Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2003

С. М. Львовский

Семейства прямых и гауссовы отображения

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 514.753.35+514.745.2
ББК 22.151
Л89

Львовский С. М.

Л89 Семейства прямых и гауссовы отображения. — М.: МЦНМО, 2013. — 40 с.

ISBN 978-5-4439-0612-3

Всякое одномерное семейство прямых на плоскости (кроме вырожденных случаев) является семейством касательных к некоторой кривой. В пространстве, однако, это уже совершенно не так; в брошюре объясняется, как, глядя на одномерное семейство прямых в пространстве, определить, является ли оно «касательным». По ходу дела читатель знакомится с такими важными понятиями современной математики, как внешняя алгебра и грассмановы многообразия.

Брошюра написана по материалам цикла лекций на Летней школе «Современная математика» в Дубне в 2003 г. Она доступна студентам младших курсов и школьникам старших классов.

ББК 22.151

ISBN 978-5-4439-0612-3

© Львовский С. М., 2013.
© МЦНМО, 2013.

Предисловие

Эта брошюра представляет собой расширенные записки миникурса, прочитанного автором в июле 2003 года на Летней школе «Современная математика» в Дубне. Автор не уверен, что десять лет назад он излагал материал точно так же, как сейчас в книжке, а некоторые из тем на школе заведомо затронуты не были, но в общем и целом брошюра курсу соответствует.

Серьезных познаний для понимания книги не требуется: помимо школьной программы, достаточно знать, что такое производная, и не бояться слов «векторное пространство» и «базис» (в самом последнем параграфе, который можно благополучно опустить, от читателя требуется чуть больше).

Я благодарен Татьяне Коробковой и Григорию Мерзону за тщательное и вдумчивое редактирование. Все оставшиеся недостатки текста — целиком на моей совести.

§1. О чем эта книжка

Представим себе, что в пространстве движется прямая (по ходу дела она может и смещаться, и поворачиваться) — см. рис. 1. В таких случаях говорят, что в пространстве задано семейство прямых (точнее говоря, одномерное семейство прямых). Разумеется, двигать прямую можно по-всякому, и семейства прямых при этом будут получаться самые

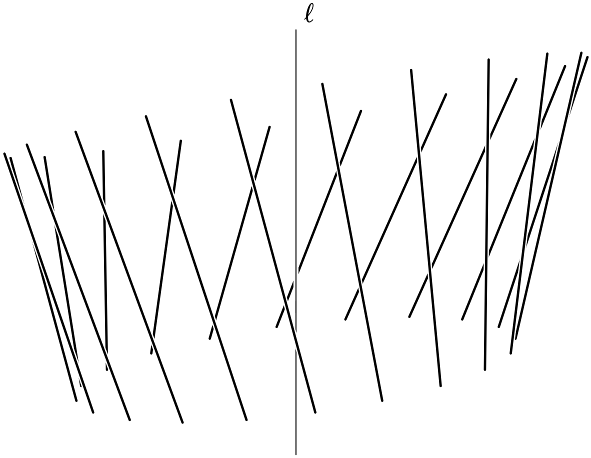

Рис. 1. Семейство прямых, полученное вращением одной из скрещивающихся прямых относительно другой (ℓ). Мы встретимся с этим семейством в п. 8.3.

разные. Один из возможных способов задать семейство, в частности, таков. Рассмотрим произвольную кривую C в пространстве и в каждой ее точке проведем касательную прямую. Получится семейство прямых (см. рис. 2). Такие семейства мы будем называть *касательными*.

Зададимся вопросом: *всякое ли семейство прямых в пространстве можно получить как семейство касательных к какой-нибудь кривой*?

Если понимать этот вопрос совсем буквально, то нетрудно заметить, что ответ на вопрос отрицателен: если все прямые из нашего семейства проходят через одну точку (иными словами, если все наши прямые суть образующие некоторого конуса), то ясно, что предъявить кривую, которой все они касаются, никак невозможно (рис. 3). Но этот ответ, хоть формально он и верен, порождает только следующий вопрос: ну хорошо, такие семейства прямых касательными действительно не являются; а все остальные являются или тоже не всегда? Можно еще сказать так: семейства прямых, проходящих через одну точ-

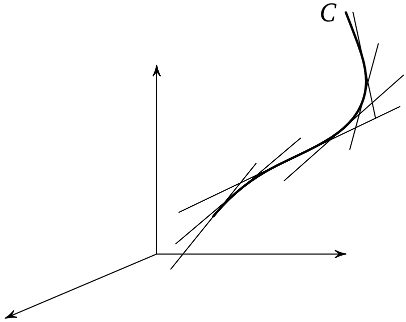

Рис. 2. Семейство прямых, касающихся кривой C

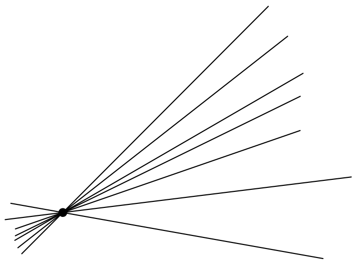

Рис. 3. Это семейство касательным точно не является

ку, очень «специальны»: если такое семейство слегка «пошевелить», то свойство «все прямые проходят через одну точку» разрушится. Что получится, если рассмотреть «случайно взятое» семейство — семейство общего положения?

Собственно говоря, для начала стоит задать тот же вопрос про прямые не в пространстве, а на плоскости: пусть дано одномерное семейство прямых на плоскости; всегда ли оно является семейством касательных к некоторой плоской кривой?

Для плоскости ответ оказывается очень простым. Именно, семейства прямых, проходящих через одну и ту же точку (на плоскости такое семейство, собственно говоря, для каждой точки только одно), касательными также не являются, но зато все остальные — являются: для всякого одномерного семейства прямых на плоскости, не проходящих через одну и ту же точку, найдется кривая, которой все эти кривые касаются. Если нарисовать прямые в семействе погуще, то существование такой кривой («огибающей», или «двойственной») не покажется чем-то удивительным (рис. 4).

Рис. 4. Огибающая, она же двойственная кривая на плоскости

Двойственные кривые на плоскости, несмотря на интуитивную очевидность их существования, — предмет также интересный, но в этом курсе мы его развивать не будем, а сосредоточимся на прямых в пространстве. Оказывается, что для этого случая свойство семейства прямых «быть касательным» — не правило, а исключение. В этой книжке мы получим необходимое и достаточное условие того, что данное семейство прямых в пространстве является касательным. Как вы увидите, его не так сложно записать на языке формул, но гораздо интереснее сформулировать геометрически. Мы приведем три такие формулировки, в совершенно разных терминах. Начнем же с того, что разовьем язык, на котором удобно описывать семейства прямых.

§ 2. Проективные пространства

При работе с семействами прямых (а также во многих других случаях) бывает удобно дополнить обычное пространство $\mathbb{R}^3$ до проективного пространства. Цель данного параграфа — кому-то напомнить, а кому-то вкратце рассказать про проективные пространства. Читателю, с этой темой знакомому, можно перейти сразу к изучению следующего параграфа, а к этому параграфу возвращаться только при необходимости.

Две «случайно взятые» прямые на плоскости (две прямые в общем положении) пересекаются, но возможен и исключительный случай, когда прямые параллельны. В проективной геометрии таких исключительных случаев не бывает: две различные прямые всегда пересекаются в одной точке. Так получается, потому что к каждой прямой добавляют «бесконечно удаленную точку» (у всех параллельных друг дружке прямых бесконечно удаленная точка одна и та же), и в результате всякие две параллельные прямые также пересекаются в одной точке — бесконечно удаленной точке, соответствующей данному направлению. Эти точки добавляют следующим образом.

Будем считать, что наша плоскость π вложена в трехмерное пространство с координатами (x, y, z) как плоскость с уравнением $z=1$. Если O — начало координат, то всякой точке $P \in \pi$ соответствует прямая OP. При этом получается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости π и прямыми в пространстве, содержащими начало координат *и не параллельными плоскости* π.

Будем теперь называть *проективной плоскостью* множество *всех* прямых, проходящих через начало координат. Если эта прямая ℓ не параллельна π, то ей соответствует обычная точка плоскости (точка пересечения ℓ и π), если же она параллельна π, то будем говорить, что этой прямой соответствует бесконечно удаленная точка.

Далее, пусть l — прямая в плоскости π. Рассмотрим плоскость $\overline{Ol}$, проходящую через O и l; при этом получится взаимно однозначное соответствие между прямыми в плоскости π и плоскостями, проходящими через O, — *за исключением единственной плоскости, проходящей через O и параллельной плоскости π*. Будем говорить, что прямая в проективной плоскости — это *произвольная* плоскость в $\mathbb{R}^3$, проходящая через O. Всем прямым в проективной плоскости, кроме одной, соответствует прямая на π; единственную прямую в проективной плоскости, которая никакой прямой на π не соответствует (т. е. плоскость, проходящую через O и параллельную плоскости π), будем называть *бесконечно удаленной прямой*.

Прямая $l \subset \pi$ содержит точку $P \in \pi$ тогда и только тогда, когда плоскость $\overline{Ol}$ содержит прямую OP. Поэтому и в общем случае будем говорить, что прямая из проективной плоскости содержит точку из проективной плоскости тогда и только тогда, когда плоскость в $\mathbb{R}^3$, соответствующая прямой, содержит прямую в $\mathbb{R}^3$, соответствующую точке.

Все это проиллюстрировано рисунком 5.

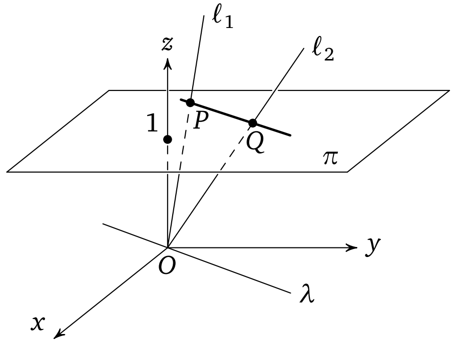

Рис. 5. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 соответствуют точкам P и Q. Прямая λ соответствует одной из бесконечно удаленных точек. Плоскость, проходящая через прямые ℓ_1 и ℓ_2, соответствует прямой PQ.

Задача 1. Проверьте, что на всякой прямой в π лежит ровно одна бесконечно удаленная точка, что на всех параллельных прямых эта бесконечно удаленная точка одна и та же, а на непараллельных прямых бесконечно удаленные точки разные, что две параллельные прямые пересекаются в одной бесконечно удаленной точке и что все бесконечно удаленные точки лежат на бесконечно удаленной прямой.

Проективную плоскость часто обозначают $\mathbb{RP}^2$.

