Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2005

Ю. С. Ильяшенко

Эволюционные процессы и философия общности положения

Москва, 2007
Издательство МЦНМО

УДК 517.938.5
ББК 22.152+22.161.6
И49

Проведение летних школ «Современная математика» и издание её материалов было бы невозможно без поддержки Московской городской Думы и Департамента образования г. Москвы, а также без поддержки фонда «Династия», фирмы «НИКС» и корпорации Boeing.

Ильяшенко Ю. С.

И49 Эволюционные процессы и философия общности положения. — М.: МЦНМО, 2007.— 32 с.

ISBN 978-5-94057-353-1

Брошюра написана по материалам лекций, прочитанных автором в Летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2005 г. В первой части описывается возможное поведение типичных динамических систем на плоскости и двумерной сфере, т. е. рассматривается вопрос о том, куда могут накапливаться траектории динамической системы. Вторая часть брошюры рассказывает о том, что многомерный случай принципиально отличается от двумерного — анализируется пример отображения (подкова Смейла) со счётным числом периодических орбит, не исчезающих при малом возмущении.

От читателя не потребуется никаких знаний из теории дифференциальных уравнений, предполагается лишь знакомство с понятием производной. Брошюра адресована старшим школьникам и студентам.

ББК 22.152+22.161.6

Юлий Сергеевич Ильяшенко

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ И ФИЛОСОФИЯ ОБЩНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ

Редакторы: *В. Клепцын, Д. Вельтищев*
Тех. редактор: *М. Вельтищев*
Обложка: *М. Вельтищев*

Издательство Московского Центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 18.12.2007 г.
Формат 60 × 88/16. Печать офсетная. Печ. л. 2,00. Тираж 1000 экз. Заказ №

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга».
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241–72–85.
Адрес в Internet: `http://biblio.mccme.ru`. E-mail: `biblio@mccme.ru`.

ISBN 978-5-94057-353-1
9 785940 573531

Как устроен мир?

Мы будем говорить о динамических системах и философии общего положения. Начнём с динамических систем. Исаак Ньютон был первым человеком, который осознал, что эволюционные процессы, происходящие в мире повсюду вокруг нас, подчиняются дифференциальным уравнениям. Он придумал математический анализ (производные, ряды) главным образом для того, чтобы составлять и решать дифференциальные уравнения, в частности, вычислить орбиты планет. Кеплер понял, что орбиты являются эллипсами (изучая поправки в астрономических таблицах), а Ньютон это аналитически доказал. Сейчас мы на нескольких примерах попробуем объяснить, что эволюционные процессы вокруг нас описываются дифференциальными уравнениями. Мы будем предполагать, что читатель знаком с понятием производной.

Представим себе, вслед за Ньютоном, движение планет вокруг Солнца. Для простоты, забудем про все планеты, притягивающие друг друга, и будем думать, что существует только одна планета — точка, которая летает вокруг Солнца. В каждый момент времени у этой планеты есть *состояние* — то, что характеризует её мгновенное положение. Наше пространство трёхмерно, и для того, чтобы указать положение планеты в выбранной системе координат, нам нужно три числа. Однако состояние движущейся планеты не характеризуется только этими тремя числами. Кроме положения в пространстве, нам нужно знать её скорость. Скорость — это вектор в трёхмерном пространстве, у него есть три координаты — ещё три числа. Итак, положение и скорость — это шесть параметров. Возникает естественный вопрос: быть может, нужно задать ещё и ускорение? Как мы знаем, ускорение — это скорость изменения скорости. Здесь вступает в действие закон Ньютона (на самом деле открытый ещё Галилеем), который состоит в том, что ускорение пропорционально равнодействующей всех сил, которые действуют на тело. Если речь идёт о планете, то эта сила определяется законом Всемирного тяготения, то есть силой притяжения этой планеты к Солнцу. По закону обратных квадратов, сила, с которой Солнце притягивает планету, обратно пропорциональна квадрату расстояния до Солнца и прямо пропорциональна массе планеты. Масса планеты известна, поэтому, зная о том, где находится планета, ускорение можно найти исходя из второго закона Ньютона.

К сожалению, мы не располагаем в брошюре достаточным местом, чтобы до конца решить эту задачу, но вместо этого скажем следующее. Если мы знаем положение и скорость планеты (шесть чисел), то мы знаем (тем лучше, чем меньше интервал времени наблюдения), какими они будут через маленький интервал времени наблюдения. Именно, скорость определит новое положение через маленький интервал времени наблюдения, а ускорение определит новую скорость. Что касается самого́ ускорения, то, как уже было сказано, оно определяется силой, а в конечном счёте — положением планеты. Если всё сказанное превратить в формулу, то получится дифференциальное уравнение, но мы его здесь выписывать не будем.

Итак, очень огрублённый, но и очень содержательный ответ на вопрос «Как устроен мир?» таков: «Мир (эволюционных процессов) описывается дифференциальными уравнениями». [Да простит нас теория вероятностей...]

1. Динамические системы на плоскости

1.1. Грузик на пружинке

Мы сейчас рассмотрим другой пример эволюционного процесса, для которого нам удастся написать дифференциальное уравнение. Предположим, что на пружинке закреплён груз. Пружинка насажена на стержень, так что груз может двигаться только горизонтально вдоль прямой (рис. 1). Он может колебаться на стержне, и его положение в момент времени t на оси x — это одно число $x(t)$.

Выберем систему координат так, чтобы в нерастянутом состоянии грузику соответствовало нулевое положение. Верно ли, что когда пружинка растянута, то состояние груза определяется его положением? Можем ли мы, посмотрев на картинку, сказать, как будет двигаться груз? Нет, например, мы даже не можем ответить, глядя на неё, движется ли он вправо или влево. Как и в предыдущем примере, чтобы полностью задать состояние, нам нужно не только положение, но и скорость. Значит, состояние — это пара $(x(t), \dot{x}(t))$.

Здесь следует сделать небольшое отступление об обозначениях. Есть несколько устоявшихся обозначений. Во-первых, независимую переменную очень часто обозначают через x: в школе, на первом курсе... Потом начинается второй курс, а с ним курс дифференциальных уравнений, иногда одновременно начинается курс теоретической механики, и тут происходит революционное изменение: независимую переменную начинают обозначать через t (символизируя время), а неизвестную

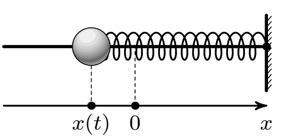

Рис. 1

функцию (положение) часто обозначают через x. Ещё одно революционное изменение в обозначениях состоит в том, что вместо $\frac{dx}{dt}$ или $x'(t)$ начинают писать $\dot{x}(t)$. Одна точка соответствует первой производной по времени, две точки — второй производной, и так далее.

Итак, пружинка возвращает груз к его прежнему положению. По закону Гука сила, с которой пружинка действует на груз, пропорциональна отклонению (то есть пропорциональна x) и направлена противоположно отклонению. Значит, уравнение движения груза на пружине таково:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x,$$

где m — масса груза, а k — коэффициент упругости. Будем считать, что система единиц выбрана так, что $\frac{k}{m} = 1$, то есть будем обсуждать уравнение $\ddot{x} = -x$.

Угадаем ответ: непосредственной подстановкой в уравнение легко проверить, что функции

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, являются решениями. То, что других решений у этого уравнения не существует, доказывается с помощью теоремы единственности, которую мы сформулируем позже, в §1.3.

Несложно показать, что семейство решений этого уравнения может быть записано в виде

$$x(t) = A \sin(t - \alpha),$$

где A и α — произвольные постоянные. Мы видим, что движение грузика по оси x происходит периодически с периодом 2π. Здесь A — амплитуда, то есть максимальное отклонение, соответствующее значениям синуса, равным ± 1, а α отвечает за смещение «фазы» колебаний. Итак, в момент времени $t = \alpha$ грузик проходит через нулевое положение и затем с периодом 2π туда возвращается (с той же скоростью), а с полупериодом π проходит это положение равновесия с противоположной скоростью.

