

Сколько есть способов разбить натуральное число в сумму нескольких слагаемых, если суммы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми? Оказывается, что на этот, казалось бы, элементарный вопрос нет простого ответа. Зато теория, начинающаяся с этого вопроса, оказывается очень интересной, а ее результаты находят применение в самых разных разделах математики и математической физики.

Автор — доцент факультета математики НИУ ВШЭ.

ЛЕТНЯЯ ШКОЛА
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Е. Ю. СМЕРНОВ

ДИАГРАММЫ ЮНГА,
ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ
И ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ
МАТРИЦЫ

ИЦНМО
2014

Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2013

Е. Ю. Смирнов

Диаграммы Юнга,
плоские разбиения
и знакочередующиеся матрицы

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 512.7+519.1
ББК 22.147+22.176
С50

С50 **Смирнов Е. Ю.**

Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопередающиеся матрицы. — М.: МЦНМО, 2014. — 64 с.

ISBN 978-5-4439-0137-4

Сколько есть способов разбить натуральное число в сумму нескольких слагаемых, если суммы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми? Оказывается, что на этот, казалось бы, элементарный вопрос нет простого ответа. Зато теория, начинающаяся с этого вопроса, оказывается очень интересной, а ее результаты находят применение в самых разных разделах математики и математической физики.

Настоящая брошюра написана по материалам лекций, прочитанных автором на летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2013 года. Она рассчитана на старшеклассников и студентов младших курсов.

ББК 22.147+22.176

Редакторы:

В. А. Клепцын, Г. А. Мерзон

ISBN 978-5-4439-0137-4

© Смирнов Е. Ю., 2014.

© МЦНМО, 2014.

Оглавление

Введение	4
Лекция 1. Разбиения	8
1.1. Разбиения и диаграммы Юнга	8
1.2. Напоминание о производящих функциях	9
1.3. Разбиения на нечетные и различные слагаемые	13
1.4. Пятиугольные числа	14
Лекция 2. q -биномиальные коэффициенты	18
2.1. Диаграммы Юнга и биномиальные коэффициенты	18
2.2. Определение q -биномиальных коэффициентов	18
2.3. Производящая функция Эйлера как следствие формулы для q -биномиальных коэффициентов	21
2.4. q -бином Ньютона	22
2.5. Тождество Якоби для тройного произведения	23
Лекция 3. Плоские разбиения и формула Макмагона	27
3.1. Плоские разбиения	27
3.2. Подсчет числа плоских диаграмм высоты 2	28
3.3. Детерминантная формула Линдстрёма—Гесселя—Вьенно	30
3.4. Определитель Вандермонда	34
3.5. Вычисление числа плоских разбиений в параллелепипеде	36
3.6. Производящие функции и формула Макмагона	38
3.7. Предельная форма формулы Макмагона	41
Лекция 4. Знакопередающиеся матрицы и их связь с плоскими разбиениями	43
4.1. Тождество Деснано—Якоби	43
4.2. Комбинаторное доказательство тождества Деснано—Якоби	45
4.3. «Конденсация определителей» по Доджсону	47
4.4. λ -определители и знакопередающиеся матрицы	48
4.5. Гипотеза о знакопередающихся матрицах	51
4.6. Плоские разбиения с дополнительными симметриями	54
4.7. Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения	57
Литература	61

Введение

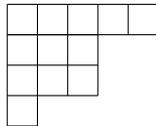
Разбиением натурального числа называется его представление в виде суммы натуральных слагаемых. При этом порядок следования слагаемых не учитывается, то есть разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Задача о подсчете количества разбиений $p(n)$ числа n на первый взгляд похожа на другие задачи элементарной комбинаторики — скажем, о числе перестановок или сочетаний — однако она оказывается более сложной: число разбиений не выражается простой замкнутой формулой.

Тем не менее, кое-что — и довольно многое! — о последовательности чисел разбиений сказать все-таки удастся. Так, например, их производящую функцию — степенной ряд $\sum p(n)q^n$ — оказывается возможным представить в виде бесконечного произведения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-1}.$$

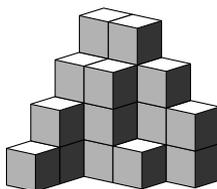
Впервые это было сделано Леонардом Эйлером в XVIII в. Ему же принадлежит еще один замечательный результат: вычисление ряда, обратного к этой производящей функции. Его коэффициенты, в отличие от коэффициентов предыдущего ряда, оказывается возможным выписать явно. Это утверждение называется пентагональной теоремой Эйлера.

Разбиения удобно представлять графически при помощи так называемых диаграмм Юнга. Это фигуры, состоящие из квадратов, причем число квадратов в очередной строке диаграммы равняется одному из слагаемых разбиения. Слагаемые при этом считаются упорядоченными по убыванию. Например, разбиению $5 + 3 + 3 + 1$ числа 12 соответствует такая диаграмма Юнга:



Итак, $p(n)$ — это количество диаграмм Юнга, состоящих из n квадратов.

У диаграмм Юнга можно рассмотреть и трехмерный аналог: это будут объемные фигуры, состоящие из кубиков, выстроенных в виде пирамидки «в углу комнаты» (в координатном октанте) таким образом, что снизу, сзади и слева от каждого кубика располагается либо кубик, либо координатная плоскость (т. е. «стена комнаты»). Пример трехмерной диаграммы Юнга, состоящей из 23 кубиков, изображен на рисунке.



Для числа трехмерных диаграмм Юнга тоже можно написать производящую функцию, которая оказывается похожей на формулу Эйлера. Это было сделано в начале XX в. британским военным и математиком Перси Макмагоном. Интересно, что аналог этой формулы в размерности 4 и выше неизвестен.

Как двумерные, так и трехмерные диаграммы Юнга возникают во многих задачах, в том числе в таких, которые на первый взгляд никак не связаны с разбиениями чисел. Мы расскажем об одной из них — гипотезе о знакопередающихся матрицах (*alternating sign matrix conjecture*), которая возникла в 1970-х гг. в работах Миллса, Роббинса и Рамси, вдохновленных трудами Ч. Л. Доджсона (он же — автор «Алисы» Льюис Кэрролл), и была доказана в середине 1990-х гг. Д. Зельбергером и Г. Купербергом. В этой гипотезе, вызвавшей значительный интерес специалистов по комбинаторике, речь идет о подсчете числа матриц определенного вида, элементами которых могут быть только нули и ± 1 . Таких матриц оказывается столько же, сколько трехмерных диаграмм Юнга, удовлетворяющих определенным условиям симметрии, хотя построить какую-либо естественную биекцию между этими двумя множествами никому пока что не удалось.

Об этой брошюре. Эта брошюра написана по материалам миникурса из четырех лекций, прочитанных автором на XIII летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2013 г. Большинство слушателей составляли студенты первых двух курсов матема-

тических специальностей. Содержание глав почти точно соответствует фактически читавшимся лекциям; при этом текст получился более подробным за счет того, что в нем в ряде мест восстановлены детали, опускавшиеся на лекциях ввиду нехватки времени.

Первые две лекции посвящены разбиениям и двумерным диаграммам Юнга. Они представляют собой законченный сюжет, не зависящий от остального текста; их материал доступен подготовленному школьнику. Третья и четвертая лекции рассчитаны скорее на младшекурсников; для их понимания нужно знать, что такое группа перестановок и определитель матрицы.

Помимо большого количества упражнений, приведенных в тексте, в конце каждой из первых трех лекций приводится по несколько задач. Эти задачи предлагались слушателям миникурса для самостоятельного решения. Сложность задач и упражнений довольно неравномерная, так что призываем читателя не отчаиваться, если какая-то из задач не будет получаться.

Для экспертов. Приведем краткое содержание брошюры, рассчитанное «на профессионалов». В первой лекции определяются разбиения, диаграммы Юнга, выводится эйлеровская производящая функция для числа разбиений и формулируется пентагональная теорема Эйлера. Этот материал является классическим и может быть найден в любом учебнике комбинаторики.

Вторая лекция посвящена доказательству пентагональной теоремы. Для этого мы излагаем теорию q -биномиальных коэффициентов, доказываем q -аналог бинома Ньютона и выводим из него формулу Якоби для тройного произведения — после чего пентагональная теорема получается как простое следствие из этой формулы. Такое доказательство является более сложным, чем классическое биективное доказательство пентагональной теоремы, изложенное, например, в замечательной статье Д. Б. Фукса [9], однако оно кажется нам более концептуальным, поскольку в нем естественно возникает ряд понятий и утверждений, представляющих и самостоятельный интерес.

В третьей лекции вводятся плоские разбиения (трехмерные диаграммы Юнга) и доказывается формула Макмагона для числа плоских разбиений в заданном прямоугольном параллелепипеде, а также ее q -аналог, описывающий производящую функцию для числа таких разбиений. Как следствие из этой формулы получается аналог

формулы Эйлера (также принадлежащий Макмагону) — производящая функция для плоских разбиений без каких-либо ограничений на их размер. Основным инструментом для доказательства этих результатов служит теорема Линдстрёма—Гесселя—Вьенно о непересекающихся путях.

Последняя, четвертая лекция носит обзорный характер; в ней сначала формулируется гипотеза о знакопередающихся матрицах, затем приводятся (без доказательства) результаты Макмагона, Макдональда и Эндрюса о числе плоских разбиений с различными симметриями и формулируется основной результат, принадлежащий Зельбергеру: число вполне симметричных самодополнительных плоских разбиений (TSSCPP) равняется числу знакопередающихся матриц вдвое меньшего порядка.

Благодарности. В первую очередь я хочу поблагодарить Г. А. Мерзона и В. А. Клепцына за неоценимую помощь и поддержку на всем протяжении моей работы над этой брошюрой. Без их искреннего интереса и доброжелательности, а также без наших многочасовых обсуждений она, скорее всего, никогда не была бы написана. Я также признателен всем, кто прочел первоначальный вариант текста и высказал свои замечания. Особенно ценную обратную связь я получил от П. Н. Пилявского, В. Е. Горина и А. А. Архиповой. Наконец, я благодарен фонду «Династия» и фонду Дж. Саймонса за частичную финансовую поддержку.

Я буду рад получить отзывы, замечания и комментарии от читателей. Направлять их можно по адресу esmirnov@hse.ru.

Видеоматериалы прочитанного в Дубне курса доступны в видеотеке сайта MathNet, <http://www.mathnet.ru>.

Лекция 1

Разбиения

§ 1.1. Разбиения и диаграммы Юнга

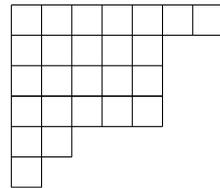
Разбиением натурального числа будем называть его представление в виде суммы натуральных слагаемых. При этом порядок слагаемых неважен: так, например, $2 + 3$ и $3 + 2$ — это одно и то же разбиение числа 5. Поэтому эти слагаемые можно считать нестрого убывающими. Вот формальное определение.

Определение 1.1. Разбиением натурального числа n называется набор натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, для которого $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$.

Иногда удобно считать, что разбиение — это невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots)$, в которой все λ_i начиная с некоторого номера равны нулю. Другими словами, к конечному набору λ_i дописывается бесконечный «хвост» нулей.

Разбиение можно представлять графически при помощи *диаграмм Юнга*. Диаграммой Юнга разбиения $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ называется подмножество четвертого¹ квадранта плоскости, состоящее из единичных квадратиков. Квадратики размещаются в последовательных строках, выровненных по левому краю, причем количество квадратиков в i -й строке равно λ_i (таким образом, длина каждой следующей строки не превышает длины предыдущей).

Пример 1.2. На рисунке изображена диаграмма Юнга, соответствующая разбиению $(7, 5, 5, 5, 2, 1)$ числа 25.



¹Это так называемый *англосаксонский способ* изображения диаграмм Юнга; альтернативой является *французский способ*, при котором диаграмма изображается в первом квадранте плоскости. Стоит также упомянуть и *русский способ*, при котором диаграмма поворачивается еще на 45 градусов, оказываясь в четверти плоскости, ограниченной графиком функции $y = |x|$. При этом «внешняя граница» диаграммы Юнга становится графиком кусочно линейной функции $y = f(x)$. Такое представление оказывается удобным, в частности, во многих асимптотических задачах, т. е. задачах, связанных с предельными формами диаграмм Юнга (подробнее об этом см., например, [2]).

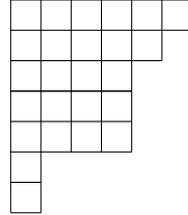
Отразим диаграмму Юнга λ относительно диагонали (т. е. прямой $x + y = 0$). Мы получим новую диаграмму Юнга, которую условимся обозначать через $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ и называть *сопряженной* к λ (иногда ее еще называют *транспонированной*). Ясно, что λ'_i равняется числу компонент исходного разбиения λ , больших или равных i .

Пример 1.3. Диаграмма $(6, 5, 4, 4, 4, 1, 1)$ является сопряженной к диаграмме из предыдущего примера.

Будем обозначать число разбиений числа n через $p(n)$. Также условимся считать, что $p(0) = 1$.

Нетрудно найти $p(n)$ для маленьких значений n (скажем, при $n \leq 5$). Они приведены в следующей таблице.

n	0	1	2	3	4	5
$p(n)$	1	1	2	3	5	7



Упражнение 1.4. Проверьте это и для каждого $n \leq 5$ нарисуйте все диаграммы Юнга, соответствующие разбиениям числа n .

Возникает естественный вопрос: существует ли какая-нибудь формула, с помощью которой можно найти $p(n)$ для данного n ? Оказывается, простой замкнутой формулы для числа разбиений (как, например, для биномиальных коэффициентов) найти не удастся. Однако кое-что про эту последовательность сказать все же получается: а именно, можно выписать ее *производящую функцию*. Этим мы сейчас и займемся.

§ 1.2. Напоминание о производящих функциях

В начале этого параграфа мы вкратце напомним некоторые сведения о производящих функциях и формальных степенных рядах и разберем несколько простых примеров их использования. Более подробный рассказ об этом читатель может найти во многих учебниках по комбинаторике — например, в книгах [6] и [7].

Пусть $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — произвольная числовая последовательность. Рассмотрим *формальный степенной ряд* от переменной q :

$$a_0 + a_1q + a_2q^2 + \dots + a_nq^n + \dots \quad (*)$$

Он называется *производящей функцией* для исходной последовательности.

Замечание 1.5. Мы будем работать с производящими функциями именно как с *формальными* степенными рядами — выражениями вида $(*)$, которые можно представлять себе как «многочлены бесконечной степени». Такие выражения можно, например, складывать и перемножать друг с другом. Отметим, что эти операции определены корректно: разумеется, для того чтобы сложить или перемножить два ряда, нужно произвести бесконечное число операций, однако же число операций, необходимых для нахождения каждого коэффициента в сумме или произведении, конечно. При этом нас не будут интересовать вопросы сходимости этих рядов при тех или иных числовых значениях q .