Как ввести в проективной плоскости координаты? Поскольку точки проективной плоскости — это прямые в $\mathbb{R}^3$, проходящие через начало координат, для задания точки $p \in \mathbb{RP}^2$ достаточно указать координаты любой точки на соответствующей прямой (кроме, разумеется, самого начала координат). Эти координаты называются *однородными координатами* точки p. Если выбрать на прямой в $\mathbb{R}^3$, соответствующей точке $p \in \mathbb{RP}^2$, другую точку, то все однородные координаты умножатся на одно и то же ненулевое число. В знак того, что однородные координаты определены неоднозначно (однозначно определены только их отношения), их записывают через двоеточие. Например, $(2 : -1 : 7)$ — это однородные координаты точки в $\mathbb{RP}^2$, соответствующей прямой в $\mathbb{R}^3$, проходящей через точку с координатами $(2; -1; 7)$. Итак, координаты точки на проективной плоскости — это не два, а три числа, но зато эти числа определены не однозначно, а с точностью до пропорциональности.

Вернемся к рис. 5, на котором изображено вложение «обычной» плоскости в проективную плоскость. По традиции при таком вложении координаты точек в $\mathbb{R}^3$ принято записывать в нестандартном порядке: сначала z-координата, затем x, затем y. Имея в виду это соглашение, можно сказать, что точки «обычной» плоскости — это точки, имеющие однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$, где $x_0 \neq 0$; поскольку однородные координаты можно умножать и делить на ненулевые числа, можно все координаты такой точки поделить на x_0 — тогда получится, что все «обычные» точки имеют однородные координаты вида $(1 : x : y)$. Прямоугольная проекция задает биекцию между плоскостью π и координатной плоскостью Oxy; ввиду этой биекции можно сказать, что точке плоскости с евклидовыми координатами $(x; y)$ соответствует точка проективной плоскости с однородными координатами $(1 : x : y)$.

Заметим, что все точки проективной плоскости совершенно равноправны и бесконечно удаленные среди них ничем не выделяются — постольку, поскольку равноправны все одномерные векторные подпространства в $\mathbb{R}^3$; различие между «обычными» и «бесконечно удаленными» точками возникает лишь тогда, когда мы дополняем бесконечно удаленными точками евклидову плоскость. В примере выше можно было бы, например, считать, что «обычная» плоскость — множество точек с однородными координатами вида $(x : 1 : y)$.

Определим теперь проективные пространства произвольной размерности. Пусть V — векторное пространство[1] размерности $n + 1$. Тогда n-мерным проективным пространством называется множество одномерных векторных подпространств в V. Обычное обозначение для n-мерного проективного пространства — $\mathbb{RP}^n$; если в процессе рассуждения важно не забывать о $(n + 1)$-мерном пространстве V, из которого оно получилось, то пишут еще $\mathbb{P}(V)$.

Итак, точки в $\mathbb{RP}^n$ — это одномерные векторные подпространства в V. Прямые в $\mathbb{RP}^n$ — это двумерные векторные подпространства в V (как и в случае $\mathbb{RP}^2$); точка лежит на прямой, если соответствующие одномерное и двумерное подпространства содержатся одно в другом. Аналогично, k-мерные линейные подпространства в $\mathbb{RP}^n = \mathbb{P}(V)$ — не что иное, как $(k + 1)$-мерные векторные подпространства в V.

[1]Мы будем рассматривать только векторные пространства над вещественными числами, хотя все в этом параграфе имеет смысл и для пространств над любым полем.

В проективном пространстве $\mathbb{RP}^n = \mathbb{P}(V)$ также можно ввести однородные координаты. Для этого выберем в V базис $(e_0, \ldots, e_n)$; если точка p проективного пространства соответствует одномерному векторному пространству $U \subset V$, то в качестве ее однородных координат берем координаты (относительно выбранного базиса) любого ненулевого вектора $v \in U$: если $v = x_0 e_0 + \ldots + x_n e_n$, то однородными координатами точки p будут $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$. По-прежнему однородные координаты определены не однозначно, а с точностью до умножения на ненулевой множитель; однородными координатами точки в $\mathbb{RP}^n$ может быть любой набор из $n+1$ числа, среди которых есть хоть одно ненулевое (в противном случае нарушится условие $v \neq 0$). Можно также сказать, что всякому ненулевому вектору из V соответствует точка в $\mathbb{P}(V)$ (т. е. одномерное векторное подпространство, порожденное вектором v).

Множество точек в $\mathbb{RP}^n$, однородные координаты которых имеют вид $(1 : x_1 : \ldots : x_n)$ — не что иное, как $\mathbb{R}^n$. Если p и q — различные точки в $\mathbb{RP}^n = \mathbb{P}(V)$, соответствующие ненулевым векторам u и v соответственно, то прямая pq в $\mathbb{P}(V)$ — это двумерное векторное подпространство в V, порожденное u и v.

Задача 2. Вложим $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{RP}^n$, как описано выше.

а) Покажите, что разность $\mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{R}^n$ можно рассматривать как проективное пространство $\mathbb{RP}^{n-1}$ («бесконечно удаленная гиперплоскость»).

б) Покажите, что каждую прямую в $\mathbb{R}^n$ можно дополнить до прямой в $\mathbb{RP}^n$, добавив к ней одну точку, лежащую в бесконечно удаленной гиперплоскости.

§ 3. Кривые и касательные в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{RP}^n$

Поговорим еще о кривых в проективном пространстве и касательных к ним. Кривая в $\mathbb{R}^n$ — это просто отображение из интервала на числовой оси в $\mathbb{R}^n$:

$$\gamma\colon (a;b)\to\mathbb{R}^n,\quad t\mapsto\gamma(t)=(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t)). \tag{3.1}$$

Подразумевается, что это отображение «достаточно хорошее»: например, дифференцируемое (в том смысле, что все функции γ_i дифференцируемы), а еще лучше — бесконечно дифференцируемое.

Каждая точка в $\mathbb{RP}^n=\mathbb{P}(V)$ задается ненулевым вектором в V; поэтому кривую в $\mathbb{P}(V)$ можно задать как кривую (одномерное семейство ненулевых векторов) в V: $t\mapsto v(t)$. Это задание, разумеется, неоднозначно: если φ — любая не обращающаяся в нуль «хорошая» функция, то отображение $t\mapsto\varphi(t)v(t)$ задает ту же кривую. А если все векторы $v(t)$ коллинеарны, то наша «кривая» состоит из одной-единственной точки; мы такие вырожденные случаи рассматривать не будем.

Для кривых в $\mathbb{R}^n$ определены, как известно, касательные векторы: если $\gamma\colon(a;b)\to\mathbb{R}^n$ — кривая и $p=\gamma(t_0)$ — точка на этой кривой, то касательный вектор к этой кривой в точке p — не что иное, как вектор скорости

$$\gamma'(t_0)=(\gamma_1'(t_0),\ldots,\gamma_n'(t_0)).$$

Прямая, проходящая через точку $p=\gamma(t_0)$ вдоль вектора $\gamma'(t_0)$ — это касательная прямая к кривой в точке p. Если $\gamma'(t_0)$ — нулевой вектор, то касательную прямую определить не удастся; далее мы будем считать, что все касательные векторы ненулевые — точка движется по кривой с ненулевой скоростью. См. рис. 6.

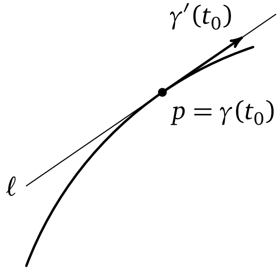

Рис. 6. Касательный вектор $\gamma'(t_0)$ и касательная прямая ℓ

Для кривых в проективном пространстве мы не будем пытаться определить касательные векторы (это можно, но нам не потребуется), а определим сразу касательные прямые. Если все ту же кривую (3.1) в $\mathbb{R}^n$ рассмотреть как кривую в $\mathbb{RP}^n$, то можно считать, что она задана как

$$t \mapsto v(t) = (1, \gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)).$$

Если касательную к ней в точке $p = \gamma(t_0)$, то есть прямую, проходящую через p в направлении $\gamma'(t_0)$, дополнить бесконечно удаленной точкой, то получится прямая в $\mathbb{RP}^n$; ей соответствует двумерное подпространство в $V = \mathbb{R}^{n+1}$, порожденное векторами

$$v(t_0) = (1, \gamma_1(t_0), \ldots, \gamma_n(t_0))$$

и

$$(0, \gamma_1'(t_0), \ldots \gamma_n'(t_0)) = v'(t_0).$$

В общем случае, когда кривая в $\mathbb{P}(V)$ задана как отображение $t \mapsto v(t)$, также определим касательную прямую «в момент времени t_0» (т. е. в точке, соответствующей $v(t_0)$) как прямую в $\mathbb{P}(V)$, которой соответствует двумерное подпространство в V, порожденное векторами $v(t_0)$ и $v'(t_0)$. Поскольку задание кривой в $\mathbb{P}(V)$ как отображения из интервала в V неоднозначно, надо проверить, что касательная прямая от этого задания не зависит. И действительно, если $\tilde{v}(t) = \varphi(t)v(t)$ — другое задание той же кривой (где φ — не обращающаяся в нуль функция), то $\tilde{v}'(t) = \varphi'(t)v(t) + \varphi(t)v'(t)$, и ясно, что пары векторов

$$(v(t_0), v'(t_0)) \quad \text{и} \quad (\varphi(t_0)v(t_0), \varphi'(t_0)v(t_0) + \varphi(t_0)v'(t_0))$$

задают одно и то же векторное подпространство в V. См. рис. 7.

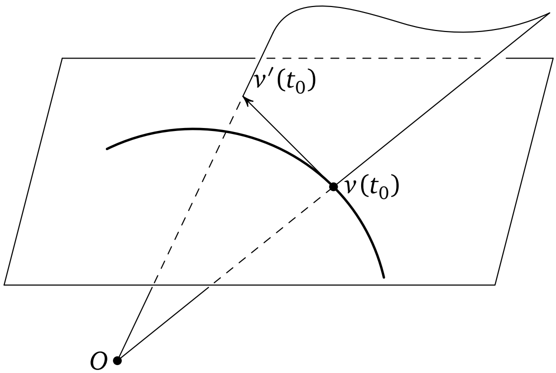

Рис. 7. Двумерная плоскость в V, соответствующая касательной прямой в $\mathbb{P}(V)$, порождена прямыми $\overline{Ov(t_0)}$ и $\overline{Ov'(t_0)}$ ($\dim V = 3$, O — начало координат в V)

§ 4. Игра с умножением, или внешняя алгебра

Вернемся к задаче о задании координатами прямых в $\mathbb{R}^3$. Каждой прямой в $\mathbb{R}^3$ соответствует прямая в $\mathbb{RP}^3$ (см. задачу 2б); оказывается, что в данной ситуации удобнее работать с прямыми в проективном пространстве, так что координаты мы будем сопоставлять именно им. Если $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{P}(V)$, где V — четырехмерное пространство, то прямые в $\mathbb{RP}^3$ — то же, что двумерные векторные подпространства в V.

Итак, наша задача — научиться задавать координатами двумерные подпространства в четырехмерном векторном пространстве. Для этого нам понадобится одна алгебраическая конструкция.