1.2. Дифференциальные уравнения и геометрия

Продолжая анализ примера с грузиком на пружинке, мы поговорим о связи дифференциальных уравнений и геометрии. Состояние частицы (состояние грузика) — это положение и скорость. Обозначим $p = \dot{x}$, тогда состояние будет парой чисел (x, p). Тогда наше дифференциальное уравнение второго порядка (то есть с производной второго порядка по времени) $\ddot{x} = -x$ превратится в систему двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad p, \\ \dot{p} = -x. \end{cases} \tag{1}$$

На плоскости (x, p) появляется так называемое *векторное поле*: в каждой точке (x, p) задан вектор $v(x, p)$, а именно, $v(x, p) = (p, -x)$. И система (1) равносильна тому, что в каждый момент времени t вектор скорости $(\dot{x}(t), \dot{p}(t))$ совпадает с вектором поля в этой точке (рис. 2).

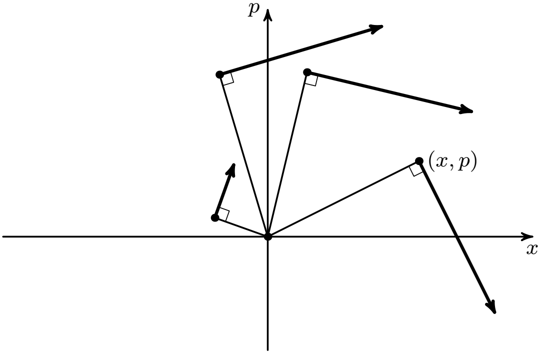

Рис. 2

Отметим, что в результате задача восстановления одномерного движения грузика на пружинке оказалась эквивалентной задаче о восстановлении траектории частицы в установившемся течении «жидкости» с известным полем скоростей.

Итак, наша задача — *найти закон движения точки* (x, p) *под действием системы* (1)*, то есть найти* $(x(t), p(t))$. Это аналитическая постановка задачи. Оказывается, её можно переформулировать на геометрическом языке следующим образом: *нарисовать кривые, которые в каждой своей точке касаются вектора* $(p, -x)$*, то есть нашего векторного поля*.

Несложно увидеть, что если мы умеем решать задачу в аналитической постановке, то мы умеем решать её и в геометрической постановке. Действительно, зная решение, мы можем, не рисуя осú‌ t, нарисовать на плоскости множество точек $(x(t), p(t))$. С другой стороны, когда точка движется по некоторой кривой, то её вектор скорости касается этой кривой. Поэтому нарисованная нами кривая будет обладать описанным выше геометрическим свойством: в каждой своей точке она касается соответствующего вектора $v(x, p)$.

То, что по решению геометрической задачи можно восстановить решение аналитической, мы обсудим чуть ниже.

В данном частном случае нам нужны кривые, которые касаются векторного поля $(p, -x)$. Если же мы рассматриваем другой эволюционный процесс, то система будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, p), \\ \dot{p} = g(x, p), \end{cases} \tag{2}$$

где f и g — некоторые функции от x, p. Но и в общем случае наша геометрическая задача будет ставиться точно так же (найти кривые, касающиеся векторного поля $v = (f, g)$) и по тем же соображениям будет «не сложнее» аналитической.

В нашем случае, когда поле имеет вид $v(x, p) = (p, -x)$, ответ получается из элементарной геометрии. Действительно, векторное поле v очень просто задаётся геометрически: его вектор в точке (x, p) получается из радиус-вектора этой точки поворотом на $90°$ по часовой стрелке. Значит, мы ищем кривые, касательные к которым перпендикулярны соответствующим радиус-векторам. Теперь ответ несложно угадывается — это окружности с центром в начале координат (рис. 3).

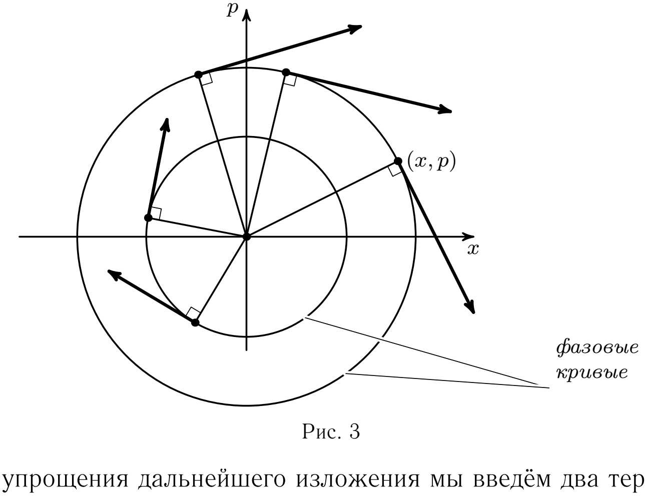

Рис. 3

Для упрощения дальнейшего изложения мы введём два термина:

Определение. Кривые, которые касаются в каждой точке данного векторного поля, называются *фазовыми кривыми* или *орбитами*, а пространство, точки которого изображают состояния процесса, называется *фазовым пространством*.

Итак, геометрия помогла нам найти фазовые кривые в задаче о грузике на пружине. Решим теперь соответствующую аналитическую задачу. Заметим, что пока точка движется по окружности, расстояние от неё до нуля не меняется, значит, не меняется длина радиус-вектора, значит, не меняется длина вектора скорости. Значит, движение по окружности происходит с постоянной по модулю скоростью, и эта скорость равна радиусу окружности. То есть угловая скорость постоянна и равна единице (точнее, минус единице, поскольку движение происходит по часовой стрелке). Значит, закон движения имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\alpha - t), \\ p(t) = A\sin(\alpha - t). \end{cases}$$

В частности, любая из окружностей пробегается за время 2π.

Как уже было сказано, в более общем случае получается система

$$(\dot{x}, \dot{p}) = v(x, p),$$

где v — вектор на плоскости. Мы уже пояснили, как, зная закон движения $(x(t), p(t))$, получить фазовые кривые. Теперь поясним, почему верно обратное: почему, зная только фазовую кривую, то есть зная, как выглядит множество $(x(t), p(t))$, можно найти функции $x(t)$ и $p(t)$. Иными словами, почему можно восстановить параметризацию заданной фазовой кривой параметром t.

Пусть нам задана фазовая кривая — множество точек $(x(t), p(t))$. Допустим, что ни в какой точке касательная к ней не вертикальна. Тогда эту кривую можно рассматривать как график некоторой гладкой функции $p = h(x)$, то есть $p(t) = h(x(t))$ (строго говоря, мы здесь применяем теорему о неявной функции). Но мы знаем, что $\dot{x}(t) = p(t)$, поэтому получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = h(x).$$

Такие уравнения легко решаются (это так называемое уравнение с разделяющимися переменными, и его решение можно явно выписать), поэтому, решив его, мы найдём $x(t)$, а затем и $p(t)$.

Точно так же можно рассмотреть случай, когда касательные к фазовой кривой не горизонтальны — выражая в этом случае x через p. Наконец, чтобы рассмотреть общий случай, можно разбить кривую на маленькие участки, на каждом из которых нет либо вертикальных, либо горизонтальных касательных. Таким образом, мы восстановили закон движения, зная фазовые кривые.

Пуанкаре первым понял, что дифференциальные уравнения — это ветвь геометрии, и начал развивать теорию дифференциальных уравнений как теорию, находящуюся на стыке геометрии и математического анализа. Из всего сказанного можно сделать очень важный вывод. Если мы рассматриваем дифференциальные уравнения на плоскости, то от уравнения можно перейти к геометрической задаче (нарисовать кривые, которые касаются заданного векторного поля), ответом к которой является геометрическая картинка. Эти картинки и следует затем анализировать.