Упражнение 1.6. Пусть $A(q) = a_0 + a_1q + a_2q^2 + \dots$ — формальный степенной ряд, причем $a_0 \neq 0$. Докажите, что существует ряд $B(q)$, обратный к $A(q)$, — т. е. такой ряд, что $A(q) \cdot B(q) = 1$. Что происходит при $a_0 = 0$?

Иногда производящую функцию, выраженную формальным степенным рядом, получается записать в каком-либо ином виде (скажем, как рациональную функцию от q), что зачастую позволяет получить какие-то новые сведения о последовательности (a_0, \dots, a_n, \dots) .

Пример 1.7. Пусть n — фиксированное целое неотрицательное число, $a_k = \binom{n}{k}$. В частности, $a_k = 0$ при всех $k > n$. Тогда производящая функция этой последовательности будет многочленом

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}q + \binom{n}{2}q^2 + \dots + \binom{n}{n}q^n = (1+q)^n.$$

Это формула бинорма Ньютона.

Пример 1.8. Рассмотрим постоянную последовательность: $a_n = 1$ при всех $n \geq 0$. Тогда ее производящая функция есть геометрическая прогрессия:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Это равенство следует интерпретировать таким образом: ряд $1 - q$ является обратным (в смысле упражнения 1.6) к ряду $1 + q + q^2 + \dots$: если их перемножить, получится единица.

Упражнение 1.9. Докажите, что производящую функцию последовательности $a_n = n + 1$ можно представить в виде

$$1 + 2q + 3q^2 + \dots + (n+1)q^n + \dots = \frac{1}{(1-q)^2}$$

(попробуйте придумать несколько доказательств этого равенства).

Следующий пример показывает, как при помощи производящих функций найти явную формулу для последовательностей, заданных при помощи линейных рекуррентных соотношений. Простейшей такой последовательностью является знаменитая *последовательность Фибоначчи*.

Пример 1.10 (числа Фибоначчи). Пусть последовательность a_n задана рекуррентным соотношением $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, причем $a_0 = a_1 = 1$. Производящая функция для нее — это ряд

$$F(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 8q^5 + 13q^6 \dots$$

Из рекуррентного соотношения для a_n нетрудно вывести *функциональное уравнение* для производящей функции, которое будет иметь вид

$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2F(q)$$

(подумайте, откуда в правой части взялась единица). Тогда $F(q)$ оказывается представленной в виде рациональной функции:

$$F(q) = \frac{1}{1 - q - q^2}.$$

Упражнение 1.11. Разложите полученную дробь в сумму двух дробей вида $\frac{a}{q-b}$. Выведите отсюда *формулу Бине*, представляющую последовательность Фибоначчи в виде суммы двух геометрических прогрессий. Выясните, чему равен предел отношения двух соседних чисел Фибоначчи (это число называется *золотым сечением*).

Вернемся к разбиениям. Сначала ответим на следующий вопрос: чему равно количество разбиений числа n на слагаемые, не превосходящие заданной величины m ? Обозначим его через $p_m(n)$, а соответствующую производящую функцию через $P_m(q)$.

Ясно, что $P_1(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}$: каждое число единственным образом разбивается в сумму единиц.

Выясним, чему равно $p_2(n)$, т. е. число разбиений n в сумму единиц и двоек. Заметим для начала, что количество способов разбить число n в сумму слагаемых, каждое из которых *равно* двум, — это либо 1, если n четно, либо 0, если n нечетно. Соответствующая производящая функция равна

$$1 + q^2 + q^4 + \dots = \frac{1}{1 - q^2}.$$

Теперь легко видеть, что производящая функция $P_2(q)$ есть произведение $P_1(q)$ и $\frac{1}{1-q^2}$. Действительно, рассмотрим произведение

$$(1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^2 + q^4 + \dots).$$

Раскроем в нем скобки, но не будем приводить подобные члены. Каждое слагаемое после раскрытия скобок будет иметь вид $q^r \cdot q^{2s}$, где множитель q^r берется из первого сомножителя, а q^{2s} из второго. Каждому такому слагаемому можно сопоставить разбиение числа $r + 2s$ в сумму r единиц и s двоек. Получается, что после приведения подобных коэффициент при q^n действительно будет равняться $p_2(n)$.

Рассуждая аналогично, получаем следующий результат.

Предложение 1.12. Производящая функция $P_m(q)$ для количества разбиений числа n в сумму слагаемых, не превосходящих m , равняется

$$P_m(q) = \sum p_m(n)q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)} = \prod_{k=1}^m (1-q^k)^{-1}.$$

Иными словами, это производящая функция для диаграмм Юнга, длина строки которых не превосходит m . Чтобы получить производящую функцию для числа всех диаграмм Юнга, следует перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$. Мы получим знаменитую формулу Эйлера для числа разбиений.

Теорема 1.13 (Л. Эйлер). Производящая функция $P(q)$ для количества разбиений числа n задается следующим бесконечным произведением:

$$P(q) = \sum p(n)q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots} = \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^{-1}.$$

Замечание 1.14. Знак бесконечного произведения может напугать читателя, который ранее не имел дела с этим объектом. Однако бояться его следует не больше, чем бесконечных рядов. Действительно, на первый взгляд кажется, что для того, чтобы представить бесконечное произведение как ряд, нужно «перемножить бесконечное число скобок». Однако чтобы вычислить очередной (скажем, k -й) член этого ряда, нужно взять только конечное число (в данном случае k) первых сомножителей — остальные не окажут на коэффициент при q^k никакого влияния.

§ 1.3. Разбиения на нечетные и различные слагаемые

Вот еще одна задача, которую можно решить при помощи производящих функций. Рассмотрим следующий вопрос: сколькими способами можно разложить число в сумму *нечетных* слагаемых? Обозначим число таких способов через $p_O(n)$ (от слова «odd» — «нечетный»).

Например, $p_O(7) = 5$, так как для числа 7 есть 5 таких разбиений:

$$7 = 5 + 1 + 1 = 3 + 3 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Далее, выясним, сколькими способами можно разбить число в сумму попарно различных слагаемых. Обозначим его через $p_D(n)$ (от слова «distinct» — «различный»).

Найдем все такие разбиения числа 7:

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 4 + 2 + 1.$$

Их снова оказывается пять! Оказывается, это не совпадение.

Предложение 1.15. При любом n выполняется равенство $p_D(n) = p_O(n)$.

Доказательство. Докажем, что равны производящие функции $P_O(q) = \sum p_O(n)q^n$ и $P_D(q) = \sum p_D(n)q^n$.

Рассуждая точно так же, как и с произвольными разбиениями, получаем, что производящая функция $P_O(q) = \sum p_O(n)q^n$ равняется

$$P_O(q) = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^3} \cdot \frac{1}{1-q^5} \cdots$$

С разбиениями на различные слагаемые дело обстоит еще проще:

$$P_D(q) = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots$$

(убедитесь в этом самостоятельно).

Дальнейшее сводится к чисто алгебраическим преобразованиям. Умножим и поделим ряд $P_O(q)$ на бесконечное произведение $(1-q^2)(1-q^4)\dots$:

$$\begin{aligned} P_O(q) &= \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^3} \cdot \frac{1}{1-q^5} \cdots = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1-q^2}{1-q^2} \frac{1}{1-q^3} \cdot \frac{1-q^4}{1-q^4} \cdots = \\ &= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots} = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots = P_D(q). \quad \square \end{aligned}$$

Можно задать другой вопрос: пусть мы уже знаем, что разбиений на нечетные слагаемые столько же, сколько на различные. Можно ли построить какое-нибудь «естественное» взаимно однозначное отображение (биекцию) между наборами таких разбиений? Иначе говоря, как сопоставить взаимно однозначным образом каждому разбиению числа n на нечетные слагаемые его же разбиение на различные слагаемые?

Можно построить несколько таких биекций. Опишем одну из них на примере.

Пусть дано какое-то разбиение числа на нечетные слагаемые, например, такое:

$$23 = 7 + 5 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1.$$

Рассмотрим «центрированную диаграмму Юнга» — нарисуем симметричную относительно вертикальной оси диаграмму (см. рис. слева), в первой строке которой будут 7 точек, во второй и третьей — по 5 и так далее.

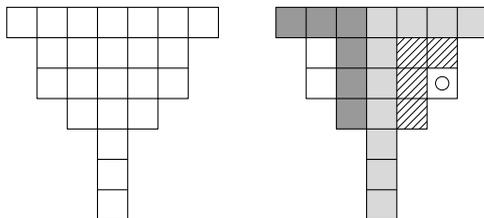


Рис. 1.1. Разбиение диаграммы Юнга на крюки

Теперь разобьем эту диаграмму на крюки, как показано на рис. 1.1 справа. Тем самым по разбиению числа 23 на нечетные слагаемые мы построили разбиение того же числа на *различные* слагаемые:

$$23 = 10 + 6 + 4 + 2 + 1.$$

§1.4. Пятиугольные числа

Рассмотрим бесконечное произведение, обратное к $P(q)$. Это произведение бесконечного числа двучленов:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k).$$

Упражнение 1.16. Вычислите первые 8 членов (до q^7 включительно) этого бесконечного произведения.

Эйлер вычислил первые несколько десятков членов этого произведения, и у него получилось следующее:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots$$

Здесь можно сделать сразу несколько интересных наблюдений. Во-первых, видно, что все коэффициенты этого ряда равны либо 0, либо ± 1 , причем по мере увеличения степени ненулевые члены встречаются все реже и реже. Во-вторых, все члены, кроме свободного, идут парами: два отрицательных, два положительных, потом снова два отрицательных и т. д. Разность между степенями в паре равняется номеру пары: сначала это единица (q и q^2), потом два (q^5 и q^7), потом три (q^{12} и q^{15}) и т. д.

Наконец, последовательность степеней 1, 5, 12, 22, 35, ... тоже была хорошо известна Эйлеру — это так называемые *пятиугольные числа*, которые равняются числу точек в пятиугольнике, сторона которого равна 1, 2, 3, ... точкам соответственно (см. рис. 1.2).

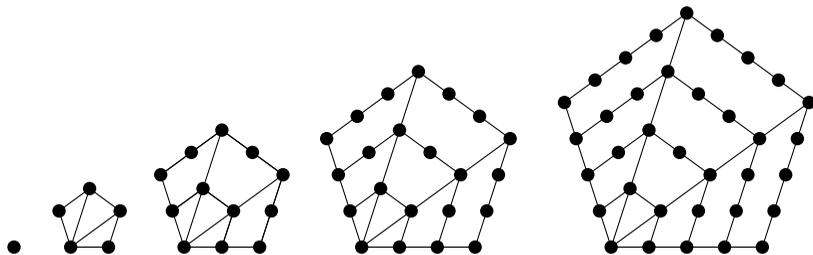


Рис. 1.2. Пятиугольные числа

Нетрудно видеть, что m -е пятиугольное число равняется $\frac{m(3m-1)}{2}$.

Оказывается, имеет место следующий результат. Его доказательство будет получено в следующей лекции.

Теорема 1.17 (пентагональная теорема Эйлера). *Ряд, обратный к ряду $P(q) = \sum p(n)q^n$, имеет вид*

$$P(q)^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}} \right).$$

Мы выведем пентагональную теорему Эйлера из формулы Якоби для тройного произведения. Другое доказательство этой замеча-

тельной теоремы читатель может найти, например, в статье [9] или книге [7].

В качестве следствия пентагональной теоремы Эйлера покажем, как с ее помощью можно выписать рекуррентное соотношение для числа разбиений.

Перемножив ряды $P(q)$ и $P(q)^{-1}$, мы получим единицу. Поэтому

$$\left(\sum p(k)q^k \right) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}} \right) \right) = 1.$$

С одной стороны, коэффициент при q^n для $n > 0$ в произведении $P(q)P(q)^{-1}$ равен нулю.

С другой стороны, если $\sum a_n q^n$ и $\sum b_m q^m$ — два степенных ряда, то коэффициент при q^k в их произведении равняется

$$a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_0 b_k = \sum a_{k-i} b_i.$$

Выпишем, чему равен коэффициент при q^n в левой части, и тем самым найдем соотношение для чисел разбиений $p(n)$:

$$p(n) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right) = 0$$

(здесь мы считаем, что $p(k) = 0$ при $k < 0$). Перенесем все, кроме первого слагаемого, в правую часть, и получим, что

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left(p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right).$$

Это рекуррентное соотношение, глубина которого постоянно увеличивается. Выпишем его при $6 \leq n \leq 12$ и с его помощью найдем соответствующие значения $p(n)$ (число разбиений при $n \leq 5$ мы уже знаем — см. упражнение 1.4).

$$p(6) = p(5) + p(4) - p(1) = 7 + 5 - 1 = 11;$$

$$p(7) = p(6) + p(5) - p(2) - p(0) = 11 + 7 - 2 - 1 = 15;$$

$$p(8) = p(7) + p(6) - p(3) - p(1) = 15 + 11 - 3 - 1 = 22;$$

$$p(9) = p(8) + p(7) - p(4) - p(2) = 22 + 15 - 5 - 2 = 30;$$

$$p(10) = p(9) + p(8) - p(5) - p(3) = 30 + 22 - 7 - 3 = 42;$$

$$p(11) = p(10) + p(9) - p(6) - p(4) = 42 + 30 - 11 - 5 = 56;$$

$$p(12) = p(11) + p(10) - p(7) - p(5) + p(0) = 56 + 42 - 15 - 7 + 1 = 77.$$

Задачи к лекции 1

Задача 1.1. а) Постройте биекцию между множеством самосопряженных (т. е. совпадающих со своим сопряженным) разбиений числа n и множеством его разбиений в сумму *различных нечетных* слагаемых.

б) Вычислите производящую функцию для числа самосопряженных разбиений.

Задача 1.2 (биекция Сильвестра). Докажите, что построенное в конце §1.3 соответствие действительно является биекцией между разбиениями числа n на нечетные и различные слагаемые.

Задача 1.3. Пусть a_n — число диаграмм Юнга с полупериметром n . Докажите, что производящая функция для этой последовательности равна $1 + \frac{q^2}{1-2q}$.

Задача 1.4. Обозначим через σ_n сумму делителей числа n , включая 1 и n ; так, например, $\sigma_6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$. Пусть $\Sigma(q)$ — производящая функция для последовательности σ_n :

$$\Sigma(q) = q + 3q^2 + 4q^3 + 7q^4 + 6q^5 + 12q^6 + 8q^7 + \dots$$

а) Докажите, что

$$\Sigma(q)P(q) = qP'(q),$$

где $P(q)$ — производящая функция для числа разбиений.

б) Выведите отсюда рекуррентное соотношение для числа σ_n .

Указание. Рассмотрите *логарифмическую производную* ряда $P(q)$:

$$(\ln P(q))' = \frac{P'(q)}{P(q)}.$$

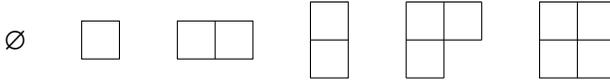
Лекция 2

q -биномиальные коэффициенты

§ 2.1. Диаграммы Юнга и биномиальные коэффициенты

Вот еще один вопрос о подсчете диаграмм Юнга: сколько существует диаграмм Юнга из не более чем m строк, если длина каждой из них не превосходит n ? Иначе говоря, сколько диаграмм Юнга можно вписать в прямоугольник размера $m \times n$?