Рассмотрим четырехмерное векторное пространство V. Так как это векторное пространство, его элементы можно умножать на числа. Давайте теперь поиграем в такую игру: представим себе, что векторы можно умножать не только на числа, но и друг на друга, так, чтобы выполнялись сочетательный (ассоциативный) и распределительный (дистрибутивный) законы.

Пусть (e_1, e_2, e_3, e_4) — базис пространства V. Ввиду дистрибутивности для определения умножения достаточно договориться, как умножать друг на друга базисные векторы e_1, e_2, e_3 и e_4. Давайте умножать их так, чтобы умножение было, как говорят, антикоммутативно. Это означает, что для любых двух базисных векторов вместо переместительного закона умножения выполняется тождество

$$e_i e_j = -e_j e_i. \tag{4.1}$$

Помимо антикоммутативности, никаких дополнительных условий накладывать не будем. Итак, в результате перемножения базисных векторов будут получаться новые выражения. Эти новые выражения будем также складывать друг с другом, умножать друг на друга, на векторы или на числа и т. п. Условимся, что при умножении наших выражений на числа переместительный закон умножения сохраняется, а в общем случае мы требуем выполнения только сочетательного и распределительного законов.

Задача 3. Заменим соотношение (4.1) на обычный переместительный закон умножения $e_i e_j = e_j e_i$; как в этом случае называются выражения, получаемые по тем же правилам из чисел и векторов $e_1, \ldots$ $\ldots, e_4$?

Сейчас мы посмотрим, что получится из нашего антикоммутативного умножения, но предварительно договоримся об обозначениях. Обычное умножение, как известно, обозначают точкой, причем точку эту часто опускают. Чтобы не спутать антикоммутативное умножение с обычным, принято обозначать его знаком $\wedge$ и никогда этот знак не опускать.

Итак, что же у нас получится (помимо чисел, которые были изначально)? Во-первых, можно базисные векторы друг на друга не умножать, а умножать их только на числа. Тогда получится множество выражений вида $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$. Это все то же векторное пространство V — пока что ничего нового.

Теперь попробуем поумножать базисные векторы друг на друга. Во-первых, отметим, что из тождества (4.1) вытекает, что «квадрат» каждого вектора равен нулю:

$$e_i \wedge e_i = -e_i \wedge e_i \quad \Rightarrow \quad e_i \wedge e_i = 0. \tag{4.2}$$

Далее, из того же тождества ясно, что при перемножении двух разных векторов достаточно рассматривать произведения, в которых вектор с меньшим номером идет первым. Таких произведений всего шесть:

$$e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_1 \wedge e_4,\ e_2 \wedge e_3,\ e_2 \wedge e_4,\ e_3 \wedge e_4.$$

Шестимерное векторное пространство, порожденное этими произведениями, обозначается $\bigwedge^2 V$, а его элементы называются *бивекторами*.

Предложение 1. *Если f_1, f_2, f_3, f_4 — другой базис пространства V, то*

$$f_1 \wedge f_2,\ f_1 \wedge f_3,\ f_1 \wedge f_4,\ f_2 \wedge f_3,\ f_2 \wedge f_4,\ f_3 \wedge f_4$$

также образуют базис пространства $\bigwedge^2 V$.

В самом деле, этих бивекторов тоже шесть, и при этом ясно, что каждый $e_i \wedge e_j$ выражается через всевозможные $f_k \wedge f_l$ и каждый $f_k \wedge f_l$ выражается через всевозможные $e_i \wedge e_j$. Нетрудно выяснить и то, как именно они выражаются:

Задача 4. Пусть $u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$, $v = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4$. Покажите, что в произведении $u \wedge v$ коэффициент при $e_i \wedge e_j$ равен $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$.

Если перемножать базисные векторы по три, то опять-таки достаточно рассматривать произведения, в которых векторы идут в порядке возрастания номеров. Ясно, что ненулевых среди таких произведений всего четыре:

$$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,\ e_1 \wedge e_2 \wedge e_4,\ e_1 \wedge e_3 \wedge e_4,\ e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

Эти произведения порождают четырехмерное векторное пространство, которое обозначается $\bigwedge^3 V$.

Если перемножать базисные векторы по четыре, то, с точностью до знака, единственное ненулевое произведение — это $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$. Этим произведением порождается одномерное векторное пространство (множество выражений вида $\lambda e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ для всевозможных чисел λ), обозначающееся, как нетрудно догадаться, $\bigwedge^4 V$. Наконец, при перемножении пяти и более базисных векторов с неизбежностью получится нуль: среди них найдутся два одинаковых; переставляя сомножители (в результате чего в худшем случае изменится знак), можно добиться того, чтобы эти два одинаковых вектора стояли рядом, и тогда произведение будет равно нулю ввиду формулы (4.2).

Итак, мы исчерпали все, что может получиться из чисел и векторов $e_1, \ldots, e_4$, если перемножать векторы с соблюдением тождеств $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$. Получающийся объект оказался не слишком велик: это векторное пространство размерности $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ (самое первое слагаемое учитывает числа, то есть выражения, в которых e_1, e_2, e_3 и e_4 вообще не участвуют). Это шестнадцатимерное пространство называется *внешней алгеброй* пространства V и обозначается $\bigwedge(V)$; умножение в этой алгебре, которое мы обозначаем знаком $\wedge$ (это общепринятое обозначение), называется *внешним умножением*.

Для всего сказанного выше совершенно не важно, что пространство V именно четырехмерно. Если $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис векторного пространства V, то точно так же можно определить пространства $\bigwedge^k V$ при $1 \leqslant k \leqslant n$ ($\bigwedge^1 V$ — это просто V) и внешнюю алгебру $\bigwedge(V)$.

Задача 5. Пусть $\dim V = n$. Найдите размерности всех пространств $\bigwedge^k V$ и внешней алгебры $\bigwedge(V)$.

Посмотрим еще, как во внешней алгебре обстоят дела с переместительным законом умножения. По условию, если при умножении двух базисных векторов переставить сомножители, то знак изменится. То же самое происходит при перемножении любых двух векторов: если $u, v \in V$, то $u \wedge v = -v \wedge u$. Это сразу следует из задачи 4 (при перестановке двух строк определителя его знак меняется), но это и без вычислений ясно из распределительного закона умножения: если, как в указанной задаче, $u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$, $v = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4$, то при раскрытии скобок в $u \wedge v$ получится сумма слагаемых вида $a_i b_j e_i \wedge e_j$, а в $v \wedge u$ — сумма слагаемых вида $a_i b_j e_j \wedge e_i$, отличающихся от соответствующих слагаемых в $u \wedge v$ только знаком. А вот если умножать вектор и бивектор, то, наоборот, снова имеет место коммутативность: если $v \in V$, $\omega \in \bigwedge^2 V$, то $v \wedge \omega = \omega \wedge v$. В самом деле, ввиду распределительного закона умножения достаточно проверить это для случая, когда $v = e_i$ — базисный вектор, а $\omega = e_j \wedge e_k$ — произведение двух базисных векторов, а в этом случае равенство очевидно:

$$(e_j \wedge e_k) \wedge e_i = -e_j \wedge (e_i \wedge e_k) = -(-e_i \wedge e_j) \wedge e_k = e_i \wedge (e_j \wedge e_k).$$

Общая закономерность описана в следующей задаче.

Задача 6. Пусть $\omega \in \bigwedge^k V$, $\eta \in \bigwedge^l V$. Покажите, что:

- $\omega \wedge \eta = \eta \wedge \omega$, если хотя бы одно из чисел k или l четно;
- $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$, если и k, и l нечетны.

Внешняя алгебра трехмерного пространства на самом деле знакома читателю из курса аналитической геометрии. В самом деле, пусть $\mathbb{R}^3$ — обычное трехмерное евклидово пространство с ортонормированным базисом из векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$. Тогда $\bigwedge^2\mathbb{R}^3$ — тоже трехмерное пространство. Отождествим $\mathbb{R}^3$ и $\bigwedge^2\mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} \mapsto \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k} \mapsto \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i} \mapsto \boldsymbol{j}.$$

Задача 7. Покажите, что при таком отождествлении выполнено тождество $v_1 \wedge v_2 = v_1 \times v_2$ (в правой части стоит векторное произведение); в частности, площадь параллелограмма, натянутого на векторы v_1 и v_2, равна $|v_1 \wedge v_2|$ (длине вектора в $\mathbb{R}^3$, отождествляемого с $v_1 \wedge v_2$).

Задача 8. Покажите, что объем параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2 и v_3, равен $|v_1 \wedge v_2 \wedge v_3|$.

(Для педантов — пояснение к условию последней задачи. Внешнее произведение $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ имеет вид $c \cdot \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}$; число $|v_1 \wedge v_2 \wedge v_3|$ — не что иное, как $|c|$.)

§ 5. Плюккеровы координаты

Вернемся теперь к задаче о координатах прямой в пространстве. Как мы объясняли в § 2, задать прямую в трехмерном проективном пространстве — все равно что задать двумерное векторное подпространство в четырехмерном векторном пространстве V. Пусть $L \subset V$ — такое подпространство. Выберем в нем какой-нибудь базис (u, v) и положим $\omega = u \wedge v$. Если (u', v') — другой базис в V, то бивектор $\omega' = u' \wedge v'$ может отличаться от ω, но не очень сильно: если

$$u' = au + bv, \quad v' = cu + dv,$$

то

$$\omega' = (au + bv) \wedge (cu + dv) = ac\, u \wedge u + ad\, u \wedge v + bc\, v \wedge u + bd\, v \wedge v = \\ = ad\, u \wedge v - bc\, u \wedge v = (ad - bc) u \wedge v = (ad - bc)\omega$$

(ср. с задачей 4), так что при другом выборе базиса в V внешнее произведение его элементов умножается на константу.

Задача 9. Пусть теперь L — это произвольное k-мерное векторное подпространство в n-мерном векторном пространстве V, и пусть $(e_1, \ldots, e_k)$, $(e'_1, \ldots, e'_k)$ — два его базиса. Покажите, что

$$e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_k = d(e_1 \wedge \ldots \wedge e_k),$$

где d — определитель матрицы перехода между этими базисами.

Итак, каждому двумерному подпространству в V мы сопоставили элемент из $\bigwedge^2 V$, определенный с точностью до пропорциональности, — внешнее произведение двух его образующих. Покажем, что разным подпространствам соответствуют непропорциональные бивекторы. В самом деле, если L_1 и L_2 — различные двумерные подпространства в V, то либо они пересекаются только по нулю, либо они пересекаются по одномерному подпространству. В первом случае выберем базис (f_1, f_2) в L_1 и базис (f_3, f_4) в L_2. Тогда (f_1, f_2, f_3, f_4) — базис в V, и предложение 1 показывает, что бивекторы

$$f_1 \wedge f_2,\ f_1 \wedge f_3,\ f_1 \wedge f_4,\ f_2 \wedge f_3,\ f_2 \wedge f_4,\ f_3 \wedge f_4$$

образуют базис в $\bigwedge^2 V$, так что $f_1 \wedge f_2$ и $f_3 \wedge f_4$ заведомо непропорциональны. Во втором случае можно выбрать в V базис (f_1, f_2, f_3, f_4) таким образом, что $f_1 \in L_1 \cap L_2$, (f_1, f_2) — базис в L_1 и (f_1, f_3) — базис в L_2; бивекторы $f_1 \wedge f_2$ и $f_1 \wedge f_3$ будут непропорциональны по той же причине, что и выше.