1.3. Зоопарк фазовых портретов

Для удобства мы сменим обозначения и точку на плоскости (x, p) будем обозначать через x, так что теперь $x \in \mathbb{R}^2$. Мы исследуем задачу

$$\dot{x} = v(x), \tag{3}$$

где v — гладкое векторное поле на плоскости.

Теперь поясним термин, упомянутый в названии этого раздела.

Определение. *Фазовый портрет* — это разбиение фазового пространства на фазовые кривые.

Чтобы понять это определение, нам потребуется фундаментальный факт из теории дифференциальных уравнений:

Теорема 1.1 (существования, единственности и гладкой зависимости). *Если векторное поле v непрерывно дифференцируемо, то через каждую точку проходит одна и только одна орбита; соответствующие траектории дифференцируемым образом зависят от той точки, через которую проходят.*

Точки фазового пространства — это состояния системы. Из теоремы существования и единственности следует, что любые две траектории в фазовом пространстве либо не пересекаются, либо совпадают (это и означает, что фазовое пространство *разбивается* на фазовые кривые). Это обстоятельство оправдывает термин «состояние» для точек фазового пространства: зная то, в каком состоянии находится система в данный момент времени, можно однозначно определить поведение системы в будущем и её поведение в прошлом.

Сейчас мы перейдём к вопросу о том, какими могут быть картинки, то есть фазовые портреты динамических систем.

Даже если векторное поле задано очень простыми формулами, точное рисование фазового портрета, как правило, невозможно: решения соответствующих дифференциальных уравнений обычно нельзя выписать в явном виде, а можно искать лишь приближённо. Поэтому мы будем интересоваться фазовыми портретами лишь с качественной точки зрения — с точностью до диффеоморфизма (деформации) плоскости, на которой этот фазовый портрет нарисован. Для этого мы хотим понять, какие фрагменты фазовых портретов могут нам встретиться, и собрать из них «зоопарк».

Первый простейший зверь в нашем зоопарке — это *особая точка*. Пусть точка a такова, что $v(a) = 0$. Тогда, если $x(0) = a$, то $x(t) \equiv a$. В самом деле, подставляя это решение в уравнение, получаем $\dot{a} = 0 = v(a)$. Точка a называется *особой*, или *состоянием покоя*.

Следующий зверь задаётся уже не формулой, а рисунком (рис. 4). Это *замкнутая фазовая кривая*. Она может быть окружена соседними фазовыми кривыми.

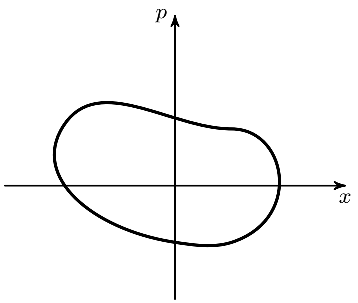

Рис. 4

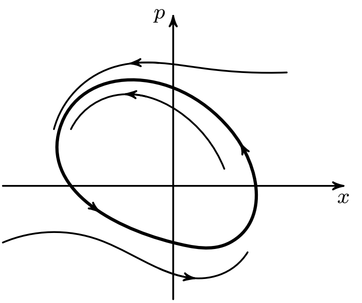

Рис. 5

Направление движения точки по фазовой кривой мы будем отмечать стрелочкой. Если рядом нет других замкнутых фазовых кривых, то эта фазовая кривая называется *предельным циклом*.

Предельные циклы осознал и назвал по имени Пуанкаре, и он же понял ответ на следующий вопрос. Представим себе, что мы наблюдаем реальную систему, которая описывается дифференциальным уравнением вида (3) на плоскости. Как она будет себя вести при $t \to \infty$?

Представим себе, что это уравнение имеет предельный цикл, на который остальные орбиты наматываются, как показано на рис. 5, причём движение по ним происходит довольно быстро.

Пусть мы выбрали начальное условие вблизи предельного цикла. Дифференциальные уравнения моделируются не только реальными процессами, но и на компьютере, так что можно запустить наш компьютер считать, а в это время пойти ужинать. Экран имеет конечную разрешающую способность, и, вернувшись с ужина, мы увидим, что точка $x(t)$

вычерчивает на плоскости в точности наш предельный цикл. В каком-то смысле, на этом кусочке фазового портрета нет ничего интересного, кроме предельного цикла. Итак, для точки, начальное положение которой было близко к предельному циклу, предельное поведение будет периодическим. Совершенно аналогично, если особая точка является притягивающей (то есть к ней сходятся все близкие орбиты), то на картинке рядом с ней, с точки зрения наблюдателя, ничего интересного, кроме самой этой точки, не существует (рис. 6).

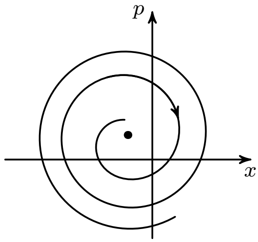

Рис. 6

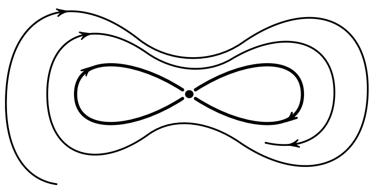

Рис. 7

Как мы уже поняли, нарисовать фазовый портрет — это значит сказать всё о решениях уравнения. Итак, какие же бывают фазовые портреты? Более точно, нас будет интересовать вопрос о предельном поведении орбит.

Рассмотренные только что фрагменты фазовых портретов можно называть ручными зверями нашего зоопарка. Есть ли в нашем зоопарке ещё какие-нибудь звери, более дикие? Сейчас нам разрешено изобретать любые картинки, которые допускаются теоремой существования и единственности. Например, кривая может наматываться на объединение двух петель типа восьмёрки (см. рис. 7).

Это пример дикого животного из нашего зоопарка. Более того, вместо восьмёрки здесь можно нарисовать огромное количество петель (даже счётное число). Тем самым картинки получаются безнадёжно сложные. Есть ли какой-нибудь порядок в этом невероятном разнообразии? Первым, кто «навёл порядок» в динамических системах, был физик А. А. Андронов (1901—1951). Он понял, что дифференциальные уравнения, которые происходят из физики, должны обладать некоторым свойством общности положения: если в физике встретилась какая-либо реальная задача, то со стопроцентной вероятностью в ней не будет никаких явлений типа совпадения независимых величин. Поэтому нужно рисовать не все фазовые портреты, а только фазовые портреты *общего положения*.

Ещё одно замечательное свойство, открытое Андроновым, заключается в том, что все фазовые портреты общего положения обладают некоторыми ключевыми общими свойствами. Об этих свойствах можно говорить ещё *до того*, как написано векторное поле.

Подводя итог всему сказанному выше, мы можем разбить историю развития дифференциальных уравнений на три периода:

- Ньютон: «Дано уравнение. Решить его.»
- Пуанкаре: «Дано уравнение. Описать свойства его решений, не находя их, не пытаясь их вычислить.»
- Андронов: «Не дано дифференциальное уравнение. Описать свойства его решений.»

Последнее нужно понимать в том смысле, как уже было сказано. Уравнения общего положения обладают массой ключевых одинаковых свойств. Эти свойства и надо описывать. Пусть в физической задаче нет специальных условий типа равенства, то есть нет симметрий, нет законов сохранения. Тогда нет оснований полагать, что требования общности положения нарушаются. Описав свойства уравнений общего положения, мы тем самым опишем те эффекты, которые только и могут встретиться в реальных физических процессах. Тем самым, мы получаем теорему, которая выходит за пределы математики, поскольку она объясняет нам, как устроен реальный мир, то есть это физическая теорема.

