуктивно:  $H_v^1 = H_v$  и  $H_v^{j+1} = \bigcup_d (VH_v^j)_{i;d}$ , где  $i \equiv j \pmod{n}$ .

**Лемма 7.** Найдется такое  $p > 0$ , для которого  $H_v^p$  является  $i$ -сжатым для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Доказательство.** Занумеруем элементы множества  $F_v$  в лексикографическом порядке. Переход от  $H_v^j$  к  $H_v^{j+1}$  не изменяет количество элементов, и у каждого изменяемого элемента уменьшается номер. Следовательно, через конечное число шагов процессы  $i$ -сжатия прекратятся.  $\square$

**Лемма 8.** Предположим, что теорема 4 верна для наборов длины  $n - 1$  и  $\Gamma H_v \subseteq H_{v-1}$ . Тогда  $\Gamma H_v^j \subseteq H_{v-1}^j$  для любого  $j$ .

**Доказательство.** Воспользуемся индукцией по  $j$ . При  $j = 1$  включение  $\Gamma H_v \subseteq H_{v-1}$  выполнено по условию. Докажем включение  $\Gamma H_v^{j+1} \subseteq H_{v-1}^{j+1}$ . По предположению индукции  $\Gamma((H_v^j)_{i;d}) \cap (F_{v-1})_{i;d} \subseteq (H_{v-1}^j)_{i;d}$ . Применяя теорему 4 ко всем координатам кроме  $i$ -й получим

$$\Gamma((VH_v^j)_{i;d}) \cap (F_{v-1})_{i;d} \subseteq (VH_{v-1}^j)_{i;d}. \quad (1)$$

Из включения  $\Gamma H_v^j \subseteq H_{v-1}^j$  при  $d \geq 1$  следует, что  $|(H_v^j)_{i;d}| \leq |(H_{v-1}^j)_{i;d-1}|$ , откуда при  $d \geq 1$  получаем

$$\Gamma((VH_v^j)_{i;d}) \cap (F_{v-1})_{i;d-1} \subseteq (VH_{v-1}^j)_{i;d-1}. \quad (2)$$

В самом деле, левая часть — это первые  $|(H_v^j)_{i;d}|$  элементов множества  $(F_{v-1})_{i;d-1}$ , а правая часть — это первые  $|(H_{v-1}^j)_{i;d-1}|$  элементов того же множества.

Из соотношения (1) следует, что  $\Gamma((VH_v^j)_{i;0}) \subseteq (VH_{v-1}^j)_{i;0}$ , а при  $d \geq 1$  из соотношений (1) и (2) следует, что

$$\Gamma((VH_v^j)_{i;d}) \subseteq (VH_{v-1}^j)_{i;d} \cup (VH_{v-1}^j)_{i;d-1}.$$

Учитывая, что  $H_v^{j+1} = \bigcup_d (VH_v^j)_{i;d}$ , получаем  $\Gamma H_v^{j+1} \subseteq H_{v-1}^{j+1}$ .  $\square$

Завершим доказательство теоремы 4. Пусть множество  $S = H_v^p$  является  $i$ -сжатым для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Положим  $(\Gamma H_v)^p = T$ . Применяя лемму 8 к  $H_{v-1} = \Gamma H_v$ , получим  $\Gamma(H_v^p) \subseteq (\Gamma H_v)^p$ , или  $\Gamma S \subseteq T$ . Будем постепенно изменять  $S$  и  $T$  так, чтобы в конце получить  $S = CH_v$  и  $T \subseteq C(\Gamma H_v)$ .

Если  $S = F_v$ , то и  $H_v = F_v$ , а значит,  $\Gamma(CH_v) = F_{v-1} = C(\Gamma H_v)$ . Пусть  $g = (g_1, \dots, g_n)$  — первый элемент из  $F_v \setminus S$  и  $h = (h_1, \dots, h_n)$  — последний элемент из  $S$ . Если  $h < g$ , то  $S = CH_v$  и  $|\Gamma(CH_v)| = |\Gamma S| \leq |T| = |\Gamma H_v|$ . Пусть теперь  $h > g$ . Если  $h_n = 0$ , то по лемме 6 мы получаем  $g \in S$ , что приводит к противоречию. Положим  $h^* = (h_1, \dots, h_{n-1}, h_n - 1)$  и  $g^* = (g_1, \dots, g_{n-1}, g_n - 1)$  при  $g_n > 0$ . Из включения  $\Gamma S \subseteq T$  следует, что  $h^* \in T$ . Если  $x \in S \setminus \{h\}$ , то для любого  $y \in \Gamma(x)$  имеем  $y < x < h$ . Отсюда  $h^* \notin \Gamma(x)$  для любого  $x \in S \setminus \{h\}$ . Положим  $S' = (S \setminus \{h\}) \cup \{g\}$  и

$$T' = \begin{cases} (T \setminus \{h^*\}) \cup \{g^*\}, & \text{если } g_n > 0; \\ T, & \text{если } g_n = 0. \end{cases}$$

Проверим, что  $\Gamma S' \subseteq T'$ . Для этого достаточно показать, что  $\Gamma(g) \subseteq T'$ . Если  $g_n > 0$ , то  $g^*$  лежит в  $T'$  по построению. Элемент  $(g_1, \dots, g_i - 1, \dots, g_n)$  лежит в  $\Gamma((g_1, \dots, g_i - 1, \dots, g_n + 1))$  и  $(g_1, \dots, g_i - 1, \dots, g_n + 1) < g$ , поэтому  $(g_1, \dots, g_i - 1, \dots, g_n + 1) \in S$ . Отсюда следует, что

$$\Gamma((g_1, \dots, g_i - 1, \dots, g_n + 1)) \subseteq T.$$

Надо понять, что  $(g_1, \dots, g_i - 1, \dots, g_n) \neq h^* = (h_1, \dots, h_{n-1}, h_n - 1)$ . Но в силу 1-сжатости имеем  $h_1 > g_1$ . Заметим также, что множество  $S'$  является  $i$ -сжатым для всех  $i$ .

После конечного числа переходов от  $(S, T)$  к  $(S', T')$  мы получим  $S = CH_v$ ,  $\Gamma(CH_v) \subseteq T$  и  $|\Gamma(CH_v)| \leq |T| = |\Gamma H_v|$ .  $\square$

**Доказательство импликации (1)  $\Rightarrow$  (2) в теореме 3.** Согласно предложению 2 найдется нормальное подмножество  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ , число элементов степени  $s$  которого равно  $p_s$ . Пусть  $H$  — множество наборов степеней элементов подмножества  $\mathcal{N}$ . Из теоремы 4 следует, что множество одночленов  $\mathcal{K}$ , наборы степеней которых принадлежат  $CH$ , является нормальным. С другой стороны,  $\mathcal{K} = \bigcup_{s=0}^{\infty} \mathcal{M}_{p_s}^s$ .

## § 6. Теорема Грина

В этом параграфе доказан результат из работы [12]. В изложении мы следуем книге [10, § 4.2]. Пусть

$$m = C_{k(d)}^d + C_{k(d-1)}^{d-1} + \dots + C_{k(1)}^1.$$

Определим число

$$m_{(d)} = C_{k(d)-1}^d + C_{k(d-1)-1}^{d-1} + \dots + C_{k(1)-1}^1.$$

Из леммы 2 вытекает, что  $m'_{(d)} \leq m_{(d)}$  при  $m' \leq m$ .

**Лемма 9.** Если последнее ненулевое слагаемое в  $d$ -разложении Маколя числа  $m$  не равно 1, то  $(m-1)_{(d)} < m_{(d)}$ .

**Доказательство.** Пусть  $k'(d), \dots, k'(1)$  — коэффициенты Маколя числа  $m-1$ . Согласно лемме 2 имеем  $k'(d) \leq k(d)$ . Если  $k'(d) < k(d)$ , то первый  $d$ -коэффициент Маколя числа  $m_{(d)}$  равен  $k(d)-1$ , а первый  $d$ -коэффициент числа  $(m-1)_{(d)}$  равен  $k'(d)-1$  и требуемое неравенство следует из леммы 2.

Пусть  $k'(d) = k(d)$ . Заменим  $m$  на  $m' = m - C_{k(d)}^d$  и воспользуемся индукцией по  $d$ . Нужно лишь проверить, что  $m' - 1 > 0$ . Это следует из того, что в этой ситуации у числа  $m$  более одного слагаемого в  $d$ -разложении Маколя отлично от нуля и последнее из ненулевых слагаемых больше 1.  $\square$

**Определение 14.** Пусть поле  $\mathbb{K}$  бесконечно и  $P$  — некоторое условие, зависящее от точки конечномерного векторного  $\mathbb{K}$ -пространства  $V$ . Будем говорить, что условие  $P$  выполнено для точки общего положения пространства  $V$ , если имеется такой ненулевой многочлен  $F$  на пространстве  $V$ , что условие  $P$  выполнено во всех точках пространства  $V$ , где  $F$  не обращается в нуль.

Если условия  $P_1, \dots, P_m$  выполнены для точек общего положения пространства  $V$ , то для точек общего положения эти условия выполнены одновременно. В самом деле, в качестве многочлена  $F$  надо рассмотреть произведение многочленов  $F_1, \dots, F_m$ .

**Теорема 5** (М. Грин, 1989). Пусть  $\mathbb{K}$  — бесконечное поле,  $s \in \mathbb{N}$  и  $A$  — стандартная  $\mathbb{K}$ -алгебра. Для каждого элемента  $a \in A_1$  рассмотрим стандартную алгебру  $B = A/(a)$ . Тогда для элемента  $a \in A_1$  общего положения имеет место неравенство  $\dim B_s \leq (\dim A_s)_{(s)}$ .

**Доказательство.** Пусть  $M = \max_{a \in A_1} \dim(aA_{s-1})$ . Тогда  $\dim(aA_{s-1}) = M$  для элемента  $a \in A_1$  общего положения. В самом деле, ранг оператора  $L_a: A_{s-1} \rightarrow A_s$  умножения на  $a$  равен максимальному порядку отличного от нуля минора матрицы этого оператора.

Вспользуемся индукцией по параметру  $\min(s, \dim A_1)$ . Если  $s = 1$ , то  $\dim B_1 = \dim A_1 - 1 \leq (\dim A_1)_{(1)} = \dim A_1 - 1$ . Если  $\dim A_1 = 1$ , то  $\dim B_s = 0$  для всех  $s \geq 1$ . Далее предполагаем, что  $s > 1$  и  $\dim A_1 > 1$ .

Зафиксируем такой элемент  $a \in A_1$ , что  $\dim(aA_{s-1}) = M$ , и рассмотрим элемент  $c \in A_1$ , который не пропорционален  $a$  и для которого  $\dim(cA_{s-1})$  и  $\dim(cB_{s-1})$  одновременно принимают максимально возможные значения. Ясно, что  $\dim B_s = \dim(B_s/cB_{s-1}) + \dim cB_{s-1}$ . По предположению индукции  $\dim(B_s/cB_{s-1}) \leq (\dim B_s)_{(s)}$ . Оценим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \dim(cB_{s-1}) &= \dim(cA_{s-1}/(cA_{s-2} \cap aA_{s-2})) \leq \\ &\leq \dim(cA_{s-1}/aA_{s-2}) = \dim(aA_{s-1}/aA_{s-2}). \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо, так как  $\dim(cA_{s-1})$  и  $\dim(aA_{s-1})$  являются максимально возможными.

Можно также считать, что для элемента  $c$  значение  $\dim(acA_{s-2})$  максимально. Рассмотрим идеал  $I = \{x \in A: ax = 0\}$  алгебры  $A$ . Этот идеал однороден, и факторалгебра  $P = A/I$  стандартна. Размерность  $\dim(aA_{s-1})$  совпадает с  $\dim P_{s-1}$ . Применяя к алгебре  $P$  предположение индукции, получаем

$$\begin{aligned} \dim(aA_{s-1}/aA_{s-2}) &= \dim(P_{s-1}/cP_{s-1}) \leq \\ &\leq (\dim P_{s-1})_{(s-1)} = (\dim(aA_{s-1}))_{(s-1)} = (\dim A_s - \dim B_s)_{(s-1)}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\dim B_s \leq (\dim B_s)_{(s)} + (\dim A_s - \dim B_s)_{(s-1)}.$$

Остается доказать следующий факт.