Итак, всякому двумерному подпространству в V соответствует ненулевой элемент пространства $\bigwedge^2 V$, определенный с точностью до пропорциональности (иными словами, это точка пятимерного проективного пространства $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$), причем разным подпространствам соответствуют непропорциональные бивекторы (или, что то же самое, разные точки пятимерного проективного пространства). Если выбрать в V базис $e_1, \ldots, e_4$, то координаты бивектора, соответствующие подпространству $L \subset V$, в базисе, состоящем из произведений $e_i \wedge e_j$, называются плюккеровыми координатами подпространства $L \subset V$; если считать, что подпространству L соответствует точка пятимерного проективного пространства $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$, то плюккеровы координаты — не что иное, как однородные координаты этой точки.

Пример. Чтобы не забывать о том, зачем мы все затеяли, давайте найдем плюккеровы координаты прямой $\ell \subset \mathbb{R}^3$, проходящей через точку с координатами $(2; 1; 1)$ и параллельной вектору $(1; 2; -1)$. Вспомним, что $\mathbb{R}^3$ мы рассматриваем как подмножество в $\mathbb{RP}^3$; при этом точка в $\mathbb{R}^3$ с координатами $(x; y; z)$ рассматривается как точка в $\mathbb{RP}^3$ с однородными координатами $(1 : x : y : z)$. Пространство $\mathbb{RP}^3$ — проективизация пространства $V = \mathbb{R}^4$; выберем в нем «стандартный» базис

$$e_1 = (1; 0; 0; 0), \quad e_2 = (0; 1; 0; 0),$$
$$e_3 = (0; 0; 1; 0), \quad e_4 = (0; 0; 0; 1).$$

Мы знаем, что прямая ℓ проходит через точки с координатами $(2; 1; 1)$ и $(2 + 1; 1 + 2; 1 - 1)$. Если обозначить $u = (1; 2; 1; 1)$, $v = (0; 1; 2; -1)$, то прямой $\ell \subset \mathbb{R}^3$ соответствует двумерное подпространство $\ell \subset \mathbb{RP}^3$, порожденное векторами u и $u + v$. Найдем их внешнее произведение:

$$u \wedge (u + v) = u \wedge v = (e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4) \wedge (e_2 + 2e_3 - e_4).$$

После упрощений получим, что

$$u \wedge (u + v) = e_1 \wedge e_2 + 2e_1 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_4 + 3e_2 \wedge e_3 - 3e_2 \wedge e_4 - 3e_3 \wedge e_4 \quad (5.1)$$

(ср. с задачей 4). Значит, плюккеровы координаты прямой ℓ суть

$$(1 : 2 : -1 : 3 : -3 : -3),$$

если перечислять базисные (би)векторы в $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ в том же порядке, как в формуле (5.1).

Задача 10. Убедитесь, что все сказанное выше имеет место в любых размерностях: если $L \subset V$ — k-мерное векторное подпространство в n-мерном векторном пространстве и если $u_1, \ldots, u_k$ — базис в L, то элемент $u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$ с точностью до пропорциональности не зависит от выбора базиса и непропорциональным k-векторам соответствуют различные подпространства.

§ 6. Соотношения Плюккера

Всякому ли набору из шести однородных координат (равносильно: всякой ли точке в $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$) соответствует какое-нибудь двумерное подпространство в V (равносильно: прямая в $\mathbb{RP}^3$)? Оказывается, что далеко не всякому. В самом деле, подумаем, сколько параметров требуется, чтобы задать прямую в $\mathbb{RP}^3$. Ясно, что в данном случае вместо прямых в $\mathbb{RP}^3$ можно рассматривать более привычные прямые в $\mathbb{R}^3$: «лежащие на бесконечности» прямые в $\mathbb{RP}^3$, которым никакая прямая в $\mathbb{R}^3$ не соответствует, в расчет можно не принимать, поскольку «общая» прямая в проективном пространстве не может состоять из одних только бесконечно удаленных точек. Чтобы однозначно задать прямую в $\mathbb{R}^3$, достаточно задать вектор длины 1, параллельный прямой, и точку пересечения прямой с координатной плоскостью Oxy (прямые, параллельные этой плоскости, можно также в расчет не принимать: «общая» прямая с этой плоскостью пересекается; вместо плоскости Oxy можно, конечно, выбрать любую другую). Для задания точки на плоскости Oxy нужны два параметра (ее координаты), для задания единичного вектора — тоже два параметра, так что прямая в трехмерном пространстве зависит от четырех параметров. Поскольку пространство $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ пятимерно, получаем, что «почти все» плюккеровы координаты (равносильно: «почти все» точки в $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$) никакой прямой в пространстве не соответствуют. Значит, для того, чтобы шесть однородных координат были плюккеровыми координатами некоторой прямой, должны выполняться некоторые условия.

Чтобы найти эти условия, удобнее работать не с прямыми и координатами, а с двумерными подпространствами в V и бивекторами из $\bigwedge^2 V$. Непосредственно из определений вытекает, что бивектор соответствует подпространству тогда и только тогда, когда он является внешним произведением двух векторов; будем называть такие бивекторы *разложимыми*. Нам надо найти условие, равносильное тому, что данный бивектор разложим.

Есть очень простое необходимое условие разложимости: если бивектор $\omega \in \bigwedge^2 V$ разложим, то обязательно $\omega \wedge \omega = 0$. В самом деле, если $\omega = u \wedge v$, то

$$\omega \wedge \omega = u \wedge v \wedge u \wedge v = -u \wedge u \wedge v \wedge v = 0.$$

Несколько труднее доказать, что это необходимое условие является и достаточным.

Предложение 2. *Пусть V — четырехмерное векторное пространство. Бивектор $\omega \in \bigwedge^2 V$ разложим тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$.*

Чтобы доказать предложение 2, нам понадобится следующая классификация бивекторов:

Предложение 3. *Пусть V — четырехмерное векторное пространство и $\omega\in\bigwedge^2 V$. Тогда либо ω разложим, либо в V можно выбрать такой базис $f_1, \ldots, f_4$, что $\omega = f_1\wedge f_2 + f_3\wedge f_4$.*

Предложение 2 сразу вытекает из предложения 3: если ненулевой $\omega\in\bigwedge^2 V$ неразложим, то $\omega = f_1\wedge f_2 + f_3\wedge f_4$, откуда

$$\omega\wedge\omega = f_1\wedge f_2\wedge f_1\wedge f_2 + f_1\wedge f_2\wedge f_3\wedge f_4 + f_3\wedge f_4\wedge f_1\wedge f_2 + f_3\wedge f_4\wedge f_3\wedge f_4 = \\ = 2(f_1\wedge f_2\wedge f_3\wedge f_4);$$

так как $f_1, \ldots, f_4$ — базис в V, правая часть только ненулевым множителем (удвоенный определитель матрицы перехода — см. задачу 9) отличается от ненулевого элемента $e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4\in\bigwedge^4 V$, и получаем, что $\omega\wedge\omega\neq 0$, а нам только и надо было установить, что у неразложимого бивектора его «внешний квадрат» не равен нулю.

Остается доказать предложение 3. Сначала потренируемся с трехмерными пространствами.

Предложение 4. *Пусть W — трехмерное векторное пространство. Тогда всякий ненулевой элемент из $\bigwedge^2 W$ является внешним произведением двух непропорциональных векторов.*

В самом деле, всякий бивектор (в пространстве любой размерности) является суммой некоторого количества разложимых бивекторов (например, бивекторов вида $ce_i\wedge e_j$, где $e_1, \ldots, e_n$ — базис). Поэтому для доказательства предложения 4 достаточно убедиться, что если W трехмерно, то сумма двух разложимых бивекторов в $\bigwedge^2 W$ снова разложима. Пусть η_1, η_2 — разложимые бивекторы, которым соответствуют двумерные подпространства $L_1, L_2\subset W$; можно считать, что $L_1\neq L_2$ (иначе η_1 и η_2 пропорциональны и все очевидно), так что L_1 и L_2 пересекаются по одномерному пространству (рис. 8). Следовательно, в W есть такой

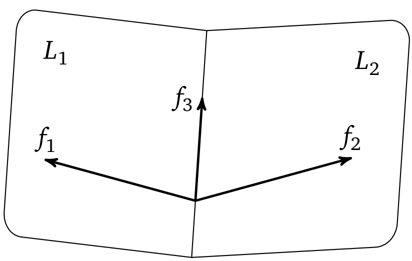

Рис. 8.

базис из векторов f_1, f_2 и f_3, что f_1 и f_3 порождают пространство L_1, а f_2 и f_3 порождают пространство L_2. Следовательно, $\eta_1=c_1(f_1\wedge f_3)$, $\eta_2=c_2(f_2\wedge f_3)$, откуда

$$\eta_1+\eta_2=(c_1f_1)\wedge f_3+(c_2f_2)\wedge f_3=(c_1f_1+c_2f_2)\wedge f_3,$$

и мы получаем разложимый бивектор. Итак, предложение 4 доказано.

Теперь можно доказать и предложение 3. Пусть V — пространство с базисом $e_1, \ldots, e_4$, и пусть $\omega\in\bigwedge^2V$. Так как шесть бивекторов $e_i\wedge e_j$, где $1\leqslant i<j\leqslant 4$, образуют базис пространства $\bigwedge^2V$, можно записать равенство

$$\begin{aligned}\omega=p_{12}e_1\wedge e_2+p_{13}e_1\wedge e_3+p_{14}e_1\wedge e_4+&\\ +p_{23}e_2\wedge e_3+p_{24}e_2\wedge e_4+p_{34}e_3\wedge e_4.&\qquad(6.1)\end{aligned}$$

Соберем в этом выражении слагаемые, содержащие e_1:

$$\omega=e_1\wedge(p_{12}e_2+p_{13}e_3+p_{14}e_4)+(p_{23}e_2\wedge e_3+p_{24}e_2\wedge e_4+p_{34}e_3\wedge e_4).$$

Первое слагаемое в этой сумме является разложимым бивектором, а вторая скобка — бивектор в трехмерном пространстве, порожденном e_2, e_3 и e_4. По предложению 4 этот бивектор также разложим. Итак, мы показали, что $\omega=\eta_1+\eta_2$, где η_1 и η_2 разложимы.