Теорема 1.2 (Андронов, Понтрягин). *В системе общего положения на плоскости фазовые кривые могут стремиться только к особым точкам и предельным циклам. Более того, почти все траектории стремятся либо к притягивающим особым точкам, либо к притягивающим предельным циклам, либо к бесконечности (рис. 8).*

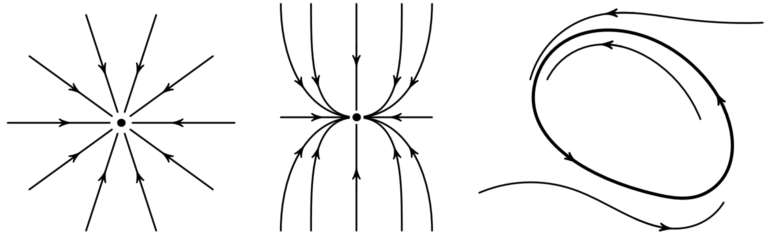

Рис. 8, а) Рис. 8, б) Рис. 8, в)

Скажем несколько слов о могучем физическом смысле этой теоремы. Человек, не заинтересованный в математических деталях, а заинтересованный в вопросе о том, как устроен мир, может интерпретировать эту теорему следующим образом.

Рассмотрим любую физическую систему без каких-либо законов сохранения или симметрий, которая описывает эволюцию состояний, описываемых двумя параметрами (то есть такую, которая соответствует дифференциальному уравнению на плоскости), и заинтересуемся предельным поведением решения. Теорема утверждает, что возможные предельные режимы для систем физического происхождения — это стационарный, когда решения сошлись к особой точке, или периодический. Если, кроме того, выполнены некоторые дополнительные требования типа компактности, а именно, что за пределами некоторого диска векторное поле направлено внутрь этого диска в том смысле, что все начальные условия оно загоняет внутрь диска (такая система называется *диссипативной*), то число стационарных и периодических решений конечно.

Исторически более правильно было бы сказать, что формулировка теоремы 1.2 принадлежит Андронову, а доказательство — Андронову и Понтрягину. Эта теорема содержится в статье Андронова – Понтрягина «Грубые системы», написанной в 1937 году. В нашей брошюре мы не будем говорить о том, что такое *грубая система*. Надо сказать, что теорема 1.2 написана там «между строк»: теоремы с такой формулировкой в статье нет. Однако эта теорема мгновенно следует из того, что там написано.

1.4. Почему верна теорема Андронова?

Далее мы обсудим вопрос о том, *почему теорема Андронова верна*. Мы, конечно, только лишь наметим доказательство, причём очень широким пунктиром, но так, однако, чтобы «подкованный» читатель смог самостоятельно довольно далеко продвинуться в заполнении пробелов.

В доказательстве теоремы Андронова есть два шага. Первым ингредиентом является теорема Пуанкаре – Бендиксона, описывающая возможные предельные множества на плоскости и на двумерной сфере (для которой теорема 1.2 тоже имеет место). Мы уже видели двух ручных зверей в нашем зоопарке предельных множеств и одного дикого зверя («восьмёрку»). На самом деле, как утверждает теорема Пуанкаре – Бендиксона, звери не бывают существенно более дикими, чем те, которых мы уже видели. Здесь мы приведём её приблизительную формулировку, не договаривая некоторых технических деталей.

Теорема 1.3 (Пуанкаре, Бендиксон). *В диссипативной системе на плоскости и в системе на сфере предельное множество любой траектории — это либо особая точка, либо объединение особых точек и соединяющих их сепаратрис.*

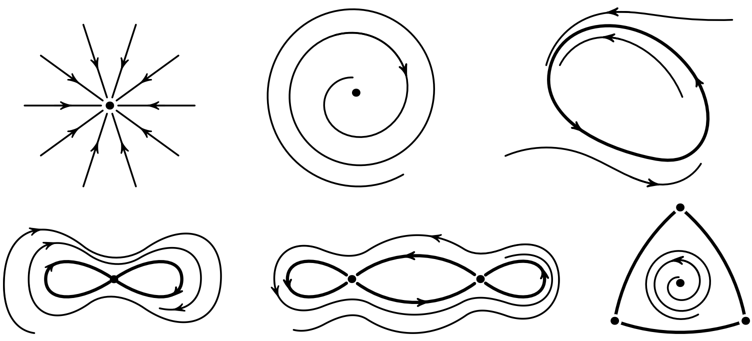

Рис. 9

Изображённые на рис. 9 картинки иллюстрируют возможные варианты поведения диссипативных динамических систем в соответствии с теоремой Пуанкаре – Бендиксона.

Доказательство этой теоремы в качестве одного из соображений использует теорему Жордана — интуитивно очевидный на плоскости и на двумерной сфере факт, при этом неверный уже на торе (не говоря уже о поверхности с большим количеством ручек).

Теорема 1.4 (Жордан). *Простая (то есть не имеющая самопересечений) замкнутая кривая на плоскости или на двумерной сфере разбивает последнюю на две части. Попасть из одной части в другую можно только пересекая кривую, а любые две точки каждой части можно соединить кривой, целиком лежащей в этой части.*

Этот факт применяется в следующей ключевой для доказательства конструкции. Предположим, что траектория проходит дважды в достаточно малой окрестности неособой точки (в которой все векторы поля направлены «более или менее» в одну сторону). Тогда замкнутая кривая, состоящая из отрезка этой траектории от первого входа в окрестность до второго и из короткого отрезка внутри этой окрестности ограничивает *мешок Бендиксона* — область-ловушку, границу которой траектории могут пересекать лишь в одну сторону (см. рис. 10).

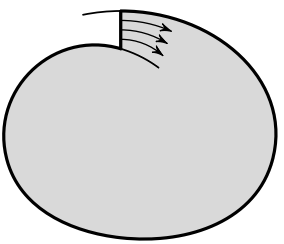

Рис. 10

Тем самым, траектории, входящие извне в мешок Бендиксона, никогда его не покинут. Аккуратное построение мешков, всё более точно ловящих входящую траекторию, вкупе с ещё несколькими аргументами позволяет завершить доказательство. Мы не будем здесь вдаваться в его детали — мы хотели бы лишь подчеркнуть, что теорема Пуанкаре – Бендиксона существенно использует теорему Жордана и неверна уже на торе, где существуют так называемые *иррациональные обмотки*.

Вернёмся к теореме Андронова. Второй ингредиент, необходимый для её доказательства — это следующее соображение. Дело в том, что у системы *общего положения* в принципе не бывает сепаратрисных многоугольников, а, значит, из всего разнообразного зоопарка предельных множеств остаются только особые точки и периодические траектории.

Мы не будем здесь формализовывать понимание термина «система общего положения», отсылая заинтересованного читателя, например, к книге В. И. Арнольда «Теория катастроф»[1], а лишь поясним, почему вышеприведённое утверждение имеет место.

Действительно, несложно видеть, что малое возмущение поля на ребре сепаратрисного контура позволяет этот контур разрушить (рис. 11). Значит, наличие сепаратрисного контура — это условие типа равенства, а условие типа равенства в системе общего положения не может быть выполнено.

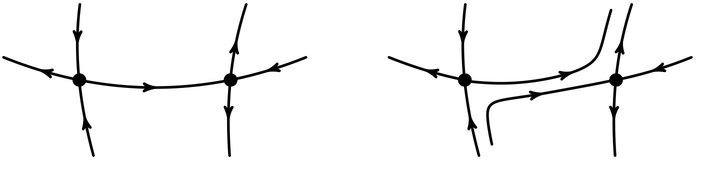

Рис. 11

Из этих двух ингредиентов — теоремы Пуанкаре – Бендиксона и соображений общности положения — и складывается доказательство теоремы Андронова – Понтрягина.