**Лемма 10.** Пусть для натуральных чисел  $s$  и  $h < t$  выполнено неравенство  $h \leq h_{(s)} + (t-h)_{(s-1)}$ . Тогда  $h \leq t_{(s)}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим разложение Маколея

$$h = C_{k(s)}^s + \dots + C_{k(1)}^1.$$

Будем рассуждать от противного. Пусть  $t_{(s)} < h$ . Тогда по лемме 2 получаем  $t < C_{k(s)+1}^s + \dots + C_{k(1)+1}^1$  и  $t-h < C_{k(s)}^{s-1} + \dots + C_{k(1)}^0$ . Значит,

$$(t-h)_{(s-1)} < C_{k(s)-1}^{s-1} + \dots + C_{k(2)-1}^1$$

и

$$h_{(s)} = C_{k(s)-1}^s + \dots + C_{k(1)-1}^1.$$

По условию

$$h \leq h_{(s)} + (m - h)_{(s-1)} < C_{k(s)}^s + \dots + C_{k(2)}^2 + C_{k(1)-1}^1 \leq h,$$

и мы получаем противоречие.  $\square$

Теорема 5 доказана.  $\square$

**Доказательство импликации (1)  $\Rightarrow$  (3) в теореме 3.** Начнем со вспомогательного утверждения.

**Лемма 11.** Пусть  $k(s), \dots, k(1)$  —  $s$ -коэффициенты Маколея числа  $m$  и  $j = \min\{i : k(i) \geq i\}$ . Тогда

$$(m+1)^{(s)} = \begin{cases} m^{(s)} + k(1) + 1, & \text{если } j = 1, \\ m^{(s)} + 1, & \text{если } j > 1. \end{cases}$$

**Доказательство.** При  $j > 1$  имеем

$$m+1 = C_{k(s)}^s + \dots + C_{k(j)}^j + C_{j-1}^{j-1},$$

откуда следует требуемое утверждение. Пусть  $j = 1$  и  $i$  — максимальный индекс, для которого  $k(i) = k(1) + i - 1$ . Тогда

$$m = C_{k(s)}^s + \dots + C_{k(i+1)}^{i+1} + \sum_{r=1}^i C_{k(1)+r-1}^r = C_{k(s)}^s + \dots + C_{k(i+1)}^{i+1} + C_{k(1)+i}^i - 1.$$

Значит,

$$m+1 = C_{k(s)}^s + \dots + C_{k(i+1)}^{i+1} + C_{k(1)+i}^i$$

является  $s$ -разложением Маколея для  $m+1$ , поскольку  $k(i+1) > k(1) + i$ . Тогда

$$\begin{aligned} m^{(s)} &= C_{k(s)+1}^{s+1} + \dots + C_{k(i+1)+1}^{i+2} + \sum_{r=1}^i C_{k(1)+r}^{r+1} = \\ &= C_{k(s)+1}^{s+1} + \dots + C_{k(i+1)+1}^{i+2} + \sum_{r=2}^{i+1} C_{k(1)+r-1}^r = \\ &= C_{k(s)+1}^{s+1} + \dots + C_{k(i+1)+1}^{i+2} + C_{k(1)+i+1}^{i+1} - k(1) - 1. \end{aligned}$$

Наконец,

$$(m+1)^{(s)} = C_{k(s)+1}^{s+1} + \dots + C_{k(i+1)+1}^{i+2} + C_{k(1)+i+1}^{i+1} = m^{(s)} + k(1) + 1. \quad \square$$

Тензорно умножая алгебру  $A$  на бесконечное расширение поля  $\mathbb{K}$ , мы можем считать, что основное поле бесконечно. Напомним, что  $B$  — это факторалгебра  $A/(a)$ , снабженная стандартной градуировкой, где  $a \in A_1$  — элемент, для которого выполнено заключение теоремы 5. Умножение на  $a$  определяет линейное отображение из  $A_{s-1}$  в  $A_s$ . Поскольку размерность образа этого отображения не превосходит  $\dim A_{s-1}$ , имеет место неравенство  $\dim A_s \leq \dim A_{s-1} + \dim B_s$ . Тогда из теоремы 5 следует, что  $\dim A_s \leq \dim A_{s-1} + (\dim A_s)_{(s)}$ . Пусть  $m = \dim A_s$  и  $p = \dim A_{s-1}$ . Надо показать, что из неравенства  $m \leq p + m_{(s)}$  следует неравенство  $m \leq p^{(s-1)}$ . Поскольку

$$m_{(s)} = C_{k(s)-1}^s + \dots + C_{k(1)-1}^1,$$

получаем

$$p \geq C_{k(s)-1}^{s-1} + \dots + C_{k(2)-1}^1 + C_{k(1)-1}^0.$$

Положим  $j = \min\{i : k(i) \geq i\}$ . Если  $j > 1$ , то  $k(1) = 0$  и

$$p^{(s-1)} \geq C_{k(s)}^s + \dots + C_{k(2)}^2 = m.$$

Если  $j = 1$ , то, учитывая, что  $C_{k(1)-1}^0 = 1$ , и применяя лемму 11, получаем

$$p^{(s-1)} \geq (C_{k(s)-1}^{s-1} + \dots + C_{k(2)-1}^1 + 1)^{(s-1)} = C_{k(s)}^s + \dots + C_{k(2)}^2 + (k(2) - 1) + 1.$$

Но  $k(2) > k(1)$ , поэтому  $p^{(s-1)} > m$ . Это завершает доказательство импликации (1)  $\Rightarrow$  (3) в теореме 3.

## § 7. Алгебра инвариантов линейных преобразований

Рассмотрим линейный оператор  $S$  на алгебре многочленов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , определенный на образующих линейным преобразованием:

$$S(x_1) = a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n, \quad \dots, \quad S(x_n) = a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n$$

и продолжающийся на произвольный многочлен по правилу

$$(S(f))(x_1, \dots, x_n) = f(S(x_1), \dots, S(x_n)).$$

Оператор  $S$  удовлетворяет условию  $S(fh) = S(f)S(h)$  для любых  $f, h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Будем считать, что преобразование  $S$  *обратимо*, т. е. существует такое линейное преобразование  $S^{-1}$ , что композиции  $S \circ S^{-1}$  и  $S^{-1} \circ S$  определяют тождественное преобразование. Ясно, что множество обратимых линейных преобразований переменных  $x_1, \dots, x_n$  образует группу относительно операции композиции. Более того, сопоставление преобразованию  $S$  матрицы  $(a_{ij})$  позволяет отождествить группу обратимых линейных преобразований с группой обратимых матриц  $GL_n(\mathbb{K})$ .

**Определение 15.** Будем говорить, что многочлен  $F(x_1, \dots, x_n)$  *инвариантен* относительно преобразования  $S$ , если  $F(S(x_1), \dots, S(x_n)) = F(x_1, \dots, x_n)$ .

**Пример 8.** Рассмотрим преобразование  $S(x_1) = x_2, S(x_2) = x_3, \dots, S(x_{n-1}) = x_n, S(x_n) = x_1$ . Тогда многочлен  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  инвариантен относительно  $S$ , а  $x_1 + x_2^2 + \dots + x_n^n$  — нет.

Можно также рассматривать множество обратимых линейных преобразований  $C = \{S_\omega : \omega \in \Omega\}$ , где  $\Omega$  — некоторое множество индексов, и множество всех многочленов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^C$ , инвариантных относительно преобразований из  $C$ . Ясно, что  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^C$  содержит константы и замкнуто относительно сложения и умножения многочленов, т. е.  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^C$  — подалгебра в  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Более того, если  $G$  — подгруппа в  $GL_n(\mathbb{K})$ , порожденная элементами множества  $C$ , то  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^C$ .

**Основная задача теории инвариантов.** Пусть  $G$  — подгруппа в  $GL_n(\mathbb{K})$ . Опишите алгебру инвариантов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ .

**Задача 30.** Докажите, что в группе  $GL_2(\mathbb{K})$  нет подгруппы, алгебра инвариантов которой совпадает с  $\mathbb{K}[x_1, x_1x_2]$ .



Всюду далее мы предполагаем, что  $\mathbb{K}$  — поле нулевой характеристики.

**Теорема 6.** Пусть  $G \subset GL_n(\mathbb{K})$  — конечная подгруппа. Тогда алгебра инвариантов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$  конечно порождена.

Мы приведем два различных доказательства теоремы 6 (третье содержится в указании к задаче 37). В первом доказательстве, восходящем к Д. Гильберту, конечная порожденность алгебры инвариантов выводится из конечной порожденности полиномиального идеала. Второе доказательство принадлежит Э. Нётер. Оно основано на основной теореме о симметрических многочленах и доставляет оценку сверху на степени порождающих.

**Доказательство 1.** Рассмотрим отображение  $P: \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ :

$$P(F(x_1, \dots, x_n)) = \frac{1}{|G|} \sum_{S \in G} F(S(x_1), \dots, S(x_n)).$$

Несложно проверить, что для любых  $F, H \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  и  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$  выполнены следующие свойства:

$$\begin{aligned} P(F + H) &= P(F) + P(H), & P(F) &\in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G, \\ P(f) &= f, & P(fF) &= fP(F). \end{aligned}$$

В частности,  $P$  проектирует  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  на  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ . В силу линейности преобразований из группы  $G$  если многочлен  $f(x_1, \dots, x_n)$  инвариантен, то инвариантна и каждая его однородная компонента. Пусть  $I$  — идеал в  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , порожденный всеми однородными инвариантами положительной степени. Как и каждый идеал в  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , идеал  $I$  порожден конечным числом многочленов  $f_1, \dots, f_s$ . Эти многочлены можно считать однородными инвариантами.

Утверждается, что многочлены  $f_1, \dots, f_s$  порождают алгебру инвариантов. Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что каждый однородный инвариант  $f$  выражается через  $f_1, \dots, f_s$ . Проведем индукцию по степени  $t$  инварианта  $f$ . В случае  $t = 0$  многочлен  $f$  является константой и наше утверждение справедливо. При  $t > 0$  многочлен  $f$  принадлежит  $I$  и имеет место представление  $f = h_1 f_1 + \dots + h_s f_s$ ,  $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Применив проектор  $P$  к обеим частям представления, получим  $f = P(f) = P(h_1) f_1 + \dots + P(h_s) f_s$ . Поскольку степени  $f_i$  положительны, степени однородных инвариантов  $P(h_i)$  меньше  $t$  и по предположению индукции  $P(h_i)$  выражаются через  $f_1, \dots, f_s$ . Значит, и  $f$  выражается через  $f_1, \dots, f_s$ .  $\square$

**Доказательство 2.** Здесь для упрощения изложения мы будем предполагать, что  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Нам потребуется вспомогательное предложение.

**Предложение 4.** Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — однородный многочлен степени  $t$  с комплексными коэффициентами. Тогда для некоторого натурального  $k$  найдутся такие линейные многочлены  $L_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$ ,  $j = 1, \dots, k$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ , что

$$f(x_1, \dots, x_n) = L_1^m + \dots + L_k^m.$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай  $n = 2$ . Вычисляя коэффициенты при помощи биннома Ньютона и используя определитель Вандермонда, легко показать, что многочлены  $x_1^m, (x_1 + x_2)^m, \dots, (x_1 + mx_2)^m$  линейно независимы и, следовательно, образуют базис пространства однородных многочленов степени  $t$  от переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Это означает, что для произвольного однородного многочлена  $f(x_1, x_2)$  степени  $t$  найдутся такие комплексные числа  $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ , что

$$f(x_1, x_2) = \alpha_0 x_1^m + \dots + \alpha_m (x_1 + mx_2)^m = (\beta_0 x_1)^m + \dots + (\beta_k (x_1 + mx_2))^m,$$

где  $\beta_i^m = \alpha_i$ .