Пусть разложимым бивекторам η_1 и η_2 соответствуют двумерные подпространства L_1 и L_2. Если $L_1=L_2$, то η_1 и η_2 пропорциональны, так что ω разложим. Если L_1 и L_2 пересекаются по одномерному пространству, то рассуждение из доказательства предложения 4 показывает, что бивектор $\omega=\eta_1+\eta_2$ опять-таки разложим. Если, наконец, L_1 и L_2 пересекаются только по нулю, то пусть $\eta_1=f_1\wedge f_2$, $\eta_2=f_3\wedge f_4$; так как f_1, f_2 — базис в L_1, f_3, f_4 — базис в L_2, то f_1, f_2, f_3, f_4 — базис в V и $\omega=f_1\wedge f_2+f_3\wedge f_4$, что и требовалось.

Итак, мы доказали наконец, что ненулевой бивектор ω в четырехмерном пространстве разложим (и тем самым соответствует прямой в проективном пространстве) тогда и только тогда, когда $\omega\wedge\omega=0$.

Задача 11. Обобщите эти результаты на случай векторного пространства произвольной размерности. Именно, покажите, что если V — векторное пространство и $\omega\in\bigwedge^2V$, то существуют такие линейно независимые векторы $f_1, \ldots, f_{2k}$, что

$$\omega=f_1\wedge f_2+f_3\wedge f_4+\ldots+f_{2k-1}\wedge f_{2k};$$

выведите отсюда, что бивектор $\omega\in\bigwedge^2V$ разложим тогда и только тогда, когда $\omega\wedge\omega=0$.

Отметим, что предложение 2 обобщается на случай произвольной размерности объемлющего пространства, но не произвольной размерности подпространства. Если $k > 2$, то для разложимости элемента $\omega \in \bigwedge^k V$ условие $\omega \wedge \omega = 0$ необходимо, но, вообще говоря, недостаточно.

Задача 12. Пусть V — шестимерное пространство. Приведите пример элемента $\omega \in \bigwedge^3 V$, не являющегося внешним произведением трех векторов из V, но удовлетворяющего соотношению $\omega \wedge \omega = 0$.

В заключение выпишем условие разложимости бивектора в координатном виде. Если V четырехмерно и $\omega \in \bigwedge^2 V$ выражается через всевозможные $e_i \wedge e_j$ по формуле (6.1), то легко видеть, что

$$\omega \wedge \omega = 2(p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{23}p_{14})e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

Поэтому набор из шести чисел p_{ij} является набором плюккеровых координат некоторой прямой в $\mathbb{RP}^3$ тогда и только тогда, когда

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{23}p_{14} = 0. \tag{6.2}$$

Это уравнение называется уравнением Плюккера, а подмножество в $\mathbb{RP}^5$, им задаваемое, называется грассманианом $G(2,4)$ (встречаются и другие обозначения) или квадрикой Плюккера.

§ 7. Геометрия квадрики Плюккера

Обозначим квадрику Плюккера в $\mathbb{RP}^5$ через Q. Каждой прямой в $\mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{RP}^3$) соответствует точка на Q, и каждой точке на Q соответствует прямая в $\mathbb{RP}^3$. Поэтому свойствам прямых в трехмерном пространстве должны соответствовать свойства точек на Q. В дальнейшем будем пользоваться такими обозначениями: если α — точка на Q, то соответствующую прямую будем обозначать ℓ_α.

Выясним сначала, как на языке квадрики Плюккера записывается условие «две данные прямые пересекаются».

Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — две прямые в $\mathbb{RP}^3$. Им соответствуют двумерные подпространства L_1 и L_2 в V, а также разложимые бивекторы ω_1 и ω_2 в $\bigwedge^2 V$. Если ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются, то L_1 и L_2 пересекаются только по нулю, а если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются по точке (или совпадают), то L_1 и L_2 пересекаются по одномерному пространству или совпадают. Начнем со второго случая. Если L_1 и L_2 пересекаются по одномерному пространству, то, как мы уже несколько раз отмечали, в L_1 и L_2 можно выбрать базисы с общим базисным вектором: (f_1, f_3) в L_1 и (f_2, f_3) в L_2. Тогда прямой ℓ_1 соответствует бивектор $\omega = f_1 \wedge f_3$ и точка $\alpha \in \mathbb{RP}^5$, а прямой ℓ_2 — бивектор $f_2 \wedge f_3$ и точка $\beta \in \mathbb{RP}^5$. Точки прямой, проходящей через α и β, будут соответствовать линейным комбинациям

$$a\omega + b\eta = af_1 \wedge f_3 + bf_2 \wedge f_3 = (af_1 + bf_2) \wedge f_3;$$

все эти бивекторы разложимы, так что прямая $\alpha\beta$ полностью лежит на Q.

Если, напротив, L_1 и L_2 пересекаются только по нулю, то пусть (f_1, f_2) — базис в L_1 и (f_3, f_4) — базис в L_2. Тогда (f_1, f_2, f_3, f_4) — базис в V. Поэтому $f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 \wedge f_4 \neq 0$. Если теперь $\omega = f_1 \wedge f_2$ и $\eta = f_3 \wedge f_4$, то бивектор $a\omega + b\eta$ будет разложим, только если $a = 0$ или $b = 0$:

$$(a\omega + b\eta) \wedge (a\omega + b\eta) = a^2 \omega \wedge \omega + b^2 \eta \wedge \eta + 2ab\omega \wedge \eta = \\ = 2ab(f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 \wedge f_4).$$

Мы доказали такой факт:

Предложение 5. *Если α и β — различные точки на квадрике Плюккера, то прямые ℓ_α и ℓ_β пересекаются тогда и только тогда, когда прямая в $\mathbb{RP}^5$, соединяющая α и β, целиком лежит на квадрике Плюккера.*

Задача 13. Пусть точки $\alpha, \beta \in Q$ таковы, что прямая $\overline{\alpha\beta}$ лежит на Q. Покажите, что для всякой $\gamma \in \overline{\alpha\beta}$ прямая ℓ_γ проходит через точку $\ell_\alpha \cap \ell_\beta$ и лежит в плоскости, порожденной ℓ_α и ℓ_β.

Из сказанного выше вытекает, что на квадрике Плюккера лежит много прямых. Давайте еще посмотрим, лежат ли на ней плоскости.

Предложение 6. *Зафиксируем точку* $P \in \mathbb{RP}^3$. *Тогда множество точек на квадрике Плюккера, соответствующих прямым, проходящим через точку* P, *является плоскостью.*

Мы будем называть такие плоскости «плоскостями первого типа».

В самом деле, если вектор $u \in V$ соответствует точке P, то прямым, проходящим через P, соответствуют двумерные векторные подпространства в V с базисами (u, v), где вектор v не пропорционален u. Соответствующие разложимые бивекторы имеют вид $u \wedge v$. Всевозможные бивекторы вида $u \wedge v$ образуют трехмерное векторное подпространство в $\bigwedge^2 V$ (одна «единица размерности» теряется на векторах v, пропорциональных u; чтобы это увидеть, можно выбрать в V базис $(u = f_1, f_2, f_3, f_4)$ — тогда бивекторы $u \wedge v$ будут иметь вид $af_1 \wedge f_2 + bf_1 \wedge f_3 + cf_1 \wedge f_4)$. Стало быть, в пространстве $\mathbb{RP}^5$ этому трехмерному векторному пространству соответствует плоскость; она лежит на Q, так как пространство состоит из разложимых бивекторов.

Раз мы назвали какие-то плоскости плоскостями первого типа, значит, есть на квадрике Плюккера и плоскости второго типа. И действительно:

Задача 14. На квадрике Плюккера есть и плоскости, отличные от описанных выше. Дайте их описание в терминах множеств прямых в $\mathbb{RP}^3$ и покажите, что других плоскостей на Q нет.

Задача 15. Лежит ли на квадрике Плюккера трехмерная плоскость (хоть одна)?

Зададимся теперь следующей задачей. Пусть α — точка на квадрике Плюккера Q; рассмотрим всевозможные кривые (достаточно гладкие, как водится), лежащие на Q и проходящие через точку α. Выясним, что можно сказать про прямые, касательные к этим кривым в точке α. Пусть кривая задается отображением $t \mapsto \omega(t)$, где всякий $\omega(t)$ — разложимый бивектор; предположим, что $\omega(t_0) = \eta$ — бивектор, соответствующий точке α. Тогда, как объяснялось в § 3, касательная прямая к этой кривой соответствует двумерному подпространству в $\bigwedge^2 V$, порожденному $\omega(t_0) = \alpha$ и $\omega'(t_0)$. Поскольку наша кривая лежит на квадрике Плюккера, для всякого t выполнено тождество

$$\omega(t) \wedge \omega(t) = 0. \tag{7.1}$$

Поскольку координаты произведения $\omega \wedge \eta$, где $\omega, \eta \in \bigwedge^2 V$, являются суммами произведений некоторых координат бивекторов ω и η, при дифференцировании внешнего произведения бивекторов, зависящих от параметра, можно пользоваться обычным правилом дифференцирования произведения. Пользуясь этим, продифференцируем тождество (7.1) по t:

$$\omega'(t) \wedge \omega(t) + \omega(t) \wedge \omega'(t) = 0 \;\Rightarrow\; 2\omega(t) \wedge \omega'(t) = 0.$$

Подставляя $t = t_0$, получаем, что $\eta \wedge \omega'(t_0) = \omega(t_0) \wedge \omega'(t_0) = 0$. Подведем итог нашим рассуждениям:

Пусть α — точка на квадрике Плюккера Q, и пусть $\eta \in \bigwedge^2 V$ — бивектор, соответствующий точке α. Тогда для всякой кривой C, лежащей на Q и проходящей через α, касательная прямая к C в точке α соответствует двумерному подпространству в $\bigwedge^2 V$, порожденному бивекторами η и ν, где $\eta \wedge \nu = 0$.

Заметим, что пространство бивекторов $\omega \in \bigwedge^2 V$, для которых $\eta \wedge \omega = 0$, имеет размерность 5 (в самом деле, если выбрать базис $e_1, \ldots, e_4$ в V таким образом, что $\eta = e_1 \wedge e_2$, то $\eta \wedge \nu = 0$ тогда и только тогда, когда коэффициент при $e_1 \wedge e_2$ обращается в нуль). Этому пятимерному подпространству в $\bigwedge^2 V$ соответствует четырехмерное проективное подпространство в $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$, которое мы будем называть *касательным пространством к квадрике Плюккера в точке α, соответствующей бивектору η*, и обозначать $T_\alpha Q$. Касательные в точке α ко всем кривым, лежащим на Q и проходящим через α, лежат в $T_\alpha Q$.

Задача 16. Докажите, что и наоборот, всякая прямая, проходящая через α и лежащая в $T_\alpha Q$, является касательной к некоторой кривой, лежащей на Q и проходящей через α.