Большая надежда, окрылявшая Андронова и нашего великого старшего современника Стива Смейла, когда он только начал заниматься динамическими системами 50 лет назад, состояла в том, чтобы обобщить двумерную науку на случай многих переменных. Вопрос ставился так: правда ли, что когда мы увеличим число переменных, требование общности положения по-прежнему даст нам такое же простое описание предельного поведения динамических систем, как это было в случае плоскости? Ответу на этот вопрос посвящена вторая часть брошюры.

[1] В. И. Арнольд, Теория катастроф, 3-е издание. — М.: Наука, 1990

2. Многомерные динамические системы

2.1. Системы Морса – Смейла

Итак, мы уже осознали, насколько хорошо устроен мир в том случае, когда фазовое пространство — это плоскость или двумерная сфера. Теперь настала пора поговорить о том, как устроен мир в фазовых пространствах высокой размерности. Мы не станем говорить о том, что известно сегодня; это будет история, которой примерно 50 лет. Впрочем, в конце этого рассказа мы доберёмся до некоторых вопросов, которые злободневны сегодня. Что же касается истории, то она состояла из смены заблуждений и пониманий. Каждое заблуждение стимулировало новое понимание, и каждое понимание было своего рода скачком, после которого следовало большое развитие, а потом, в попытке выйти за грань того, что было достигнуто в этом развитии, происходили новые заблуждения и новые понимания.

История динамических систем развивалась от умозрения к доказательству, ровно так, как это было с теоремой Андронова. Андронов понял, как описываются типичные динамические системы на плоскости и на сфере, и с помощью своего молодого ученика Понтрягина (впрочем, разница между ними была всего 7 лет) доказал теоремы, которые он умозрительно открыл. После совсем небольшой работы Андронова и Понтрягина в развитии теории динамических систем был некий перерыв. Школа Андронова не переставала работать, но материал, который они накопили, не появлялся в виде немедленных публикаций. Трактат, содержащий всё, что было сделано Андроновым и его учениками, появился только через 15 лет после смерти Андронова, в 1966 году, благодаря героическим усилиям его вдовы, Евгении Александровны Андроновой-Леонтович. Были изданы две книги четырёх авторов (Андронов, Леонтович, Гордон и Майер) под названиями «Качественная теория дифференциальных уравнений на плоскости» и «Теория бифуркаций динамических систем».

В то время как происходило написание этих книг, теорией динамических систем занялся молодой американский математик Стив Смейл (Steve Smale).

В недавние годы Смейл (ему тогда не исполнилось ещё 70 лет), навещал Москву, Независимый Московский Университет (НМУ), делал доклад на заседании Московского Математического Общества и серию докладов в НМУ. Смейл без всяких сомнений может считаться другом Московского математического сообщества, тем более, что это был не первый его визит в Москву, он приезжал в Россию (в Киев, потом в Москву) в начале 60-х годов. Тогда он общался с математиками своего поколения: Д. В. Аносовым, В. И. Арнольдом, Я. Г. Синаем, С. П. Новиковым; он оказал большое влияние на математиков России, и сам испытал их влияние.

Стив Смейл, в 50-е годы сделавший замечательные открытия в топологии, полностью сменил тематику и занялся теорией динамических систем. Он был вдохновлён тем самым вопросом, о котором уже было сказано: что же происходит в теории динамических систем в многомерном фазовом пространстве? Он находился под сильным влиянием работ и идей Андронова, эти идеи были развиты в конце 50-х годов Маришем Пейксото, который обобщил результаты Андронова – Понтрягина на случай, когда фазовое пространство — тор или любая другая ориентируемая двумерная поверхность: сфера с любым количеством ручек. Пейксото доказал, в частности, что траектории типичного векторного поля на ориентируемой замкнутой поверхности стремятся к конечному числу особых точек и предельных циклов.

Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M^n,$$

где M^n — компактное многообразие без края, например, поверхность в трехмерном пространстве. Всё, что сейчас будет сказано, справедливо и для диссипативных систем в $\mathbb{R}^n$ (напомним, что диссипативность системы означает существование шара, в который входят все траектории). На границе шара векторное поле направлено внутрь (то есть все орбиты, которые начинаются на границе шара, входят в него), и все орбиты, которые начинаются вне этого шара, тоже рано или поздно входят в него (рис. 12).

Мы ставим тот же самый вопрос: что можно сказать о предельном поведении орбит типичной диссипативной системы (или типичной системы на компактном многообразии)?

Смейл дал гипотетический ответ: *существует конечное число притягивающих особых точек и периодических орбит. Более того, почти все траектории стремятся к притягивающим особым точкам или периодическим орбитам.* Смейл, таким образом, предположил, что в многомерном случае справедлив результат, аналогичный теореме Андронова, и что вселенная динамических систем тем самым устроена чрезвычайно просто: в типичном случае в качестве предельных режимов существуют только стационарные и периодические режимы, причём их число конечно.

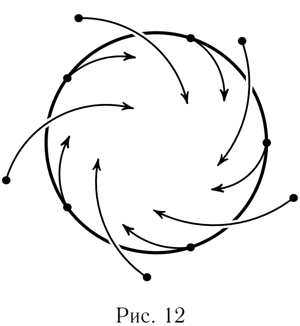

Рис. 12

Смейл был молодым, но уже заслуженным математиком, получившим прекрасные результаты в топологии, и совершеннейшим новичком в теории динамических систем. Многих результатов он просто не знал. Тем не менее, работа Смейла появилась в конце 50-х годов, и надо сказать, что она содержала не только эту гипотезу, а ещё и описание замечательного класса динамических систем, которые обладают описанным выше предельным поведением, и которые сейчас называются системами Морса – Смейла.

Характерная картинка для системы Морса – Смейла изображена на рис. 13. Как и полагается в диссипативной системе, имеется диск, в который входят все траектории, а внутри этого диска есть три особые точки и две особые орбиты. В верхнюю особую точку входят только две траектории (это так называемое *седло*). В нижнюю особую точку входят почти все траектории, а в центральную особую точку вообще не входит ни одной орбиты — это так называемый репеллер (от англ. *to repell* — отталкивать). На этой картинке есть конечное число притягивающих особых точек (более точно, ровно одна), в неё и входят почти все орбиты; но нет притягивающих периодических орбит.

Исключительными являются четыре орбиты: в притягивающую точку не входят две орбиты, которые состоят из особых точек, и ещё две орбиты, которые входят в седло. Эта картинка иллюстрирует систему Морса – Смейла.

Эксперты в теории динамических систем резко запротестовали. Смейл получил сразу несколько писем, в которых было написано, что в статьях Картрайт, Литтлвуда и Левинсона уже построены типичные диссипативные динамические системы, которые не являются системами Морса – Смейла, а именно, имеют бесконечное число орбит, не исчезающих при малом возмущении. Смейл находился перед выбором: либо начать разбирать работы своих предшественников (а они были длинные, тяжёлые и практически никем не прочтённые до конца), либо сделать что-то иное. И Смейл выбрал другой путь. Он поверил, что предшественники правы, и что динамические системы с бесконечным числом периодических орбит существуют.

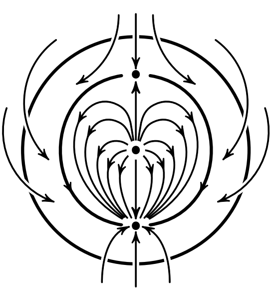

Рис. 13

Смейл стал думать о том, как может быть так, чтобы у системы было бесконечное количество периодических орбит, и чтобы они не исчезали при малом возмущении.