При  $n > 2$  будем вести индукцию по  $n$ . Достаточно доказать, что любой многочлен  $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$  степени  $t$  представим в нужном нам виде. Можно считать, что  $i_1 \geq 1$ . По предположению индукции многочлен  $x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$  представим в виде  $M_1^{m-i_1} + \dots + M_k^{m-i_1}$ , где  $M_j$  — линейные многочлены от  $x_2, \dots, x_n$ . Остается заметить, что, вновь по предположению индукции, многочлен  $x_1^{i_1} M_j^{m-i_1}$  представим в виде суммы  $m$ -х степеней линейных многочленов от  $x_1$  и  $M_j$ .  $\square$

Пусть теперь  $f(x_1, \dots, x_n) = L_1^m + \dots + L_k^m$  — указанное представление однородного инварианта  $f$ . Применяя к этому представлению отображение  $P$ , мы получаем, что  $f$  есть сумма выражений вида

$$L_j^{(m)}(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{S \in G} L_j(S(x_1), \dots, S(x_n))^m.$$

Поскольку многочлен  $Y_1^m + \dots + Y_s^m$  ( $s = |G|$ ) является симметрическим многочленом от  $Y_1, \dots, Y_s$ , его можно выразить через элементарные симметрические многочлены от  $Y_1, \dots, Y_s$ . Это показывает, что  $L_j^{(m)}(x_1, \dots, x_n)$  выражается через элементарные симметрические многочлены от  $L_j(S(x_1), \dots, S(x_n))$ , которые являются однородными инвариантами степени не выше  $|G|$ . Пространство многочленов от  $x_1, \dots, x_n$  степени не выше  $|G|$  конечномерно, и любой базис подпространства инвариантов в этом пространстве является конечной системой порождающих для  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G$ .  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $G \subset GL_n(\mathbb{C})$  — конечная подгруппа. Тогда алгебра  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G$  порождается инвариантами степени не выше  $|G|$ .

Это следствие позволяет получить простой (но часто очень трудоемкий) алгоритм для построения конечной системы порождающих алгебры инвариантов конечной группы  $G$ : нужно взять все одночлены от  $x_1, \dots, x_n$  степени не выше  $|G|$  и применить к ним проектор  $P$ .

**Задача 31.** Пусть  $G$  — конечная подгруппа в  $GL_n(\mathbb{C})$ . Докажите, что элементы

$$P(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}), \quad i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq |G|,$$

порождают алгебру  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G$ .

**Задача 32.** Докажите, что следствие 1 справедливо над любым полем нулевой характеристики.

**Задача 33.** Пусть  $A_n \subset S_n$  — подгруппа четных перестановок. Найдите образующие алгебры инвариантов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^{A_n}$ .

**Задача 34.** Пусть  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  и  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  — первообразный корень степени  $n$  из единицы. Рассмотрим группу  $G$ , порожденную преобразованием  $x_1 \rightarrow \varepsilon^k x_1, x_2 \rightarrow \varepsilon^k x_2, 1 \leq k \leq n-1$ . Найдите образующие алгебры инвариантов  $\mathbb{C}[x_1, x_2]^G$ .

**Задача 35.** Пусть  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  и  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  — первообразный корень степени  $n$  из единицы. Рассмотрим группу  $G$ , порожденную преобразованием  $x_1 \rightarrow \varepsilon^k x_1, x_2 \rightarrow \varepsilon^{-k} x_2, 1 \leq k \leq n-1$ . Найдите образующие алгебры инвариантов  $\mathbb{C}[x_1, x_2]^G$ .

**Задача 36.** Пусть  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  и  $G$  — группа третьего порядка, порожденная преобразованием

$$x_1 \rightarrow -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \quad x_2 \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2.$$

Найдите образующие алгебры инвариантов  $\mathbb{R}[x_1, x_2]^G$ .

**Задача 37.** Пусть  $\mathbb{K}$  — поле положительной характеристики и  $G \subset GL_n(\mathbb{K})$  — конечная подгруппа. Докажите, что алгебра инвариантов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$  конечно порождена. Верно ли, что она порождается инвариантами степени не выше  $|G|$ ?

**Задача 38.** Предположим, что конечная группа  $G$  совпадает со своим коммутантом. Докажите, что  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$  есть алгебра с однозначным разложением на простые множители. Верно ли обратное утверждение?

## § 8. Формула Молина

Поскольку группа  $G \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{K})$  действует на  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  линейными заменами переменных, она сохраняет инвариантной каждую компоненту алгебры  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  относительно стандартной градуировки. Следовательно,  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$  является однородной подалгеброй в  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . В этом параграфе мы получим явную формулу для ряда Пуанкаре этой подалгебры. Будем предполагать, что основное поле  $\mathbb{K}$  является полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел.

**Теорема 7** (Ф. Э. Молин, 1897). Пусть  $G \subset \text{GL}_n(\mathbb{K})$  — конечная подгруппа. Тогда

$$P(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(E - tg)}.$$

**Доказательство.** Пусть  $g_m$  — линейный оператор, индуцированный элементом  $g \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  на компоненте  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_m$ . Поскольку  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_m$  — это проектор из  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_m$  на  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_m^G$ , имеем

$$\text{tr} \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_m \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(g_m) = \dim \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_m^G.$$

Как элемент конечной группы, оператор  $g$  имеет конечный порядок, поэтому он аннулируется некоторым многочленом вида  $x^N - 1$ . Значит, минимальный многочлен оператора  $g$  делит  $x^N - 1$ . Такие многочлены не имеют кратных корней, следовательно, оператор  $g$  диагонализуем. Можно считать, что  $x_1, \dots, x_n$  — собственные векторы для  $g$ , отвечающие собственным значениям  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Тогда каждый одночлен  $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$  также является собственным вектором, отвечающим собственному значению  $\lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n}$ . Поэтому след оператора  $g_m$  равен сумме всех  $\lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n}$ , для которых  $i_1 + \dots + i_n = m$ . Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 0} \text{tr}(g_m) t^m &= (1 + \lambda_1 t + \lambda_1^2 t^2 + \dots) \dots (1 + \lambda_n t + \lambda_n^2 t^2 + \dots) = \\ &= \frac{1}{(1 - t\lambda_1) \dots (1 - t\lambda_n)} = \frac{1}{\det(E - tg)}, \end{aligned}$$

и

$$P(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G, t) = \sum_{m \geq 0} \dim \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_m^G t^m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(E - tg)}. \quad \square$$

**Замечание 2.** Более общий вариант формулы Молина позволяет вычислять кратность вхождения данного неприводимого представления группы  $G$  в компоненты алгебры  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ; см. [20, теорема 2.1]. Читатель может сам доказать это обобщение, используя соотношения ортогональности для характеров конечных групп [3, гл. 11, § 4, теорема 3].

**Задача 39.** Докажите, что формула Молина верна над любым полем  $\mathbb{K}$  нулевой характеристики.

В некоторых ситуациях теорема 7 позволяет доказывать, что данный набор инвариантов порождает алгебру  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ . Для этого достаточно проверить, что ряд Пуанкаре подалгебры, порожденной этими инвариантами, совпадает с  $P(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G, t)$ .

**Пример 11.** Пусть подгруппа  $G \subset GL_2(\mathbb{K})$  состоит из четырех матриц:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(\mathbb{K}[x_1, x_2]^G, t) &= \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\det(E - tE)} + \frac{1}{\det(E - tM)} + \frac{1}{\det(E - tM^2)} + \frac{1}{\det(E - tM^3)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{2}{1+t^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \right) = \frac{1+t^4}{(1-t^2)(1-t^4)}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что многочлены  $f_1 = x_1^2 + x_2^2$ ,  $f_2 = x_1^2 x_2^2$  и  $h = x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3$  инвариантны, причем  $f_1$  и  $f_2$  алгебраически независимы. Пусть

$$F_1(f_1, f_2) + hF_2(f_1, f_2) = 0.$$

Сделаем замену  $x_1 \rightarrow -x_1$ ,  $x_2 \rightarrow x_2$ . Тогда  $F_1(f_1, f_2) - hF_2(f_1, f_2) = 0$  и  $F_1(f_1, f_2) = F_2(f_1, f_2) = 0$ . Значит, подпространства  $\mathbb{K}[f_1, f_2]$  и  $h\mathbb{K}[f_1, f_2]$  образуют прямую сумму. Но ряд Пуанкаре такой прямой суммы совпадает с  $P(\mathbb{K}[x_1, x_2]^G, t)$ , поэтому  $f_1$ ,  $f_2$  и  $h$  порождают алгебру инвариантов.

**Пример 12.** Укажем одно приложение формулы Молина к задачам комплексного анализа. Этот пример, как и предыдущий, заимствован из работы [20]. Пусть требуется вычислить сумму

$$S(k) = \sum_{w^k=1, w \neq 1} \frac{1}{|1-w|^2}.$$

Рассмотрим циклическую группу  $G$  порядка  $k$ , порожденную преобразованием  $x_1 \rightarrow \varepsilon x_1, x_2 \rightarrow \varepsilon^{-1} x_2$ , где  $\varepsilon$  — первообразный корень степени  $k$  из единицы. Тогда

$$P(\mathbb{C}[x_1, x_2]^G, t) = \frac{1}{k} \sum_{w \in \mathbb{C}, w^k=1} \frac{1}{(1-wt)(1-\bar{w}t)}$$

и  $S(k) = \lim_{t \rightarrow 1} \left( kP(\mathbb{C}[x_1, x_2]^G, t) - \frac{1}{(1-t)^2} \right)$ . С другой стороны,

$$\mathbb{C}[x_1, x_2]^G = \bigoplus_{i=0}^{k-1} x_1^i x_2^i \mathbb{C}[x_1^k, x_2^k]$$

и

$$P(\mathbb{C}[x_1, x_2]^G, t) = \frac{1+t^2+t^4+\dots+t^{2k-2}}{(1-t^k)^2}.$$

Используя правило Лопиталья, получаем

$$\begin{aligned} S(k) &= \left[ \frac{k(1+t^2+\dots+t^{2k-2}) - (1+t+\dots+t^{k-1})^2}{(1-t)^2(1+t+\dots+t^{k-1})^2} \right]_{t=1} = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \Big|_{t=1} = \\ &= \frac{\varphi''(t)}{\psi''(t)} \Big|_{t=1} = \frac{k \frac{(k-1)k(4k-5)}{3} - 2 \left( k \frac{(k-2)(k-1)k}{3} + \frac{k^2(k-1)^2}{4} \right)}{2k^2} = \frac{k^2-1}{12}. \end{aligned}$$

**Задача 40.** Вычислите сумму

$$S_2(k) = \sum_{w^k=1, w \neq 1} \frac{1}{|1-w|^4}.$$

## § 9. Контрпример Нагаты—Стейнберга

В этом параграфе приведен пример группы линейных преобразований, алгебра инвариантов которой не конечно порождена. Первый такой пример, являющийся контрпримером к 14-й проблеме Гильберта, построен Нагатой в 1958 году [17, 18]. Мы излагаем версию конструкции Нагаты, принадлежащую Стейнбергу [21].

Пусть  $\mathbb{K}$  — поле нулевой характеристики. Рассмотрим векторное пространство

$$V := V_2 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_2 \quad (9 \text{ слагаемых}),$$

где каждое  $V_2$  — это двумерное арифметическое пространство  $\mathbb{K}^2$  с координатами  $(x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq 9$ . Тем самым алгебра многочленов  $\mathbb{K}[V]$  на пространстве  $V$  есть алгебра  $\mathbb{K}[x_1, y_1, \dots, x_9, y_9]$ . Пусть  $G_a = (\mathbb{K}, +)$  и группа  $G_a^9 = G_a \times G_a \times \dots \times G_a$  (9 множителей) действует на пространстве  $V$  как  $x_i \rightarrow x_i + c_i y_i$ ,  $y_i \rightarrow y_i$  для всех  $(c_1, \dots, c_9) \in G_a^9$ .

**Задача 41.** Докажите, что алгебра инвариантов

$$\mathbb{K}[x_1, y_1, \dots, x_9, y_9]^{G_a^9}$$

совпадает с подалгеброй  $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_9]$ .