(*Указание*. Ввиду уравнения (6.2) квадрика Плюккера в подмножестве $\mathbb{R}^5 \subset \mathbb{RP}^5$, на котором однородную координату p_{34} можно считать равной единице, является графиком квадратичной функции $p_{12} = p_{13}p_{24} - p_{23}p_{14}$.)

Итак, касательные к кривым, лежащим на Q и проходящим через α, заполняют пространство $T_\alpha Q$. Давайте выясним, какие из этих прямых целиком лежат на Q. Пусть опять точке $\alpha \in Q$ (ей соответствует прямая $\ell_\alpha \subset \mathbb{RP}^3$) соответствует разложимый бивектор η; если точка $\beta \in Q$, которой соответствует разложимый бивектор η', лежит в $T_\alpha Q$, то $\eta \wedge \eta' = 0$; как мы знаем, это равносильно тому, что прямые ℓ_α и ℓ_β пересекаются. Мы доказали следующее предложение.

Предложение 7. *Пересечение $T_\alpha Q \cap Q$ состоит из всевозможных β, для которых $\ell_\alpha \cap \ell_\beta \neq \varnothing$.*

Теперь посмотрим на то же пересечение $T_\alpha Q \cap Q$ «с точки зрения самой квадрики Плюккера», рассматривая его элементы именно как точки в $\mathbb{RP}^5$, а не прямые в $\mathbb{RP}^3$. Из предложений 5 и 7 получается, что если $\beta \in T_\alpha Q \cap Q$, то и вся прямая $\overline{\alpha\beta}$ лежит на Q. Поэтому можно сказать еще и так.

Предложение 8. *Пересечение $T_\alpha Q \cap Q$ представляет собой объединение всех прямых, проходящих через α и лежащих на Q.*

Иными словами, $T_\alpha Q \cap Q$ — конус с вершиной α.

Задача 17. Покажите, что α — единственная вершина этого конуса (т. е. что нельзя найти другую точку α' с аналогичным свойством: если $\beta \in T_\alpha Q \cap Q$, то и $\overline{\alpha'\beta} \subset Q$).

Так как квадрика Плюккера Q задается одним квадратичным уравнением в $\mathbb{RP}^5$, конус $T_\alpha Q \cap Q$ также задается одним квадратичным уравнением в $\mathbb{RP}^4 = T_\alpha Q$. Иными словами, если $(x_0 : x_1 : \ldots : x_4)$ — однородные координаты в этом $\mathbb{RP}^4$, то конус $T_\alpha Q \cap Q$ задается уравнением

$$F(x_0, \ldots, x_4) = 0,$$

где F — некоторая квадратичная форма.

Задача 18. Форму F, как и всякую квадратичную форму с действительными коэффициентами, можно привести к виду $\pm y_1^2 \pm y_2^2 \pm \ldots \pm y_m^2$. Сколько слагаемых при этом получится? Сколько будет знаков «+» и знаков «−»?

Итак, в каждой точке квадрики Плюккера внутри касательного пространства лежит конус с вершиной в этой точке; более того, этот конус содержится не только в касательном пространстве, но и в самой квадрике Q; будем называть эти конусы *световыми конусами* (по аналогии со световыми конусами из специальной теории относительности). Мы попытались схематически изобразить это на рис. 9 (насколько можно изобразить на плоскости четырехмерный объект в пятимерном пространстве).

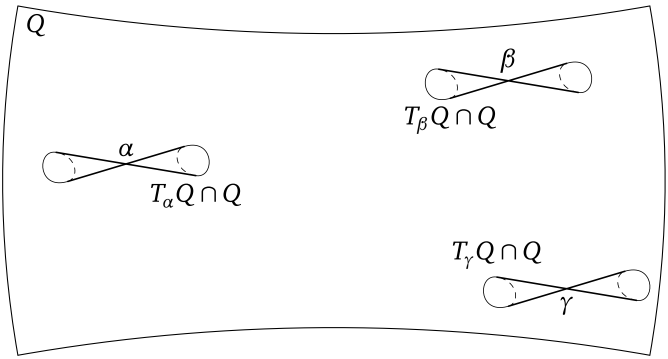

Рис. 9. Квадрика Плюккера и световые конусы

§ 8. Возвращение к семействам прямых

Пора вспомнить, ради чего мы все затеяли. Итак, пусть у нас задано семейство прямых в пространстве; как узнать, является ли оно касательным семейством (то есть семейством касательных к некоторой кривой)?

Чтобы с семейством прямых можно было работать, необходимо каким-то образом задать его формулами (без них не обойтись, даже если наша конечная цель — чисто геометрические условия). В свете того, что мы знаем о квадрике Плюккера, естественней всего было бы дополнить наши прямые бесконечно удаленными точками и после этого задать семейство прямых как кривую на квадрике Плюккера; в дальнейшем мы так и сделаем, но для начала будем задавать наши семейства прямых попроще. Именно, чтобы задать прямую ℓ в $\mathbb{R}^3$, достаточно выбрать на ней точку μ, а также выбрать ненулевой вектор v, параллельный прямой ℓ. Пусть теперь в $\mathbb{R}^3$ задано семейство прямых: каждому значению параметра t соответствует прямая ℓ_t. Для каждого t выберем точку $\mu(t)\in\ell_t$ и вектор $v(t)$, параллельный прямой ℓ_t; если зависимость ℓ_t от t «достаточно хорошая», что мы и будем предполагать, то можно выбрать $\mu(t)$ и $v(t)$ гладко зависящими от t. Оказывается, что на языке формул касательные семейства характеризуются следующим образом.

Предложение 9. *Если семейство прямых в $\mathbb{R}^3$, заданное семейством точек $\mu(t)$ и семейством задающих направление векторов $v(t)$, является касательным семейством, то*

$$v(t)\wedge v'(t)\wedge\mu'(t)=0 \quad \text{для всех } t. \tag{8.1}$$

Обратно, если условие (8.1) *выполнено, то семейство прямых является касательным семейством, либо все эти прямые проходят через одну точку, либо все они параллельны.*

В самом деле, рассмотрим семейство касательных к кривой C, заданной параметрически формулой $t\mapsto\gamma(t)$. Касательная к этой кривой в точке $A=\gamma(t)$ проходит через точку A и параллельна вектору $\gamma'(t)$. Поэтому при самом общем выборе точки и вектора направления для каждой кривой будут выполняться равенства

$$\mu(t)=\gamma(t)+f(t)\gamma'(t), \quad v(t)=g(t)\gamma'(t).$$

Стало быть,

$$v'(t)=g'(t)\gamma'(t)+g(t)\gamma''(t), \quad \mu'(t)=(1+f'(t))\gamma'(t)+f(t)\gamma''(t),$$

откуда

$$v'(t)\wedge\mu'(t)=h(t)\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)$$

(точное выражение для функции h не имеет значения); после внешнего умножения этого бивектора на $v(t)=g(t)\gamma'(t)$ с очевидностью получится нуль.

Обратно, пусть выполнено соотношение (8.1); наша задача — на каждой прямой ℓ_t, проходящей через точку $\mu(t)$ параллельно вектору $v(t)$, выбрать точку $\gamma(t)$ таким образом, чтобы кривая, образованная всеми этими точками, касалась прямой ℓ_t в точке $\gamma(t)$. По условию,

$$\gamma(t)=\mu(t)+f(t)v(t),$$

где f — некоторая функция от t: ее-то надо подобрать таким образом, чтобы вектор $\gamma'(t)$ был пропорционален $v(t)$ для всех t. Поскольку

$$\gamma'(t)=\mu'(t)+f'(t)v(t)+f(t)v'(t),$$

для этого достаточно, чтобы вектору $v(t)$ была пропорциональна сумма $\mu'(t)+f(t)v'(t)$. Стало быть, для каждого t надо найти число $f(t)$, для которого вектор $\mu'(t)+f(t)v'(t)$ пропорционален $v(t)$; так как соотношение (8.1) означает, что для каждого t векторы $v(t)$, $v'(t)$ и $\mu'(t)$ линейно зависимы, найти такие $f(t)$ всегда возможно, что и завершает доказательство.

Задача 19. В этом рассуждении мы кое-что «замели под ковер». Восстановите опущенные подробности; в частности, выясните, откуда могут появиться семейства параллельных прямых и семейства прямых, проходящих через одну точку, в нашем доказательстве не упомянутые.

Будем теперь переводить формульное условие (8.1) на геометрический язык. Это можно сделать не менее чем тремя разными способами. Для первого из этих способов существенно, что прямые берутся именно в $\mathbb{R}^3$, для второго лучше предполагать, что они лежат в $\mathbb{RP}^3$, третий же способ работает и в евклидовом, и в проективном пространстве.

8.1. Первая геометрическая формулировка: расстояния между прямыми

На простом языке эта формулировка звучит так: семейство прямых в $\mathbb{R}^3$ является касательным (или семейством прямых, проходящих через одну точку) тогда и только тогда, когда расстояния между соседними прямыми аномально малы.

Чтобы перейти от этой расплывчатой формулировки к точному математическому утверждению, рассмотрим произвольное семейство прямых ℓ_t в $\mathbb{R}^3$. Пусть ε — маленькое число. Что можно сказать про расстояние между ℓ_t и $\ell_{t+\varepsilon}$? Как и раньше, будем считать, что прямая ℓ_t проходит через точку $\mu(t)$ параллельно вектору $v(t)$; тогда расстояние между скрещивающимися прямыми ℓ_t и $\ell_{t+\varepsilon}$ равно высоте параллелепипеда, натянутого на векторы $v(t)$, $v(t+\varepsilon)$ и $\mu(t+\varepsilon)-\mu(t)$, если считать его основанием параллелограмм, натянутый на векторы $v(t)$ и $v(t+\varepsilon)$ (рис. 10).

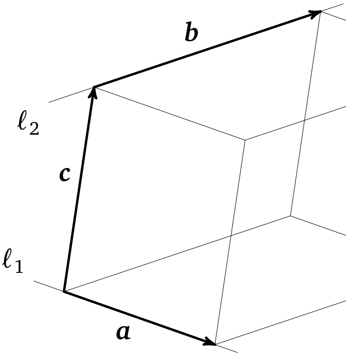

Рис. 10. Расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 равно $|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}|/|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|$

Если, как и в задачах 7 и 8, отождествить $\bigwedge^2\mathbb{R}^3$ с $\mathbb{R}^3$, а пространство $\bigwedge^3\mathbb{R}^3$ отождествить с $\mathbb{R}$, то объем этого параллелепипеда будет равен

$$|v(t)\wedge v(t+\varepsilon)\wedge(\mu(t+\varepsilon)-\mu(t))|,$$

а площадь его основания —

$$|v(t)\wedge v(t+\varepsilon)|.$$

Вспомним теперь определение производной: согласно этому определению,

$$v(t+\varepsilon)=v(t)+\varepsilon v'(t)+o(\varepsilon), \tag{8.2}$$

где «остаточный член» $o(\varepsilon)$ (являющийся в нашем случае вектором) стремится к нулю (при $\varepsilon\to 0$) быстрее, чем само ε:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}(v(t+\varepsilon)-v(t)-\varepsilon v'(t))=0.$$

Аналогично, $\mu(t+\varepsilon)=\mu(t)+\varepsilon\mu'(t)+o(\varepsilon)$ (разумеется, в данной формуле $o(\varepsilon)$ — не та же вектор-функция, что в формуле (8.2), но ее отношение к ε также стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, и это все, что нам надо будет знать про эти функции).