Смейл одновременно размышлял над этими проблемами и проявлял социальную активность. В это время Америка воевала во Вьетнаме, и Смейл не только словесно, но и действенно резко протестовал против этого. Если бы это было в нашем отечестве, то, вероятно, Смейл был бы изгнан с работы, лишился возможности преподавать, а может быть, отправился бы в места не столь отдалённые. Но и в Америке он не остался безнаказанным. Правда, наказание было гораздо легче. Смейл в то время получал грант от National Science Foundation (аналог нашего Российского Фонда Фундаментальных Исследований). Надо заметить, что в Америке частное и государственное различаются довольно сильно. Основным местом работы Смейла в то время был частный университет, поэтому обвинение против него звучало так: «Смейл получает от государства деньги по научному гранту, а сам против этого государства выступает. Надо его этого гранта лишить». Проблема была серьёзная: американское государство не шутит. Коллеги Смейла решили эту проблему. Смейл входил в очень большую группу, которая получала огромный грант. Большие гранты исчисляются миллионами, но этот грант был разделён, часть Смейла была выделена, и грант, в котором он оказался участником, стал существенно меньше. После этого чиновникам было отрапортовано, что Смейл сурово наказан тем, что его грант существенно уменьшен. Это удовлетворило чиновников.

Кроме того, Смейлу было предъявлено ещё одно обвинение. Дело в том, что он, вместо того, чтобы думать в Америке, отправился в Рио и там прохлаждался на пляже Капокабаны. Смейл, как и другой гений — Маяковский, предпочитал свои мысли складывать не на бумаге, а, в своём роде, работать наизусть (Маяковский писал свои стихи наизусть, вышагивая по прибалтийскому побережью).

2.2. Подкова Смейла

То, что придумал Смейл (построенную им динамическую систему называют *подковой Смейла*), долгое время считалось «материалом для посвящённых», ибо первые сочинения, в которых оно изложено, не очень легки для чтения. 12 лет назад Александр Игоревич Буфетов (лектор этой Летней школы), был первым школьником, который прослушал рассказ о подкове Смейла, рассчитанный на школьников. Этот рассказ немножко отличается от традиционной формы, в которой подкова Смейла обычно излагается.

Мы будем рассматривать отображение вместо дифференциального уравнения. Теория отображений и их итераций и теория дифференциальных уравнений — это две очень близкие стороны одной теории, и эффекты, найденные в одной теории, немедленно переносятся на другую. Здесь мы не будем объяснять, почему это так; отметим лишь, что при переходе от отображений к уравнениям обычно размерность увеличивается на единицу — поэтому описанный далее тип поведения в дифференциальных уравнениях встречается, начиная с размерности 3.

Итак, мы будем рассматривать отображение вместо дифференциального уравнения и его итерации вместо орбит. По-прежнему, если взять точку и применять к ней итерации отображения, то получается последовательность точек, которая называется *орбитой* точки под действием отображения.

Сначала мы рассмотрим некоторое очень простое отображение, которое будет кусочно-линейным. Мы возьмём горизонтальный прямоугольник, сожмём его вдоль оси абсцисс (для определённости, в 5 раз) и растянем вдоль оси ординат (тоже в 5 раз), как показано на рис. 14. Это отображение будет иметь неподвижную точку.

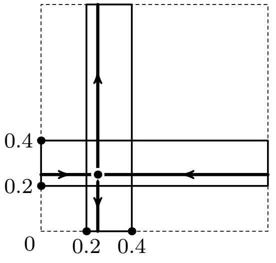

Рис. 14

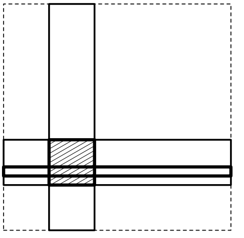

Рис. 15

Задача 2.1. *Напишите отображение в координатах.*

Задача 2.2. *Найдите координаты неподвижной точки.*

Если мы начнём такое отображение итерировать, то кое-что поучительное увидим, но не очень много. Например, поскольку область определения и множество значений у этого отображения не совпадают, не ко всякой точке можно применять его итерации.

Несложно понять, что множество точек, к которым отображение можно применить второй раз, получается следующим образом: нужно взять прямоугольник, который получается в пересечении образа и прообраза (на рис. 15 он заштрихован), и от него взять прообраз. Этот прообраз будет в пять раз уже, чем исходный прямоугольник и такой же длины, как он сам.

Обозначим исходную область определения через D^1, а отображение обозначим через f. Пусть D^n — это множество точек, к которым отображение применимо n раз. Легко видеть, что

$$D^{n+1} = f^{-1}(f(D^1) \cap D^n).$$

Но в общем, итерации такого отображения ничего неожиданного в себе не несут. Есть очень немного точек, для которых отображение можно итерировать бесконечно много раз вперёд. Это те точки, которые лежат на сжимающемся горизонтальном отрезке (см. рис. 14). При этих итерациях они будут всё ближе и ближе прижиматься к неподвижной точке. Кроме того, есть вертикальный отрезок, на котором можно брать итерации обратного отображения из вертикального прямоугольника в горизонтальный. И есть одна-единственная точка (неподвижная), для которой можно взять все итерации отображения f, то есть все положительные степени самого отображения и его обратного. Это была присказка. А теперь начинается «сказка».

Возьмём единичный квадрат и разделим его на 5 равных вертикальных прямоугольников. Выделим из них второй и четвёртый. Разделим его на пять горизонтальных прямоугольников, тоже выделим из них второй и четвёртый. Обозначим нижний горизонтальный прямоугольник через D_0, а верхний пусть будет D_1. Вертикальные прямоугольники соответственно обозначим D_0' и D_1'. Положим $D := D_0 \cup D_1$ и $D' := D_0' \cup D_1'$. Мы рассмотрим отображение F, которое определено на D. Оно будет состоять из двух «кусков»: ограничений F на D_0 и D_1, обозначаемых соответственно F_0 и F_1. На D_0 это будет в точности то самое отображение, которое мы только что анализировали. Оно имеет неподвижную точку, сжимает нижний прямоугольник в 5 раз до ширины левого вертикального и растягивает его в 5 раз до полной высоты квадрата. Получаем отображение $F_0\colon D_0 \to D_0'$. Как мы уже поняли, здесь есть сжимающийся отрезок, переходящий в себя, и есть растягивающийся отрезок, поглощающий себя при отображении F_0. В дополнение к этому мы определим ещё отображение на верхнем горизонтальном прямоугольнике: $F_1\colon D_1 \to D_1'$. Это будет копия F_0, повёрнутая на 180 градусов. Из этих кусков мы и соберём отображение F (рис. 16):

$$F\colon D \to D', \quad F(x) = \begin{cases} F_0(x), & x \in D_0, \\ F_1(x), & x \in D_1. \end{cases}$$

Теперь поставим тот же вопрос: как устроено множество точек, на котором определены все итерации отображения F?

Следующая теорема описывает полные орбиты отображения F.

Теорема 2.1. *Множество точек, для которых определены все итерации отображения F, — это прямое произведение двух множеств $C \subset [0,1]$ канторовского типа:*

$$\Lambda = C \times C.$$

Не менее замечательным и очень важным для нас будет другое свойство.

Теорема 2.2. *Отображение F имеет счётное число периодических орбит.*

Теорема 2.3. *Эти свойства «сохраняются» при малых возмущениях.*

Формулировки теорем нуждаются в некоторых комментариях. Точный смысл слова «сохраняются» в последней теореме состоит в следующем. Если мы возьмём любое отображение, $\mathbf{C}^1$-близкое к F, то у него будет множество точек, имеющих полные орбиты, гомеоморфное Λ.