Зафиксируем набор  $(a_1, \dots, a_9)$ , где  $a_i \in \mathbb{K}$ ,  $a_i \neq a_j$  при  $i \neq j$  и  $\sum_{i=1}^9 a_i \neq 0$ . Рассмотрим в  $G_a^9$  подгруппу  $G \cong G_a^6$ , заданную условиями

$$\sum_{i=1}^9 c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^9 a_i c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^9 a_i^3 c_i = 0.$$

Пусть  $H = GT$  — расширение группы  $G$  при помощи группы  $T$  преобразований вида  $x_i \rightarrow t_i x_i$ ,  $y_i \rightarrow t_i y_i$ , где  $t_1, t_2, \dots, t_9$  — произвольные элементы поля  $\mathbb{K}$ , для которых  $t_1 t_2 \dots t_9 = 1$ . Группы  $G$  и  $H$  реализуются матрицами  $18 \times 18$ :

$$G = \left\{ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & & & \\ c_1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & c_9 & 1 \end{array} \right) \right\}, \quad H = \left\{ \left( \begin{array}{ccc|ccc} t_1 & 0 & & & & \\ t_1 c_1 & t_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & t_9 & 0 \\ & & & & t_9 c_9 & t_9 \end{array} \right) \right\}.$$

**Теорема 8** (М. Нагата, Р. Стейнберг). *Алгебра инвариантов  $\mathbb{K}[V]^H$  не является конечно порожденной.*

Разобьем доказательство теоремы 8 на несколько лемм. Положим  $Y := y_1 y_2 \dots y_9$  и

$$Z_1 := \sum_{i=1}^9 x_i y_1 \dots \hat{y}_i \dots y_9 = \sum_{i=1}^9 \frac{x_i Y}{y_i}, \quad Z_2 := \sum_{i=1}^9 \frac{a_i x_i Y}{y_i}, \quad Z_3 := \sum_{i=1}^9 \frac{a_i^3 x_i Y}{y_i}.$$

Ясно, что  $Y, Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{K}[V]$ .

**Лемма 12.** *Мы имеем  $Y, Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{K}[V]^H$ .*

**Доказательство.** Достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} Y &\rightarrow (t_1 y_1)(t_2 y_2) \dots (t_9 y_9) = (t_1 t_2 \dots t_9)(y_1 y_2 \dots y_9) = Y; \\ Z_1 &\rightarrow \sum_{i=1}^9 \frac{(t_i x_i + c_i t_i y_i) Y}{t_i y_i} = \sum_{i=1}^9 \frac{x_i Y}{y_i} + \left( \sum_{i=1}^9 c_i \right) Y = Z_1; \\ Z_2 &\rightarrow \sum_{i=1}^9 \frac{a_i (t_i x_i + c_i t_i y_i) Y}{t_i y_i} = \sum_{i=1}^9 \frac{a_i x_i Y}{y_i} + \left( \sum_{i=1}^9 a_i c_i \right) Y = Z_2; \\ Z_3 &\rightarrow \sum_{i=1}^9 \frac{a_i^3 (t_i x_i + c_i t_i y_i) Y}{t_i y_i} = \sum_{i=1}^9 \frac{a_i^3 x_i Y}{y_i} + \left( \sum_{i=1}^9 a_i^3 c_i \right) Y = Z_3. \quad \square \end{aligned}$$

**Лемма 13.** *Имеет место равенство*

$$\mathbb{K}[V]^H = \mathbb{K}[V] \cap \mathbb{K}[Z_1, Z_2, Z_3, Y, Y^{-1}].$$

**Доказательство.** Группы  $G$  и  $H$  естественно действуют на алгебре  $A := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_9, y_1, \dots, y_9, Y^{-1}]$ . Положим  $W_i := \frac{x_i Y}{y_i}$ . Тогда  $x_i = y_i W_i Y^{-1}$ , поэтому

$$A = \mathbb{K}[W_1, W_2, W_3, x_4, \dots, x_9, y_1, \dots, y_9, Y^{-1}].$$

Далее,  $Z_1 = \sum_{i=1}^9 W_i$ ,  $Z_2 = \sum_{i=1}^9 a_i W_i$ ,  $Z_3 = \sum_{i=1}^9 a_i^3 W_i$ . Перенумеровав элементы  $a_1, \dots, a_9$ , можно считать, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_1 + a_2 + a_3)$$

отличен от нуля. Тогда  $W_1, W_2$  и  $W_3$  можно выразить как линейные функции от  $Z_1, Z_2, Z_3, W_4, \dots, W_9$ . Это показывает, что

$$A = \mathbb{K}[Z_1, Z_2, Z_3, x_4, \dots, x_9, y_1, \dots, y_9, Y^{-1}]. \quad (3)$$

Рассмотрим подгруппу  $G_4 \subset G$ , заданную условиями  $c_5 = \dots = c_9 = 0$ . Вновь в силу условия на определитель для любого  $c_4 \in \mathbb{K}$  найдется ровно один такой набор  $(c_1, c_2, c_3)$ , что  $(c_1, c_2, c_3, c_4, 0, \dots, 0) \in G$ . Все образующие алгебры  $A$  из соотношения (3), за исключением  $x_4$ , не изменяются под действием  $G_4$ , тогда как  $x_4 \rightarrow x_4 + c_4 y_4$ . Это показывает, что элемент  $F(Z_1, Z_2, Z_3, x_4, \dots, x_9, y_1, \dots, y_9, Y^{-1}) \in A$  является  $G_4$ -инвариантным тогда и только тогда, когда он не зависит от  $x_4$ . Рассматривая  $G_5, \dots, G_9$ , мы покажем, что  $G$ -инварианты не зависят также от  $x_5, \dots, x_9$ . С другой стороны, элементы  $Z_1, Z_2, Z_3, y_1, \dots, y_9, Y^{-1}$  являются  $G$ -инвариантными, поэтому  $A^G = \mathbb{K}[Z_1, Z_2, Z_3, y_1, \dots, y_9, Y^{-1}]$ . Элемент  $(t_1, \dots, t_9) \in T$  умножает одночлен  $Z_1^{d_1} Z_2^{d_2} Z_3^{d_3} y_1^{b_1} \dots y_9^{b_9} (Y^{-1})^c$  на  $t_1^{b_1-c} \dots t_9^{b_9-c}$ . Такой одночлен  $T$ -инвариантен в точности тогда, когда  $b_1 = \dots = b_9$ , поэтому  $A^H = \mathbb{K}[Z_1, Z_2, Z_3, Y, Y^{-1}]$ . Наконец, из включения  $\mathbb{K}[V] \subset A$  следует, что  $\mathbb{K}[V]^H = \mathbb{K}[V] \cap A^H$ .  $\square$

**Лемма 14.** *Элементы  $Z_1, Z_2, Z_3, Y \in \mathbb{K}[V]$  алгебраически независимы.*

**Доказательство.** Пусть  $V := K[x_1, \dots, x_9]$  — алгебра многочленов над полем рациональных дробей  $K := \mathbb{K}(y_1, \dots, y_9)$ . По построению элементы  $x_1, \dots, x_9$  этой алгебры алгебраически независимы. Заметим, что  $W_i = \frac{x_i Y}{y_i}$  отличается от  $x_i$  на константу  $\frac{Y}{y_i} \in K$ , поэтому элементы  $W_1, W_2, W_3, x_4, \dots, x_9$  алгебраически независимы над  $K$ . Далее, поскольку наборы  $\{W_1, W_2, W_3, x_4, \dots, x_9\}$  и  $\{Z_1, Z_2, Z_3, x_4, \dots, x_9\}$  получаются друг из друга обратимой  $K$ -линейной заменой, элементы  $Z_1, Z_2, Z_3, x_4, \dots, x_9$  (а значит, и  $Z_1, Z_2, Z_3$ ) алгебраически независимы над  $K$ .

Пусть теперь

$$F(Z_1, Z_2, Z_3, Y) = \sum_{I=(i_1, i_2, i_3)} f_I(Y) Z_1^{i_1} Z_2^{i_2} Z_3^{i_3} = 0.$$

Тогда  $f_I(Y)$  являются нулевыми элементами поля  $K$ , и поэтому многочлен  $F$  нулевой.  $\square$

**Лемма 15.** *Имеет место равенство*

$$\mathbb{K}[V]^H = \left\{ \sum_j \frac{f_j(Z_1, Z_2, Z_3)}{Y^{m_j}} \right\},$$

где  $f_j$  — однородный многочлен от  $Z_1, Z_2, Z_3$ , который делится на  $Y^{m_j}$  в алгебре  $\mathbb{K}[V]$ .

**Доказательство.** По лемме 13 любой многочлен  $F \in \mathbb{K}[V]^H$  имеет вид  $\sum \frac{f_j(Z_1, Z_2, Z_3)}{Y^{m_j}}$ , где многочлен  $f_j$  можно считать однородными степени  $d_j$  по  $Z_1, Z_2, Z_3$ . Нам нужно показать, что  $f_j(Z_1, Z_2, Z_3)$  делится на  $Y^{m_j}$  в  $\mathbb{K}[V]$ . Можно считать, что многочлен  $F$  является однородным степени  $d$  по совокупности переменных  $x_1, \dots, x_9, y_1, \dots, y_9$ . Степень выражения  $\frac{f_j(Z_1, Z_2, Z_3)}{Y^{m_j}}$  по переменным  $x_1, \dots, x_9$  равна  $d_j$ , а по переменным  $y_1, \dots, y_9$  равна  $8d_j - 9m_j$ . Поэтому  $d = 9(d_j - m_j)$ , и, значит,  $d_j$  однозначно определяется по  $m_j$  и  $d$ . Следовательно, выражение  $\frac{f_j(Z_1, Z_2, Z_3)}{Y^{m_j}}$  совпадает с однородной компонентной многочлена  $F$  по переменным  $x_1, \dots, x_9$  и поэтому принадлежит  $\mathbb{K}[V]$ .  $\square$

**Определение 16.** Ненулевой многочлен  $F(x, y)$  имеет нуль порядка не ниже  $t$  в точке  $(\alpha, \beta)$ , если он допускает запись

$$F(x, y) = F_m(x - \alpha, y - \beta) + F_{m+1}(x - \alpha, y - \beta) + \dots,$$

где  $F_k$  — некоторый однородный многочлен степени  $k$  от двух переменных.

**Лемма 16.** Ненулевой однородный многочлен  $f(Z_1, Z_2, Z_3)$  степени  $d$  от переменных  $Z_1, Z_2, Z_3$  делится на  $Y^m$  тогда и только тогда, когда многочлен  $\hat{f}\left(\frac{Z_2}{Z_1}, \frac{Z_3}{Z_1}\right) := \frac{f(Z_1, Z_2, Z_3)}{Z_1^d}$  имеет в точках  $(a_1, a_1^3), \dots, (a_9, a_9^3)$  нули порядка не меньше  $t$ .

**Доказательство.** Сделаем замену переменных

$$Z'_1 = Z_1, \quad Z'_2 = Z_2 - a_1 Z_1, \quad Z'_3 = Z_3 - a_1^3 Z_1.$$

После этого точка  $(a_1, a_1^3)$  переместится в начало координат. Далее,

$$Z'_1 = x_1 \frac{Y}{y_1} + y_1 U_1, \quad Z'_2 = y_1 U_2, \quad Z'_3 = y_1 U_3,$$

где

$$U_1 = \frac{x_2 Y}{y_1 y_2} + \dots + \frac{x_9 Y}{y_1 y_9}, \quad U_2 = (a_2 - a_1) \frac{x_2 Y}{y_1 y_2} + \dots + (a_9 - a_1) \frac{x_9 Y}{y_1 y_9},$$

$$U_3 = (a_2^3 - a_1^3) \frac{x_2 Y}{y_1 y_2} + \dots + (a_9^3 - a_1^3) \frac{x_9 Y}{y_1 y_9}.$$

Ясно, что многочлены  $U_1, U_2, U_3$  не зависят от  $y_1$ . В записи

$$f(Z'_1, Z'_2, Z'_3) = f_m(Z'_2, Z'_3) Z_1^{d-m} + f_{m+1}(Z'_2, Z'_3) Z_1^{d-m-1} + \dots$$

все члены начиная со второго делятся на  $y_1^{m+1}$ , а первый член имеет вид  $y_1^m f_m(U_2, U_3) \left(x_1 \frac{Y}{y_1} + y_1 U_1\right)^{d-m}$ . Из условия на определитель (см.