Имея в виду все сказанное, получаем, что объем интересующего нас параллелепипеда равен, с точностью до знака,

$$\begin{aligned}
&\nu(t)\wedge\nu(t+\varepsilon)\wedge(\mu(t+\varepsilon)-\mu(t))=\\
&\qquad=\nu(t)\wedge(\nu(t)+\varepsilon\nu'(t)+o(\varepsilon))\wedge(\varepsilon\mu'(t)+o(\varepsilon))=\\
&\qquad=\nu(t)\wedge(\varepsilon\nu'(t)+o(\varepsilon))\wedge(\varepsilon\mu'(t)+o(\varepsilon))=\\
&=\varepsilon^2\nu(t)\wedge\nu'(t)\wedge\mu'(t)+\varepsilon\cdot o(\varepsilon)\wedge\mu'(t)-\varepsilon\cdot o(\varepsilon)\wedge\nu'(t)+\varepsilon\cdot o(\varepsilon)\wedge o(\varepsilon)=\\
&\qquad=\varepsilon^2\nu(t)\wedge\nu'(t)\wedge\mu'(t)+o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Эти выкладки, видимо, нуждаются в некоторых комментариях. Во-первых,

$$\nu(t)\wedge(\nu(t)+\varepsilon\nu'(t)+o(\varepsilon))=\nu(t)\wedge(\varepsilon\nu'(t)+o(\varepsilon)),$$

поскольку $\nu(t)\wedge\nu(t)=0$. Во-вторых, напомним, что $o(\varepsilon)$ во второй скобке и $o(\varepsilon)$ в третьей скобке — это *разные* вектор-функции, хоть и обозначенные одинаково, так что мы не можем заменить $o(\varepsilon)\wedge o(\varepsilon)$ на нуль или вынести $o(\varepsilon)$ за скобку. Наконец, поскольку при внешнем умножении векторов их координаты перемножаются (а потом складываются), слагаемое $\varepsilon\cdot o(\varepsilon)\wedge\mu'(t)$ и аналогичные стремятся к нулю быстрее, чем ε^2, так что сумму этих слагаемых мы можем спокойно обозначить через $o(\varepsilon^2)$.

Аналогичным образом преобразуем площадь основания параллелепипеда (опять с точностью до знака):

$$\begin{aligned}
\nu(t)\wedge\nu(t+\varepsilon)=\nu(t)\wedge(\nu(t)+\varepsilon\nu'(t)+o(\varepsilon))=\varepsilon\nu(t)\wedge\nu'(t)+\nu(t)\wedge o(\varepsilon)=\\
=\varepsilon\nu(t)\wedge\nu'(t)+o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Стало быть, расстояние между ℓ_t и $\ell_{t+\varepsilon}$ равно

$$\pm\frac{\varepsilon^2\nu(t)\wedge\nu'(t)\wedge\mu'(t)+o(\varepsilon^2)}{\varepsilon\nu(t)\wedge\nu'(t)+o(\varepsilon)}=\pm\varepsilon\frac{\nu(t)\wedge\nu'(t)\wedge\mu'(t)}{\nu(t)\wedge\nu'(t)}+o(\varepsilon).$$

Если дробь в правой части этой формулы отлична от нуля, то получается, что расстояние между ℓ_t и $\ell_{t+\varepsilon}$ «имеет тот же порядок малости, что и ε»: отношение этого расстояния к ε стремится, при $\varepsilon\to 0$, к некоторому ненулевому пределу. Если же эта дробь обращается в нуль, то расстояние между ℓ_t и $\ell_{t+\varepsilon}$ стремится к нулю быстрее, чем ε: отношение этого расстояния к ε стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Однако же дробь равна нулю тогда и только тогда, когда равен нулю ее числитель, то есть $\nu(t)\wedge\nu'(t)\wedge\mu'(t)$, а равенство нулю этого выражения — не что иное, как знакомое нам условие (8.1)! Мы доказали такое предложение.

Предложение 10. *Семейство прямых* $\ell_t \subset \mathbb{RP}^3$ *является касательным (или семейством прямых, проходящих через одну точку) тогда и только тогда, когда расстояние между* ℓ_t *и* $\ell_{t+\varepsilon}$ *убывает быстрее, чем* ε*, то есть когда*

$$(\text{расстояние между } \ell_t \text{ и } \ell_{t+\varepsilon}) = o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \to 0, \tag{8.3}$$

или, иными словами,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\text{расстояние между } \ell_t \text{ и } \ell_{t+\varepsilon})}{\varepsilon} = 0.$$

Задача 20. В формулировке предложения 10 мы убрали оговорку «или является семейством параллельных прямых», и правильно сделали: для семейства параллельных прямых соотношение (8.3), как легко видеть, не выполняется. Разберитесь, как так вышло и где мы вас (немножко) обманули.

Прежде чем попрощаться с расстоянием между скрещивающимися прямыми, предлагаем читателю разобраться в одном софизме. Сначала напомним старую задачу.

Задача 21. Пусть f — такая функция на отрезке, что для всякого t выполнено соотношение

$$|f(t+\varepsilon) - f(t)| = o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{8.4}$$

Докажите, что f — постоянная.

Надо думать, все наши читатели эту задачу с успехом решат. Решив же ее, ответьте на следующий каверзный вопрос: почему функции, удовлетворяющие соотношению (8.4), обязаны быть константами, в то время как имеется много семейств прямых, не являющихся постоянными, но удовлетворяющих совершенно аналогичному соотношению (8.3)?

8.2. Вторая геометрическая формулировка: кривые на квадрике Плюккера

Пусть теперь $\{\ell_t\}$ — семейство прямых в $\mathbb{RP}^3$ (такое семейство получится из семейства прямых в $\mathbb{R}^3$, если дополнить каждую прямую лежащей на ней бесконечно удаленной точкой). Каждой из этих прямых соответствует точка α_t на квадрике Плюккера Q. Все вместе эти точки образуют кривую (обозначим ее Γ), лежащую на Q.

В случае, когда наше семейство $\{\ell_t\}$ — семейство касательных к некоторой кривой $C \subset \mathbb{RP}^3$, применяются такие обозначения и терминология. Кривую $\Gamma \subset Q$, представляющую собой множество всех касательных к кривой C, называют *гауссовым образом* кривой C, а отображение $\gamma : C \to Q$, ставящее в соответствие точке $x \in C$ точку $\alpha \in Q$, соответствующую касательной $T_x C$ к кривой C (в точке x), называется *гауссовым отображением*.

Вторая геометрическая переформулировка условия (8.1) выглядит таким образом.

Предложение 11. *Если кривая $\Gamma \subset Q$ является гауссовым образом некоторой кривой $C \subset \mathbb{RP}^3$, то для всякой точки $\alpha \in \Gamma$ касательная прямая $T_\alpha \Gamma$ (касательная к кривой Γ в точке α) целиком лежит на Q (то есть является образующей светового конуса с вершиной α).*

Обратно, если кривая $\Gamma \subset Q$ такова, что для каждой точки $\alpha \in \Gamma$ касательная прямая $T_\alpha \Gamma$ целиком лежит на Q, то либо Γ — гауссов образ некоторой кривой $C \subset \mathbb{RP}^3$, либо все прямые, соответствующие точкам $\alpha \in \Gamma$, проходят через одну точку (то есть кривая Γ лежит в «плоскости первого типа» — см. предложение 6).

Это предложение доказывается прямым вычислением. Именно, рассмотрим семейство прямых, соответствующее кривой Γ, и удалим у них бесконечно удаленные точки — получится семейство прямых в $\mathbb{R}^3$. Пусть, как и ранее, прямая ℓ_t из этого семейства проходит через точку $\mu(t)$ и параллельна вектору $\nu(t)$. Запишем эти вектор-функции в координатах: $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t))$ и $\nu(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t), \nu_3(t))$. Если наше $\mathbb{RP}^3$ — проективизация четырехмерного векторного пространства V, то двумерное подпространство в V, соответствующее прямой ℓ_t, порождено векторами

$$\tilde{\mu}(t) = (1, \mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t)) \quad \text{и} \quad \tilde{\nu}(t) = (0, \nu_1(t), \nu_2(t), \nu_3(t)).$$

Стало быть, кривая Γ на квадрике Плюккера $Q \subset \mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ задается параметрически как

$$t \mapsto \tilde{\mu}(t) \wedge \tilde{\nu}(t),$$

а касательная прямая к ней (то есть двумерное векторное подпространство в $\bigwedge^2 V$) порождена бивекторами

$$\omega(t) = \tilde{\mu}(t) \wedge \tilde{\nu}(t) \quad \text{и} \quad \eta(t) = (\tilde{\mu}(t) \wedge \tilde{\nu}(t))' = \tilde{\mu}'(t) \wedge \tilde{\nu}(t) + \tilde{\mu}(t) \wedge \tilde{\nu}'(t);$$

по построению бивектор $\omega(t)$ разложим.

Когда же прямая в $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$, порожденная бивекторами ω (разложимым) и η, будет целиком лежать на квадрике Плюккера? Для этого необходимо и достаточно, чтобы для всякого числа x выполнялось равенство

$$(\omega + x\eta) \wedge (\omega + x\eta) = 0,$$

или, раскрывая скобки,

$$\omega \wedge \omega + 2x\omega \wedge \eta + x^2 \eta \wedge \eta = 2x\omega \wedge \eta + x^2 \eta \wedge \eta = 0.$$

Поскольку квадратный трехчлен тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю, это условие равносильно тому, что

$$\omega \wedge \eta = \eta \wedge \eta = 0.$$

Поскольку бивектор $\eta(t)$ — сумма двух слагаемых, одно из которых содержит (внешним) множителем вектор $\tilde{\nu}(t)$, а другое — вектор $\tilde{\mu}(t)$, а бивектор $\omega(t)$ является внешним произведением этих двух векторов, равенство $\omega(t) \wedge \eta(t) = 0$ выполняется автоматически. Стало быть, условие «все касательные к кривой Г лежат на квадрике Плюккера» равносильно условию $\eta(t) \wedge \eta(t) = 0$ (при всех t). Поскольку, очевидно,

$$\eta(t) \wedge \eta(t) = 2\tilde{\mu}(t) \wedge \tilde{\mu}'(t) \wedge \tilde{\nu}(t) \wedge \tilde{\nu}'(t),$$

условие $\eta(t) \wedge \eta(t) = 0$ равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) \\ 0 & \mu_1'(t) & \mu_2'(t) & \mu_3'(t) \\ 0 & \nu_1(t) & \nu_2(t) & \nu_3(t) \\ 0 & \nu_1'(t) & \nu_2'(t) & \nu_3'(t) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{при всех } t, \tag{8.5}$$

или, что равносильно,

$$\begin{vmatrix} \mu_1'(t) & \mu_2'(t) & \mu_3'(t) \\ \nu_1(t) & \nu_2(t) & \nu_3(t) \\ \nu_1'(t) & \nu_2'(t) & \nu_3'(t) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{при всех } t.$$

Однако же это последнее условие означает, что $\mu'(t) \wedge \nu(t) \wedge \nu'(t) = 0$ для всех t, а это в точности соотношение (8.1), являющееся необходимым и достаточным условием для того, чтобы семейство прямых было семейством касательных к некоторой кривой, или чтобы все прямые из этого семейства все проходили через одну точку, или все были параллельны. Поскольку два последние условия в проективном пространстве не отличаются, мы доказали предложение 11.