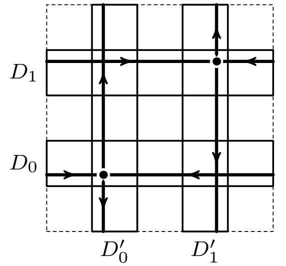

Рис. 16

Конструкция множества C в первой теореме несколько отличается от классической. Надо полагать, что когда Кантор придумывал свой замечательный пример, ему и в голову не приходило, что в гладком анализе этот пример может возникнуть естественным образом. Канторовы множества после этой теоремы стали популярнейшими действующими лицами в динамических системах и встречаются в них сплошь и рядом.

Теперь поясним, что такое периодическая орбита.

Определение. Пусть точка x такова, что найдётся такое натуральное m, что $F^m(x) = x$. Тогда x называется *периодической точкой*.

Смысл этого определения очень прост: периодическая точка делает несколько скачков и возвращается на старое место. Ясно, что при дальнейших отображениях она будет двигаться про этому же циклу. Орбита периодической точки называется *периодической орбитой*.

Определение. Минимальное m, для которого $F^m(x) = x$, называется *длиной* периода.

Как видно из этого определения, точки периода 1 — это неподвижные точки отображения.

Наконец, скажем ещё несколько слов о сохранении свойств при малых возмущениях. Доказательство этого — весьма трудный факт (впрочем, основная его идея довольно проста, и мы приведём это рассуждение в конце следующего параграфа). Смейл, когда опубликовал свою статью про подкову, не затруднил себя доказательством, потому что ему было совершенно ясно, что это так и будет. Ясно это было также немногим экспертам, которые читали его работы. Д. В. Аносов был первым, кто доказал аналогичную теорему не для отображения подковы, а для похожих динамических систем, они сейчас носят его имя (аносовские системы), но говорить о них здесь мы ничего не будем. Впрочем, если непосвящённый при словах «аносовская система» подумает о подкове Смейла, то он не слишком сильно ошибётся.

2.3. Символическая динамика

Для доказательства теоремы 2.1 мы будем использовать совершенно новую идею, которая носит имя «символическая динамика». Символическая динамика изучает полные орбиты разных отображений, но она не интересуется подробно, например, тем, какие координаты имеет образ точки под действием отображения F, применённого 10 раз. Нас интересует очень простой вопрос: в какую часть области определения попадает точка на n-й итерации отображения — в D_0 или в D_1? В зависимости от результата на n-е место в ответе пишется 0 или 1.

Теперь скажем то же самое более формально. Пусть $x \in \Lambda$, то есть для всякого $m \in \mathbb{Z}$ существует $F^m(x)$. Тогда определена *судьба* точки x, обозначаемая $\omega(x)$. Это двухсторонняя последовательность нулей и единиц

$$\omega(x) = \ldots \omega_{-n}\omega_{-n+1} \ldots \omega_{-1}\omega_0\omega_1 \ldots \omega_{n-1}\omega_n \ldots,$$

которая определяется следующим образом:

$$\omega_n = i \quad \Leftrightarrow \quad F^n(x) \in D_i \quad (i = 0, 1).$$

Теперь нам предстоит выяснить, много ли существует последовательностей, которые могут получиться как судьбы при действии отображения подковы. Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 2.4. *Любая двусторонняя последовательность из нулей и единиц реализуется как судьба одной и только одной точки* $x \in \Lambda$.

Тем самым получается, что вместо того, чтобы смотреть на точки, имеющие полные орбиты, можно смотреть на их судьбы — на последовательности нулей и единиц — и делать какие-то вполне содержательные выводы.

Сначала мы выведем теорему 2.2 из теоремы 2.4. Мы увидим, что это очень просто. Заметим, что периодические точки — это в точности те точки, у которых судьба периодична. То, что у периодической точки судьба периодична, очевидно. Обратно, пусть судьба точки x есть периодическая последовательность. Докажем, что точка периодична. Посмотрим, какова будет судьба у образа этой точки. Там, где мы раньше отмечали положение образа, там теперь будет начальное положение, поэтому это будет та же самая последовательность, сдвинутая на одну позицию влево. Если период точки равен m, то у m-й итерации судьба будет та же, что и у исходной точки, потому что судьба периодична. Значит, у точки и у её m-й итерации будет одна и та же судьба. Но по теореме 2.4, каждая судьба соответствует одной и только одной точке, поэтому, раз у точек одинаковая судьба, то они совпадают, то есть $F^m(x) = x$. Это и означает периодичность точки x.

Осталось понять, что периодических орбит счётное число. Мы можем написать любую периодическую последовательность ω, и поскольку в силу той же теоремы 2.4 всякая последовательность реализуется, значит, в частности, и эта реализуется как судьба некоторой точки. Тем самым, для любой периодической последовательности существует периодическая точка с этой судьбой. А поскольку периодических последовательностей счётное число, то мы получаем счётное число периодических точек. Стало быть, и периодических орбит тоже счётное число.

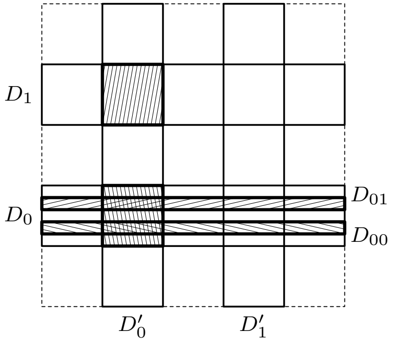

Рис. 17

Теперь мы будем доказывать теорему 2.4, а «по пути» докажем и теорему 2.1.

Наша цель — реализовать любую последовательность как судьбу некоторой точки, то есть наша цель — по последовательности найти точку, для которой эта последовательность является судьбой. Давайте зададимся гораздо более скромным вопросом: напишем кусочек последовательности. Скажем,

$$\ldots \underset{\omega_0}{0}\,1 \ldots .$$

Выясним, как выглядит множество точек, у которых судьба имеет указанный вид. Множество этих точек обозначим через D_{01}. Во-первых, поскольку нулевая позиция — это ноль, значит, все точки принадлежат D_0. Кроме того, эти точки при итерации попадают в D_1. Значит, для начала надо взять весь прямоугольник D_0, при итерации он весь перейдёт в D'_0. Посмотрим, какая его часть пересекается с D_1 и возьмём от неё прообраз. Это будет тонкий прямоугольник, который после итерации попадёт в D_1 (см. рис. 17).

Совершенно аналогично можно понять, где расположено множество D_{00} (оно отмечено на рис. 17). Это будет ещё один прямоугольник, параллельный первому. Множество D_{010} тоже несложно нарисовать: это будет, конечно, подмножество D_{01}. Легко сообразить, что это будет второй снизу прямоугольник в прямоугольнике D_{01}. Подробнее, прямоугольник D_{01} надо разделить на 5 равных горизонтальных прямоугольников и взять в качестве D_{010} второй прямоугольник снизу.

Здесь в явном виде прослеживаются элементы построения множества канторовского типа. На вертикальную ось проектируются те прямоугольники, с помощью которых наше канторово множество строится.

Продолжая далее этот анализ, поступим для наглядности следующим образом. Разделим последовательность ω на две части: $\omega_+ = \omega_0\omega_1\omega_2\ldots$ (она бесконечна вправо), а $\omega_- = \ldots\omega_{-2}\omega_{-1}$ (она бесконечна влево). Множество точек, у которых будущая судьба будет D_{ω_+}, это на вертикальной оси точка канторова множества, которая кодируется элементами последовательности ω^+ (то есть при построении этой точки нужно выбирать верхний или нижний отрезок соответствующего ранга, в зависимости от нуля или единицы на соответствующем месте), а по горизонтали это отрезок. Иначе говоря,

$$D_{\omega^+} = y(\omega^+) \times [0, 1].$$

Аналогично,

$$D_{\omega^-} = [0, 1] \times x(\omega^-).$$

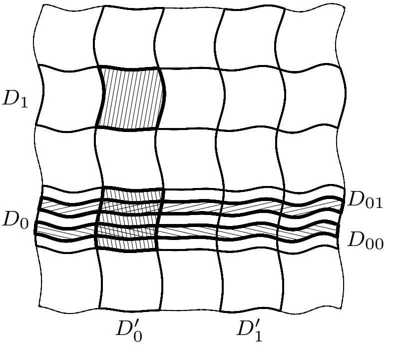

Рис. 18

Каждое из этих множеств представляют собой отрезок (вертикальный и горизонтальный соответственно) Тогда точка с судьбой ω — это пересечение этих отрезков. Таким образом, мы одновременно доказали и теорему 2.4, и тот факт, что множество точек с полной судьбой — это произведение двух канторовских множеств (теорема 2.1).