Например, для квадрата 2×2 таких диаграмм шесть. Они приведены на рисунке.



Этот вопрос гораздо проще, чем подсчет производящей функции для числа всех диаграмм Юнга. Легко видеть, что каждая диаграмма Юнга в прямоугольнике ограничивается снизу ломаной, соединяющей левый нижний угол квадрата с правым верхним. Такая ломаная состоит из $m + n$ звеньев, из которых ровно m идут вверх, а n вправо. Итого количество таких ломаных равно количеству способов выбрать m вертикальных звеньев из $m + n$ (или, что то же самое, числу способов выбрать n горизонтальных звеньев), т. е. биномиальному коэффициенту $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$.

§ 2.2. Определение q -биномиальных коэффициентов

Назовем весом $|\lambda|$ диаграммы Юнга λ количество входящих в нее клеток. Будем решать ту же задачу — подсчета диаграмм Юнга внутри данного прямоугольника, — но уже с учетом весов. Составим производящую функцию, которую будем обозначать через $\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right]_q$:

$$\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right]_q = \sum_{\lambda \subset m \times n} q^{|\lambda|}.$$

Это многочлен с положительными коэффициентами, причем коэффициент при q^k равняется числу диаграмм Юнга веса k , вписанных в прямоугольник размера $m \times n$. Иногда, когда ясно, о каком q идет речь, мы будем опускать индекс q и писать просто $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$.

Этот многочлен будем называть q -биномиальным коэффициентом. Действительно, далее мы увидим, что эти многочлены ведут себя очень похоже на обычные числа сочетаний: для многих утверждений о биномиальных коэффициентах удастся получить их « q -аналоги», т. е. аналогичные утверждения о q -биномиальных коэффициентах.

Пример 2.1. Пусть $m = 1$. Тогда

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Пример 2.2. Пусть $m = n = 2$. Тогда $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$

(это легко увидеть, посмотрев на предыдущий рисунок, — на нем изображено по одной диаграмме весов 0, 1, 3 и 4 и две диаграммы веса 2). Этот многочлен можно разложить на множители, причем каждый множитель будет геометрической прогрессией:

$$1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4 = (1 + q + q^2)(1 + q^2).$$

Сформулируем несколько свойств q -биномиальных коэффициентов.

Предложение 2.3. Значение $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$ в единице равно $\binom{m+n}{m}$.

Это очевидно: если подставить в производящую функцию $q = 1$, каждая диаграмма Юнга вне зависимости от ее веса будет считаться с весом 1, т. е. значение многочлена будет давать общее количество диаграмм.

Предложение 2.4. $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}$.

Это следует из инвариантности производящей функции при отражении прямоугольника относительно главной диагонали (т. е. замены ширины на высоту и наоборот).

Предложение 2.5 (рекуррентное соотношение для q -биномиальных коэффициентов).

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную диаграмму Юнга λ . Она ограничена некоторой ломаной; посмотрим на ее первое звено. Возможны два варианта: либо оно вертикальное, и тогда остаток ломаной ограничивает диаграмму Юнга, равную λ , в прямоугольнике размера $(m-1) \times n$; либо оно горизонтальное, и тогда остаток ломаной ограничивает некоторую диаграмму Юнга в прямоугольнике размером $m \times (n-1)$, а λ получается из нее добавлением слева столбца высоты m . \square

Это соотношение является обобщением соотношения

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}$$

для биномиальных коэффициентов.

Упражнение 2.6. Докажите другой q -аналог того же соотношения:

$$\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} m+n-1 \\ m \end{matrix} \right] + q^n \left[\begin{matrix} m+n-1 \\ m-1 \end{matrix} \right].$$

Зная данное рекуррентное соотношение, мы можем восстановить все q -биномиальные коэффициенты. Их тоже можно записать в виде треугольника Паскаля, очередная строчка в котором выражается через предыдущие:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & 1+q & & & \\ & 1 & & & & & & & 1 & \\ 1 & & 1+q+q^2 & & & & 1+q+q^2 & & & 1 \\ 1 & 1+q+q^2+q^3 & & & 1+q+2q^2+q^3+q^4 & & & & 1+q+q^2+q^3 & 1 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Оказывается, для q -биномиальных коэффициентов также имеется обобщение формулы $\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$. Но для того чтобы ее сформулировать, нам предстоит ввести понятие q -факториала.

Определение 2.7. Пусть $n \geq 0$. Назовем q -аналогом целого числа n многочлен

$$[n] = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Тогда q -факториал числа n определяется по правилу

$$[0]! = 1, \quad [n]! = [n-1]! \cdot [n].$$

Отметим, что значения многочленов $[n]$ и $[n]!$ в единице равны n и $n!$ соответственно.

Упражнение 2.8. Докажите, что

$$\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m+n]!}{[m]! \cdot [n]!}.$$

Указание. Воспользуйтесь рекуррентным соотношением и равенством $[m+n] = [m] + q^m[n]$.

Утверждение упражнения 2.8 можно переписать в следующем виде, заменив каждое из чисел $[k]$ на $\frac{1-q^k}{1-q}$.

Предложение 2.9.

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{m+n})(1-q^{m+n-1})\dots(1-q^{n+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\dots(1-q)}.$$

Рассмотрев несколько примеров q -биномиальных коэффициентов, можно заметить, что эти многочлены являются *возвратными*: набор их коэффициентов есть палиндром. Иначе говоря, коэффициент в многочлене $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$ при q^k равняется коэффициенту при q^{mn-k} . Это следует напрямую из определения q -биномиальных коэффициентов как производящих функций для числа диаграмм Юнга: каждой диаграмме Юнга из k клеток можно сопоставить ее дополнение до прямоугольника $m \times n$, которое будет состоять из $mn - k$ клеток.

Отметим еще одно интересное свойство q -биномиальных коэффициентов: они являются *унимодальными* (или *веретенообразными*) многочленами. Это значит, что последовательность их коэффициентов (a_0, \dots, a_{mn}) имеет единственный локальный максимум: первая половина этой последовательности является нестрого возрастающей, т. е. $a_i \leq a_j$ при $0 \leq i < j \leq \frac{mn}{2}$. В силу симметрии вторая половина последовательности коэффициентов является нестрого убывающей. Комбинаторное доказательство этого факта оказывается на удивление непростым. Оно было получено Кэтлин О'Харой в работе [21]; см. также обзорную работу Д. Зельбергера [25] и недавний препринт И. Пака и Г. Пановой [22].

§ 2.3. Производящая функция Эйлера как следствие формулы для q -биномиальных коэффициентов

Как мы только что выяснили, предыдущая формула задает производящую функцию для диаграмм Юнга ширины не более n и высоты

не более m . Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$; получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\dots(1-q)}$$

(отметим, что знаменатель в выражении для $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$, приведенном в предложении 2.9, от n не зависит!). Мы получили еще одно доказательство предложения 1.12 о производящей функции для числа диаграмм Юнга, длины строк которых не превосходят m .

Кроме того, в этом же предложении можно было одновременно переходить к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$ (скажем, рассмотрим $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$) — в итоге получится эйлеровская производящая функция для числа всех разбиений (следствие 1.13).

§ 2.4. q -бином Ньютона

У бинома Ньютона $(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$ также имеются q -аналоги. Один из них мы сформулируем и докажем сейчас; другой приведен в упражнениях в конце этой лекции.

Теорема 2.10 (q -бином Ньютона).

$$(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^n) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k.$$

Как и следует ожидать, подстановка $q = 1$ превращает данное равенство в обычный бином Ньютона.

Доказательство. Раскроем скобки в левой части и запишем результат как сумму степеней x , коэффициент при каждой из которых является многочленом от q :

$$(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^n) = \sum_{k=0}^n a_k(q) x^k.$$

Здесь $a_k(q)$ — это производящая функция для числа разбиений на *ровно* k различных слагаемых, каждое из которых не превосходит n . Упорядочим эти слагаемые по убыванию (они будут строго убывать, так как они различны) и вычтем из первого k , из второго $k-1$, ..., а из последнего единицу. Это будет соответствовать делению производящей функции на $q^{1+2+\dots+k} = q^{\frac{k(k+1)}{2}}$. Мы получим производящую функцию для разбиений числа на не более чем k слагаемых

(уже, возможно, одинаковых), каждое из которых не превосходит $n - k$. А это и есть q -биномиальный коэффициент $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Поэтому $a_k(q) = q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Теорема доказана. \square

§ 2.5. Тождество Якоби для тройного произведения

В этом параграфе мы при помощи алгебраических манипуляций с q -биномом Ньютона получим равенство, называемое тождеством Якоби для тройного произведения. Из него, в частности, будет следовать пентагональная теорема Эйлера.

Начнем с того, что рассмотрим следующее произведение:

$$\begin{aligned} \prod_{i=-(m-1)}^m (1+xq^i) &= \\ &= (1+xq^{-(m-1)})(1+xq^{-(m-2)})\dots(1+x)(1+xq)\dots(1+xq^m), \end{aligned}$$

где x — некоторая переменная. Представим это произведение в виде суммы. Это нетрудно сделать с помощью формулы для q -бинома. Действительно, сделаем замену переменной: $y = xq^{-m}$. Тогда это произведение переписывается в виде

$$\prod_{i=-(m-1)}^m (1+xq^i) = \prod_{i=1}^{2m} (1+xq^{i-m}) = \prod_{i=1}^{2m} (1+yq^i).$$

А это не что иное, как q -бином. Поэтому

$$\prod_{i=1}^{2m} (1+yq^i) = \sum_{k=0}^{2m} \begin{bmatrix} 2m \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k+1)}{2}} y^k.$$

Вернемся к исходным обозначениям: заменив y на $q^{-m}x$, получим равенство

$$\begin{aligned} (1+xq^{1-m})(1+xq^{2-m})\dots(1+x)(1+xq)\dots(1+xq^m) &= \\ &= \sum_{k=0}^{2m} \begin{bmatrix} 2m \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k+1)}{2}-mk} x^k. \end{aligned}$$

Это равенство *многочленов Лорана* от q (т. е. многочленов, в которые q может входить не только в положительных, но и в отрицательных степенях). Рассмотрим те сомножители в его левой части,

в которые q входит в нулевой или отрицательной степени (таких будет ровно m). Вынесем из каждого из них q в такой отрицательной степени, чтобы в скобках остался многочлен от положительных степеней q , степень которого была бы минимальной. Иначе говоря, для каждого из сомножителей вида $1 + xq^{-j}$, где $j \geq 0$, запишем, что $1 + xq^{-j} = q^{-j}(x + q^j) = xq^{-j}(1 + x^{-1}q^j)$ (из каждой такой скобки мы еще вынесли x , чтобы свободный член выражения в скобках равнялся 1). Тогда наше равенство переписывается в виде

$$x^m q^{-(0+1+\dots+(m-1))} (1 + x^{-1}q^{m-1})(1 + x^{-1}q^{m-2})\dots(1 + x^{-1}) \times \\ \times (1 + xq)(1 + xq^2)\dots(1 + xq^m) = \sum_{k=0}^{2m} \begin{bmatrix} 2m \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k+1)}{2} - mk} x^k.$$

Далее, поделив обе части равенства на $x^m q^{-\frac{m(m-1)}{2}}$, получим

$$(1 + x^{-1}q^{m-1})(1 + x^{-1}q^{m-2})\dots(1 + x^{-1})(1 + xq)(1 + xq^2)\dots(1 + xq^m) = \\ = \sum_{k=0}^{2m} \begin{bmatrix} 2m \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} - mk} x^{k-m}.$$

Осталось совсем немного: придадим правой части более симметричный вид, сделав замену переменной $j = k - m$. При этом j будет пробегать значения от $-m$ до m , а в показателе степеней у q исчезнет «довесок» $\frac{m(m-1)}{2} - mk$. В итоге наша формула станет выглядеть так:

$$\prod_{k=1}^m (1 + xq^k)(1 + x^{-1}q^{k-1}) = \sum_{j=-m}^m \begin{bmatrix} 2m \\ m+j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j+1)}{2}} x^j.$$

Это конечная форма тождества Якоби для тройного произведения.

Теперь перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$. Биномиальный коэффициент в правой части будет стремиться к функции Эйлера для числа разбиений $P(q) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-1}$ (и, в частности, он не будет зависеть от j , и его можно будет вынести за знак суммирования). Поделив обе части равенства на $P(q)$, получим следующее равенство.

Теорема 2.11 (тождество Якоби для тройного произведения).

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + xq^k)(1 + x^{-1}q^{k-1})(1 - q^k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{j(j+1)}{2}} x^j.$$

Из нее несложно вывести пентагональную теорему Эйлера.

Доказательство пентагональной теоремы Эйлера. Сделаем замену переменной в тождестве Якоби: подставим q^3 вместо q . Получим

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+xq^{3k})(1+x^{-1}q^{3k-3})(1-q^{3k}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{3j^2+3j}{2}} x^j.$$

Теперь положим $x = -q^{-1}$. Тогда

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^{3k-1})(1-q^{3k-2})(1-q^{3k}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j q^{\frac{3j^2+j}{2}}.$$

А это и есть пентагональная теорема Эйлера:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right). \quad \square$$

Задачи к лекции 2

Задача 2.1 (для знакомых с основами линейной алгебры). Пусть $q = p^m$ — степень простого числа. Докажите, что число k -мерных векторных подпространств n -мерного векторного пространства над полем из q элементов равно $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Подробнее о связи q -биномиальных коэффициентов с линейной алгеброй можно прочитать в статье [5].

Задача 2.2 (еще один q -бином Ньютона). Пусть переменные x и y не коммутируют¹, но вместо этого удовлетворяют соотношению $yx = qx$. Докажите, что

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k}.$$

В следующих задачах приводится еще одно доказательство тождества Якоби для тройного произведения, не использующее q -биномиальных коэффициентов.

Рассмотрим бесконечное произведение

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+xq^k)(1+x^{-1}q^{k-1}).$$

¹Такое соотношение, конечно же, невозможно, если x и y являются числами.

Однако оно, например, имеет место для матриц $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Его можно рассматривать как *ряд Лорана* по x :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(q)x^n,$$

коэффициенты которого $a_n(q)$ суть формальные степенные ряды от q .

Задача 2.3. Проверьте, что $f(xq) = x^{-1}q^{-1}f(x)$.

Задача 2.4. Докажите, что при $n \in \mathbb{Z}$ имеют место равенства:

а) $a_n(q)q^{n+1} = a_{n+1}(q)$;

б) $f(x) = a_0(q) \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n+1)/2} x^n$.

Задача 2.5. Пусть b_m есть число способов представить число m в виде суммы нескольких различных элементов множества $\{1, 2, 3, \dots\}$ и такого же числа различных элементов множества $\{0, 1, 2, \dots\}$. Покажите, что $a_0(q) = \sum_{m \geq 0} b_m q^m$.

Задача 2.6. Построив биекцию между представлениями из предыдущей задачи и диаграммами Юнга, докажите, что b_m равно $p(m)$, т. е. числу разбиений числа m .

Указание. Проведите в диаграмме Юнга диагональ.

Задача 2.7. Выведите из предыдущих задач тождество Якоби для тройного произведения.

Лекция 3

Плоские разбиения и формула Макмагона

§ 3.1. Плоские разбиения

В предыдущих двух лекциях мы рассматривали «одномерные» разбиения и отвечающие им диаграммы Юнга. В этой лекции мы рассмотрим обобщение этого понятия на следующую размерность — а именно, займемся изучением *плоских разбиений*, компоненты которых занумерованы не одним индексом, а двумя, и которым будут соответствовать *трехмерные диаграммы Юнга*.

Определение 3.1. Пусть n — целое неотрицательное число. *Плоское разбиение* — это набор целых неотрицательных чисел $\lambda_{i,j}$, где $i, j \geq 1$, в сумме дающих n (т. е. $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} = n$) и удовлетворяющих неравенствам $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i+1,j}$ и $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i,j+1}$ при всех i, j .

Иначе говоря, плоское разбиение — это набор чисел, записанных в клетках бесконечной вправо и вниз таблицы, причем эти числа нестрого убывают по строкам и по столбцам, и лишь конечное их число отлично от нуля.

Каждому плоскому разбиению можно сопоставить *трехмерную диаграмму Юнга*. Для этого заменим каждое число на плоскости на столбец из кубиков, высота которого равна этому числу. Полученная трехмерная конструкция из кубиков и будет трехмерной диаграммой Юнга.

Пример 3.2. На рис. 3.1 изображено одно из плоских разбиений числа 12 и отвечающая ему трехмерная диаграмма Юнга.

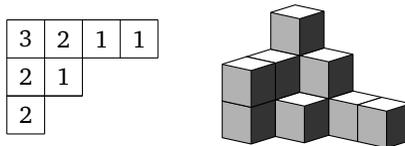
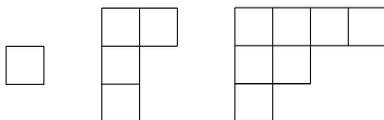


Рис. 3.1. Плоское разбиение и его трехмерная диаграмма Юнга

Плоское разбиение можно рассматривать как набор нескольких вложенных друг в друга диаграмм Юнга $\mu_1 \subseteq \mu_2 \subseteq \dots \subseteq \mu_k$. Пусть диаграмма μ_m состоит из всех таких клеток (i, j) , что $\lambda_{11} - \lambda_{i,j} \leq m - 1$.

Получается, что μ_m будет составлять m -й «этаж» соответствующей трехмерной диаграммы Юнга (если считать этажи сверху вниз).

Пример 3.3. Для плоского разбиения из предыдущего примера получаем последовательность диаграмм



Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы вычислить количество трехмерных диаграмм Юнга, лежащих внутри прямоугольного параллелепипеда $\mathcal{B}(a, b, c)$ (т. е. длина, ширина и высота которых не превосходят a , b и c соответственно), а также производящую функцию для числа таких диаграмм. Перейдя к пределу при $a, b, c \rightarrow \infty$, мы получим аналог производящей функции Эйлера для числа всех трехмерных диаграмм Юнга (этот результат был получен в начале XX в. майором британской армии в отставке Перси Александром Макмагоном).

§ 3.2. Подсчет числа плоских диаграмм высоты 2

Начнем с простого случая: посчитаем количество трехмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде размера $\mathcal{B}(a, b, 2)$. Это эквивалентно подсчету числа пар (μ_1, μ_2) диаграмм Юнга, удовлетворяющих условию $\mu_1 \subset \mu_2 \subset (a \times b)$.

В прошлой лекции уже говорилось, что диаграмму Юнга в прямоугольнике $a \times b$ можно интерпретировать как путь на решетке, идущий из точки $A_1 = (0, a)$ в точку $B_1 = (b, 0)$ (условимся, что ось ординат на нашей решетке направлена вниз). Таким образом, пара вложенных диаграмм — это пара путей из A_1 в B_1 , один из которых проходит не выше другого.

Из этой пары путей можно изготовить два непересекающихся пути: сдвинем нижний путь на вектор $(1, 1)$. Мы получим новый путь из точки $A_2 = (1, a + 1)$ в точку $B_2 = (b + 1, 1)$, который уже не будет пересекаться с верхним путем (см. рис. 3.2).

Итак, число трехмерных диаграмм Юнга высоты не более 2 равно числу пар непересекающихся путей, которое мы обозначим через $P_{nc}(A_1 \rightarrow B_1, A_2 \rightarrow B_2)$ (символы «nc» означают «non-crossing», т. е. «непересекающиеся»).

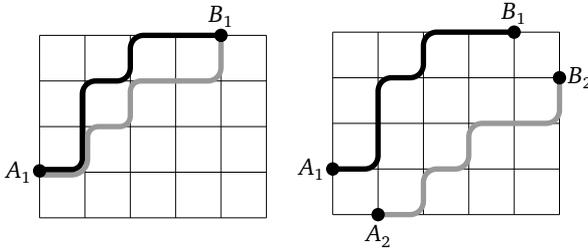
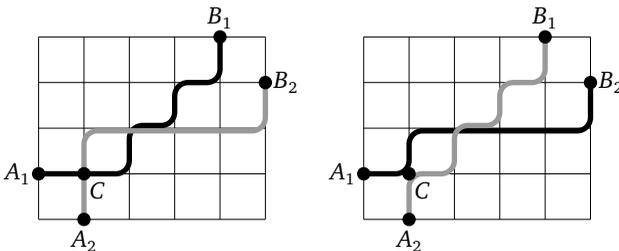


Рис. 3.2. Раздвижение путей

Нетрудно найти число пар всевозможных путей, соединяющих A_1 с B_1 , а A_2 с B_2 : оно равняется $P(A_1 \rightarrow B_1) \cdot P(A_2 \rightarrow B_2)$, т. е. $\binom{a+b}{b}^2$. Таким образом, наша задача эквивалентна задаче о нахождении числа пар *пересекающихся* путей из A_1 в B_1 и из A_2 в B_2 .

Итак, пусть μ_1 и μ_2 — два пересекающихся пути на решетке, первый из которых соединяет A_1 с B_1 , а второй — A_2 с B_2 . Пусть C — первая из точек пересечения этих путей. Построим новую пару путей, $\iota(\mu_1)$ и $\iota(\mu_2)$, по следующему правилу: $\iota(\mu_1)$ будет совпадать с μ_1 на отрезке от A_1 до C и с μ_2 на отрезке от C до B_2 . Таким образом, он будет соединять A_1 с B_2 . Напротив, $\iota(\mu_2)$ будет соединять A_2 и B_1 ; он будет совпадать с μ_2 от A_2 до C и с μ_1 от C до B_1 (см. рис. 3.3).

Легко увидеть, что всякая пара путей, соединяющих A_1 с B_2 , а A_2 с B_1 , пересекается; в частности, она получается как результат описанной выше операции, примененной к какой-то паре *пересекающихся* путей $\mu_1: A_1 \rightarrow B_1$ и $\mu_2: A_2 \rightarrow B_2$. Поэтому число пар пересекающихся путей из A_1 в B_1 и из A_2 в B_2 равно числу пар *всевозможных* путей, соединяющих начальные и конечные точки

Рис. 3.3. Отображение ι на пересекающихся путях

в «неправильном» порядке. А оно равняется

$$P(A_1 \rightarrow B_2) \cdot P(A_2 \rightarrow B_1) = \binom{a+b}{b+1} \cdot \binom{a+b}{b-1}.$$

Вычтя число пар пересекающихся путей из общего числа пар путей, получаем следующее предложение.

Предложение 3.4.

$$P_{nc}(A_1 \rightarrow B_1, A_2 \rightarrow B_2) = P(A_1 \rightarrow B_1)P(A_2 \rightarrow B_2) -$$

$$- P(A_1 \rightarrow B_2)P(A_2 \rightarrow B_1) = \begin{vmatrix} P(A_1 \rightarrow B_1) & P(A_1 \rightarrow B_2) \\ P(A_2 \rightarrow B_1) & P(A_2 \rightarrow B_2) \end{vmatrix}.$$

Следствие 3.5. Число трехмерных диаграмм Юнга, вписанных в параллелепипед $\mathcal{B}(a, b, 2)$, равно $\binom{a+b}{b}^2 - \binom{a+b}{b-1} \binom{a+b}{b+1}$.

Мы видим, что искомое число пар непересекающихся путей оказалось представлено в виде определителя 2×2 . Оказывается, для наборов из n непересекающихся путей дело обстоит аналогичным образом.

§ 3.3. Детерминантная формула Линдстрёма—Гесселя—Вьенно

Теперь решим исходную задачу: найдем число трехмерных диаграмм Юнга в прямоугольном параллелепипеде $\mathcal{B}(a, b, c)$. Каждую такую трехмерную диаграмму можно рассматривать как последовательность из c вложенных друг в друга обычных диаграмм Юнга. Эти диаграммы, в свою очередь, соответствуют путям на решетке из точки $A = (0, a)$ в точку $B = (b, 0)$. Каждый следующий из этих путей лежит нестрого ниже предыдущего. Как и в предыдущем случае, сделаем их непересекающимися: для этого сдвинем k -й путь на вектор $(k-1, k-1)$. При этом k -й путь будет соединять точки $A_k = (k-1, a+k-1)$ и $B_k = (b+k-1, k-1)$.

Пусть $w \in S_n$ — произвольная перестановка. Будем говорить, что набор из c путей (возможно, пересекающихся) с началами в точках (A_1, \dots, A_c) и концами в точках (B_1, \dots, B_c) отвечает перестановке w , если путь, начинающийся в точке A_k , заканчивается в точке $B_{w(k)}$. Ясно, что всякий набор непересекающихся путей может отвечать лишь тождественной перестановке.

Легко посчитать число всевозможных наборов путей, отвечающих перестановке w . Оно будет равно произведению биномиаль-

ных коэффициентов:

$$\prod_{k=1}^c P(A_k \rightarrow B_{w(k)}) = \prod_{k=1}^c P((k-1, a+k-1) \rightarrow (b+w(k)-1, w(k)-1)) = \prod_{k=1}^c \binom{a+b}{b+w(k)-k}.$$

Теперь обобщим прием, уже примененный для случая двух путей: рассмотрим на наборах *пересекающихся* путей, отвечающих всевозможным перестановкам, инволюцию ι , определенную следующим образом. Рассмотрим в наборе из пересекающихся путей μ путь μ_i с наименьшим номером i , пересекающийся с каким-то другим путем. Возьмем первую точку пересечения этого пути с другим путем. Из путей, пересекающих μ_i в этой точке, возьмем путь с наименьшим номером; обозначим его через μ_j . Заменим участок пути μ_i , следующий за точкой пересечения, на участок пути μ_j , и наоборот. Получим новый набор пересекающихся путей $\iota(\mu)$. Он уже отвечает другой перестановке; какая именно перестановка получится, нам сейчас неважно, однако важно, что перестановки, отвечающие μ и $\iota(\mu)$, имеют различную четность. Кроме того, ясно, что это отображение инволютивно: если применить его к набору путей два раза, получится исходный набор путей.

Мы получили биекцию на множестве наборов пересекающихся путей. Она сопоставляет набору путей, отвечающих четной перестановке, набор путей, отвечающих нечетной перестановке, и наоборот.

Пример 3.6. На рис. 3.4 показан набор путей, к которому применяется инволюция ι согласно указанному правилу: в точке $(2, 2)$ — первой точке пересечения первого пути с каким-либо еще путем

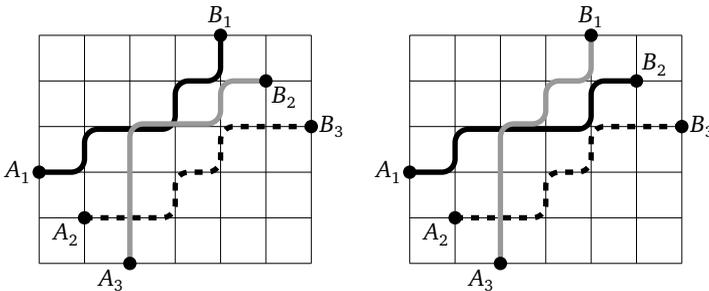


Рис. 3.4. Инволюция на множестве путей

(в данном случае с третьим) — последующие фрагменты этих путей заменяются друг на друга. Первый набор соответствует нечетной перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, а второй — четной перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Теперь просуммируем количество всевозможных путей, отвечающих всевозможным перестановкам w , со знаком:

$$\sum_{w \in S_n} P((A_1, \dots, A_c) \rightarrow (B_{w(1)}, \dots, B_{w(c)})) = \sum_{w \in S_n} (\operatorname{sgn} w) \prod_{k=1}^c P(A_k \rightarrow B_{w(k)}).$$

Все слагаемые в этой сумме, отвечающие пересекающимся путям, разобьются на пары, причем в каждой паре будет одно положительное и одно отрицательное слагаемое. Поэтому суммарный вклад, который пересекающиеся пути внесут в эту сумму, будет равен нулю. Значит, эта сумма и будет равна искомому числу *непересекающихся* путей $P_{nc}((A_1, \dots, A_c) \rightarrow (B_1, \dots, B_c))$.

С другой стороны, в предыдущем выражении нетрудно увидеть формулу для определителя матрицы, в i -й строке и j -м столбце которой стоит число путей из точки A_i в точку B_j . Мы получили следующее равенство:

$$P_{nc}((A_1, \dots, A_c) \rightarrow (B_1, \dots, B_c)) = \det (P(A_i \rightarrow B_j))_{i,j=1}^c.$$

Подставляя в это равенство числовые значения для $P(A_i \rightarrow B_j)$, получаем такое предложение.

Теорема 3.7. Число плоских диаграмм $PP(a, b, c)$ в параллелепипеде $\mathcal{B}(a, b, c)$ равняется определителю матрицы из биномиальных коэффициентов:

$$\begin{aligned} PP(a, b, c) &= \det \left(\binom{a+b}{b+j-i} \right)_{i,j=1}^c = \\ &= \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} & \cdots & \binom{a+b}{b+c-1} \\ \binom{a+b}{b-1} & \binom{a+b}{b} & \cdots & \binom{a+b}{b+c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{a+b}{b-c+1} & \binom{a+b}{b-c+2} & \cdots & \binom{a+b}{b} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Прием, использованный нами для подсчета числа непересекающихся путей на решетке, получил широкую известность благодаря работам Б. Линдстрёма [19] и в особенности И. Гесселя и Кс. Вьенно [14], в которых он был применен к решению некоторых важных

задач исчислительной комбинаторики (в частности, о плоских разбиениях). Впервые же он, по-видимому, появился в конце 1950-х гг. в работах С. Карлина и Дж. Макгрегора по теории вероятностей [15], [16]. Этот метод допускает массу различных обобщений. Подробный рассказ о методе отражений и его возникновении в разных задачах читатель может найти в работе [1].

Наша следующая задача — вычислить определитель, полученный в предыдущем предложении. Этому будет посвящен § 3.5. Для удобства вычисления мы сначала перепишем этот определитель в несколько другом виде.

Следствие 3.8. Число трехмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $\mathcal{R}(a, b, c)$ равняется

$$PP(a, b, c) = \det \left(\binom{a+b+i-1}{b+j-1} \right)_{i,j=1}^c = \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} & \cdots & \binom{a+b}{b+c-1} \\ \binom{a+b+1}{b} & \binom{a+b+1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+1}{b+c+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{a+b+c-1}{b} & \binom{a+b+c-1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+c-1}{b+c-1} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Приведем комбинаторное доказательство этого факта. Значение $PP(a, b, c)$ равно количеству наборов непересекающихся путей между точками $A_k = (k - 1, a + k - 1)$ и $B_k = (b + k - 1, k - 1)$, где $1 \leq k \leq c$. Давайте удлиним все пути, кроме последнего, так, чтобы их новые концы B'_k лежали на одной вертикальной прямой, — а именно, $B'_k = (b + c - 1, k - 1)$ (см. рис. 3.5).

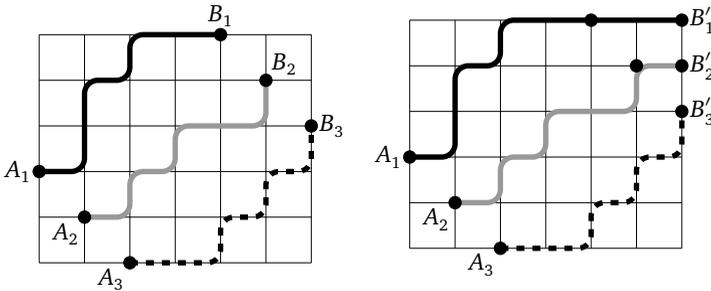


Рис. 3.5. Удлинение наборов путей

Ясно, что непересекающиеся наборы удлинненных путей биективно соответствуют наборам исходных непересекающихся путей. Поэтому

$$PP(a, b, c) = \det(P(A_i \rightarrow B'_j))_{i,j=1}^c.$$

Но

$$P(A_i \rightarrow B'_j) = \binom{a+b+c-i}{b+c-j}.$$

Подставив эти значения в определитель и транспонировав матрицу относительно побочной диагонали, получаем требуемое. \square

Упражнение 3.9. Докажите равенство определителей из теоремы 3.7 и следствия 3.8 алгебраически, сведя один определитель к другому элементарными преобразованиями строк и столбцов.

Этот определитель мы вычислим в § 3.5. Для этого нам потребуются некоторые сведения об определителях Вандермонда, которым будет посвящен следующий параграф.

§ 3.4. Определитель Вандермонда

Напомним следующий результат из стандартного курса алгебры.

Предложение 3.10 (определитель Вандермонда).

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

Набросок доказательства. У этого утверждения есть два различных доказательства, предложенных независимо и почти одновременно. Первое доказательство, принадлежащее Вандермонду, использует индукцию по n . Произведем над матрицей элементарные преобразования столбцов: вычтем из каждого столбца начиная со второго предыдущий, умноженный на x_1 . Получим, что в первой строке все элементы, кроме первого, окажутся равными нулю. Вычтя эту строку из всех остальных, сделаем в каждой строке начиная со второй первый элемент нулевым. Остается вынести из каждой (k -й) строки общий множитель $x_k - x_1$, и дело будет сведено к вычислению определителя Вандермонда на единицу меньшего порядка.

Второе доказательство, полученное Коши, более концептуально. Оно состоит в следующем. Заметим, что определитель в левой части равенства меняет знак при перестановке любых двух переменных x_i и x_j . Это значит, что он делится на $x_i - x_j$. Поэтому он пропорционален и произведению всевозможных двучленов вида $x_i - x_j$ (так как они все попарно взаимно просты). Однако и левая, и правая часть имеют степень $n(n-1)/2$, поэтому коэффициент пропорциональности является константой. Вычислив коэффициент при каком-нибудь мономе (например, при $x_2 x_3^2 \dots x_n^{n-1}$) в левой и правой частях, получаем, что эта константа равняется единице. \square

Нам потребуется некоторая модификация определителя Вандермонда, использующая *убывающие степени*.

Определение 3.11. Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Будем называть n -й *убывающей степенью* x число

$$x^{\downarrow n} = x(x-1)\dots(x-n+1)$$

(в произведении участвует n слагаемых; как и для обычных степеней, считаем, что $x^{\downarrow 0} = 1$).

Ясно, что $n^{\downarrow n} = n!$, а $x^{\downarrow(n+m)} = x^{\downarrow n}(x-n)^{\downarrow m}$. Кроме того, биномиальные коэффициенты суть отношения убывающих степеней:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\downarrow k}}{k^{\downarrow k}} = \frac{n^{\downarrow k}}{k!}.$$

Оказывается, определитель Вандермонда для убывающих степеней считается по той же формуле, что и обычный определитель Вандермонда.

Предложение 3.12.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^{\downarrow 2} & \dots & x_1^{\downarrow n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^{\downarrow 2} & \dots & x_2^{\downarrow n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\downarrow 2} & \dots & x_n^{\downarrow n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

Упражнение 3.13. Докажите это.

Указание. Определитель Вандермонда для убывающих степеней сводится к обычному определителю Вандермонда элементарными преобразованиями столбцов.

§ 3.5. Вычисление числа плоских разбиений в параллелепипеде

В § 3.3 было показано, что число плоских разбиений в параллелепипеде $\mathcal{R}(a, b, c)$ задается детерминантной формулой

$$PP(a, b, c) = \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} & \cdots & \binom{a+b}{b+c-1} \\ \binom{a+b+1}{b} & \binom{a+b+1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+1}{b+c+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{a+b+c-1}{b} & \binom{a+b+c-1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+c-1}{b+c-1} \end{vmatrix} = \\ = \det \left(\binom{a+b+i-1}{b+j-1} \right)_{i,j=1}^c.$$

Запишем каждый биномиальный коэффициент как отношение двух убывающих степеней. После этого из каждого (j -го) столбца матрицы можно будет вынести общий множитель $1/(b+j-1)!$. Получим, что

$$PP(a, b, c) = \left(\prod_{j=1}^c \frac{1}{(b+j-1)!} \right) \cdot \det \left((a+b+i-1)^{\downarrow b+j-1} \right)_{i,j=1}^c.$$

Воспользуемся теперь свойством убывающей степени:

$$(a+b+i-1)^{\downarrow b+j-1} = (a+b+i-1)^{\downarrow b} \cdot (a+i-1)^{\downarrow j-1}$$

и вынесем множитель $(a+b+i-1)^{\downarrow b}$ из каждой (i -й) строки определителя:

$$PP(a, b, c) = \left(\prod_{j=1}^c \frac{(a+b+j-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)!} \right) \cdot \det \left((a+i-1)^{\downarrow j-1} \right)_{i,j=1}^c.$$

Последний сомножитель есть в точности определитель Вандермонда для убывающих степеней; он равен $1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (c-1)!$. Подставим его значение в предыдущую формулу:

$$PP(a, b, c) = \prod_{j=1}^c (a+b+j-1)^{\downarrow b} \prod_{j=1}^c \frac{(j-1)!}{(b+j-1)!} = \prod_{j=1}^c \frac{(a+b+j-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)^{\downarrow b}}.$$

Заменим убывающую степень знаком произведения:

$$PP(a, b, c) = \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^c \frac{a+i+j-1}{i+j-1}.$$

Мы получили формулу для числа плоских разбиений в параллелепипеде. У нее есть один недостаток: она несимметрична по a , b и c (хотя b и c входят в нее симметрично). Исправим это следующим образом: заметим, что

$$\frac{a+i+j-1}{i+j-1} = \frac{a+i+j-1}{a+i+j-2} \cdot \frac{a+i+j-2}{a+i+j-3} \cdots \frac{i+j}{i+j-1}.$$

Заменяв каждую из дробей под знаком двойного произведения на произведение a дробей, получим симметричную по a , b и c запись той же формулы уже в виде тройного произведения. Это и есть основной результат этого параграфа, который называется *формулой Макмагона*.

Теорема 3.14 (формула Макмагона). *Число трехмерных диаграмм Юнга внутри прямоугольного параллелепипеда $\mathcal{B}(a, b, c)$ равняется*

$$PP(a, b, c) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

Это утверждение можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим клетку η (элемент трехмерной диаграммы Юнга) с координатами (i, j, k) . Назовем ее *высотой* число $ht \eta = i + j + k - 2$. Так, угловая клетка имеет высоту один, три примыкающие к ней (по грани) клетки имеют высоту 2 и т. д. Тогда формула Макмагона приобретает следующий красивый и легко запоминающийся вид.

Следствие 3.15 (формула Макмагона). *Число трехмерных диаграмм Юнга внутри прямоугольного параллелепипеда $\mathcal{B}(a, b, c)$ равняется*

$$PP(a, b, c) = \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, b, c)} \frac{ht \eta + 1}{ht \eta},$$

где произведение берется по всем клеткам η , принадлежащим параллелепипеду $\mathcal{B}(a, b, c)$.

Замечание 3.16. Заметим, что хорошо известное выражение для числа обычных (двумерных) диаграмм Юнга тоже может быть переписано в аналогичном виде: число поддиаграмм в прямоугольнике размера $a \times b$ равняется

$$\binom{a+b}{a} = \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+b)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot b} = \prod_{j=1}^b \frac{a+j}{j} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{i+j}{i+j-1},$$

т. е. находится по буквально той же формуле, если положить высоту клетки (i, j) равной $i + j - 1$. Однако если определить диаграммы

Юнга в размерности четыре и выше, то аналогичная формула для числа поддиаграмм в параллелепипеде уже оказывается неверна. Как в этом случае вычислить количество поддиаграмм, автору неизвестно (и, по-видимому, человечеству тоже).

§ 3.6. Производящие функции и формула Макмагона

В этом параграфе мы найдем производящую функцию $PP_q(a, b, c)$ для числа плоских разбиений, лежащих внутри параллелепипеда $\mathcal{B}(a, b, c)$:

$$PP_q(a, b, c) = \sum_{\lambda \in \mathcal{B}(a, b, c)} q^{|\lambda|}.$$

Как и для обычных разбиений, вес $|\lambda|$ плоского разбиения λ — это сумма всех слагаемых, т. е. общее количество кубиков в соответствующей диаграмме Юнга.

Сначала разберем тривиальный случай: пусть $c = 1$. Тогда исконая производящая функция — это просто производящая функция для диаграмм Юнга в прямоугольнике $a \times b$. Как мы знаем из второй лекции, это просто q -биномиальный коэффициент:

$$PP_q(a, b, 1) = \left[\begin{matrix} a+b \\ b \end{matrix} \right]_q.$$

Придадим q -биномиальному коэффициенту интерпретацию в терминах путей на решетке. Расставим на ребрах решетки веса следующим образом. Каждому горизонтальному ребру, находящемуся на k -м уровне, будет приписан вес q^k (нумерация уровней начинается с нуля). Каждому вертикальному ребру припишем вес 1. *Весом пути P* назовем произведение $\text{wt } P$ весов всех ребер, составляющих путь P .

Легко видеть, что если P — путь из точки $(0, a)$ в точку $(b, 0)$, то вес этого пути равен $q^{|\lambda|}$, где $|\lambda|$ — количество клеток в диаграмме Юнга, ограниченной путем P (см. рис. 3.6). Поэтому q -биномиальный коэффициент $\left[\begin{matrix} a+b \\ b \end{matrix} \right]$ можно интерпретировать как сумму по путям:

$$\left[\begin{matrix} a+b \\ b \end{matrix} \right] = \sum_{P: (0, a) \rightarrow (b, 0)} \text{wt } P.$$

При подстановке $q = 1$ вес каждого пути становится равен единице, так что мы получаем уже знакомую нам интерпретацию обычного биномиального коэффициента как числа путей, соединяющих две заданные точки решетки.

	1	1	1	1	1
q^1	q^1	q^1	q^1	q^1	q^1
q^2	q^2	q^2	q^2	q^2	q^2
q^3	q^3	q^3	q^3	q^3	q^3
q^4	q^4	q^4	q^4	q^4	q^4
q^5	q^5	q^5	q^5	q^5	q^5

Рис. 3.6. Расстановка весов на ребрах решетки

Пример 3.17. На рис. 3.6 изображен путь из точки $(0, 5)$ в точку $(5, 0)$, имеющий вес $q^4 \cdot q^4 \cdot q = q^9$. Он ограничивает диаграмму Юнга из 9 клеток.

Теперь разберемся, как обстоит дело с несколькими путями. Рассмотрим плоское разбиение высоты c . Ему соответствует набор из c путей, из которых каждый следующий лежит нестрого ниже предыдущего. Произведение весов всех путей из этого набора равняется q^N , где N — общее количество клеток в соответствующей трехмерной диаграмме Юнга.

Будем действовать аналогично тому, как мы действовали в § 3.3. А именно, сдвинем k -й путь на вектор $(k - 1, k - 1)$; при этом его вес увеличится в $q^{b(k-1)}$ раз, т. е. суммарный вес всего набора путей возрастет в $q^{b(1+2+\dots+(c-1))} = q^{bc(c-1)/2}$ раз.

Далее, найдем сумму весов всевозможных наборов путей, ведущих из точки $A_i = (i - 1, a + i - 1)$ в точку $B_j = (b + j - 1, j - 1)$. При $j = 1$ ответом будет просто q -биномиальный коэффициент $\begin{bmatrix} a+b \\ b-i+j \end{bmatrix}$. При других значениях j перед этим q -биномиальным коэффициентом будет возникать множитель q в некоторой степени; она равна числу $j - 1$, умноженному на число горизонтальных ребер пути из A_i в B_j , т. е. на $b - i + j$. Это соответствует сдвигу j -го пути на $j - 1$ строку вниз. Мы получаем такую формулу для производящей функции для числа плоских разбиений в параллелепипеде:

$$PP_q(a, b, c) = q^{-b \frac{c(c-1)}{2}} \det \left(q^{(b-i+j)(j-1)} \begin{bmatrix} a+b \\ b-i+j \end{bmatrix} \right)_{i,j=1}^c.$$

Теперь вынесем из каждого (j -го) столбца общий множитель $q^{b(j-1)}$. В результате из всего определителя вынесется множитель $q^{\frac{bc(c-1)}{2}}$, который сократится с множителем, стоящим перед всем выражением. Мы получили следующую теорему.

Теорема 3.18. *Производящая функция для числа плоских разбиений в параллелепипеде $\mathcal{B}(a, b, c)$ имеет вид*

$$PP_q(a, b, c) = \det \left(q^{(j-i)(j-1)} \begin{bmatrix} a+b \\ b-i+j \end{bmatrix} \right)_{i,j=1}^c.$$

Упражнение 3.19. Докажите, что эту же производящую функцию можно записать в следующем симметричном по i и j виде:

$$PP_q(a, b, c) = q^{(1^2+2^2+\dots+(c-1)^2)} \det \left(q^{-(i-1)(j-1)} \begin{bmatrix} a+b \\ b-i+j \end{bmatrix} \right)_{i,j=1}^c.$$

Как мы видели в § 3.3, для вычисления удобнее не такая форма определителя, а эквивалентная, приведенная в следствии 3.8. Оказывается, и у такой формы есть q -аналог. Приведем его, оставив доказательство эквивалентности читателю в качестве (нетривиального) упражнения. Как и в предыдущем параграфе, у него могут быть два решения — комбинаторное и алгебраическое, использующее свойства q -биномиальных коэффициентов.

Следствие 3.20. *Производящая функция для числа плоских разбиений в параллелепипеде $\mathcal{B}(a, b, c)$ имеет вид*

$$PP_q(a, b, c) = q^{-a\frac{c(c-1)}{2}} \det \left(\begin{bmatrix} a+b+i-1 \\ b+j-1 \end{bmatrix}_q \right)_{i,j=1}^c.$$

Этот определитель можно вычислить точно так же, как определитель с обычными биномиальными коэффициентами. В результате мы приходим к формуле (также принадлежащей Макмагону), получаемой из «классической» заменой всех входящих в нее целых чисел на их q -аналоги.

Теорема 3.21. *Производящая функция для числа плоских разбиений в параллелепипеде $\mathcal{B}(a, b, c)$ равняется произведению*

$$PP_q(a, b, c) = \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^c \frac{[a+i+j-1]_q}{[i+j-1]_q} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{[i+j+k-1]_q}{[i+j+k-2]_q}.$$

Упражнение 3.22. Докажите эту теорему.

Замечание 3.23. У формулы Макмагона имеется несколько различных доказательств. Например, ее еще можно доказывать по индукции по длинам сторон параллелепипеда; это доказательство изложено в разделе 11.2 книги Дж. Эндрюса [10]. Еще в ряде доказательств так или иначе используется теория симметрических функций; об этом см., например, [8, гл. I, раздел 5].

§ 3.7. Предельная форма формулы Макмагона

В предыдущей лекции мы видели, что, переходя в выражении для q -биномиального коэффициента $\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}$ к пределу при $m, n \rightarrow \infty$, можно получить производящую функцию Эйлера для числа разбиений:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-1} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}.$$

В этом параграфе мы выведем аналогичную формулу для числа плоских разбиений.

Запишем формулу для числа плоских разбиений в параллелепипеде $\mathcal{B}(a, b, c)$ и перейдем к пределу при $a, b \rightarrow \infty$. Получится формула для числа плоских разбиений, высота которых не превышает c :

$$PP_q(c) = \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{[i+j+c-1]}{[i+j-1]}.$$

Теперь сделаем замену: $\ell = i + j - 1$. Заметим, что для каждого значения ℓ в предыдущее произведение входит ровно ℓ сомножителей вида $\frac{[\ell+c]}{[\ell]}$. Поэтому формула приобретает вид

$$PP_q(c) = \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{[\ell+c]}{[\ell]} \right)^{\ell} = \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{\ell+c}}{1 - q^{\ell}} \right)^{\ell}.$$

Если перейти к пределу при $c \rightarrow \infty$, числитель каждой из этих дробей устремится к 1, и получится производящая функция для числа всех плоских разбиений.

Теорема 3.24 (Макмагон). *Производящая функция для числа всех плоских разбиений задается формулой*

$$PP(q) = \prod_{\ell=1}^{\infty} (1 - q^{\ell})^{-\ell}.$$

Замечание 3.25. Ту же формулу можно получить, перейдя к пределу непосредственно в формуле для определителя из теоремы 3.18. Подробности читатель может найти в работе [1].

Задачи к лекции 3

Задача 3.1. Пусть $\Lambda_n = (n - 1, \dots, 2, 1)$ — ступенчатая диаграмма Юнга. Докажите, что число поддиаграмм Юнга в ней равняется n -му числу Каталана $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

Задача 3.2 (числа Каталана—Ганкеля). Докажите, что число плоских разбиений, лежащих внутри призмы с основанием Λ_n и высотой h , равняется определителю

$$\det(C_{n+i+j-2})_{i,j=1}^h = \det \begin{pmatrix} C_n & C_{n+1} & \dots & C_{n+h-1} \\ C_{n+1} & C_{n+2} & \dots & C_{n+h} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n+h-1} & C_{n+h} & \dots & C_{n+2h-2} \end{pmatrix}.$$

Задача 3.3. Докажите, что определитель из предыдущей задачи равен

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n-1} \frac{i+j+2h}{i+j}$$

Задача 3.4. Представьте в виде определителя число поддиаграмм Юнга внутри произвольной (двумерной) диаграммы Юнга λ .

Указание. Установите взаимно однозначное соответствие между поддиаграммами и наборами непересекающихся путей от точек $(0, 0), (0, 1), \dots, (0, n - 1)$ до точек $(\lambda_1 + n - 1, 1), (\lambda_2 + n - 2, 1), \dots, (\lambda_n, n)$, где n — количество строк в диаграмме.

Лекция 4

Знакопеременные матрицы и их связь с плоскими разбиениями

§ 4.1. Тождество Деснано—Якоби

В этой лекции мы обсудим гипотезу о знакопеременных матрицах — задачу, которая, несмотря на элементарную формулировку, оставалась нерешенной около 20 лет (с конца 1970-х гг. по 1995 гг.). «Нумерология», возникающая в этой задаче, оказывается связанной с теорией плоских разбиений, которой мы занимались в прошлой лекции, — однако эта связь остается не до конца понятной и по сей день. А начнем мы с того, что изложим некоторое утверждение из линейной алгебры, которое почему-то почти никогда не включают в стандартные курсы.

Пусть A — матрица порядка $n \times n$, M — ее определитель. Обозначим через M_{ij} ее минор порядка $n - 1$, полученный вычеркиванием i -й строки и j -го столбца. Пусть также $M_{1n,1n}$ — минор порядка $n - 2$, полученный вычеркиванием из матрицы первой и последней строки и первого и последнего столбца. Оказывается, имеет место следующее соотношение.

Теорема 4.1 (тождество Деснано—Якоби).

$$M \cdot M_{1n,1n} = M_{11} \cdot M_{nn} - M_{1n} \cdot M_{n1}.$$

Мы приведем два доказательства этой формулы: исходное алгебраическое доказательство Якоби и биективно-комбинаторное, принадлежащее Зельбергеру (последнее опубликовано в восхитительной — как по красоте доказательства, так и по стилю изложения — работе [27]).

Алгебраическое доказательство тождества Деснано—Якоби.

Пусть $A = (a_{ij})$ — исходная матрица, M — ее определитель. Напомним, что *алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} называется минор M_{ij} , взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Из курса алгебры (см., например, [3, §2.4]) известна теорема о разложении определителя по строке:

$$a_{i1}M_{i1} - a_{i2}M_{i2} + \dots + (-1)^{n+1}a_{in}M_{in} = M.$$

Кроме того, имеется утверждение, иногда называемое «теоремой о фальшивом разложении определителя»: а именно, при $j \neq i$ выполняются равенства

$$a_{i1}M_{j1} - a_{i2}M_{j2} + \dots + (-1)^{n+1}a_{in}M_{jn} = 0.$$

Каждое из этих равенств можно интерпретировать как скалярное произведение строки матрицы M на столбец матрицы

$$A^* = ((-1)^{i+j}M_{ji}),$$

полученной из матрицы алгебраических дополнений при помощи транспонирования. Заметим, что отсюда получается матричное равенство, также хорошо известное из линейной алгебры:

$$A \cdot A^* = M \cdot E.$$

Оно означает, что, поделив A^* на определитель M исходной матрицы, мы получим матрицу, обратную к A .

Теперь несколько модифицируем матрицу A^* : заменим в ней все столбцы, кроме первого и последнего, на столбцы из единичной матрицы. Полученную матрицу назовем \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n-1}M_{n1} \\ -M_{12} & 1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^n M_{n2} \\ M_{13} & 0 & 1 & \dots & 0 & (-1)^{n+1}M_{n3} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ (-1)^{n-1}M_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 & M_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перемножим матрицы A и \tilde{A} . Из теорем о настоящем и фальшивом разложении следует, что в первом и последнем столбце на первом и последнем местах соответственно будет стоять M , а в остальных местах — те же самые элементы, что и в матрице A :

$$A \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} M & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & M \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\det(A \cdot \tilde{A}) = M^2 \cdot M_{1n,1n},$$

где $M_{1n,1n}$ — определитель подматрицы, полученной из A вычеркиванием первых и последних строки и столбца.

Отсюда заключаем, что

$$\det \tilde{A} = M \cdot M_{1n,1n}.$$

Но определитель \tilde{A} можно вычислить и непосредственно:

$$\det \tilde{A} = M_{11} \cdot M_{nn} - M_{1n} \cdot M_{n1}.$$

Тождество Деснано—Якоби доказано. \square

§ 4.2. Комбинаторное доказательство тождества Деснано—Якоби

Для полноты изложения приведем также другое доказательство тождества Деснано—Якоби, принадлежащее Дорону Зельбергеру и опубликованное в работе «Доказательство правила Доджсона для вычисления определителей при помощи неверных мужей и жен» ([27]). Мы сохраняем терминологию, принятую в данной работе.

Итак, пусть $A = (a_{ij})$ — матрица порядка n . Рассмотрим n мужчин $1, 2, \dots, n$ и n женщин $1', 2', \dots, n'$. Совершенным паросочетанием называется способ подобрать жену каждому из мужчин — иначе говоря, биекция $\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1', \dots, n'\}$, при которой мужчина i оказывается женат на женщине $\pi(i)$. Весом такого паросочетания назовем величину

$$\text{wt } \pi = \text{sgn } \pi \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)}.$$

Предположим, что у каждого из мужчин, кроме 1-го и n -го, есть любовница (ровно одна), а у каждой из женщин, кроме $1'$ и n' , — любовник. Такая ситуация¹ описывается совершенным паросочетанием $\sigma: \{2, \dots, n-1\} \rightarrow \{2', \dots, (n-1)'\}$, где женщина $\sigma(i)$ оказывается любовницей мужчины i . Весом такого паросочетания называется величина

$$\text{wt } \sigma = \text{sgn } \sigma \prod_{i=2}^{n-1} a_{i\sigma(i)}.$$

¹Мы допускаем, хотя это несколько нереалистично, что жена данного мужчины может являться его любовницей, а также что мужем и любовником женщины может быть один и тот же человек.

Пусть $A(n)$ — множество всевозможных пар (π, σ) . Весом такой пары назовем произведение весов π и σ :

$$\text{wt}(\pi, \sigma) = \text{wt } \pi \cdot \text{wt } \sigma.$$

Тогда левая часть тождества Деснано—Якоби равна сумме весов всех элементов из A .

Далее, пусть $B(n)$ — множество таких пар (π, σ) , что

$$\pi: \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \{1', \dots, (n-1)'\} \quad \text{и} \quad \sigma: \{2, \dots, n\} \rightarrow \{2', \dots, n'\}$$

(т. е. n и n' не состоят в браке, но имеют любовников). Определим вес такой пары (π, σ) аналогичным образом.

Наконец, пусть $C(n)$ — множество таких пар (π, σ) , что, наоборот,

$$\pi: \{2, \dots, n\} \rightarrow \{2', \dots, n'\} \quad \text{и} \quad \sigma: \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \{1', \dots, (n-1)'\}.$$

Здесь определим вес пары (π, σ) как $\text{wt}(\pi, \sigma) = -\text{wt } \pi \cdot \text{wt } \sigma$.

Тогда правая часть тождества Деснано—Якоби есть сумма весов всех элементов из $B(n) \cup C(n)$.

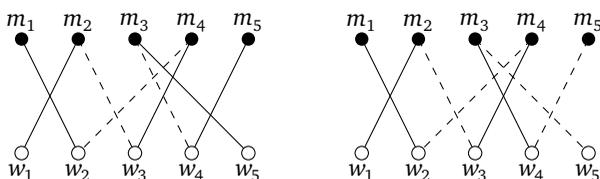
Определим отображение

$$T: A(n) \rightarrow B(n) \cup C(n)$$

следующим образом. Пусть задана пара перестановок $(\pi, \sigma) \in A(n)$. Рассмотрим следующую последовательность мужчин и женщин (m_i и w_i соответственно): $m_1 = n$, $w_1 = \pi(m_1)$, $m_2 = \sigma^{-1}(w_1)$, $w_2 = \pi(m_2)$ и т. д. Таким образом, определим w_i как жену мужчины m_i и m_{i+1} как любовника женщины w_i . Эта последовательность оборвется на некоторой женщине w_r , у которой нет любовника, т. е. $w_r = 1'$ или n' .

Теперь в последовательности $(m_1, w_1), (m_2, w_2), \dots, (m_r, w_r)$ поменяем все типы отношений: пусть m_i и w_i из супругов станут любовниками, а w_i и m_{i+1} станут мужем и женой. Получим конфигурацию $T((\pi, \sigma))$ из $B(n) \cup C(n)$. Очевидно, это отображение сохраняет вес конфигурации. Также очевидно, что T — вложение (т. е. разные конфигурации переходят в разные).

Пример 4.2. На рис. 4.1 изображен пример при $n = 5$. Супруги соединены сплошными отрезками, любовники — пунктирными. Отображение T превращает супругов (m_5, w_4) и (m_3, w_5) в любовников, а любовников (m_3, w_4) — в супругов. Остальные отношения остаются без изменений.

Рис. 4.1. Действие отображения T

Если бы T было наложением, то все было бы доказано. Однако это не так: существуют конфигурации из $B(n) \cup C(n)$, не принадлежащие образу $T(A(n))$. Назовем такие конфигурации *плохими*. Утверждается, что между плохими конфигурациями из $B(n)$ и $C(n)$ существует биекция S , для которой $\text{wt} S((\pi, \sigma)) = -\text{wt}(\pi, \sigma)$.

Упражнение 4.3. Постройте такую биекцию и докажите, что она меняет вес конфигурации на противоположный.

Тем самым суммарный вклад всех плохих конфигураций в правую часть тождества Деснано—Якоби равен нулю, что завершает доказательство. \square

§ 4.3. «Конденсация определителей» по Доджсону

В 1866 г. оксфордский математик Чарльз Лютвидж Доджсон (более известный как писатель Льюис Кэрролл) опубликовал работу [13], в которой был описан новый метод вычисления определителей, основанный на тождестве Деснано—Якоби.

Метод заключается на следующем простом наблюдении: если $M_{1n,1n} \neq 0$, тождество Деснано—Якоби может быть переписано в таком виде:

$$M = \frac{1}{M_{1n,1n}} (M_{11}M_{nn} - M_{1n}M_{n1}).$$

Тем самым оно выражает определитель M порядка n через определители M_{ij} порядка $n - 1$ и определитель $M_{1n,1n}$ порядка $n - 2$.

Это дает способ вычисления определителей. А именно, на первом шаге мы можем свести вычисление определителя порядка n к вычислению четырех его миноров порядка $n - 1$ и одного минора порядка $n - 2$ (такую процедуру Доджсон называет «конденсацией»). Каждый из этих миноров, в свою очередь, можно тоже «сконденсировать»,

сведя его подсчет к вычислению миноров меньшего порядка, и так далее, пока мы не дойдем до определителей порядка 2 и 1.

В качестве примера вычислим таким способом определитель матрицы 3×3 :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \frac{1}{a_{22}} \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{a_{22}} ((a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \\ &\quad - (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})(a_{12}a_{32} - a_{22}a_{31})) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Разумеется, такой метод не работает, если какой-либо из миноров, на которые надо делить в процессе вычислений, равен нулю. (В нашем случае это значило бы, что $a_{22} = 0$.) В такой ситуации предлагается произвести над матрицей какое-либо преобразование, сохраняющее определитель, — скажем, переупорядочить строки или столбцы — и произвести вычисления заново.

Замечание 4.4. В литературе тождество Деснано—Якоби зачастую упоминается как «тождество Льюиса Кэрролла» (the Lewis Carroll identity). Однако такое название не вполне верно. В случае матриц порядка 3 оно было получено еще Ж.-Л. Лагранжем в 1773 г.; в 1819 г. Деснано проверил его для матриц, порядок которых не превосходит 6. Общее доказательство было получено Якоби в 1833 г., когда Чарльзу Лютвиджу Доджсону был один год. Сам Доджсон в своей работе [13] не упоминает Якоби, но при этом ссылается на этот факт как на «известную теорему об определителях».

§ 4.4. λ -определители и знакопеременяющиеся матрицы

Алгоритм, предложенный Доджсоном, позволяет сводить вычисление определителя любого порядка к вычислению определителей 2×2 . В работе Уильяма Миллса, Дэвида Роббинса и Говарда Рамси было предложено понятие λ -определителя (здесь λ — параметр). А именно, λ -определитель матрицы 2×2 определяется формулой

$$\det_{\lambda} A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_{\lambda} = ad + \lambda bc.$$

При $\lambda = -1$ получается обычный определитель.

Теперь будем вычислять λ -определитель матриц большего порядка при помощи « λ -деформированной конденсации определителей»: а именно, пусть A — матрица порядка n , и пусть мы знаем, что такое λ -определители матриц порядка не более $n - 1$. Тогда

$$\det_{\lambda} A = \det_{\lambda} (A_{1n, 1n})^{-1} (\det_{\lambda} A_{11} \det_{\lambda} A_{nn} + \lambda \det_{\lambda} A_{1n} \det_{\lambda} A_{n1}).$$

Пример 4.5. Вычислим λ -определитель матрицы 3×3 :

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|_{\lambda} = \\ &= \frac{1}{a_{22}} \left(\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right|_{\lambda} \cdot \left| \begin{array}{cc} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array} \right|_{\lambda} + \lambda \left| \begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{array} \right|_{\lambda} \cdot \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right|_{\lambda} \right) = \\ &= \frac{1}{a_{22}} ((a_{11}a_{22} + \lambda a_{21}a_{12})(a_{22}a_{33} + \lambda a_{23}a_{32}) + \\ &\quad + \lambda(a_{12}a_{23} + \lambda a_{13}a_{22})(a_{12}a_{32} + \lambda a_{22}a_{31})) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + \lambda a_{11}a_{23}a_{32} + \lambda a_{12}a_{21}a_{33} + \lambda^2 a_{12}a_{23}a_{31} + \lambda^2 a_{13}a_{21}a_{32} + \\ &\quad + \lambda^3 a_{13}a_{22}a_{31} + \lambda^2(1 + \lambda^{-1})a_{12}a_{21}a_{23}a_{31}/a_{22}. \end{aligned}$$

Этот пример показывает сразу несколько отличий λ -определителей от обычных: во-первых, λ -определитель уже будет не полиномом, а рациональной функцией от элементов матрицы — тем не менее, эта функция по-прежнему будет однородной степени n .

Во-вторых, в него будет входить $n!$ слагаемых, которые будут мономами от λ и a_{ij} ; они, как и слагаемые в определителе, будут отвечать перестановкам, т. е. иметь вид $\lambda^{\ell(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$. Степень вхождения λ будет равняться $\ell(\sigma)$ — длине перестановки, т. е. числу инверсий. Ясно, что при подстановке $\lambda = -1$ множитель $\lambda^{\ell(\sigma)}$ станет равным $(-1)^{\sigma}$, т. е. каждое такое слагаемое будет отвечать слагаемому в привычной формуле для «обыкновенного» определителя.

Кроме того, в разложение λ -определителя входит еще одно слагаемое: $\lambda^2(1 + \lambda^{-1})a_{12}a_{21}a_{23}a_{31}/a_{22}$. При подстановке $\lambda = -1$ оно обращается в нуль, и никакой перестановке оно уже не соответствует. Однако удастся определить отвечающий такому слагаемому объект, который обобщает понятие перестановки, — это *знакопередающаяся матрица*.

Начнем с обычных перестановок. Каждой перестановке $\sigma \in S_n$ соответствует ее матрица перестановки — это такая матрица поряд-

ка n , в i -м столбце которой имеется одна единица, стоящая в $\sigma(i)$ -й строке, а остальные элементы равны нулю. Иначе говоря, сумма всех элементов в каждой строке и в каждом столбце равна единице, а каждый элемент равен либо 0, либо 1. Матрицы перестановок содержатся в более широком классе матриц — в множестве знакочередующихся матриц.

Определение 4.6. *Знакочередующаяся матрица* (по-английски alternating sign matrix) — это матрица порядка n , для которой

- все элементы равны 1, -1 или 0;
- сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна 1;
- ненулевые элементы в каждой строке и в каждом столбце чередуются: за единицей следует минус единица, и наоборот.

Ясно, что каждая матрица перестановки является знакочередующейся. Однако ими множество знакочередующихся матриц не исчерпывается.

Пример 4.7. Существует семь знакочередующихся матриц порядка 3: шесть матриц перестановки и матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Именно она соответствует «странному» слагаемому

$$\lambda^2(1 + \lambda^{-1})a_{12}a_{21}a_{23}a_{31}/a_{22}$$

в формуле для λ -определителя порядка 3.

Упражнение 4.8. Докажите, что в первой строке знакочередующейся матрицы встречается ровно одна единица (и нет минус единиц).

Выше мы уже видели, что для вычисления определителя важно знать длину перестановки, т. е. ее число инверсий. В терминах матрицы перестановки длину можно определить как число таких пар ненулевых элементов (a_{ij}, a_{kl}) , что один из них лежит правее и выше другого (т. е. $i > k$ и $j < l$).

Для знакочередующейся матрицы тоже можно определить число инверсий: для этого также надо взять все такие пары ненулевых элементов (a_{ij}, a_{kl}) , что $i > k$ и $j < l$, и посчитать каждое из них с коэффициентом $a_{ij}a_{kl}$ (т. е. 1, если эти два числа имеют одинаковый знак, или -1 иначе). Число инверсий знакочередующейся матрицы B будем обозначать $I(B)$. Кроме того, число минус единиц в такой матрице обозначим через $N(B)$.

Пример 4.9. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $N(B) = 2$, а $I(B) = 5$: имеется 7 пар ненулевых значений, считающихся со знаком «плюс», и две — со знаком «минус» (проверьте это!).

После серии компьютерных экспериментов с λ -определителям Миллс, Роббинс и Рамси сформулировали и доказали следующую теорему.

Теорема 4.10. Для λ -определителя матрицы $A = (a_{ij})$ представляется в виде

$$\det_{\lambda} A = \sum_{B \in ASM(n)} \lambda^{I(B)} (1 + \lambda^{-1})^{N(B)} \prod_{i,j} a_{ij}^{B_{ij}},$$

где сумма берется по всем B , принадлежащим множеству $ASM(n)$ знакопередающихся матриц порядка n .

Здесь $\prod_{i,j} a_{ij}^{B_{ij}}$ означает произведение всех элементов матрицы a_{ij} , возведенных в степень, равную соответствующему элементу B_{ij} знакопередающейся матрицы B . Так, например, если B — матрица перестановки σ , то это произведение равно $\prod_i a_{i\sigma(i)}$. А для матрицы из предыдущего примера оно равняется $a_{12}a_{23}a_{31}a_{35}a_{42}a_{44}a_{53}/a_{32}a_{43}$.

§ 4.5. Гипотеза о знакопередающихся матрицах

Возникает вопрос: сколько всего существует знакопередающихся матриц порядка n ? Обозначим это число через A_n . Мы уже знаем, что $A_2 = 2$, а $A_3 = 7$. Следующие несколько значений A_n можно вычислить при помощи компьютера; при $n \leq 7$ эти значения приведены в следующей таблице.

n	1	2	3	4	5	6	7
A_n	1	2	7	42	429	7436	218348
	1	2	7	$2 \cdot 3 \cdot 7$	$3 \cdot 11 \cdot 13$	$2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$	$2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$

При взгляде на эту таблицу можно заметить следующее обстоятельство: хотя сами числа A_n растут очень быстро, они всегда оказываются произведениями достаточно малых простых сомножителей.

В предыдущем параграфе было отмечено, что в первой строке знакопередающейся матрицы может быть только одна единица. Обозначим через $A_{n,k}$ число знакопередающихся матриц порядка n , у которых единица в первой строке стоит на k -м месте. Ясно, что $A_{n,1} + A_{n,2} + \dots + A_{n,n} = A_n$ и что последовательность $A_{n,k}$ симметрична: $A_{n,k} = A_{n,n-k+1}$.

Упражнение 4.11. Убедитесь, что $A_{n,1} = A_{n,n} = A_{n-1}$.

Числа $A_{n,k}$ можно записать в виде треугольника, похожего на треугольник Паскаля:

				1					
				1		1			
			2		3		2		
		7		14		14		7	
	42		105		135		105		42
429		1287		2002		2002		1287	429

С первого взгляда никакой закономерности в расположении этих чисел не усматривается (кроме уже отмеченной выше: первое и последнее число в каждой строке равняются сумме всех чисел в предыдущей).

Тем не менее, оказывается, существует просто формулируемая закономерность, связывающая каждую следующую строчку этого треугольника с предыдущей. Чтобы в этом убедиться, в каждой строке между каждыми двумя числами выпишем их *отношение* — в виде дроби, причем, возможно, сократимой. Если удачно подобрать представление для каждой дроби, можно получить следующее:

					1									
				1	$\frac{2}{2}$		1							
			2	$\frac{2}{3}$		3	$\frac{3}{2}$		2					
		7	$\frac{2}{4}$		14	$\frac{5}{5}$		14	$\frac{4}{2}$	7				
	42	$\frac{2}{5}$		105	$\frac{7}{9}$		135	$\frac{9}{7}$		105	$\frac{5}{2}$	42		
429	$\frac{2}{6}$		1287	$\frac{9}{14}$		2002	$\frac{16}{16}$		2002	$\frac{14}{9}$		1287	$\frac{6}{2}$	429

Теперь связь между дробями в двух соседних строчках становится очевидной: числитель и знаменатель каждой дроби равняются

Миллс, Роббинс и Рамси не смогли доказать эти гипотезы — это было сделано только в 1995 г. Д. Зельбергером, а еще год спустя появилось более короткое и концептуальное доказательство, принадлежащее Г. Купербергу (см. [26], [18]). Однако еще в начале 1980-х гг. Ричард Стенли заметил, что последовательность A_n — 1, 2, 7, 42, 429, ... — также появляется в связи с плоскими разбиениями.

§ 4.6. Плоские разбиения с дополнительными симметриями

Вернемся к плоским разбиениям. Как мы убедились в предыдущей лекции, формула Макмагона позволяет вычислить количество плоских разбиений в прямоугольном параллелепипеде $\mathcal{B}(a, b, c)$ размера $a \times b \times c$, а также выписать для них производящую функцию. Напомним, что последняя вычисляется по формуле

$$PP_q(a, b, c) = \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, b, c)} \frac{[\text{ht } \eta + 1]}{[\text{ht } \eta]},$$

которая при подстановке $q = 1$ превращается в формулу для числа разбиений

$$PP_{a, b, c} = \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, b, c)} \frac{\text{ht } \eta + 1}{\text{ht } \eta}$$

(напомним, что высотой $\text{ht } \eta$ клетки η с координатами (i, j, k) называется число $i + j + k - 2$).

Эту задачу можно обобщить: можно рассматривать не все плоские разбиения, а только те из них, которые обладают дополнительными симметриями. Первое такое обобщение принадлежит самому Макмагону: он предложил рассматривать разбиения в параллелепипеде с *квадратным* основанием $\mathcal{B}(a, a, c)$, симметричные относительно плоскости $x + y = 0$, т. е. разбиения, неподвижные относительно действия группы \mathbb{Z}_2 , переставляющей две координаты из трех.

Макмагон предложил формулу для производящей функции, считающей число таких разбиений. Однако доказать эту формулу он не смог; эта гипотеза была доказана независимо Эндрюсом в 1978 г. и Макдональдом в 1979 г. Оказывается, ответ выглядит очень похо-

же на обычную формулу Макмагона:

$$SPP_q(a, a, c) = \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, a, c)/\mathbb{Z}_2} \frac{[|\eta|(\text{ht } \eta + 1)]}{[|\eta| \text{ht } \eta]}.$$

(Обозначение SPP происходит от слов «symmetric plane partitions».)

Эта формула требует некоторых пояснений. Во-первых, суммирование в ней ведется не по всем клеткам параллелепипеда, а по орбитам действия \mathbb{Z}_2 на этих клетках. Во-вторых, через $|\eta|$ обозначается мощность орбиты: так, $|\eta|$ равняется 1, если клетка η лежит на диагонали, и 2 в противном случае.

Разумеется, при подстановке $q = 1$ мы получаем формулу для числа таких плоских разбиений:

$$SPP(a, a, c) = \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, a, c)/\mathbb{Z}_2} \frac{|\eta|(\text{ht } \eta + 1)}{|\eta| \text{ht } \eta} = \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, a, c)/\mathbb{Z}_2} \frac{\text{ht } \eta + 1}{\text{ht } \eta}.$$

Далее, можно рассматривать и другие симметрии плоских разбиений. Например, плоские разбиения внутри куба $a \times a \times a$ можно вращать на 120° или 240° относительно главной диагонали куба. Сколько существует *циклически симметричных плоских разбиений*, т. е. плоских разбиений, обладающих поворотной симметрией порядка 3 — иначе говоря, переходящих в себя при поворотах куба относительно главной диагонали? Обозначим их число через $CSPP(a, a, a)$, а соответствующую производящую функцию — через $CSPP_q(a, a, a)$ (от английского «cyclically symmetric plane partitions»).