доказательство леммы 13) следует, что

$$K(x_2, \dots, x_9) = K(U_2, U_3, x_4, \dots, x_9),$$

где  $K = \mathbb{K}(y_1, \dots, y_9)$ . Значит,  $U_2$  и  $U_3$  алгебраически независимы над  $K$  (и над  $\mathbb{K}$ ). Поэтому из условия  $f_m(Z'_2, Z'_3) \neq 0$  следует, что  $f_m(U_2, U_3) \neq 0$  как многочлен от  $x_i$  и  $y_i$ . Итак, максимальная степень элемента  $y_1$ , на которую делится  $f(Z_1, Z_2, Z_3)$ , равна порядку нуля многочлена  $\hat{f}\left(\frac{Z_2}{Z_1}, \frac{Z_3}{Z_1}\right)$  в точке  $(a_1, a_1^3)$ . Рассматривая аналогично точки  $(a_2, a_2^3), \dots, (a_9, a_9^3)$ , получаем утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 17.** Пусть ненулевой многочлен  $F(x, y)$  степени не выше  $3t$  имеет нули порядка не меньше  $t$  в точках  $(a_1, a_1^3), \dots, (a_9, a_9^3)$ . Тогда  $F(x, y) = \lambda(y - x^3)^m$ ,  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

**Доказательство.** Будем рассуждать индукцией по  $t$ . В случае  $t = 0$  многочлен  $F(x, y)$  является ненулевой константой и утверждение очевидно. При  $t > 0$  рассмотрим запись

$$F(x, y) = c_0(x)y^{3m} + c_1(x)y^{3m-1} + \dots + c_{3m}(x).$$

По условию степень многочлена  $c_j(x)$  не превосходит  $j$ . Замена  $y \rightarrow x^3$  приводит к многочлену  $F(x, x^3) = c_0x^{9m} + c_1(x)x^{9m-3} + \dots + c_{3m}(x)$ , совпадающему с остатком от деления  $F(x, y)$  на  $y - x^3$ . Многочлен  $F(x, x^3)$  делится на  $(x - a_i)^m$ , поскольку выражение  $(x - a_i)^k(y - a_i^3)^p$  после замены  $y \rightarrow x^3$  делится на  $(x - a_i)^{k+p}$ . Итак, многочлен  $F(x, x^3)$  делится на  $(x - a_1)^m \dots (x - a_9)^m$ . Сравнивая степени, получаем

$$c_0x^{9m} + c_1(x)x^{9m-3} + \dots + c_{3m}(x) = c_0(x - a_1)^m \dots (x - a_9)^m.$$

Коэффициент при  $x^{9m-1}$  в левой части равен нулю, тогда как в правой части он равен  $-c_0m \sum_{i=1}^9 a_i$ . Отсюда следует, что  $c_0 = 0$ , и, значит,  $F(x, y)$  делится на  $y - x^3$ . Поскольку  $y - x^3$  имеет в точках  $(a_i, a_i^3)$  нуль порядка 1, мы можем применить к частному  $\frac{F(x, y)}{y - x^3}$  предположение индукции и получить требуемое утверждение.  $\square$

**Лемма 18.** 1. Векторное пространство многочленов степени не выше  $d$  от переменных  $x$  и  $y$  имеет размерность

$$C_{d+2}^2 = \frac{(d+2)(d+1)}{2}.$$

2. Пусть  $d \geq t$ . Тогда пространство многочленов степени не выше  $d$ , имеющих в данной точке  $P$  нуль порядка не выше  $t$ , имеет размерность

$$C_{d+2}^2 - C_{m+1}^2.$$

**Доказательство.** 1. Надо сосчитать число пар  $(i, j)$  с целыми  $i, j \geq 0, i + j \leq d$ . Для этого введем фиктивное слагаемое  $k = d - i - j$ . Тогда  $d = i + j + k, i, j, k \geq 0$ . Рассмотрим  $d + 2$  кружочка, расположенных в ряд. Закрашивание двух из них определяет разбиение  $d$  на 3 неотрицательных слагаемых.

2. После сдвига точки  $P$  в начало координат условие на порядок нуля задается обращением в нуль  $C_{m+1}^2$  коэффициентов многочлена.  $\square$

**Лемма 19.** Пусть  $d \geq 3t$ . Тогда пространство многочленов  $F(x, y)$  степени не выше  $d$ , имеющих нули порядка не выше  $t$  в точках  $(a_1, a_1^3), \dots, (a_9, a_9^3)$ , имеет размерность

$$C_{d+2}^2 - 9C_{m+1}^2.$$

**Доказательство.** По предыдущей лемме размерность пространства многочленов степени не выше  $3t$  равна  $C_{3m+2}^2 = \frac{9m^2 + 9m + 2}{2}$ , тогда как  $9C_{m+1}^2 = \frac{9m^2 + 9m}{2}$ . По лемме 17 пространство многочленов, удовлетворяющих нашим условиям на порядки нулей, одномерно. Следовательно,  $9C_{m+1}^2$  линейных условий на  $F(x, y)$  оказываются линейно независимыми. При  $d > 3t$  указанные условия также линейно независимы, поскольку они линейно независимы при ограничении на подпространство многочленов степени не выше  $3t$ .  $\square$

**Лемма 20.** Существует многочлен  $F(x, y)$  степени  $3t + 1$ , имеющий в точках  $(a_1, a_1^3), \dots, (a_9, a_9^3)$  нули порядка не меньше  $t$  и не делящийся на  $y - x^3$ .

**Доказательство.** Пространство многочленов степени не выше  $3t + 1$ , имеющих нули порядка не меньше  $t$  в точках  $(a_i, a_i^3)$ , имеет размерность

$$C_{3m+3}^2 - 9C_{m+1}^2 = \frac{(3m+3)(3m+2)}{2} - 9 \frac{(m+1)m}{2} = 3m + 3.$$

Подпространство  $U$  многочленов, удовлетворяющих этим условиям и делящихся на  $y - x^3$ , имеет размерность

$$C_{3m}^2 - 9C_m^2 = \frac{3m(3m-1)}{2} - 9 \frac{m(m-1)}{2} = 3m$$

(это размерность пространства многочленов степени не выше  $(3t + 1) - 3$ , имеющих в точках  $(a_i, a_i^3)$  нули порядка не меньше  $t - 1$ ). Тем самым подпространство  $U$  является собственным.  $\square$

**Доказательство теоремы 8.** Пусть алгебра  $\mathbb{K}[V]^H$  конечно порождена. Лемма 15 позволяет выбрать систему образующих вида

$$S = \left\{ \frac{Z_1^2 Z_3 - Z_2^3}{Y}, \frac{f_1(Z_1, Z_2, Z_3)}{Y^{m_1}}, \dots, \frac{f_r(Z_1, Z_2, Z_3)}{Y^{m_r}} \right\},$$

где  $f_j(Z_1, Z_2, Z_3)$  делятся  $Y^{m_j}$  в  $\mathbb{K}[V]$ . Можно считать, что  $f_j(Z_1, Z_2, Z_3)$  не делятся на  $Z_1^2 Z_3 - Z_2^3$ , иначе заменим образующую  $\frac{f_j(Z_1, Z_2, Z_3)}{Y^{m_j}}$  на  $\frac{f_j(Z_1, Z_2, Z_3)}{(Z_1^2 Z_3 - Z_2^3) Y^{m_j - 1}}$ . Пусть  $d_j$  — это степень многочлена  $f_j$  относительно  $Z_1, Z_2, Z_3$ . Согласно лемме 17 для всех  $m_j > 0$  выполнено неравенство  $d_j > 3m_j$ . Легко видеть, что это неравенство выполнено и при  $m_j \leq 0$ , поскольку мы можем считать, что  $S$  не содержит констант.

Зафиксируем число  $m > \max(m_1, \dots, m_r)$ . Лемма 20 обеспечивает существование многочлена  $F(x, y)$  степени  $3m + 1$ , имеющего нули порядка не меньше  $m$  в точках  $(a_i, a_i^3)$  и не делящегося на  $y - x^3$ . Пусть  $f(Z_1, Z_2, Z_3) := F\left(\frac{Z_2}{Z_1}, \frac{Z_3}{Z_1}\right) Z_1^{3m+1}$ . По лемме 16 выражение  $\frac{f(Z_1, Z_2, Z_3)}{Y^m}$  определяет элемент алгебры  $\mathbb{K}[V]^H$ . Покажем, что он не выражается через элементы множества  $S$ . В самом деле, если такое выражение существует, его можно считать однородным по переменным  $Z_1, Z_2, Z_3$  и по переменной  $Y$  (здесь используется лемма 14). Поскольку  $f$  не делится на  $Z_1^2 Z_3 - Z_2^3$ , в данном выражении имеется член, не включающий  $\frac{Z_1^2 Z_3 - Z_2^3}{Y}$ . Пусть это  $\lambda \prod \left( \frac{f_j(Z_1, Z_2, Z_3)}{Y^{m_j}} \right)^{e_j}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Приравняв степени по  $Z_1, Z_2, Z_3$  и по  $Y$ , получаем

$$\sum d_j e_j = 3m + 1; \tag{4}$$

$$\sum m_j e_j = m. \tag{5}$$

Тогда рассмотрим выражение (4) – 3(5) и получим  $\sum (d_j - 3m_j) e_j = 1$ . Поскольку  $d_j - 3m_j > 0$ , мы заключаем, что ровно одно  $e_j$ , скажем  $e_{j_0}$ , равно 1, а прочие  $e_j$  равны нулю. Из соотношения (5) следует, что  $m = m_{j_0}$ , что противоречит выбору  $m$ . Это противоречие завершает доказательство теоремы 8.  $\square$

**Упражнение 19.** Найдите в доказательстве как можно больше мест, где существенно используется тот факт, что число точек  $(a_i, a_i^3)$  равно 9.

Будем говорить, что алгебра  $A$  градуирована некоторой группой  $M$ , если задано такое разложение  $A = \bigoplus_{m \in M} A_m$  в прямую сумму векторных подпространств, что  $A_{m_1} A_{m_2}$  содержится в  $A_{m_1 m_2}$  для любых  $m_1, m_2 \in M$ . В этом случае алгебра  $A$  называется  $M$ -градуированной.

**Упражнение 20.** Покажите, что градуировки из определения 1 являются частным случаем  $M$ -градуировок. Какую группу  $M$  здесь нужно рассмотреть?

В заключительной части доказательства теоремы 8 неявно использована  $\mathbb{Z}^2$ -градуировка на алгебре инвариантов  $\mathbb{K}[V]^H$ . В следующей задаче мы формулируем соответствующее утверждение явно.

**Задача 42.** Пусть  $A = \bigoplus_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2} A_{(a,b)}$  —  $\mathbb{Z}^2$ -градуированная алгебра, удовлетворяющая следующим условиям:

- $A_{(a,b)} \neq 0 \Rightarrow a \geq 0, a \geq 3b$ ;
- $\dim A_{(3b,b)} = 1$  при всех  $b \geq 0$ ;
- $A_{(3b+1,b)} \neq A_{(3b-2,b-1)}A_{(3,1)}$  при всех  $b \geq 1$ .

Докажите, что алгебра  $A$  не является конечно порожденной.

**Задача 43.** Докажите, что алгебра инвариантов  $\mathbb{K}[V]^G$  не является конечно порожденной.

## § 10. Указания и комментарии к задачам

1. Пусть  $1 = a_{j_1} + \dots + a_{j_k}$ ,  $j_1 < \dots < j_k$ . Тогда из  $1a_{j_1} = a_{j_1}$  следует, что  $j_1 = 0$  и  $a_{j_1}a_{j_p} = 0$  при  $p > 1$ . Остается воспользоваться тем, что  $1a_{j_p} = a_{j_p}$ .

2. а) Если  $b \in A_s$ ,  $b \neq 0$  и  $s > 0$ , то линейная оболочка  $\langle cbd : c, d \in A \rangle$  содержится в сумме компонент степени не ниже  $s$ . С другой стороны, для ненулевой матрицы  $B$  линейная оболочка  $\langle CBD : C, D \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \rangle$  совпадает с  $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ .

б) Непрерывная функция обратима тогда и только тогда, когда она нигде не обращается в нуль. Непрерывная функция на отрезке  $[0, 1]$  ограничена, поэтому, прибавляя к любому элементу нашей алгебры подходящую константу, можно получить обратимый элемент. Пусть имеется нетривиальная градуировка  $C[0, 1] = A = \bigoplus_{s \geq 0} A_s$  и  $a \in A_k$ ,  $k > 0$ . Тогда для подходящей константы  $\lambda$  найдется такой элемент  $b = b_0 + b_1 + \dots + b_N$ , что  $(a + \lambda)b = 1$ . Отсюда следует, что  $b_0 = \lambda^{-1}$  — ненулевая константа,  $b_k$  пропорционален  $a$ ,  $b_{2k}$  пропорционален  $a^2$  и т. д., а прочие компоненты элемента  $b$  равны нулю. Рассмотрите старшую компоненту произведения  $ab$ .

3. Рассмотрите  $A = \mathbb{K}[x]/(x^2)$  и элемент  $1 + x$ . Покажите, что в алгебрах без делителей нуля такой пример невозможен.

4. а) Из конечной порожденности алгебры  $A$  следует, что  $A$  порождается подпространством  $\bigoplus_{s=1}^m A_s$  для некоторого натурального  $m$ . Ясно, что в любую однородную систему образующих должен входить некоторый базис пространства  $A_1$ . Далее будем строить минимальную систему образующих индуктивно. Для произвольного  $k > 1$  рассмотрим в  $A_k$  подпространство  $U_k$ , порожденное произведениями  $A_{j_1} \dots A_{j_p}$ , где  $j_1 + \dots + j_p = k$  и  $j_1 \geq \dots \geq j_p > 0$ . Заметим, что  $U_k$  не зависит от выбора образующих. Построим некоторый базис пространства  $U_k$  до базиса пространства  $A_k$  и добавим базисные векторы к системе образующих. После того как мы дойдем до  $k = m$ , мы получим минимальную систему образующих алгебры  $A$ . Докажите, что произвольная однородная система образующих содержит не менее  $\dim A_k - \dim U_k$  элементов степени  $k$ .

б) Рассмотрите  $A = A_0 = \mathbb{K}[x, y]/(xy - 1)$  и  $a_1 = x^2$ ,  $a_2 = x^3$ ,  $a_3 = y^6$ .

5. Пусть  $S \subset \mathbb{Z}_+$  — подмножество, причем  $s + s' \in S$  для любых  $s, s' \in S$ . Используя понятие наибольшего общего делителя, докажите, что найдется конечный набор  $s_1, \dots, s_n$  элементов из  $S$ , складывая

(многократно) которые мы получим все элементы  $S$ . Пусть теперь  $P \subset \mathbb{K}[x]$  — подалгебра,  $S$  — множество степеней всевозможных многочленов из  $P$ ,  $s_1, \dots, s_n$  — построенный выше набор и  $g_1, \dots, g_n$  — произвольные многочлены из  $P$ , удовлетворяющие условию  $\deg g_i = s_i$ . Проверьте индукцией по степени, что каждый элемент из  $P$  выражается как многочлен от  $g_1, \dots, g_n$ .

Можно описать все алгебры, в которых каждая подалгебра конечно порождена, а также получить  $G$ -эквивариантный аналог этого результата, где  $G$  — некоторая линейная группа автоморфизмов алгебры, см. [9].

6. Пусть алгебра конечно порождена. Можно считать, что конечная система порождающих состоит из одночленов. Пусть  $m$  — это максимальное значение отношения  $\frac{j}{i}$  по всем образующим  $x^i y^j$ . Докажите, что для любого  $x^k y^s \in A$  имеем  $\frac{s}{k} \leq m$ . Это приводит к противоречию.

7. Это решение предложила Каринэ Куюмжян. Пусть в некоторой однородной системе образующих  $a_1, \dots, a_n$  алгебры  $A$  элементы имеют степени  $d_1, \dots, d_n$ . Положим  $m = nK$ , где  $K$  — наименьшее общее кратное чисел  $d_1, \dots, d_n$ . Пусть одночлен  $a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$  имеет степень  $i_1 d_1 + \dots + i_n d_n = pnK$ ,  $p \geq 2$ . Достаточно доказать, что найдутся такие целые неотрицательные числа  $j_1 \leq i_1, \dots, j_n \leq i_n$ , что  $j_1 d_1 + \dots + j_n d_n = nK$ . Рассмотрим остатки  $t_r$  от деления  $i_r d_r$  на  $K$ . Тогда  $t_1 + \dots + t_n = cK$ ,  $c < n$ . Прибавляя последовательно к числам  $t_r$  число  $K$  так, чтобы результат не превосходил  $i_r d_r$ , мы увеличиваем значение суммы на  $K$ , пока не получим  $nK$ .

Следующий пример, найденный И. И. Богдановым, показывает, что  $m = K$  положить нельзя. Пусть  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 6$ ,  $d_3 = 10$  и  $d_4 = 15$ . Тогда  $K = 30$  и сумму

$$1 + 6 + 6 + 6 + 6 + 10 + 10 + 15 = 60$$

нельзя разбить на две подсуммы, равные 30.

В книге [1, гл. III, § 1, предложение 3] доказано, что число  $m$  можно подобрать так, что  $ml$ -разрежение алгебры  $A$  будет стандартным для любого  $l \geq 1$ .

Для знатоков отметим, что утверждение задачи полезно в алгебраической геометрии: оно позволяет доказать, что взвешенное проективное пространство является проективным многообразием.

8. Хорошо известно (см. [3, гл. 9, § 6]), что если  $n$  элементов порождают алгебру  $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , то эти элементы алгебраически независимы. Для каждого набора свободных порождающих алгебры

А обозначим через  $N$  общее число однородных компонент элементов набора. Пусть  $y_1, \dots, y_n$  — свободные порождающие, для которых значение  $N$  минимально. Тогда  $y_1, \dots, y_n$  не содержат компонент нулевой степени. Предположим, что элемент  $y_1$  неоднороден. Никакая компонента элемента  $y_1$  не выражается через  $y_2, \dots, y_n$ , иначе можно заменить  $y_1$  на разность  $y_1$  и многочлена от  $y_2, \dots, y_n$ . Пусть  $z$  — компонента элемента  $y_1$  наименьшей степени. Покажем, что  $z, y_2, \dots, y_n$  порождают  $A$ . Для этого достаточно доказать, что все компоненты элемента  $y_1$  выражаются через  $z, y_2, \dots, y_n$ . Для компоненты  $z$  это ясно. Для прочих компонент  $z'$  используем индукцию по степени. В выражение  $z' = F(y_1, \dots, y_n)$  не входит член вида  $\lambda y_1$ ,  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , так как иначе член  $\lambda z$  не может сократиться. Это показывает, что  $z'$  выражается через  $y_2, \dots, y_n$  и компоненты элемента  $y_1$  меньших степеней.

Наши рассуждения показывают, что каждая градуированная  $n$ -порожденная алгебра  $A$ , для которой  $A_0 = \mathbb{K}$ , может быть порождена не более чем  $n$  однородными элементами.

Заметим, что условие  $A_0 = \mathbb{K}$  для данного решения существенно и, отбросив его, мы получим задачу другого уровня сложности. Одной из ярких открытых проблем современной алгебры является так называемая *проблема сокращения*. Пусть  $A$  — конечно порожденная  $\mathbb{K}$ -алгебра, и для некоторого натурального  $k$  алгебра многочленов  $A[y_1, \dots, y_k]$  над  $A$  изоморфна алгебре многочленов  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$  над полем  $\mathbb{K}$ . Верно ли, что алгебра  $A$  изоморфна алгебре многочленов  $\mathbb{K}[z_1, \dots, z_{m-k}]$ ? Нетрудно показать, что решение задачи 8 без ограничения  $A_0 = \mathbb{K}$  влечет положительное решение проблемы сокращения.

Если рассмотреть свободную алгебру, градуированную не целыми неотрицательными числами, а всей группой целых чисел, задача 8 станет эквивалентна *проблеме линеаризации* для действия одномерного алгебраического тора на аффинном пространстве  $\mathbb{K}^n$ . Положительное решение этой проблемы при  $n = 1$  и  $2$  известно достаточно давно. Полученное в 1996 г. положительное решение проблемы линеаризации при  $n = 3$  потребовало колоссальных усилий, см. обзор [13]. При  $n \geq 4$  проблема линеаризации остается открытой.

9. Воспользуемся тем, что в алгебре  $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  разложение на простые множители однозначно; см. [3, гл. 9, § 7]. Пусть  $p = \frac{p_1}{p_2} \in QA$ . Элементы  $p_1, p_2 \in A$  можно считать взаимно простыми. Если  $p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m = 0$  для некоторых  $a_1, \dots, a_m \in A$ , то каждый простой делитель элемента  $p_2$  делит  $p_1$ . Значит,  $p \in A$ .

10. Заметим, что  $P(A) = M(P(A))$ . Пусть

$$r \in (L(P(A)) \cap K(P(A))) \setminus P(A).$$

Тогда соответствующий  $r$  одночлен  $a$  не лежит в  $A$ . Условие  $r \in L(P(A))$  позволяет рассматривать  $a$  как элемент поля  $QA$ , а условие  $r \in K(P(A))$  показывает, что  $a^s \in A$  для подходящего  $s \in \mathbb{N}$ . Следовательно,  $A$  не целозамкнута.

Обратно, пусть  $p = \frac{a}{b} \in QA \setminus A$  и  $p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_k = 0$ . Из целозамкнутости алгебры  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  следует, что  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . У многочлена  $p$  есть член, набор степеней  $r$  которого не лежит в  $P(A)$ . В силу равенства  $a = bp$  точка  $r$  лежит в  $L(P(A))$ . Покажем, что  $r$  лежит в конусе  $K \subseteq K(P(A))$ , порожденном наборами степеней одночленов, входящих в разложения элементов  $a_1, \dots, a_k$ . Пусть  $r \notin K$ . Поскольку конус  $K$  является замкнутым выпуклым подмножеством в  $\mathbb{Q}^n$ , теорема отделимости (см. [3, гл. 7, § 2, теорема 2]) гарантирует наличие линейной функции  $l$ , которая неположительна на конусе  $K$  и  $l(r) > 0$ . Будем называть максимальной компонентой многочлена сумму тех его членов, для которых значение функции  $l$  на наборе показателей максимально. Несложно проверить, что в выражении  $p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_k$  максимальная компонента многочлена  $p^k$  не может сократиться, и, значит, это выражение не равно нулю.

**11.** В этой ситуации множество  $P(A)$  определяется аналогично, однако базис Гильберта определить не удастся. Теорема о том, что мономиальная подалгебра  $A$  целозамкнута тогда и только тогда, когда  $P(A)$  насыщенно в  $\mathbb{Z}^n$ , доказывается точно так же.

**12.** Эта задача взята из книги [6, гл. III, § 4.3]. Покажем сначала, что в  $A$  содержатся одночлены  $x^r y^s$  с любым заданным  $s$ . Пусть

$$P = x^a y^b + \sum_{i>0} a_i x^{a+i} y^{b-i},$$

$a_i \in \mathbb{K}$ , — однородный элемент из  $A$ , для которого  $b > 0$ . Если  $k \in \mathbb{N}$  и  $kb \geq a$ , то

$$x^{kb-a} P = (x^k y)^b + \sum_{i>0} a_i x^{(k+1)i} (x^k y)^{b-i} \in A,$$

откуда ввиду целозамкнутости алгебры  $A$  следует, что  $x^k y \in A$ .

Покажем, что  $x^a y^b \in A$ ; отсюда по индукции следует требуемое утверждение. Предположим, что  $x^a y^b \notin A$ , и пусть  $n$  — максимальное такое число, что  $x^{n+a} y^b \notin A$ . Тогда для всех  $0 \leq i \leq b$  имеем

$$(x^{n+a+i} y^{b-i})^b = x^d (x^{n+a+1} y^b)^{b-i},$$

где

$$d = b(n+a+i) - (b-i)(n+a+1) = b(i-1) + i(n+a+1),$$

и, следовательно,  $x^{n+a+i}y^{b-i} \in A$  для  $i > 0$ . Соотношение

$$x^n P = x^{n+a}y^b + \sum_{i>0} a_i x^{n+a+i}y^{b-i} \in A$$

приводит к противоречию.

**13.** Подойдет  $A = \mathbb{K}[x_1, x_2]/(x_1^2)$ ,  $\deg x_1 = 0$ ,  $\deg x_2 = 1$ .

**14.** Данный пример взят из работы [20]. Рассмотрим подалгебру  $A$  в  $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ ,

$$\deg x_1 = \deg x_2 = \deg x_3 = 1,$$

порожденную элементами  $x_1^2, x_2^2, x_3^4, x_1x_2$ . Тогда

$$A = \mathbb{K}[x_1^2, x_2^2, x_3^4] \oplus x_1x_2\mathbb{K}[x_1^2, x_2^2, x_3^4]$$

и

$$P(A, t) = \frac{1}{(1-t^2)^2(1-t^4)} + \frac{t^2}{(1-t^2)^2(1-t^4)} = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2(1-t^4)} = \frac{1}{(1-t^2)^3}.$$

Компонента  $A_2$  порождена элементами  $x_1^2, x_2^2, x_1x_2$ , они алгебраически зависимы, поэтому алгебра  $A$  не может быть порождена тремя алгебраически независимыми элементами степени 2.

**15.** Если между  $a_1, \dots, a_n$  имеется полиномиальное соотношение, то каждая однородная компонента этого соотношения также является соотношением. С другой стороны, если между  $a_1, \dots, a_n$  имеется соотношение степени  $d$ , то размерность компоненты  $A_d$  меньше размерности компоненты  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_d$ , где  $\deg x_i = d_i$ .

**16.** Пусть  $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots = \frac{b_0 + b_1t + \dots + b_mt^m}{c_0 + c_1t + \dots + c_nt^n}$ .

Тогда при  $N > \max(n, m)$  имеем  $a_Nc_0 + a_{N-1}c_1 + \dots + a_{N-n}c_n = 0$  и

$$|a_N| \leq \left| \frac{a_{N-1}c_1 + \dots + a_{N-n}c_n}{c_0} \right| \leq qn \max(|a_{N-1}|, \dots, |a_{N-n}|),$$

где  $q$  — константа. Таким образом, последовательность  $\{a_i\}$  растет не быстрее геометрической прогрессии. Рассмотрите алгебру  $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots]$  многочленов от счетного числа переменных, в которой число образующих степени  $n$  равно  $n!$  для каждого натурального  $n$ .

**17.** Для алгебры  $A = \mathbb{K}[x, xy, xy^2, xy^3, \dots]$ ,  $\deg x = \deg y = 1$ , ряд Пуанкаре имеет вид

$$P(A, t) = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{t}{1-t} = \frac{1-t+t^2}{(1-t)^2}.$$

В качестве примера конечно порожденной алгебры с тем же рядом Пуанкаре можно рассмотреть подалгебру  $\mathbb{K}[x, y^2, x^2y] = \mathbb{K}[x, y^2] \oplus x^2y\mathbb{K}[x, y^2]$  в алгебре  $\mathbb{K}[x, y]$ , где  $\deg x = \deg y = 1$ .

**18.** Воспользуйтесь индукцией по степени многочлена. Для целозначного многочлена  $F(x)$  многочлен  $(\nabla F)(x) = F(x) - F(x-1)$  является целозначным и имеет меньшую степень. С другой стороны,  $F(x-1) = F(x) - (\nabla F)(x)$ .

**19.** Проведем индукцию по степени  $d$ . При  $d = 0$  многочлен является целой константой. При  $d \geq 1$  рассмотрим многочлен  $(\nabla F)(x) = F(x) - F(x-1)$ . Этот многочлен также целозначный, и его степень ниже степени многочлена  $F(x)$ . Многочлен однозначно определяется своими значениями в целых точках, поэтому  $F(x)$  восстанавливается по целому числу  $F(0)$  и многочлену  $(\nabla F)(x)$ . По предположению индукции  $(\nabla F)(x)$  имеет требуемый вид. Остается заметить, что  $\nabla C_x^s = C_{x-1}^{s-1}$ .

**20.** Повторите доказательство теоремы 2 для представления

$$P(A, t) = \frac{g(t)}{(1-t)^{n-r}}.$$

**21.** Имеем

$$\begin{aligned} P(A, t) &= \frac{1}{(1-t)^4} - \frac{t^d}{(1-t)^4} = \\ &= \frac{1-t^d}{(1-t)^4} = (1+t+\dots+t^{d-1}) \left( \sum_{s \geq 0} \frac{(s+2)(s+1)}{2} t^s \right), \end{aligned}$$

следовательно,

$$H(x) = \frac{1}{2}((x+1)(x+2) + x(x+1) + \dots + (x-d+2)(x-d+3)).$$

**22.** Достаточно рассмотреть алгебру, у которой  $p_s$  образующих степени  $s$  и произведение любых образующих равно нулю.

**23.** а) См. решение предыдущей задачи.

б) Найдите последовательность, которая растет быстрее последовательности размерностей компонент любой конечно порожденной алгебры. Например, подходит последовательность

$$p_0 = p_1 = 1, \quad p_s = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} p_k p_{s-k} + 1.$$

**24.** Поскольку  $p_1 = 2$ , наша алгебра является факторалгеброй алгебры многочленов от двух переменных. Условие  $p_2 = 2$  показывает, что есть соотношение степени 2. Следовательно, есть два соотношения степени 3 (они получаются умножением соотношения степени 2 на образующие), и поэтому  $p_3 \leq 2$ .

**25.** Нет, рассмотрите последовательность 1, 3, 3, 4.

26. Нет,

$$p_5 = 152 = C_9^5 + C_6^4 + C_5^3 + C_2^2 + C_0^1,$$

и

$$p_5^{(5)} = C_{10}^6 + C_7^5 + C_6^4 + C_3^3 + C_1^2 = 247 < p_6 = 248.$$

27. Линейная оболочка одночленов из  $\mathcal{P} = \mathcal{M} \setminus (\bigcup_{s=0}^{\infty} \mathcal{M}_{p_s}^s)$  является идеалом. Поскольку любой полиномиальный идеал конечно порожден, найдется такое  $m \in \mathbb{N}$ , что  $\mathcal{P}_{s+1} = x_1 \mathcal{P}_s \cup \dots \cup x_n \mathcal{P}_s$  для всех  $s \geq m$ . Элементы  $\mathcal{P}_{s+1}$  образуют конечный отрезок множества одночленов степени  $s+1$  в лексикографическом порядке, и первый элемент этого отрезка равен  $x_n w$ , где  $w$  — первый элемент из  $\mathcal{P}_s$ . Остается воспользоваться леммой 3.

28. Рассмотрим число  $m$  из предыдущей задачи. Пусть

$$p_m = C_{k(m)}^m + \dots + C_{k(1)}^1.$$

Тогда при  $s \geq m$  имеем

$$\begin{aligned} p_s &= C_{k(m)+s-m}^{s-1} + C_{k(m-1)+s-m}^{s-2} + \dots + C_{k(1)+s-m}^{s-m+1} = \\ &= C_{k(m)+s-m}^{k(m)-m} + C_{k(m-1)+s-m}^{k(m-1)-m+1} + \dots + C_{k(1)+s-m}^{k(1)-1}. \end{aligned}$$

Остается положить  $a_i = k(m+n-i) - (m+1-i)$ .

Заметим, что мы получили новое доказательство теоремы 2.

29. Для числа  $p_m$   $m$ -разложение Маколея имеет вид

$$p_m = C_m^m + C_{m-1}^{m-1} + \dots + C_j^j + C_{j-2}^{j-1} + \dots + C_0^1,$$

где  $j = m - p_m + 1$ . Тогда  $p_m^{(m)} = p_m \geq p_{m+1}$ . В частности,  $p_{m+1} \leq m+1$ , и это рассуждение можно повторять.

30. Многочлен  $x_2 = \frac{x_1 x_2}{x_1}$  также инвариантен.

31. Согласно следствию 1 достаточно проверить, что линейная оболочка указанных элементов совпадает с пространством инвариантов степени не выше  $|G|$ . Это следует из линейности проектора  $P$ .

32. Приведенное в тексте доказательство проходит над любым алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Значит, следствие 1 справедливо над алгебраическим замыканием  $\overline{\mathbb{K}}$  поля  $\mathbb{K}$ . Пусть  $f_1, \dots, f_s$  — многочлены степени не выше  $|G|$ , которые порождают алгебру  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ . Поскольку у  $f_1, \dots, f_s$  число коэффициентов конечно, эти многочлены определены над конечно порожденным (и потому конечным; см. [3, гл. 9, § 5]) расширением  $\mathbb{K}_1$  поля  $\mathbb{K}$ . Зафиксируем (конечный) базис поля  $\mathbb{K}_1$  как векторного пространства над  $\mathbb{K}$  и разложим коэффициенты элементов  $f_1, \dots, f_s$  по этому базису. Многочлен, члены которого совпадают с членами многочлена  $f_i$ , а коэффициенты являются коэффициентами нашего разложения при данном базисном векторе, назовем компонентой многочлена  $f_i$ . Каждая

компонента является элементом алгебры  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Поскольку  $G$  — это подгруппа в  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ , компоненты инвариантного многочлена также инвариантны. Проверьте, что компоненты многочленов  $f_1, \dots, f_s$  порождают алгебру  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ .

**33.** Пусть многочлен  $f(x_1, \dots, x_n)$  является  $A_n$ -инвариантным и  $\sigma$  — нечетная подстановка. Тогда

$$f = \frac{f + (\sigma \cdot f)}{2} + \frac{f - (\sigma \cdot f)}{2}.$$

Проверьте, что первое слагаемое  $S_n$ -инвариантно, а второе обладает свойством  $\sigma \cdot h = (\text{sgn } \sigma)h$ . Каждый многочлен с этим свойством меняет знак под действием транспозиции  $(ij)$ , поэтому равен нулю на гиперплоскости  $x_i = x_j$ , и, значит, делится на  $x_i - x_j$ . Поэтому  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^{A_n}$  порождается многочленом  $\prod_{i>j} (x_i - x_j)$  и элементарными симметрическими многочленами. Отметим, что это решение подходит для любого поля, характеристика которого отлична от двух.

**34.** Предположим, что группа  $G$  действует на  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , умножая переменные  $x_1, \dots, x_n$  на некоторые константы. Докажите, что подалгебра инвариантов мономиальна. В данном случае условие инвариантности одночлена  $x_1^{i_1} x_2^{i_2}$  — это условие делимости  $k(i_1 + i_2)$  на  $n$ . Пусть наибольший общий делитель чисел  $k$  и  $n$  равен  $d$ . Тогда алгебра инвариантов порождается одночленами  $x_1^{i_1} x_2^{i_2}$ , где  $i_1 + i_2 = \frac{n}{d}$ .

**35.** Условие инвариантности одночлена:  $k(i_1 - i_2)$  делится на  $n$ . Поэтому алгебра инвариантов порождается одночленами  $x_1 x_2, x_1^s$  и  $x_2^s$ , где  $s = \frac{n}{d}$  и  $d$  — наибольший общий делитель чисел  $k$  и  $n$ .

**36.** Рассмотрим алгебру многочленов с комплексными коэффициентами  $\mathbb{C}[x_1, x_2] = \mathbb{R}[x_1, x_2] \oplus i\mathbb{R}[x_1, x_2]$ , на которую  $G$ -действие продолжается по линейности. Положим  $z = x_1 + ix_2$  и  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ . Ясно, что  $\mathbb{C}[x_1, x_2] = \mathbb{C}[z, \bar{z}]$  и  $G$  действует как  $z \rightarrow \varepsilon z$ ,  $\bar{z} \rightarrow \bar{\varepsilon} \bar{z}$ , где  $\varepsilon$  — первообразный корень третьей степени из единицы. Отсюда следует, что алгебра инвариантов  $\mathbb{C}[z, \bar{z}]^G$  порождается многочленами  $z\bar{z}, z^3$  и  $\bar{z}^3$ . Значит,  $\mathbb{R}[x_1, x_2]^G$  порождается действительными и мнимыми частями этих многочленов, т. е.  $x_1^2 + x_2^2, x_1^3 - 3x_1x_2^2$  и  $x_2^3 - 3x_1^2x_2$ .