Мы не будем приводить здесь полное доказательство теоремы 3, ограничившись лишь основной идеей (уже упоминавшейся выше). А именно, оказывается, что для достаточно близких к F отображений, все предыдущие рассуждения по-прежнему работают, только прямоугольники становятся криволинейными (рис. 18).

На этом мы завершаем рассказ про подкову.

2.4. Что дальше?

Вместе с подковой Смейла в динамические системы вошли гиперболические инвариантные множества и гиперболические динамические системы. Мы не будем говорить о них ничего, кроме того, что они похожи на отображение подковы. Подкова имеет инвариантное множество Λ, (произведение двух канторовских множеств), и через точки множества Λ проходят вертикальные отрезки, которые растягиваются под действием отображения F, и через эти же точки проходят горизонтальные отрезки, которые, напротив, сжимаются. Это так называемые вертикальные и горизонтальные *слоения*. Всё это — атрибуты более сложных и более общих гиперболических систем.

Возник целый мир гиперболических динамических систем, похожих на подкову Смейла. В этом мире теория вероятностей работает ничуть не в меньшей степени, чем математический анализ. Объяснить это подробно мы в рамках этой брошюры не сможем, но коротко можно сказать следующее.

Если у нас есть непрерывное (а тем более, гладкое) взаимно однозначное отображение, или если есть дифференциальное уравнение, то его орбиты непрерывно зависят от начального условия, то есть от той точки, из которой начинается орбита векторного поля или отображения. Однако, тот факт, что эта непрерывная зависимость имеет место, никак не противоречит следующему наблюдению.

Допустим, что мы очень хорошо направляемой иглой пытаемся нанести укол в область определения, определяем место этого укола и начинаем применять отображение. Затем повторяем эксперимент — в ту же точку наносим укол и снова начинаем применять отображение. При этом мы смотрим на судьбы точек при итерациях, то есть на последовательности нулей и единиц. Мы пытались два раза выбрать одно и то же начальное условие, но существует неизбежная погрешность, и результат эксперимента будет таков. Сначала последовательности будут совпадать, а потом они начнут различаться, и притом различаться совершенно непредсказуемым образом. Они будут различаться так, как если бы мы два раза не пытались попасть иглой в одну и ту же точку, а тыкали бы наобум.

Происходит это по следующей причине: чтобы десять позиций судеб вправо и влево от начальной совпали, координаты начальной точки должны отличаться друг от друга на порядок 5^{-10}. Это такая величина, которую в микроскоп углядеть очень трудно, если вообще возможно. А если бы мы 10 заменили на 100, то можно было бы с уверенностью сказать, что ни в какой микроскоп этой разницы не углядишь. Тем не менее, 100 позиций по сравнению с миллионами итераций, которые делают современные компьютеры, — это ничтожно мало. Тем самым, грубейшая информация о траекториях — даже не координаты точки, а всего лишь её судьба — теряют всякое сходство с предыдущим экспериментом очень быстро. Это одно из фундаментальных свойств гиперболических систем.

Одно время была надежда, что «почти все» системы гиперболические. Оказалось, что это не так. История «от умозрения к доказательству» продолжается. Ученик Смейла Палис дал другое сравнительное описание того, к чему могут накапливаться траектории динамических систем. Множества, к которым могут накапливаться траектории динамических систем, называются *аттракторами*. Картинки, которые мы рисовали, скорее дают только интуитивное понятие об аттракторах. На прошлой Летней школе[2] мы говорили о соленоиде Смейла – Вильямса, который является *странным аттрактором*, аттрактором, добавляющим к нашей интуиции новые образы.

[2] Ю. С. Ильяшенко. Аттракторы и их фрактальная размерность. — М.: МЦНМО, 2005

Гипотеза Палиса состоит в том, что у типичной динамической системы существует лишь конечное число аттракторов. Правда это или нет — это один из центральных вопросов в теории динамических систем. Этим вопросом мы и закончим наше повествование.

Текст подготовлен по материалам лекции, записанной Дмитрием и Михаилом Вельтищевыми, и отредактирован Виктором Клепцыным. Много ценных замечаний сделал Игорь Шнурников. Автор выражает им свою искреннюю благодарность.

Оглавление

СПИСОК КУРСОВ, ПРОЧИТАННЫХ В ЛШСМ—2005

В. И. Арнольд
Статистика топологии и алгебры

Д. В. Аносов
Дифференциальные уравнения: не решаем, а рисуем

О. Д. Аносова, В. А. Курлин
Вероятностные стратегии: мифы и реальность

В. О. Бугаенко
Обобщённая теорема Ван дер Вардена

А. И. Буфетов
Перекладывания отрезков
Классификация автоморфизмов поверхностей по Тёрстону

Ю. М. Бурман
Склейки и перестановки точек

А. Л. Городенцев
Геометрическое введение в некоммутативную математику
Многочлены и ряды, или алгебра — сила

С. М. Гусейн-Заде
Разборчивая невеста

В. В. Доценко
Избранные задачи комбинаторики и теории представлений

Ю. С. Ильяшенко
Эволюционные процессы и философия общности положения

М. Э. Казарян
Геометрия, топология и комбинаторика разветвлённых накрытий сферы

Д. Б. Каледин
Кватернионные алгебры и зачем они нужны

В. А. Кириченко
Построения циркулем и линейкой и теория Галуа

В. А. Клепцын
Гиперболическая геометрия и геометрическая теория групп

А. Г. Кузнецов
Прямые на кубической поверхности и исключительные группы

С. П. Новиков
Гамильтоновы системы на римановых поверхностях

Г. Ю. Панина
Алгебра многогранников

П. Е. Пушкарь
Многозначная теория Морса на окружности

В. Ю. Протасов
Геометрия максимумов и минимумов

М. Сапрыкина, Кр. Бьерклов
Итерации квадратичного отображения

А. Б. Скопенков
Введение в топологическую теорию графов

В. А. Тиморин
Квадратичная математика

В. М. Тихомиров
Теоремы существования

В. А. Успенский
Четыре алгоритмических лица случайности

В. В. Успенский
Знак гауссовой суммы

Р. М. Фёдоров
Представления колчанов

Г. Б. Шабат
Пи

А. Шень
Замощения

А. Шень
Коды с исправлением ошибок

И. В. Ященко
Метрические пространства

БРОШЮРЫ СЕРИИ ЛШСМ

2001

В. М. Тихомиров
Выпуклый анализ и его приложения

Ю. М. Бурман
О проективных пространствах и движениях,
или Геометрия без рисунков

В. М. Тиморин
Комбинаторика выпуклых многогранников

М. Э. Казарян
Дифференциальные формы, расслоения, связности

А. А. Болибрух
Дифференциальные формы и уравнения Максвелла

М. Н. Вялый
Линейные неравенства и комбинаторика

2003

И. В. Аржанцев
Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений

2004

Ю. С. Ильяшенко
Аттракторы и их фрактальная размерность

2005

В. О. Бугаенко
Обобщённая теорема Ван дер Вардена

В. А. Успенский
Четыре алгоритмических лица случайности

Ю. С. Ильяшенко
Эволюционные процессы и философия общности положения