Почему-то Макмагон в своих работах не рассматривал циклически симметричные плоские разбиения (хотя находился буквально в шаге от этой задачи). Гипотетическая формула для числа таких плоских разбиений была опять-таки получена Йеном Макдональдом в конце 1970-х гг.; она выглядит почти так же, как и формула для числа \mathbb{Z}_2 -симметричных плоских разбиений.

Гипотеза 4.15 (гипотеза Макдональда).

$$CSPP_q(a, a, a) = \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, a, a)/\mathbb{Z}_3} \frac{[|\eta|(\text{ht } \eta + 1)]}{[|\eta| \text{ht } \eta]}.$$

Здесь через $|\eta|$ опять-таки обозначается мощность орбиты, которая равняется 1, если клетка лежит на главной диагонали, и 3 иначе. Подстановка $q = 1$ дает число таких разбиений:

$$CSPP_q(a, a, a) = \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, a, a)/\mathbb{Z}_3} \frac{|\eta|(\text{ht } \eta + 1)}{|\eta| \text{ht } \eta} = \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, a, a)/\mathbb{Z}_3} \frac{\text{ht } \eta + 1}{\text{ht } \eta}.$$

Об этой гипотезе Макдональда Ричард Стенли в 1981 г. писал:

«Если бы мне нужно было назвать одну самую интересную открытую проблему во всей перечислительной комбинаторике, это была бы она».

В 1982 г. ее доказательство было получено Миллсом, Роббинсом и Рамси при помощи теории гипергеометрических рядов. Заинтересованный читатель может найти это доказательство в гл. 5 книги Д. Брессу [12].

Далее, можно рассматривать плоские разбиения в кубе, у которых есть одновременно и поворотная симметрия порядка 3, и симметрия порядка 2 относительно каждой из биссекторных плоскостей, — иначе говоря, те разбиения, группа симметрий которых есть симметрическая группа S_3 . Такие разбиения называются *вполне симметричными* (по-английски *totally symmetric plane partitions*, TSPP).

Казалось бы, предыдущее обсуждение показывает, как должна выглядеть производящая функция для числа вполне симметричных плоских разбиений. Естественно было бы предположить, что

$$TSPP_q(a, a, a) \stackrel{?}{=} \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, a, a)/S_3} \frac{[|\eta|(\text{ht } \eta + 1)]}{[|\eta| \text{ht } \eta]},$$

где произведение надо брать по орбитам группы S_3 .

Но этот ответ оказывается неправильным! Однако удивительным образом при подстановке $q = 1$ он превращается в правильную формулу для числа таких разбиений:

$$TSPP(a, a, a) = \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, a, a)/S_3} \frac{|\eta|(\text{ht } \eta + 1)}{|\eta| \text{ht } \eta}.$$

В 1979 г. Макдональд предположил, как должен выглядеть правильный q -аналог этой формулы. Оказывается, он устроен не так, как формулы для \mathbb{Z}_2 - и \mathbb{Z}_3 -симметричных разбиений, а в некотором смысле проще: в q -аналог числителя и знаменателя каждой дроби не входит величина $|\eta|$, а входит только высота соответствующей клетки, как в классической формуле Макмагона:

$$TSPP_q(a, a, a) = \prod_{\eta \in \mathcal{B}(a, a, a)/S_3} \frac{[\text{ht } \eta + 1]}{[\text{ht } \eta]}.$$

Эта гипотеза была доказана только в 1995 г. Джоном Стембриджем [24].

Кроме того, можно рассматривать много других типов симметрий плоских разбиений. В статье Ричарда Стенли 1986 г. [23] рассматриваются 10 различных типов симметрий плоских разбиений и приводятся формулы для числа разбиений с данной симметрией (часть этих формул на тот момент были гипотетическими). Последняя из десяти формул для числа разбиений была доказана в 1994 г. Греггом Купербергом; в его работе [17] в том числе приводится обзор этих результатов.

Однако нас будет интересовать только один из оставшихся типов плоских разбиений с дополнительными симметриями, поскольку именно он оказывается связан со знаменитыми матрицами.

§ 4.7. Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения

Рассмотрим плоское разбиение в параллелепипеде $\mathcal{R}(a, b, c)$. Возьмем дополнение к нему — т. е. все клетки куба, не принадлежащие этому плоскому разбиению. Это тоже будет плоское разбиение, только «растущее» из противоположного угла параллелепипеда и в противоположных направлениях. Иначе говоря, если применить к этому дополнению центральную симметрию относительно центра масс параллелепипеда, получится уже настоящее плоское разбиение. Будем называть его *дополнительным* (complementary) к исходному. Ясно, что дополнительное разбиение зависит от выбора a, b, c , т. е. сторон «коробки», в которой содержится исходное разбиение.

Плоское разбиение, дополнительное к самому себе, называется *самодополнительным* (self-complementary). Понятно, что самодополнительное разбиение может быть только в параллелепипеде, у которого хотя бы одна из сторон имеет четную длину.

Упражнение 4.16. Нарисуйте все самодополнительные разбиения в параллелепипедах $\mathcal{R}(2, 2, 2)$ и $\mathcal{R}(2, 2, 3)$.

Определение 4.17. *Вполне симметричное самодополнительное плоское разбиение (totally symmetric self-complementary plane partition, TSSCPP) — это плоское разбиение в кубе с ребром четной длины, которое одновременно является вполне симметричным (т. е. симметричным относительно всевозможных перестановок координатных осей) и самодополнительным. Длину ребра куба будем называть порядком такого разбиения.*

Упражнение 4.18. Нарисуйте все вполне симметричные само-дополнительные разбиения порядка 2 и 4.

Ответ на это упражнение приведен на рис. 4.2.

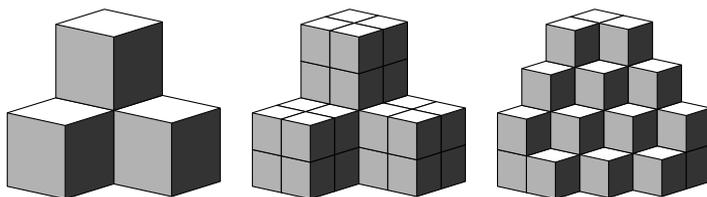


Рис. 4.2. Вполне симметричные самодополнительные разбиения порядка 2 и 4

Выписать все вполне симметричные самодополнительные разбиения порядка 6 — это несколько более трудоемкая, однако вполне посильная (даже без помощи компьютера) задача. Они изображены на рис. 4.3; их оказывается семь.

Итак, вот первые три члена последовательности: 1, 2, 7, ... Однако эти числа мы уже видели раньше в этой лекции: это количество

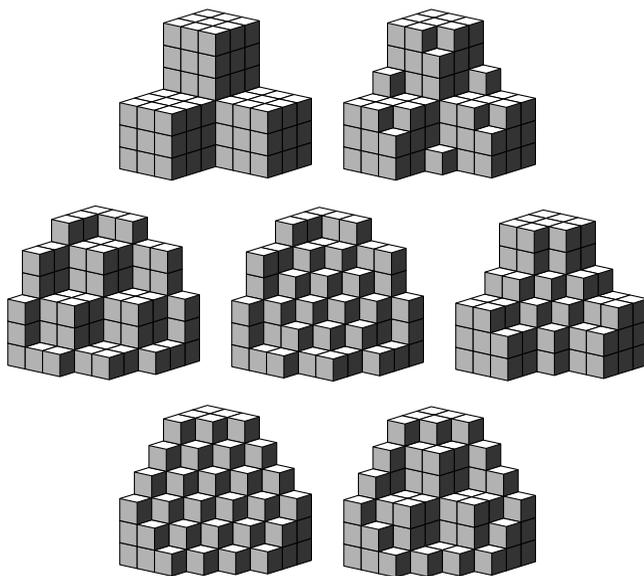


Рис. 4.3. Вполне симметричные самодополнительные разбиения порядка 6

знакочередующихся матриц порядка 1, 2 и 3! Это было отмечено Дэвидом Роббинсом.

Гипотеза 4.19 (гипотеза Роббинса). *Число вполне симметричных самодополнительных разбиений порядка $2n$ равняется*

$$TSSCPP(2n) = \frac{1! \cdot 4! \cdot 7! \cdot \dots \cdot (3n-2)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot \dots \cdot (2n-1)!}.$$

Эта гипотеза была доказана в результате совместных усилий многих математиков на протяжении более 10 лет. Одним из ключевых шагов ее доказательства оказалось сведение подсчета числа таких разбиений к подсчету некоторого набора непересекающихся путей, который оказался представим в виде некоторого пфаффиана. Доказательство было завершено в 1994 г. Джорджем Эндрюсом [11].

Благодаря результату Эндрюса гипотеза о знакочередующихся матрицах (на тот момент еще не доказанная) оказалась эквивалентной следующему утверждению: число вполне симметричных самодополнительных разбиений порядка $2n$ равняется числу знакочередующихся матриц порядка n . Именно в таком виде она и была доказана Зельбергером [26]. Это доказательство было изложено на 85 страницах; проверка его корректности заняла несколько лет и потребовала совместных усилий 88 рецензентов!

Удивительно, что для этого утверждения неизвестно биективное доказательство: несмотря на то что вполне симметричных самодополнительных плоских разбиений и знакочередующихся матриц равное число, между ними не удается построить никакой естественной биекции. Все известные на сегодня соответствия между этими двумя множествами — в том числе те, что были использованы Зельбергером в его доказательстве, — оказываются значительно сложнее, чем хотелось бы.

Читателю, желающему узнать об этом больше, мы рекомендуем обратиться к замечательной во всех отношениях книге Дэвида Брессу «Proofs and confirmations» [12], где очень подробно и популярно изложены как многочисленные результаты о плоских разбиениях и их доказательства, так и история возникновения этих результатов. К сожалению, эта книга (пока?) не переведена на русский язык и может быть труднодоступна; хотя, кажется, широкое распространение электронных библиотек уже свело на нет последнюю трудность.

Из-за небольшого объема брошюры мы вынуждены оставить за ее рамками рассказ о нескольких важных сюжетах, в которых возникают знакочередующиеся матрицы, ограничившись лишь кратким упоминанием. В первую очередь следует сказать о том, что доказательство гипотезы о знакочередующихся матрицах, полученное Г. Купербергом, было основано на обнаруженной им связи этой гипотезы с одной (к тому моменту давно изучавшейся) задачей статистической физики: так называемой шестивершинной решеточной моделью, или моделью квадратного льда. А именно, как оказалось, состояния этой модели описываются как раз знакочередующимися матрицами. Весьма подробный и доступный рассказ об этом можно найти в последней главе той же книги Д. Брессу. Замечательно, что обнаруженная связь между теорией знакочередующихся матриц и статистической физикой привела к чрезвычайно плодотворному взаимодействию и бурному развитию этих областей.

Кроме этого, за последние два десятка лет появилось много других интересных результатов о знакочередующихся матрицах и плоских разбиениях. Среди прочего упомянем взвешенные аналоги формулы Макмагона, теоремы о предельном поведении трехмерных диаграмм Юнга (популярный рассказ о последнем сюжете можно прочесть в статье [4]), и новые комбинаторные результаты о знакочередующихся матрицах — в частности, гипотезу Разумова—Строганова, доказанную в 2011 г. Кантини и Спортелло. Но это уже совсем другая история.

Литература

1. Берштейн М. А., Мерзон Г. А. Диаграммы Юнга, пути на решетке и метод отражений // Математическое просвещение. Третья серия, вып. 18. М.: МЦНМО, 2014 (в печати).
2. Буфетов А. И., Житлухин М. В., Козин Н. Е. Диаграммы Юнга и их предельная форма. М.: МЦНМО, 2013.
3. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: Факториал, 1999 (или любое другое издание).
4. Горин В. Е. Что можно сложить из кубиков? // Квант. 2012. № 3. С. 6—11.
5. Игнатъев М. В. Квантовая комбинаторика // Математическое просвещение. Третья серия, вып. 18. М.: МЦНМО, 2014 (в печати).
6. Ландо С. К. Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2002.
7. Ландо С. К. Введение в дискретную математику. М.: МЦНМО, 2012.
8. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985.
9. Фукс Д. Б. О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и упущенных возможностях // Квант. 1981. № 8. С. 12—20.
10. Эндрюс Дж. Теория разбиений. М.: Наука, 1982.
11. Andrews G. Plane partitions, V: The T.S.S.C.P.P. conjecture // J. Combinatorial Th. (A). 1994. Vol. 66 (1). P. 28—39.
12. Bressoud D. Proofs and confirmations: the story of the alternating sign-matrix conjecture // МАА. 1999.
13. Dodgson C. L. Condensation of determinants, being a new and brief method for computing their arithmetical values // Proceedings of the Royal Society of London. 1866—1867. Vol. 15. P. 150—155.
14. Gessel I., Viennot X. Binomial determinants, paths, and hook length formulae // Adv. Math. 1985. Vol. 58. P. 300—321.
15. Karlin S., McGregor J. G. The differential equations of birth-and-death processes and the Stieltjes moment problem // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. Vol. 85. P. 489—546.
16. Karlin S., McGregor J. G. Coincidence probabilities // Pacific J. Math. 1959. Vol. 9. P. 1141—1164.
17. Kuperberg G. Symmetries of plane partitions and permanent-determinant method // J. Combin. Theory. Ser. A. 1994. Vol. 68. P. 115—151.
18. Kuperberg G. Another proof of the alternating-sign matrix conjecture // Internat. Math. Res. Notices. 1996. Vol. 1996. P. 139—150.

19. *B. Lindström* On the vector representations of induced matroids // *Bull. Lond. Math. Soc.* 1973. Vol. 5. P. 85—90.
20. *Mills W. H., Robbins D. P., Rumsey H. Jr.* Proof of the Macdonald conjecture // *Invent. Math.* 1982. Vol. 66. P. 73—87.
21. *O'Hara K. M.* Unimodality of Gaussian coefficients: a constructive proof // *J. Combin. Theory. Ser. A.* 1990. Vol. 53. P. 29—52.
22. *Pak I., Panova G.* Strict unimodality of q -binomial coefficients. Preprint arXiv:1306.5085. 2013.
23. *Stanley R.* Symmetries of plane partitions // *J. Combin. Theory. Ser. A.* 1986. Vol. 43. P. 103—113.
24. *Stembridge J.* The enumeration of totally symmetric plane partitions // *Advances in Math.* 1995. Vol. 111. P. 227—243.
25. *Zeilberger D.* Kathy O'Hara's constructive proof of the unimodality of the Gaussian polynomials // *Amer. Math. Monthly.* 1989. Vol. 96. P. 590—602.
26. *Zeilberger D.* Proof of the alternating sign matrix conjecture // *Elect. J. of Combinatorics.* 1996. Vol. 3(2).
27. *Zeilberger D.* Dodgson's determinant-evaluation rule proved by two-timing men and women // *Elect. J. of Combinatorics.* 1997. Vol. 4(2).

Евгений Юрьевич Смирнов
ДИАГРАММЫ ЮНГА, ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ
И ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ МАТРИЦЫ

Подписано в печать 14.02.2014 г. Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 4,5. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mcsme.ru