**37.** Напомним, что алгебра  $A$  является *целой* над своей подалгеброй  $B$ , если для любого  $a \in A$  найдутся такое натуральное  $n$  и такие элементы  $b_1, \dots, b_n \in B$ , что  $a^n + b_1 a^{n-1} + \dots + b_n = 0$ . Каждый элемент  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  является корнем уравнения  $\prod_{g \in G} (X - (g \cdot f)) = 0$ , поэтому для конечной группы  $G$  алгебра  $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  является *целой* над  $B = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ . Пусть  $B'$  — подалгебра в  $B$ , порожденная коэффициентами  $b_i$  уравнений, которым удовлетворяют элементы

$x_1, \dots, x_n$ . Тогда образующие алгебры  $A$  являются целыми над  $B'$ , а значит, и вся алгебра  $A$  является целой над  $B'$ ; см. [3, гл. 9, § 5]. Следовательно,  $A$  — конечно порожденный  $B'$ -модуль, и подмодуль  $B$ , как подмодуль конечно порожденного модуля, конечно порожден над  $B'$ . В частности,  $B$  — конечно порожденная алгебра.

Эти рассуждения составляют третье доказательство теоремы 6, которое не зависит от характеристики поля  $\mathbb{K}$ .

Ответ на последний вопрос отрицателен. Предположим, что характеристика поля  $\mathbb{K}$  равно двум. Рассмотрим действие группы  $G$  из двух элементов на алгебре  $\mathbb{K}[x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3]$ , где неединичный элемент действует как

$$\begin{aligned}x_1 &\rightarrow x_1 + y_1, & y_1 &\rightarrow y_1, \\x_2 &\rightarrow x_2 + y_2, & y_2 &\rightarrow y_2, \\x_3 &\rightarrow x_3 + y_3, & y_3 &\rightarrow y_3.\end{aligned}$$

Инварианты первой степени — это линейная оболочка элементов  $y_1, y_2$  и  $y_3$ . Проверьте, что никакой инвариант второй степени не содержит член  $x_1x_2$ . Значит, инвариант

$$x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3$$

нельзя выразить через инварианты первой и второй степени.

**38.** Пусть  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$  и  $f = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$  — разложение на неприводимые множители в алгебре  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Рассмотрим представители  $p_{1i} = p_1, p_{12}, \dots, p_{1r}$  классов пропорциональности множества многочленов  $\{g \cdot p_1 : g \in G\}$ . Многочлены  $p_{1i}$  неприводимы,  $f$  делится на каждый из них и поэтому делится на  $P_1 = p_{11}p_{12} \dots p_{1r}$ . Аналогично определяются  $P_2, \dots, P_m$ . Поскольку эти многочлены либо пропорциональны, либо взаимно просты, многочлен  $f$  есть произведение многочленов такого вида. Проверьте, что  $g \cdot P_i = \alpha_i(g)P_i$ , где  $\alpha_i(g) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Тогда  $\alpha_i : G \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$  — гомоморфизм групп. В силу совпадения  $G$  со своим коммутантом такой гомоморфизм тривиален, и, значит, все многочлены  $P_i$  являются инвариантами. Проверьте, что  $P_i$  — простые элементы в  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ . Наконец, для любого разложения  $f$  на простые множители в  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$  один из множителей делится на  $p_1$ , а поэтому и на  $P_1$ .

Обратное утверждение неверно: рассмотрите действие группы из двух элементов на  $\mathbb{K}[x]$ ,  $x \rightarrow -x$ .

**39.** Приведенное доказательство проходит над алгебраическим замыканием  $\bar{\mathbb{K}}$  поля  $\mathbb{K}$ . Покажите, что

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_m^G = \dim_{\bar{\mathbb{K}}} \bar{\mathbb{K}}[x_1, \dots, x_n]_m^G$$

для любой подгруппы  $G \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{K}) \subseteq \text{GL}_n(\bar{\mathbb{K}})$ .

40. Ответ:  $\frac{(k^2 - 1)(k^2 + 11)}{720}$ .

41. Пусть инвариантный многочлен  $F$  зависит от  $x_i$ . Тогда

$$F = a_k x_i^k + \dots + a_1 x_i + a_0,$$

где  $a_k, \dots, a_1, a_0$  — многочлены, не зависящие от  $x_i$ . В силу инвариантности  $F$  относительно преобразования  $x_i \rightarrow x_i + c_i y_i$  получаем

$$c_i^k y_i^k a_k + \dots + c_i y_i a_1 + a_0 = a_0.$$

Значит, многочлены  $y_i^{k-1} a_k, \dots, a_1$  линейно зависимы с коэффициентами  $c_i^{k-1}, \dots, 1$ . Выбирая  $k$  различных ненулевых значений  $c_i$  и используя формулу для определителя Вандермонда, получаем  $a_k = \dots = a_1 = 0$ , что противоречит нашему предположению.

42. Пусть  $s_0, s_1, \dots, s_k$  — конечная система порождающих. Можно считать, что все они однородны и  $A_{(3b,b)} = \langle s_0^b \rangle$ . Для однородного элемента  $s \in A_{(a,b)}$  определим функцию  $l(s) := a - 3b$ . Тогда  $l(s_1) > 0, \dots, l(s_k) > 0$ . Если  $s_j \in A_{(a_j, b_j)}$ , то зафиксируем  $b > \max(b_1, \dots, b_k)$  и рассмотрим элемент  $x \in A_{(3b+1,b)} \setminus A_{(3b-2,b-1)} A_{(3,1)}$ . В выражение  $x$  через  $s_0, s_1, \dots, s_k$  входит член  $x' = \lambda s_1^{p_1} \dots s_k^{p_k}$ , не зависящий от  $s_0$ . Тогда

$$l(x) = 1 = l(x') = p_1 l(s_1) + \dots + p_k l(s_k),$$

откуда ровно одно  $p_i$  равно 1, а прочие равны нулю. Это приводит к противоречию с выбором  $b$ .

43. Предположим, что алгебра  $\mathbb{K}[V]^G$  конечно порождена. Действия групп  $G$  и  $T$  на алгебре многочленов перестановочны. Значит,  $t \cdot f \in \mathbb{K}[V]^G$  для любых  $t \in T$  и  $f \in \mathbb{K}[V]^G$ , и  $(\mathbb{K}[V]^G)^T = \mathbb{K}[V]^H$ . Если мы докажем, что для любой конечно порожденной  $T$ -инвариантной подалгебры  $A$  в алгебре многочленов алгебра инвариантов  $A^T$  конечно порождена, то получим противоречие с теоремой 8.

На первом этапе доказательства надо показать, что в  $A$  можно выбрать систему образующих, каждый из которых является  $T$ -собственным вектором. После этого алгебру  $A$  можно заменить на алгебру многочленов  $B$ , в которой переменные биективно соответствуют образующим алгебры  $A$  и  $T$ -действие на переменные совпадает с  $T$ -действием на образующие алгебры  $A$ . Алгебра  $B^T$  есть линейная оболочка одночленов, являющихся  $T$ -собственными векторами с собственным значением 1. Конечную порожденность такой алгебры можно вывести из леммы Гордана, которая утверждает, что моноид целых точек, лежащих в выпуклом рациональном полиэдральном конусе, конечно порожден.

# Предметный указатель

- Алгебра 8
  - градуированная 8
  - конечно порожденная 11
  - свободная 13
  - стандартная 11
  - целая над подалгеброй 58
  - целозамкнутая 14
- Базис Гильберта 14
- Биномиальный коэффициент 23
- Гомоморфизм алгебр 11
- Градуировка 8
  - весовая 9
  - тривиальная 8
- Делитель нуля 9
- Идеал 10
  - лексегментный 4
- Компонента
  - градуированной алгебры 8
  - элемента 9
- Лексикографический порядок 21
- Лемма Гордана 60
- Минимальная система порождающих 12
- Многочлен
  - Гильберта стандартной алгебры 19
  - инвариантный 35
  - Лорана 15
  - симметрический 36
  - целозначный 18
  - элементарный симметрический 36
- Модуль 17
  - градуированный 17
  - конечно порожденный 17
  - Моноид 14
- Нормальная форма элемента 22
- Подалгебра 10
  - мономиальная 13
  - однородная 10
- Подмодуль 17
- Подмножество
  - насыщенное 15
  - одночленов нормальное 21
  - сжатое 27
  - $i$ -сжатое 28
- Подпространство
  - однородное 9
- Поле частных 13
- Порождающие
  - алгебры 11
  - идеала 10
- Порядок нуля многочлена 46
- Проблема
  - 14-я Гильберта 5
  - линеаризации 53
  - сокращения 53
- Ряд Пуанкаре
  - градуированной алгебры 16
  - градуированного модуля 17
- Теорема
  - Гильберта о базисе 11
  - Гильберта—Серра 17
  - Грина 31
  - Маколея комбинаторная 27
  - Маколея—Макмюллена—Стенли 25
  - Нагаты—Стейнберга 44
  - основная о симметрических многочленах 36

Факторалгебра 10  
Формула Молина 40

Характеристика поля 36

Элемент  
— нильпотентный 9  
— обратимый 9  
— однородный 8

Элементы алгебраически  
независимые 13

$d$ -разложение Маколея 23  
 $d$ -коэффициенты Маколея 23  
 $t$ -разрежение градуированной  
алгебры 13  
 $M$ -градуировка 49  
 $O$ -последовательность 22

## Литература

1. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
2. Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.
3. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2002.
4. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов. Итоги науки и техники // Совр. проб. математики, фонд. направления. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137—309.
5. Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1—2. М.: Факториал, 1998.
6. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.
7. Спрингер Т. Теория инвариантов. М.: Мир, 1981.
8. Хованский А. Г., Чулков С. П. Геометрия подгруппы  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Приложения к комбинированной алгебре и дифференциальным уравнениям. М.: МЦНМО, 2006.
9. Arzhantsev I. V. Algebras with finitely generated invariant subalgebras // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 2003. Vol. 53, № 2. P. 379—398.
10. Bruns W., Herzog J. Cohen-Macaulay Rings. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. (Cambridge Studies in Adv. Math.; Vol. 39).
11. Clements G. F., Lindström B. A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay // J. Combin. Theory. 1969. Vol. 7. P. 230—238.
12. Green M. Restrictions of linear series to hyperplanes, and some results of Macaulay and Gotzmann / Eds. E. Ballico, C. Ciliberto // Algebraic curves and projective geometry. Berlin: Springer, 1989. (Lecture Notes in Math.; Vol. 1389). P. 76—86.
13. Koras M., Russell P. Linearization problems // Algebraic group actions and quotients / Ed. J. Wiśniewski. Hindawi Publ. Corp., 2004. P. 91—107.
14. Macaulay F. S. Some properties of enumeration in the theory of modular systems // Proc. London Math. Vol. 26. Soc. 1927. P. 531—555.
15. McMullen P. The number of faces of simplicial polytopes // Israel J. Math. 1971. Vol. 9. P. 559—570.
16. Molien T. Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen. Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss., 1897. P. 1152-1156. (Русский перевод: Молин Ф. Э. Числовые системы. Новосибирск: Наука, 1985. С. 105—109.)
17. Nagata M. On the fourteenth problem of Hilbert // Proc. Internat. Congress Math. 1958. New York: Cambridge University Press, 1960. P. 459—462.
18. Nagata M. On the fourteenth problem of Hilbert // Amer. J. Math. 1959. Vol. 81. P. 766—772.
19. Stanley R. Hilbert functions of graded algebras // Adv. Math. 1978. Vol. 28. P. 57—83.
20. Stanley R. Invariants of finite groups and their applications to combinatorics // Bull. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 1. P. 475—511.
21. Steinberg R. Nagata's example // Algebraic Groups Lie Groups. Cambridge University Press, 1997. (Austral. Math. Soc. Lecture Series; Vol. 9). P. 375—384.

Учебное пособие для вузов

*Иван Владимирович Аржанцев*

ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ И 14-Я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

Подписано в печать 02.09.2019 г. Формат  $60 \times 90 \frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 4. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии ООО «Принт сервис групп»,

тел./факс: (499) 785-05-18, e-mail: 3565264@mail.ru, www.printsg.ru

105187, г. Москва, Борисовская ул., д. 14, стр. 6.

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mcsme.ru

---