8.3. Третья геометрическая формулировка: развертывающиеся поверхности

Этот заключительный раздел несколько труднее, чем остальная часть брошюры.

Для третьей переформулировки условия (8.1) несущественно, рассматриваем мы семейство прямых в $\mathbb{R}^3$ или в $\mathbb{RP}^3$; в процессе доказательства нам будет технически удобнее работать с прямыми в $\mathbb{RP}^3$, но пока что будем говорить просто о прямых в трехмерном пространстве, не уточняя, евклидово это пространство или проективное.

Итак, пусть $\{\ell_t\}$ — семейство прямых в пространстве. Объединение всех прямых этого семейства является поверхностью. Такие поверхности, «заметаемые» семейством прямых, называются *линейчатыми*. Простейший нетривиальный пример линейчатой поверхности — «однополостный гиперболоид» $H \subset \mathbb{R}^3$, заданный уравнением $x^2+y^2-z^2=1$.

Задача 22. а) Найдите прямые, лежащие на H и проходящие через точку $(1; 0; 0)$.

б) Покажите, что через каждую точку поверхности H проходят две прямые.

Задача 23. Пусть ℓ — какая-нибудь прямая, лежащая на однополостном гиперболоиде H. Для каждой точки $x \in \ell$ рассмотрим плоскость $T_x\ell \subset \mathbb{R}^3$, касающуюся поверхности H в точке x.

а) Покажите, что все плоскости T_xH различны.

б) Покажите, что все плоскости T_xH содержат одну и ту же прямую (какую?).

Задача 24. В подписи к рис. 1 мы обещали, что в этом пункте мы встретимся с семейством прямых, полученных вращением одной из скрещивающихся прямых относительно другой. Выясните, где именно у нас идет речь о таком семействе.

Сформулируем теперь основное утверждение этого пункта.

Предложение 12. *Пусть $\{\ell_t\}$ — семейство прямых в трехмерном пространстве, и пусть X — поверхность в пространстве, заметаемая прямыми ℓ_t. Тогда следующие два утверждения равносильны.*

(1) *Семейство $\{\ell_t\}$ является касательным, или все прямые этого семейства проходят через одну точку, или все они параллельны.*

(2) *Если $\ell \subset X$ — любая из прямых семейства $\{\ell_t\}$, то для всех точек $x \in \ell$ касательная плоскость T_xX к поверхности X в точке x одна и та же.*

Это предложение также доказывается прямыми вычислениями. Как мы уже отмечали, нам будет удобно считать, что трехмерное пространство — это $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{P}(V)$, где V — четырехмерное векторное пространство. Семейство прямых $\{\ell_t\}$ будем, как и раньше, задавать выбором точки и направления. В качестве отмеченной точки на ℓ_t выберем точку в $\mathbb{RP}^3$, соответствующую ненулевому вектору $\mu(t) \in V$, а в качестве направления — ненулевой и не пропорциональный $\mu(t)$ вектор $\nu(t) \in V$ таким образом, чтобы прямая проходила через точки, соответствующие $\mu(t)$ и $\mu(t)+\nu(t)$ (таким образом, роль функций μ и ν в точности такая же, как при задании семейств прямых в $\mathbb{R}^3$). Поверхность X, заметаемая прямыми из нашего семейства, есть не что иное, как множество всевозможных точек вида $\mu(t)+uv(t)$, где t — параметр, задающий μ и v, а u — вообще произвольное число (оно задает точку на прямой, проходящей через $\mu(t)$ и $\mu(t)+v(t)$).

Пусть x — точка на поверхности X, соответствующая вектору $\mu(t)+$ $+uv(t)\in V$ (т. е. соответствующая паре значений параметра (t,u)). Касательной плоскости к X в точке x соответствует трехмерное векторное подпространство в V, порожденное самим вектором $\mu(t)+uv(t)$ и его частными производными по t и u (см. § 3). Стало быть, это пространство порождено векторами

$$\alpha(t,u)=\mu(t)+uv(t), \quad \beta(t,u)=\mu'(t)+uv'(t) \quad \text{и} \quad v(t);$$

условие (2) означает, что это трехмерное подпространство не зависит от u. В свете задачи 10 независимость этого подпространства от u означает, что внешнее произведение $\alpha(t,u)\wedge\beta(t,u)\wedge v(t)$ не зависит, с точностью до пропорциональности, от u. Преобразуем внешнее произведение (не забывая, что $v(t)\wedge v(t)=0$):

$$\alpha(t,u)\wedge\beta(t,u)\wedge v(t)=(\mu(t)+uv(t))\wedge(\mu'(t)+uv'(t))\wedge v(t)=$$
$$=\mu(t)\wedge(\mu'(t)+uv'(t))\wedge v(t)=\mu(t)\wedge\mu'(t)\wedge v(t)+u(\mu(t)\wedge v'(t)\wedge v(t)).$$

Векторы $A+u\cdot B$ пропорциональны при всех u тогда и только тогда, когда пропорциональны векторы A и B. Поэтому все 3-векторы $\mu(t)\wedge\mu'(t)\wedge v(t)+u(\mu(t)\wedge v'(t)\wedge v(t))$ (при фиксированном t и меняющемся u) пропорциональны друг другу тогда и только тогда, когда пропорциональны $\mu(t)\wedge\mu'(t)\wedge v(t)$ и $\mu(t)\wedge v'(t)\wedge v(t)$; ввиду той же задачи 10 это означает, что подпространства в V, порожденные тройками векторов $(\mu(t),\mu'(t),v(t))$ и $(\mu(t),v'(t),v(t))$, совпадают. Это, в свою очередь, означает, что четыре вектора $\mu(t)$, $\mu'(t)$, $v(t)$ и $v'(t)$ линейно зависимы (для всякого t), то есть что внешнее произведение

$$\mu(t)\wedge\mu'(t)\wedge v(t)\wedge v'(t)$$

тождественно равно нулю. С этим последним условием мы, однако, уже встречались: если перейти от однородных координат к евклидовым, то оно, как легко видеть, примет вид (8.5), а это, как мы видели, и есть необходимое и достаточное условие того, что семейство прямых ℓ_t является семейством касательных к некоторой кривой или же все прямые из этого семейства проходят через одну точку.

Итак, предложение 12 мы доказали. Остается обсудить то, что получилось.

Линейчатые поверхности, удовлетворяющие условию (2) из предложения 12, называются *развертывающимися*. Коль скоро далеко не всякое семейство прямых является касательным, далеко не всякая линейчатая поверхность является развертывающейся. Конкретный пример мы видели в задаче 23: однополостный гиперболоид развертывающимся не является, так как при движении вдоль прямолинейной образующей касательная плоскость к гиперболоиду меняется.

В нашем доказательстве мы не стесняясь манипулировали касательными плоскостями к поверхностям, заметаемым прямыми. Пора признаться, что мы в этом месте читателя немного обманывали: не во всякой точке такая касательная плоскость существует (как говорят, на линейчатой поверхности могут присутствовать «особые точки»). На языке формул это выражается в том, что пространство, порожденное вектором $\alpha(t,u)$ и двумя его частными производными, не обязательно является трехмерным. Тем не менее, для «общих» значений параметров (t,u) касательная плоскость существует и наши рассуждения корректны.

Задача 25. Пусть X — поверхность, заметаемая касательными к пространственной прямой C. Тогда, очевидно, $C \subset X$. Покажите, что всякая точка кривой C является особой точкой поверхности X.

Напоследок скажем, что условие (2) из предложения 12 — не единственное и не самое интересное описание развертывающихся поверхностей. Чтобы сформулировать действительно интересный результат, дадим такое определение.

Пусть X — поверхность в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{RP}^3$; назовем *гауссовым* отображение, которое ставит в соответствие точке $x \in X$ касательную плоскость T_xX к поверхности X в точке x. Если x — «особая точка» поверхности, то плоскость T_xX не определена, так что мы определяем гауссово отображение только для «точек общего положения».

Рассмотрим теперь образ поверхности X при гауссовом отображении (то есть, попросту говоря, множество всех ее касательных плоскостей). Если X, например, развертывающаяся поверхность, то предложение 12 показывает, что этот образ одномерен: для всех точек $x \in L$, где L — любая «прямолинейная образующая» поверхности X, касательная плоскость одна и та же, так что множество касательных плоскостей имеет ту же размерность, что и семейство прямолинейных образующих, то есть одномерно. Оказывается, это общий факт:

Поверхность в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{RP}^3$ является развертывающейся тогда и только тогда, когда ее образ при гауссовом отображении одномерен (*а не двумерен, как можно было бы ожидать*).

Обратите внимание, что в части «тогда» этого утверждения a priori не предполагается, что поверхность X линейчатая (и вообще что она содержит хоть одну прямую!).

Другой интересный способ охарактеризовать развертывающиеся поверхности таков:

Поверхность $X \subset \mathbb{R}^3$ *является развертывающейся тогда и только тогда, когда ее можно получить изгибанием из нерастяжимого листа бумаги.*

Оба эти факта заслуживают отдельного рассказа. По поводу второго из них (возможности получения развертывающихся поверхнстей в результате изгибания листа бумаги) читатель может обратиться к лекции 13 в книге С. Л. Табачникова и Д. Б. Фукса «Математический дивертисмент» (М.: МЦНМО, 2011); впрочем, как популярно изложить *доказательство* этого факта, никто пока что, кажется, не придумал.

Наша же книжка на этом заканчивается.

Оглавление

Предисловие 3

§ 1. О чем эта книжка 4

§ 2. Проективные пространства 7

§ 3. Кривые и касательные в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{RP}^n$ 11

§ 4. Игра с умножением, или внешняя алгебра 13

§ 5. Плюккеровы координаты 17

§ 6. Соотношения Плюккера 19

§ 7. Геометрия квадрики Плюккера 23

§ 8. Возвращение к семействам прямых 27

Сергей Михайлович Львовский

Семейства прямых и гауссовы отображения

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 01.07.2013 г. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 2,5. Тираж 1000. Заказ .

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru