ТАЙНЫ ЦИКЛОИДЫ

Рулетта является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели ее древние ⟨...⟩, ибо это не что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздем колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься от земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота.

Паскаль

1. Циклоида и изохронный маятник

Кривую, «так часто вычерчивающуюся перед глазами каждого», первыми заметили Галилей в Италии и Мерсенн (1588 – 1648) во Франции. В Италии ее назвали циклоидой (это название, означающее «происходящая от круга», принадлежит Галилею), во Франции — рулеттой. Привилось первое название, а рулеттами теперь называют кривые более широкого класса, речь о которых пойдет позднее. Математики XVII века, создававшие общие методы исследования кривых, были очень заинтересованы в новых «подопытных» кривых. Среди этих кривых циклоида заняла особое место. Она оказалась одной из первых *трансцендентных* кривых (кривых не алгебраического происхождения), для которых удалось найти красивый явный ответ в задачах о построении касательных и вычислении площади. Но больше всего поражало, что циклоида вновь и вновь появлялась при решении самых разных задач, в первоначальной постановке которых она не участвовала. Все это сделало циклоиду самой популярной кривой XVII века: крупнейшие ученые и Италии, и Франции (Торричелли, Вивиани (1622 – 1703), Ферма (1601 – 1665), Декарт (1596 – 1650), Ро-

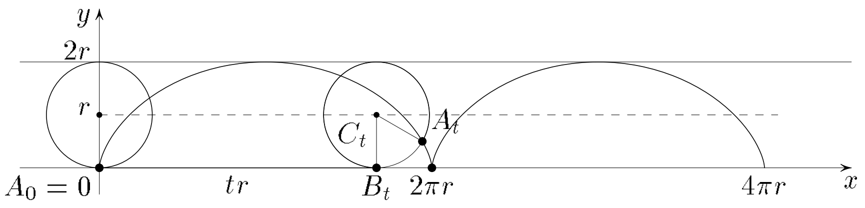


Рис. 2.

берваль (1602–1675)) решали разнообразные задачи о циклоиде, а в 1673 году Гюйгенс констатировал, что «циклоида исследована точнее и основательнее всех других кривых».

От кинематического определения к аналитическому. Кинематическое определение циклоиды содержится в эпиграфе к этой главе. Попробуем его расшифровать.

Выберем на плоскости систему координат так, чтобы прямая, по которой катится круг (*направляющая* прямая), совпала с осью Ox, и пусть круг (его называют *производящим* кругом) катится в положительном направлении оси Ox. Предположим, что в начальный момент времени наблюдаемая точка границы круга занимает положение $A_0 = (0, 0)$ (рис. 2).

Если r — радиус производящего круга, то центр его будет двигаться по прямой $y = r$. Чтобы полностью охарактеризовать качение круга, достаточно описать движение его центра, если только добавить, что *круг катится без скольжения*![1] Нам удобно, зафиксировав единицу времени, предположить, что центр круга движется равномерно со скоростью r. В момент времени t центр круга окажется в точке $C_t = (tr, r)$, и производящий круг будет касаться направляющей прямой в точке $B_t = (tr, 0)$. Найдем теперь положение A_t наблюдаемой точки в момент времени t (в силу определения A_t будет точкой циклоиды). Чтобы это сделать, нужно четко сформулировать условие, что качение круга происходит без скольжения: оно состоит в том, что длина отрезка между точками касания производящего круга с направляющей прямой в моменты времени 0 и t (отрезка OB_t, см. рис. 2) равна длине дуги B_tA_t, «прокатившейся» по этому

[1] Вероятно, именно это и имел в виду Паскаль, когда писал, что колесо «катится своим движением».

отрезку (при этом дуга может превышать полную окружность). Поэтому в момент времени t угол $B_tC_tA_t$ равен t (в радианной мере), так как длина дуги B_tA_t равна tr. Обозначив через D_t проекцию точки A_t на прямую, проходящую через центр круга C_t параллельно оси Ox, а через E_t — проекцию точки A_t на прямую, проходящую через центр C_t параллельно оси Oy (рис. 3), получим (с учетом направлений координатных осей)

$$C_tD_t = -r\sin t, \quad C_tE_t = -r\cos t$$

(посмотрите, что будет в случаях $t > \pi/2$, $t > \pi$). Следовательно, координаты точки A_t циклоиды равны соответственно

$$x = rt - r\sin t, \quad y = r - r\cos t.$$

Заметим, что при $t = 2\pi$ длина отрезка OB оказывается равной длине окружности, наблюдаемая точка вновь попадает на ось Ox, и картина начнет повторяться. Таким образом, период циклоиды равен $2\pi r$.

Итак, циклоиду можно определить как множество точек с координатами $(rt - r\sin t, r - r\cos t)$, и при желании про исходное кинематическое определение забыть. Мы получили так называемое параметрическое задание циклоиды: обе координаты x и y точки A_t циклоиды являются функциями от некоторой вспомогательной переменной t.

Назовем точки циклоиды, лежащие на оси Ox, остриями циклоиды, точки, лежащие на прямой $y = 2r$, — вершинами, а дуги между соседними остриями — арками циклоиды. В выбранной системе координат циклоида характеризуется одним параметром r (радиусом производящего круга). Все циклоиды, у которых точка $(0, 0)$ — острие, получаются друг из друга гомотетией. По каждой точке (x, y), $x \neq 0$, можно единственным образом выбрать r так, что эта точка будет лежать на первой арке, выходящей из точки $(0, 0)$ соответствующей циклоиды (докажите).

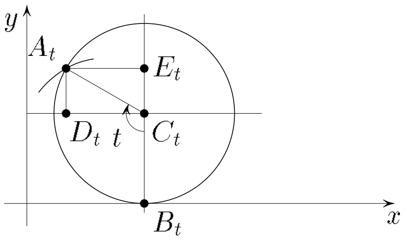


Рис. 3.

Касательные к циклоиде. Мы построим касательную к циклоиде с помощью приема, разработанного Торричелли и Робервалем; этот прием основывается на сложении скоростей. Первым касательную к циклоиде, вероятно, построил Вивиани. Однако, поскольку циклоида определялась кинематически, естественно было найти такой способ построения касательной к ней, который исходил бы из кинематических соображений. Это и сделали Роберваль и Торричелли.

Рассмотрим движение материальной точки. Если в момент времени t_0 прекратить действие сил, то точка остановится или начнет равномерно двигаться по касательной к траектории (скорость возникающего равномерного движения называется мгновенной векторной скоростью исходного движения при $t = t_0$). Это утверждение вытекает из законов Ньютона. Но можно, как это часто делали математики в XVII веке, принять его за кинематическое определение касательной, убедившись, что оно согласуется с наблюдениями над простейшими движениями (прежде всего вращательным). Встав на такую точку зрения, мы сможем строить касательные ко многим интересным кривым, используя при этом лишь простые факты о скоростях.

Будем рассматривать только плоское движение. Зафиксируем на плоскости точку O — начало отсчета. Если движущаяся точка в момент времени t занимает положение A_t, то через $\mathbf{r}(t)$ обозначим вектор $\overline{OA_t}$. Задание векторов $\mathbf{r}(t)$ для всех значений t полностью определяет движение. Мгновенную векторную скорость в момент времени t обозначим через $\dot{\mathbf{r}}(t)$; напомним, что вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлен по касательной к траектории движения. Его длина $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ называется величиной скорости. Если движение происходит по фиксированной прямой, на которой введены координаты, то векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлены по этой прямой, и их можно характеризовать координатами $s(t)$ и $\dot{s}(t)$.

Пример 1. Галилей показал, что для прямолинейного движения $s(t) = gt^2/2$ скорость будет равна $\dot{s}(t) = gt$.

Пример 2. Пусть точка, находящаяся на расстоянии R от точки O, равномерно вращается вокруг O. Тогда вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлен по касательной к окружности, по которой движется точка, и $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 2\pi R/T$, где T — период вращения (время полного оборота). В частности, при $T = 2\pi$ имеем $|\mathbf{r}(t)| = |\dot{\mathbf{r}}(t)| = R$.

Закон сложения скоростей. Пусть имеется два движения $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$. Назовем их суммой движение, для которого $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)$, где справа стоит векторная сумма. Закон сложения скоростей утверждает, что скорость движения $\dot{\mathbf{r}}(t)$ равна $\dot{\mathbf{r}}_1(t) + \dot{\mathbf{r}}_2(t)$, то есть сумме (векторной) скоростей составляющих движений. Закон сложения скоростей легко установить для суммы движений с постоянными скоростями; общий же случай получается из этого частного случая предельным переходом.

Всякое движение $\mathbf{r}(t)$ может быть представлено в виде суммы двух прямолинейных движений. Для этого достаточно ввести любую декартову систему координат так, чтобы $O = (0, 0)$, и рассмотреть изменение со временем координат $x(t), y(t)$ вектора $\mathbf{r}(t)$. Очевидно, что исходное движение $\mathbf{r}(t)$ и будет суммой движений $x(t)$ и $y(t)$ по координатным осям. Скорости этих движений $x(t)$ и $y(t)$ являются компонентами вектора $\mathbf{r}(t)$ (в силу закона сложения скоростей). Если в примере 2 $R = 1, T = 2\pi$, и вектор $\mathbf{r}(0)$ направлен по положительному направлению оси Ox, то $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\cos t, -\sin t)$, и мы получаем, что $\dot{s}(t) = -\sin t$ если $s(t) = \cos t$, и $\dot{s}(t) = \cos t$ если $s(t) = \sin t$. Читатель, знакомый с дифференцированием, заметит, что выявился очень простой кинематический смысл формул для производных от $\sin t$ и $\cos t$.

Кинематическое определение касательной к параболе. Еще Галилей (1564—1642) обнаружил, что если тело бросить под углом к горизонту, то оно летит по параболе. При доказательстве этого факта Галилей исходил из предположения, что такое движение является суммой равномерного движения по инерции и свободного падения. Однако Галилей не воспользовался своими вычислениями для построения касательной к параболе. Сделал это Торричелли. В приводимых ниже задачах 1, 2 сформулирован его результат.

Задача 1. Докажите, что касательная, проведенная в точке A_t траектории горизонтально брошенного тела: $A_t = (x(t), y(t)) = (vt, gt^2/2)$, соединяет эту точку с точкой $(0, -y(t)) = (0, gt^2/2)$.

Все вычисления легко обобщаются на случай тела, брошенного под углом к горизонту со скоростью (u, v). В этом случае движение разбивается на движение $\{x_1(t) = ut, x_2(t) = vt\}$ с постоянной скоростью (u, v) и свободное падение $\{x_2(t) = 0, y_2(t) = -gt^2/2\}$. Поэтому результирующее движение записывается так: $\{x(t) = ut, y(t) = vt - gt^2/2\}$ (при сложении векторов с началом в O координаты их концов складываются).

Задача 2. Докажите, что касательная к параболе, по которой летит тело, брошенное со скоростью (u, v), соединяет точку касания $(x(t), y(t))$ с точкой $(0, -y_2(t)) = (0, gt^2/2)$.

Заметим, что указанный Торричелли способ построения касательных к параболе был известен и раньше, однако его кинематическая интерпретация, безусловно, поучительна.

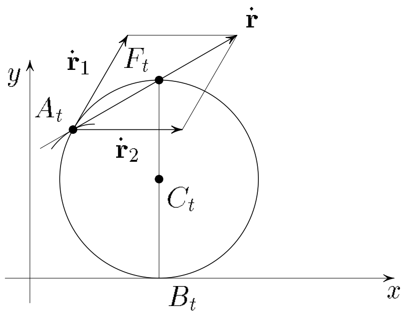


Рис. 4.

Вернемся к циклоидам. Движение точки, описывающей циклоиду, можно рассматривать как сумму вращательного $\mathbf{r}_1(t)$ — вокруг O — и поступательного $\mathbf{r}_2(t)$ — вдоль прямой l, причем движения эти происходят таким образом, что в каждый момент времени пройденные пути оказываются одинаковыми $(s(t))$. Закон изменения пути $s(t)$ можно задавать по-разному; от этого будет зависеть характер движения, но траектория (циклоида), а вместе с ней и интересующие нас касательные, меняться не будут. Выберем самый простой закон изменения: $s(t) = ct$. Тогда оба движения, и поступательное и вращательное, будут равномерными с одинаковой величиной скорости $\dot{\mathbf{r}}_1(t) = \dot{\mathbf{r}}_2(t) = c$ (см. пример 2)[1].

Найдем скорость результирующего движения. Пусть в момент времени t точка занимает положение A_t (рис. 4). Вектор $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ направлен по касательной к границе производящего круга, вектор $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$ — горизонтально; длины их одинаковы. По правилу параллелограмма (в данном случае это ромб) находим искомую скорость $\dot{\mathbf{r}}(t)$, а значит, и касательную к циклоиде.

Задача 3. Докажите, что касательная к циклоиде в точке A_t соединяет эту точку с верхней точкой F_t производящего круга при его соответствующем положении.

(Для решения задачи нужно доказать лишь простой геометрический факт: вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлен по прямой A_tF_t.)

Заметим, что величина скорости $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ не постоянна: она мак-

[1] Имеем $c = 2\pi R/T$, где R — радиус производящего круга, T — время его полного оборота. В частности, если $T = 2\pi$, то $c = R$.

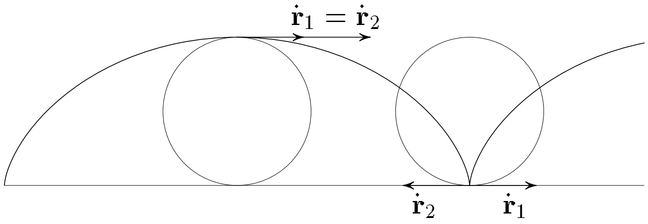


Рис. 5.

симальная, когда точка занимает наивысшее положение (при этом векторы $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$ лежат на одной прямой и совпадают по направлению), и равна нулю, когда точка попадает на прямую l (в этом случае векторы $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$ противоположны — рис. 5).

Можно показать, что равенство нулю скорости в точках соприкосновения круга и прямой во все моменты времени эквивалентно принятому ранее определению качения без скольжения.

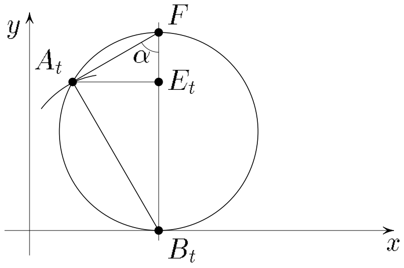


Рис. 6.

Итак, получаем, что там, где циклоида имеет заострения, скорость наблюдаемой точки обращается в нуль. Оказывается, что вообще, какова бы ни была траектория, в точках ее заострения скорость всегда равна нулю. Иногда говорят, что траектория не может «сломаться» на ненулевой скорости. Принято считать, что в точках заострения у кривых нет касательных. Все сказанное здесь нуждается в серьезных уточнениях, которые мы делать не будем.

Нормаль к циклоиде. Итак, касательная к циклоиде в точке A_t (рис. 6) проходит через верхнюю точку производящего круга — точку F на рис. 6. Пусть B_t — нижняя точка круга, α — угол между касательной и вертикалью FB_t. Тогда A_tB_t — *нормаль* к циклоиде (перпендикуляр к касательной; мы воспользовались тем, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой), и для ординаты y точки A_t имеем $y = E_tB_t = 2r\sin^2\alpha$.

Отсюда получаем следующее соотношение:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{y}{2r}}. \tag{9}$$

В дальнейшем это соотношение будет играть важную роль. Можно показать, что циклоида с параметром r является единственной кривой, проходящей через точку $(0,0)$ и удовлетворяющей соотношению (9).

О площадях криволинейных фигур. Площади некоторых криволинейных фигур умели вычислять еще в Древней Греции. Вначале интересовались лишь квадратурой фигур, т. е. построением для данной фигуры циркулем и линейкой отрезка, длина которого равна ее площади. Как выяснилось позднее, это можно сделать для тех фигур, площадь которых вычисляется при помощи арифметических операций и операции извлечения квадратного корня. Постепенно стали интересоваться фигурами, площади которых вычисляются с помощью произвольных алгебраических операций (алгебраическая квадратура), а затем даже и такими фигурами, в выражениях для площадей которых фигурировало число π. Основной метод вычисления площадей состоял в приближении данной фигуры многоугольниками и переходе к пределу; но должно было очень повезти, чтобы эти вычисления удалось довести до явного ответа.

Иногда вычисление площади фигуры можно упростить, воспользовавшись какими-нибудь общими свойствами площадей. Вот несколько таких свойств.

1. При гомотетии фигуры с коэффициентом k площадь ее умножается на k^2, а при растяжении фигуры относительно некоторой оси с коэффициентом k площадь ее умножается на k.
2. Равносоставленные фигуры (т. е. фигуры, которые можно разрезать на попарно равные части) равновелики (имеют равные площади).
3. Две фигуры, при пересечении которых любой прямой, параллельной некоторой фиксированной прямой, получаются равные отрезки, равновелики (этот принцип сформулировал в 1635 году Кавальери (1598–1647)).

Представим себе, что контур фигуры — гибкая лента, а сама фигура составлена из очень тонких жестких слоев, параллельных прямой l («неделимых», по терминологии Кавальери). Рассмотрим преобразования, сохраняющие эти слои, но сдвигающие их друг относительно друга. Все получающиеся при таких преобразованиях фигуры в силу принципа Кавальери будут равновелики.

Перечисленные свойства площадей нуждаются в доказательствах (основная трудность этих доказательств состоит в том, чтобы дать строгое определение площади), но в них легко поверить. Сейчас мы расскажем о том, как изящно применяются эти свойства при вычислении площади фигуры, лежащей под аркой циклоиды.

Спутница циклоиды, лепестки Роберваля и площадь под циклоидой. Поскольку все циклоиды подобны, мы ограничимся случаем $r = 1$. Вслед за Робервалем свяжем с каждой точкой циклоиды A_t (см. рис. 6 на с. 125) ее проекцию E_t на вертикальный диаметр производящего круга. Точка E_t имеет координаты

$$x = t, \quad y = 1 - \cos t = 1 + \sin\Big(t + \frac{\pi}{2}\Big).$$

Кривую, составленную из точек E_t при всевозможных t, Роберваль назвал «спутницей циклоиды». Легко понять, что «спутница циклоиды» — это сдвинутая синусоида (на 1 вверх и на $\pi/2$ вправо).

С этим обстоятельством связан исторический курьез. Математики с незапамятных времен занимались тригонометрическими функциями, но синусоида впервые появилась лишь в XVII веке, причем не как график синуса, а как ... «спутница циклоиды» (отчасти это можно объяснить тем, что долго не рассматривали функций неалгебраического происхождения).

«Спутница циклоиды» разбивает ее на три части (рис. 7а на с. 128): фигуру под синусоидой и две симметричные фигуры, названные «лепестками Роберваля». В силу свойства 2 площадь фигуры под синусоидой равна 2π: эта фигура равносоставлена с прямоугольником такой площади (рис. 7б). Рассмотрим один «лепесток». Горизонталь на высоте $y = 1 - \cos t$ пересекает его по отрезку A_tE_t длины $|\sin t|$ (см. рис. 3). Переместив эти го-

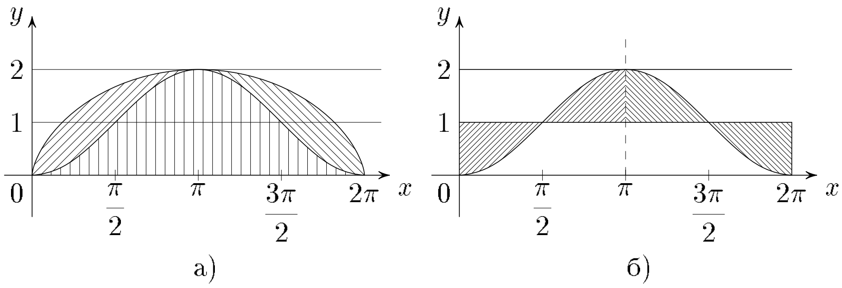


Рис. 7.

ризонтальные отрезки (при всевозможных t) вдоль своих горизонталей так, чтобы их левые концы попали на одну вертикаль, мы получим полукруг единичного круга (рис. 8). В силу принципа Кавальери площадь «лепестка» равна площади этого полукруга, т. е. $\pi/2$. Значит, площадь фигуры под аркой циклоиды с $r = 1$ равна $2\pi + 2(\pi/2) = 3\pi$ (и следовательно, $3\pi r^2$ при $r \neq 1$).

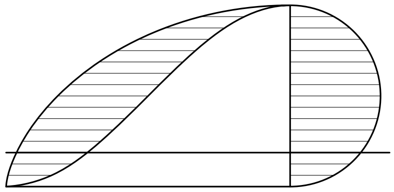


Рис. 8.

Вопрос о вычислении площадей сегментов циклоиды является менее элементарным. Гюйгенс не без гордости писал: «Я первый промерил площадь той части циклоиды, которая получится, если отсчитать от вершины 1/4 часть оси и провести параллель основанию. Эта часть составляет половину площади правильного шестиугольника, вписанного в образующий круг».

Таутохрона. Галилей утверждал, что период колебаний математического маятника определяется только его длиной l и не зависит от угла φ его максимального размаха. Гюйгенс, выяснив, что это утверждение справедливо лишь для малых углов φ, решил построить маятник, период колебаний которого и в самом деле не зависел бы от φ (такой маятник называется таутохронным или изохронным).

Построение изохронного маятника Гюйгенс разделил на два этапа:

1) нахождение кривой, по которой должен двигаться конец маятника (таутохроны);

2) нахождение подвески маятника, обеспечивающей движение его конца по таутохроне.

Мы начнем с поисков таутохроны (существование которой заранее не очевидно).

Конец математического маятника движется по дуге окружности точно так же, как тяжелая материальная точка — по желобу, контур которого совпадает с этой окружностью. Если пренебречь силами трения и сопротивления воздуха, то тяжелая точка, пущенная по круговому желобу без начальной скорости с высоты H, пройдя нижнее положение, снова поднимется на высоту H и далее будет совершать периодические колебания, поднимаясь то в одну, то в другую сторону на высоту H. Неверное утверждение Галилея состояло в том, что при этом период колебаний $T(H)$ не зависит от H. Наша задача — определить, какой формы должен быть желоб, чтобы то, что утверждал Галилей, было верным.

Благодаря счастливой случайности (они в истории науки играют не последнюю роль), Гюйгенс изучал циклоиду (в связи с конкурсом Паскаля, 1658 год) в то самое время, когда искал изохронный маятник. Именно циклоида и оказалась таутохроной! Вероятно, сам Гюйгенс этого заранее не ожидал (так можно понимать его слова: «я обнаружил пригодность ее (циклоиды) для измерения времени, исследуя ее по строгим правилам науки и не подозревая ее применимости»).

Рассмотрим на желобе, сделанном по форме перевернутой циклоиды (рис. 9; r — радиус производящего круга) тяжелую материальную точку; пусть в начальный момент времени она находится на высоте H (в точке C_0 на рисунке). Попытаемся найти время τ, через которое она окажется в нижней точке B (вершине циклоиды). Тогда через 2τ она будет в точке $C_{2\tau}$ циклоиды, симметричной относительно вертикальной оси точке C_0, через время $T = 4\tau$ (полный период) вернется в точку C_0. Нас интересует зависимость τ от H.

Пусть в момент времени t тяжелая точка занимает положение C_t на высоте $h = h(t)$. Вектор скорости $\dot{\mathbf{r}}(t)$ в момент времени t направлен по касательной к циклоиде в точке C_t; его дли-

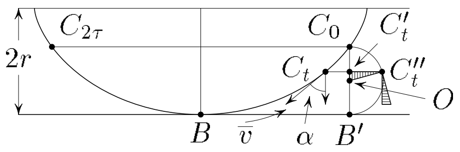


Рис. 9.

на $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ (величина скорости) определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{m|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2}{2} = mg(H - h(t)),$$

т. е.

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{2g(H - h(t))}.$$

Посмотрим, как движется проекция нашей точки на вертикаль C_0B'. В момент времени t эта проекция занимает положение C'_t, а в момент времени τ она окажется в точке B' (см. рис. 9), пройдя отрезок C_0B' длины H. Скорость $w(t)$ в момент времени t этого прямолинейного движения (в точке C'_t на рис. 9) — это проекция вектора скорости $\dot{\mathbf{r}}(t)$ на вертикаль: $w(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|\cos\alpha$, где α — угол между кусательной к циклоиде и вертикалью. Поскольку (см. (9)) $\cos\alpha = \sqrt{(2r - y)/2r}$ и $y = 2r - h(t)$, имеем $\cos\alpha = \sqrt{h(t)/2r}$, а значит

$$w(t) = \sqrt{\frac{g}{r}} \cdot \sqrt{h(t)(H - h(t))}.$$

Итак, закон изменения скорости у нашего прямолинейного движения довольно сложный. Но Гюйгенс заметил (решающая догадка!), что при равномерном вращательном движении по окружности диаметра H вертикальная компонента скорости имеет тот же вид, что и $w(t)$. Действительно, построим на отрезке C_0B' как на диаметре полуокружность, и пусть C''_t — точка этой полуокружности, лежащая на высоте $h(t)$. Длина отрезка $C'_tC''_t$ равна $\sqrt{h(t)(H - h(t))}$.

Из подобия прямоугольных треугольников, заштрихованных на рис. 9 (их стороны взаимно перпендикулярны: OC''_t — радиус, в точке C''_t проведены касательная к полуокружности и вертикаль), следует, что вектор длины $(H/2)\sqrt{g/r}$, касательный к окружности в точке C''_t, имеет вертикальную проекцию длины $w(t)$. Значит, когда наша точка C движется по циклоиде, соответствующая ей точка C'' равномерно вращается с угловой скоростью $\sqrt{g/r}$ радиан в секунду (не зависящей от H!). За время $\tau = \pi\sqrt{r/g}$ точка C'' пройдет полуокружность C_0B', за то же время точка C' пройдет отрезок C_0B', а сама точка C — дугу циклоиды C_0B. Итак, мы не только доказали таутохронность циклоиды (т. е. что τ не зависит от H), но и нашли полный период колебаний:

$$T = 4\tau = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}. \tag{10}$$

Фактически доказано, что движение тяжелой материальной точки по циклоидальному желобу можно представить в виде суммы равномерного вращательного движения с угловой скоростью, не зависящей от того, с какой высоты H пущена точка, и некоторого (вообще говоря неравномерного) поступательного движения. При $H = 2r$ это легко вывести из кинематического определения циклоиды и соотношения (9) на с. 126.

Формула (10) настолько напоминает гипотетическую формулу Галилея для периода математического маятника ($T = 2\pi\sqrt{l/g}$, где l — длина), что было естественно попытаться использовать (10) для обоснования последней. И в самом деле, с помощью (10) Гюйгенс получил первое строгое доказательство формулы для периода колебаний математического маятника при малых углах размаха φ. Он заметил, что при малых углах круговой желоб почти не отличатеся от циклоидального, и оставалось только понять, при каком соотношении между длиной l математического маятника и параметром l циклоиды это отличие наименьшее. Оказалось, что при $l = 4r$ (это не очевидный факт; мы еще к нему вернемся). Подставляя в (10) $r = l/4$, получаем знаменитую формулу для периода математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ (при малых φ).

Циклоидальный маятник. Создавая первую модель часов, Гюйгенс надеялся скомпенсировать отклонение простого (математического) маятника от изохронности, уменьшая в процессе отклонения его длину. Длину маятника можно регулировать, устано-

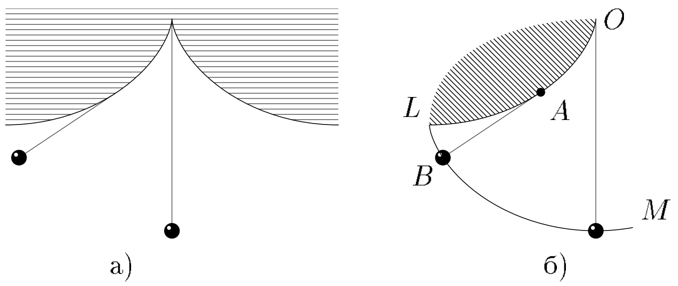


Рис. 10.

вив «щеки» (рис. 10а), на которые в процессе отклонения будет наматываться нить подвески. Попытки экспериментально подобрать нужную зависимость длины маятника от угла отклонения не дали успеха, и Гюйгенс в следующих своих конструкциях часов устанавливает вместо щек ограничители размаха. Когда же выяснилось, что циклоида — таутохрона, стало понятно, что форма щек должна быть такой, чтобы конец маятника двигался по циклоиде.

Гюйгенс искал форму щек, рассуждая (в несколько вольном пересказе) примерно так. Пусть имеется препятствие, ограниченное кривой L, в некоторой точке O которого закреплена нерастяжимая нить длины l (рис. 10б). Натянутую нить мы наматываем на препятствие, наблюдая за кривой M, которую описывает незакрепленный конец нити. Гюйгенс называл кривую M «разверткой» кривой L; теперь M называют *эвольвентой* кривой L, а L — эволютой кривой M (с одной эволютой связывается много эвольвент, отвечающих разным длинам l). Нам нужно найти эволюту циклоиды.

Кривая M состоит из таких точек B, что сумма длин отрезка касательной BA к кривой L в точке A и дуги AO кривой L равна l (см. рис. 10б — это в точности означает натянутость частично намотанной на L нити). Первая догадка Гюйгенса заключалась в том, что касательная к кривой M в точке B перпендикулярна к AB, т. е. что AB — касательная к кривой L в точке A — является одновременно и нормалью к кривой M в точке B. Проще всего пояснить этот факт, исходя из кинематического определения кривой M. Вспомним, что вектор скорости направлен по касательной к траектории движения и что при изменении действия сил вектор скорости не может измениться мгновенно (подробнее об этом см. ниже). «Обрубим» в точке A препятствие, но будем продолжать движение натянутой нити (рис. 11); тогда конец нити начнет двигаться по окружности с центром в точке A; векторная же скорость его в точке B не изменится; поэтому в точке B у кривой M и окружности с центром A будет общая касательная, перпендикулярная к радиусу BA.

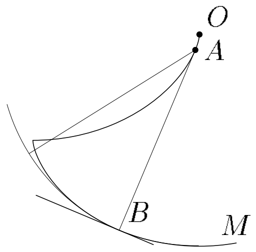


Рис. 11.

Когда вы прочтете в этой главе раздел, посвященный рулеттам, вы заметите, что если рассматривать нити разной длины, то описанное движение конца нити продолжается до такого движения всей плоскости как твердой пластины, при котором точки кривой L являются мгновенными центрами вращения, а различные эвольвенты — траекториями точек плоскости. Из этого замечания сразу следует перпендикулярность отрезка AB к касательной к кривой M в точке B.

Следующая догадка Гюйгенса состояла в том, что в «хорошей» ситуации эволюта кривой восстанавливается однозначно (помните, у одной кривой много эвольвент)! Дело в том, что нормали к кривой M в разных точках — это касательные к ее эволюте L. «Хорошую» же кривую по касательным можно восстановить: взяв много касательных, построить описанную ломаную и, «учащая» затем касательные, все лучше приближать кривую (говорят, что кривая огибает множество своих касательных).

Нам нужно найти кривую, касательные к которой будут нормалями к заданной циклоиде. Гюйгенс догадался, что этой кривой будет такая же циклоида, только поднятая на $2r$ и сдвинутая на полпериода (так, что ее вершины совпадают с остриями исходной циклоиды; см. рис. 12 на следующей странице).

В самом деле, пусть $r = 1$, и пусть l и l' — направляющие прямые соответственно нижней и верхней циклоид, O и O' — их начальные точки (l' на две единицы выше l; O' на π единиц правее O). Возьмем на прямой l точку C и рассмотрим положения производящих кругов (обеих циклоид), когда они касаются l в

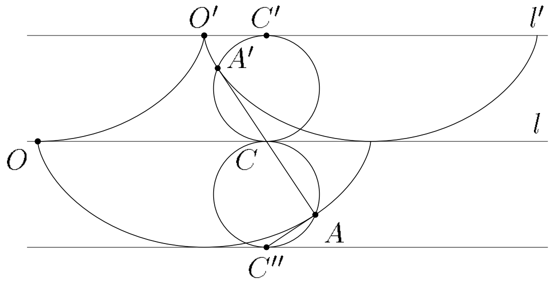


Рис. 12.

этой точке C. Пусть C' и C'' — диаметрально противоположные ей точки соответственно верхнего и нижнего кругов, A и A' — соответствующие точки циклоид. Дуга $CC''A$ равна по длине отрезку OC; поэтому она на π больше дуги $C'A'$, равной по длине отрезку $O'C'$. Отсюда $\angle C'CA' = \angle C''CA$, и точки A', C, A лежат на одной прямой. Остается заметить, что CA' — касательная к верхней циклоиде, а CA — нормаль к нижней (AC'' — касательная к ней).

Теперь мы знаем, что щеки таутохронного маятника должны быть циклоидальными, и что длина нити l должна равняться $4r$ (именно при таком значении l мы в качестве эвольвенты получим нужную циклоиду). При малых же углах размаха φ регулирующие щеки почти не влияют на длину маятника, и циклоида близка к дуге окружности радиуса $4r$ (см. конец предыдущего пункта).

Теорема Кристофера Рена. Эволюты и вычисление длин кривых. Решив задачу о циклоидальном маятнике, Гюйгенс не остановился, понимая, что им создана замечательная математическая теория. Он пишет: «Для применения моего изобретения к маятникам мне необходимо было установить новую теорию, а именно, теорию образования новых линий при посредстве развертывания кривых линий. Здесь я столкнулся с задачей сравнения кривых и прямых линий. Я изучил этот вопрос несколько далее, чем нужно было для моей цели, так как теория показалась мне изящной и новой».

Прежде всего Гюйгенс заметил, что когда нить маятника целиком наматывается на щеку, то конец его оказывается в вершине циклоиды; значит, длина нити маятника ($4r$) совпадает с длиной половины арки циклоиды, и, значит, длина арки циклоиды равна $8r$. Эту теорему в 1658 году сформулировал и доказал Кристофер Рен; Гюйгенс же, как мы видим, получил очень естественное доказательство этой теоремы.

Теорема Кристофера Рена произвела на современников очень сильное впечатление, и вот почему. Вычислением длин кривых математики интересовались не меньше, чем вычислением площадей. Вначале, по аналогии с квадратурой (см. с. 126), они интересовались «ректификацией» — построением циркулем и линейкой отрезка соответствующей длины; позже стали интересоваться и алгебраической ректификацией — выражением длины кривой при помощи любых алгебраических операций. Мы уже говорили, что квадратуры некоторых фигур были найдены еще античными математиками; кривую же, для которой была бы возможна хотя бы алгебраическая ректификация, математики безуспешно искали вплоть до второй полонины XVII века. Начали думать, что такой кривой вообще нет (так можно толковать слова Декарта «мы, люди, не можем найти соотношения между прямыми и кривыми»). Ректификация циклоиды, полученная Реном, опровергла эту точку зрения. Затем Ферма получил ректификации нескольких других кривых; однако во всех этих примерах фигурировали неалгебраические кривые, и скептики «уточнили» гипотезу, предположив, что невозможна алгебраическая ректификация алгебраических кривых (они справедливо объясняли, что, конечно, искусственно построить кривую, допускающую ректификацию, можно). Однако и в таком виде гипотеза оказалась неверной (первый опровергающий эту гипотезу пример был построен еще в 1657 году, но оставался неизвестным): Нейль, Хейрат и Ферма независимо предъявили в качестве алгебраической кривой, допускающей алгебраическую ректификацию, одну и ту же *полукубическую параболу* $ay^2 = x^3$. Совпадение это казалось мистическим до тех пор, пока Гюйгенс не вскрыл, в чем причина исключительности этой малозаметной кривой: она является эволютой параболы. Точнее, эволютой параболы $y = x^2$ является кривая

$$y = \frac{1}{2} + 3\Big(\frac{x}{4}\Big)^{2/3}.$$

Теория Гюйгенса вообще максимально прояснила вопрос о ректификации. Результаты о циклоидальном маятнике и связанные с ними вопросы составили содержание большей части книги Гюйгенса «Маятниковые часы», вышедшей в 1673 году.

В заключение мы предлагаем читателям несколько задач с весьма почтенной репутацией.

Две задачи Галилея

1. Докажите, что под действием силы тяжести материальная точка проходит все хорды окружности, оканчивающиеся в нижней точке окружности, за одно и то же время (аналогично — для хорд, начинающихся в верхней точке окружности).
2. Пусть есть кривая L (достаточно «хорошая») и точка A, не лежащая на L. Найдите на L такую точку B, чтобы отрезок AB проходился материальной точкой под действием силы тяжести за минимальное время.

Задачи Ньютона

Пусть есть центральное поле, в котором силы пропорциональны расстоянию r до центра: $F(r) = kr$, $k > 0$.

Ньютон заметил, что в таком поле гипоциклоиды (см. о них ниже в этой главе) играют ту же роль, что циклоиды — в поле сил тяжести: гипоциклоиды являются (в этом поле) таутохронами (Ньютон называл их изохронами), а эволютами гипоциклоид являются подобные же гипоциклоиды (это — чисто геометрический факт, не относящийся к механике, но он позволяет устроить гипоциклоидальный маятник, а заодно и вычислить длину гипоциклоиды).

Попробуйте доказать эти утверждения.

2. Рулетты и касательные к ним

> Некоторые вопросы выяснились для меня первоначально при помощи механического метода, после чего их надо было доказать геометрически, ибо исследование упомянутым методом не может дать подлинного доказательства. Однако, разумеется, легче найти доказательство, если сперва с помощью этого метода получено известное представление о вопросе, чем искать доказательство, не зная заранее, в чем суть дела.
>
> *Архимед*

Укороченные циклоиды. Пока мы следили только за одной (фиксированной) граничной точкой производящего круга; ясно, что и другие граничные точки будут двигаться по таким же циклоидам, только сдвинутым вдоль прямой. Проследим теперь за траекториями внутренних точек круга. Возникающие кривые называются укороченными циклоидами (рис. 13); они характеризуются отношением $k = \rho/r$, где R — радиус производящего круга, ρ — расстояние от центра круга до наблюдаемой точки. При $k = 0$ получаем прямую, по которой движется центр круга, а при $k = 1$ — циклоиду.

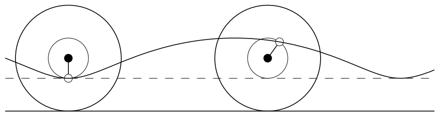


Рис. 13.

Задача 4. Докажите, что нормаль к укороченной циклоиде проходит через нижнюю точку производящего круга.

Заметим, что точка, движущаяся по укороченной циклоиде, нигде не имеет нулевой скорости. В нижней точке скорость направлена горизонтально и ее величина равна $R-\rho$. Это означает, что к качению окружности радиуса ρ добавляется скольжение со скоростью $R-\rho$ (поступательное движение).

Удлиненные циклоиды. Вовлечем в качение круга его внешние точки (можно представить себе, что на колесо, движущееся по рельсу, надет обод). Эти точки движутся по кривым, которые называются удлиненными циклоидами (рис. 14). Все рассуждения, которые ранее были приведены для укороченных циклоид, дословно переносятся на удлиненные. Здесь только $k = \rho/r > 1$. Заметим лишь, что в нижней точке удлиненной циклоиды скорость направлена в сторону, противоположную движению круга ($|\dot{\mathbf{r}}_1| = \rho$, $\dot{\mathbf{r}}_2 = r$, $\rho > R$).

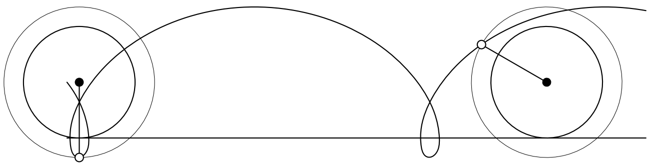


Рис. 14.

Обращали ли вы внимание на то, что нижние точки обода колеса вагона движутся назад?

Мгновенный центр вращения. Итак, мы вовлекли в качение круга по прямой все точки плоскости. Каждая точка движется по своей траектории, но все эти траектории согласованы, так как движущиеся точки составляют твердое тело. Характеристическим свойством твердого тела с точки зрения кинематики является то, что при движении расстояния между всеми его точками остаются неизменными. Мы ограничимся здесь рассмотрением лишь таких движений твердых пластин, которые можно производить, не выводя пластины из плоскости (запрещается, например, их переворачивать). Нас будет интересовать, какие ограничения накладывает на скорости точек пластины условие твердости (заметим, что вопрос о движении трехмерных твердых тел намного сложнее рассматриваемой нами плоской задачи).

Вот некоторые закономерности движения твердых пластин.

Принцип вовлечения. *Движение твердой пластины однозначно определяется движениями любых двух ее точек. Движение двух различных точек, при котором сохраняется расстояние между ними, можно, и притом единственным образом, продолжить до движения всей плоскости как твердой пластины.*

Это утверждение носит чисто геометрический характер. Мы не будем приводить его доказательства, ограничившись наглядными пояснениями. Во-первых, движение прямолинейного стержня полностью характеризуется движением двух его точек, а во-вторых, если треугольник составлен из жестких стержней, то движение одного из них однозначно приводит в движение весь треугольник. В результате в движение двух точек A, B можно вовлечь прямую AB, а затем всякую точку C вне AB.

Принцип инерции. *Если на твердую пластину не действуют никакие внешние силы (а лишь внутренние силы, обеспечивающие твердость), то она совершает равномерное прямолинейное или равномерное вращательное движение.*

При рассмотрении произвольных движений пластин нам потребуется еще один фундаментальный принцип механики: *скорость не может измениться мгновенно* (для изменения скорости требуется ненулевое время). В частности, если в момент времени t_0 изменить силы, действовавшие на движущуюся точку, то скорость $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ не изменится, а значит, если $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$, не изменится и касательная к траектории в момент t_0 (хотя сама траектория начиная с этого момента может стать иной).

Пусть в момент времени t_0 на движущуюся твердую пластину перестали действовать внешние силы. Тогда, с одной стороны, скорости точек в момент времени t_0 останутся прежними, а с другой стороны, движение должно подчиняться сформулированному принципу инерции. Поэтому при движении твердой пластины в каждый момент времени t может иметь место лишь одна из двух возможностей;

а) скорости всех точек равны (как векторы);

б) существует единственная точка O_t, в которой скорость равна нулю; в произвольной же точке A пластины скорость направлена перпендикулярно к вектору $\overline{O_t A}$, а ее величина пропорциональна расстоянию от A до O_t. (Коэффициент пропорциональности зависит только от момента времени t.)

Из того, что скорость не может измениться мгновенно, нетрудно вывести, что переход от ситуации а) к б) и наоборот возможен лишь в те моменты, когда пластина останавливается (скорости всех точек равны нулю). Поэтому в промежутках между остановками либо всюду имеет место ситуация а), либо всюду б). Можно показать, что в случае а) траектория любой точки A получается из траектории некоторой точки B параллельным переносом на вектор $\overline{BA}$. Мы будем рассматривать случай б) (то есть считать, что в каждый момент времени имеется единственная точка O_t с нулевой скоростью). Будем называть O_t *мгновенным центром вращения* в момент t. (В примере с качением круга по прямой мгновенным центром вращения является точка соприкосновения круга с направляющей прямой.)

Если известен мгновенный центр вращения O_t, то нормали к траекториям в момент времени t (прямые $O_t A_t$), а следовательно, и касательные, строятся автоматически. Наоборот, если в момент t известны скорости двух точек пластины, то взяв точку пересечения нормалей к этим скоростям, мы получим мгновенный центр вращения O_t.

Пусть теперь твердая пластина движется по неподвижной плоскости. Рассмотрим *на этой плоскости* кривую L, составлен-

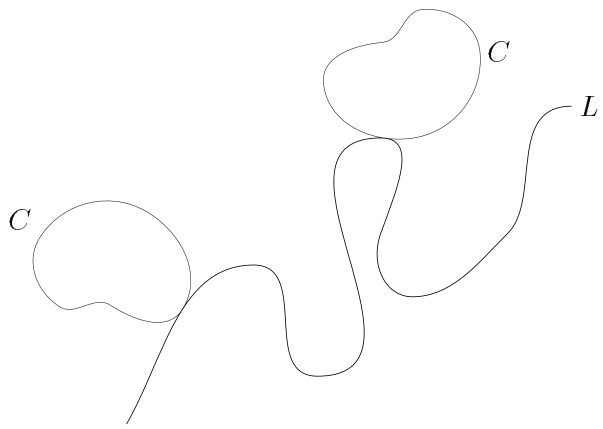


Рис. 15.

ную из мгновенных центров вращения во все моменты времени; кривую L называют неподвижным центроидом; мы будем называть ее «рельсом». С другой стороны, рассмотрим *на пластине* кривую C, составленную из всех таких точек, которые оказываются мгновенными центрами вращения в какие-то моменты времени; C называют подвижным центроидом; мы будем называть C «колесом». Введенные «несерьезные» термины, вероятно, подсказали вам, что исходное движение можно получить, если рассмотреть качение без скольжения нашего кривого «колеса» по кривому «рельсу» и вовлечь в это качение остальные точки (рис. 15). Отсюда можно вывести равенство длин дуги «колеса» и соответствующей дуги направляющего «рельса» (по которой эта дуга «колеса» прокатилась). При этом разрешается, чтобы при качении «колесо» пересекало «рельс».

Часто под *рулеттами* понимают траектории, которые описывают точки плоскости при ее движении как твердой пластины с условием (б) во все моменты времени, т. е. при некотором качении. Ко всем рулеттам мы научились проводить нормали и касательные. При этом оказалось, что не нужно даже уметь проводить касательные к «колесу» и «рельсу» (это было бы необходимо, если пользоваться сложением скоростей). В наших механических рассмотрениях мы вышли за пределы XVII века; замечательно, однако, что способ проведения нормалей к общим рулеттам открыл Декарт, определявший их с помощью качения (не зная, сколь общий характер носят движения, порожденные качениями).

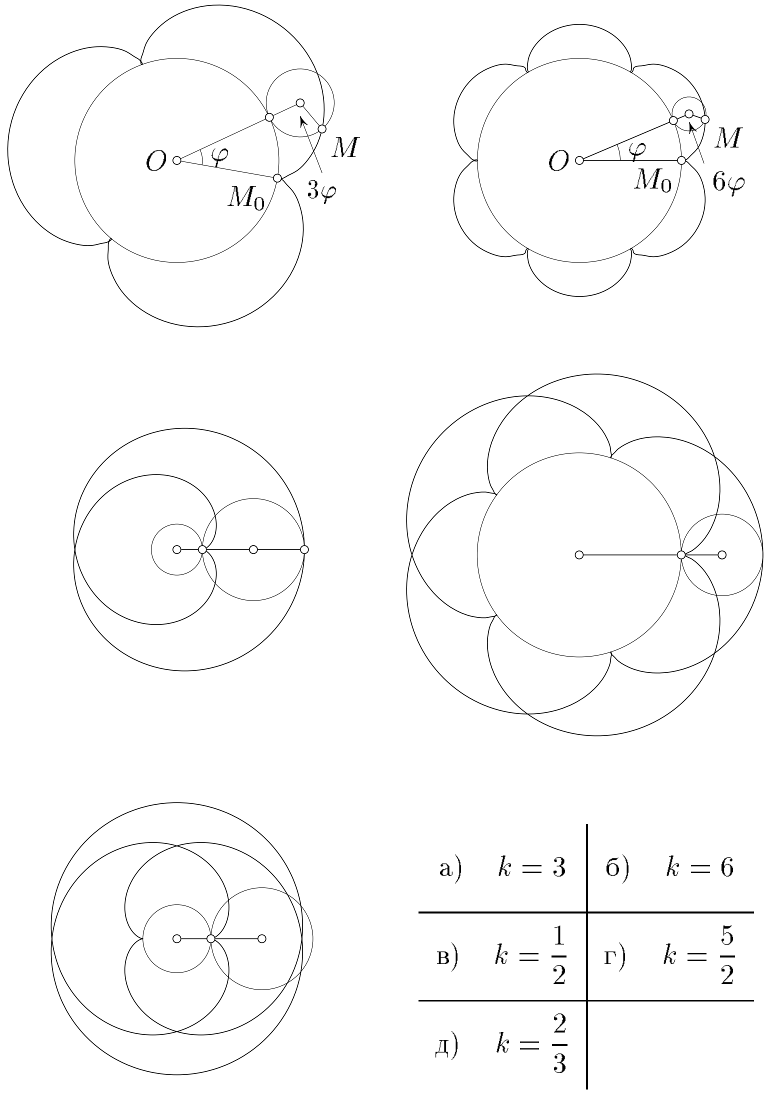
Эпициклоиды. Рассмотрим теперь рулетты, получающиеся при качении круга по кругу. Пусть круг радиуса r катится по внешней стороне окружности радиуса R. Траектории граничных точек катящегося круга («колеса») называются эпициклоидами. Их вид зависит от $k = R/r$ (рис. 16 на с. 142). Если k — целое, то подвижный круг, прокатившись один раз по границе неподвижного, сделает k оборотов и эпициклоида будет иметь k заострений и k арок. Эпициклоиду при $k = 1$ называют кардиоидой (она напоминает стилизованное изображение сердца). Если $k = p/q$ — несократимая дробь, то подвижный круг, сделав q оборотов, p раз прокатится по неподвижному. Если же k будет иррациональным числом, то никакой периодичности не будет, и наблюдаемая точка никогда не вернется в исходное положение. (Можно доказать, что получающаяся в этом случае бесконечная траектория заполняет кольцо $\{R \leqslant OA \leqslant R+2r\}$, подходя сколь угодно близко к любой его точке, но не в каждую попадая.)

Касательные к эпициклоидам легко строятся с помощью мгновенного центра вращения — точки соприкосновения кругов. Докажите, что касательная к эпициклоиде (в некоторой точке) проходит через точку соответствующего подвижного круга, диаметрально противоположную точке соприкосновения с неподвижным.

Замечание. При построении эпициклоид и решении задач нужно помнить следующее. Если A — начальное положение наблюдаемой точки (рис. 18 на с. 143), а в некоторый момент времени подвижный круг касается неподвижного в точке B, то эпициклоиде принадлежит такая точка его границы C, что дуга BA равна по длине дуге BC; учитывая разницу радиусов, получаем

$$\frac{\cup BC}{\cup BA} = \frac{R}{r} = k.$$

Траектории движения внутренних (соответственно внешних) точек подвижного круга при рассматриваемом качении называются укороченными (соответственно удлиненными) эпициклоидами



а) $k = 3$	б) $k = 6$
в) $k = \dfrac{1}{2}$	г) $k = \dfrac{5}{2}$
д) $k = \dfrac{2}{3}$	

Рис. 16.

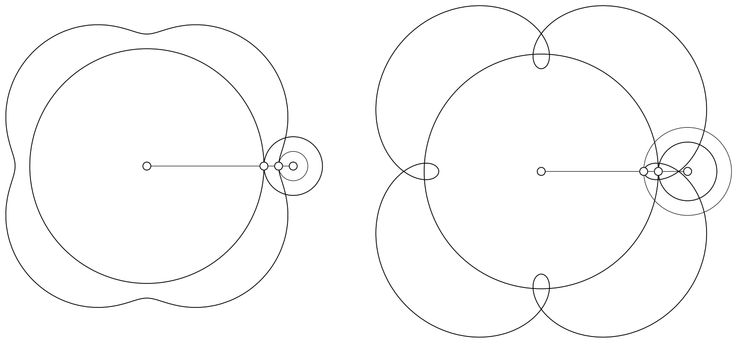


Рис. 17. Укроченные и удлиненные эпициклоиды

(рис. 17 на с. 143; мы ограничиваемся целыми k).

Задача 5. Пусть точка A равномерно вращается вокруг точки O_1, которая, в свою очередь, равномерно вращается вокруг точки O; $OO_1 = r_2$, $O_1A = r_1$. Пусть оба вращения происходят по часовой стрелке; v_1 и v_2 — величины линейных скоростей. Покажите, что движение точки A будет происходить по какой-то эпициклоиде (быть может, укороченной или удлиненной). Какими соотношениями определяется характер кривой?

Гипоциклоиды. Рулетты, получающиеся при качении круга радиуса r по внутренней стороне окружности радиуса $R > r$, называются *гипоциклоидами* (соответственно, удлиненными или укороченными).

Можно также в качестве аналога такого движения рассмотреть качение обруча радиуса R, внутренней стороной касающегося границы неподвижного круга радиуса $r < R$. Соответствующие рулетты называются перициклоидами. Но оказывается, что они совпадают с эпициклоидами (см. приложение в конце главы).

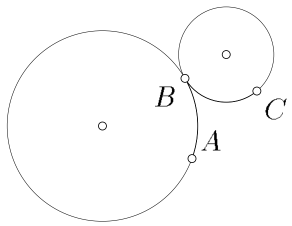


Рис. 18.

Задача 6. Пусть вращения, описанные в задаче 5, происходят в двух противоположных направлениях (одно — по, другое — против часовой стрелки). По каким траекториям будет при этом двигаться точка A?

Мы не ставили перед собой цели строго доказать все результаты, полученные нами из кинематических соображений. В некоторых случаях это сделать просто: механические рассуждения заменяются математическими почти автоматически (для этого оказывается достаточно скорости заменить производными). В других случаях такие «заменители» найти сложнее (например, там, где рассматривается движение пластин или изменяются силы). Однако чисто математические рассмотрения не могут полностью заменить механическую интерпретацию, во многих случаях дающую возможность увидеть простой и красивый ответ.

3. Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды

Ошибка Галилея. В самом начале XVII века юный Галилей пытался экспериментально проверить свою догадку о том, что свободное падение — равноускоренное движение. Когда он перенес наблюдения с Пизанской башни в лабораторию, ему стало очень мешать то, что тела падают «слишком быстро». Чтобы замедлить это движение, Галилей решил заменить свободное падение тел их движением по наклонной плоскости, предположив, что и оно будет равноускоренным. Проводя эти опыты, Галилей обратил внимание на то, что в конечной точке величина скорости тела, скатившегося по наклонной плоскости, не зависит от угла наклона плоскости, а определяется только высотой H и совпадает с конечной скоростью тела, свободно упавшего с той же высоты (как вы хорошо знаете, в обоих случаях $|\overline{v}|^2 = 2gh$. Изучив движения по наклонным плоскостям, Галилей перешел к рассмотрению движения материальной точки под действием силы тяжести по ломаным линиям. Сравнивая времена движения по различным ломаным, соединяющим фиксированную пару точек A и B, Галилей заметил, что если через эти две точки A, B провести четверть окружности (это всегда можно сделать; подумайте, как?) и вписать в нее две ломаные M и L, такие, что ломаная L «вписана» в ломаную M (см. рис. 19), то материальная точка из A в B быстрее попадает по ломаной M, чем по ломаной L (попытайтесь доказать это). Увеличивая у ломаной число звеньев и переходя к пределу, Галилей получил, что по четверти окружности, соединяющей две заданные точки, материальная точка спустится быстрее, чем по любой вписанной в эту четверть окружности ломаной. Из этого Галилей сделал ничем не аргументированный вывод, что четверть окружности, соединяющая пару заданных точек A, B (не лежащих на одной вертикали), и будет для материальной точки, движущейся под действием силы тяжести, линией наискорейшего спуска (позже линию наискорейшего спуска стали называть брахистохроной). Впоследствии выяснилось, что это утверждение Галилея было не только необоснованным, но и ошибочным.

Швейцария. Конец XVII века. «Прогуливаясь по улицам Базеля и обсуждая всевозможные математические вопросы, Иоганн и Якоб Бернулли наткнулись на следующий вопрос: какую форму могла бы принять свободно висящая цепь, укрепленная в двух своих концах? Они скоро и легко сошлись на том взгляде, что цепь примет ту форму равновесия, при которой ее центр тяжести будет лежать возможно ниже ... Физическая часть задачи этим исчерпана. Определение кривой с наиболее низким центром тяжести при данной длине между двумя точками A и B есть уже задача только математическая.» (Мах).

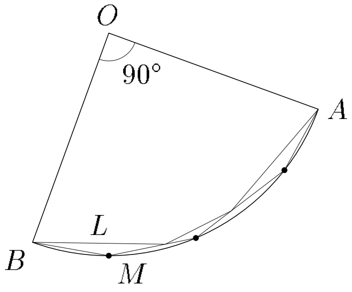


Рис. 19.

Исследовав цепную линию (так называется линия, форму которой принимает гибкая тяжелая нерастяжимая нить, подвешенная в двух точках), братья Бернулли заинтересовались другими задачами, в которых разыскиваются кривые, отвечающие наименьшему значению той или иной величины. В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал заметку «Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики». Впрочем, эта «новая» задача уже рассматривалась Галилеем. Речь шла о нахождении брахистохроны — линии, соединяющей фиксированную пару точек, по которой материальная точка спустится под действием силы тяжести быстрее всего. Задача о брахистохроне, недоступная в начале века даже великому Галилею, оказалась очень своевременной

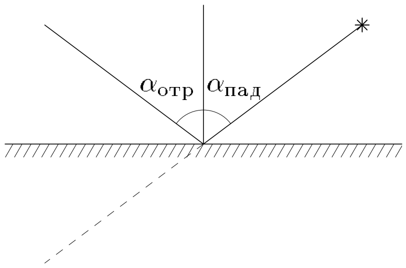


Рис. 20.

в конце века. Она была очень быстро решена и самим Иоганном Бернулли, и его братом Якобом, и их учителем Лейбницем, а также Ньютоном и Лопиталем. Мы расскажем о решении Иоганна Бернулли: оно совершенно неожиданным образом использует соображения из геометрической оптики!

«Без всякого еще метода, при помощи одной своей геометрической фантазии Иоганн Бернулли одним взглядом решает задачу умело, пользуясь при этом тем, что случайно уже известно, — картина поистине замечательная и удивительно красивая. Мы должны признать в Иоганне Бернулли истинно художественную натуру, действующую в области естествознания. Брат его, Якоб Бернулли, был научным характером совсем другого рода. Ему было уделено больше критики, но гораздо меньше творческой фантазии. И он решил ту же задачу, но гораздо более тяжеловесным образом. Зато он не упустил случая развить с большей основательностью общий метод для решения задач этого рода. Таким образом, мы находим в обоих братьях разделенными те две стороны научного таланта, которые в величайших исследователях природы, каким был, например, Ньютон, бывают соединены с необычайной силой.» (Мах).

Принцип Ферма. Еще в 140 году до н. э. Клавдий Птолемей составил подробную таблицу зависимости угла преломления светового луча при переходе из воздуха в воду от угла падения, но лишь в 1621 году Снеллиус угадал аналитическую закономерность, связывающую эти углы:

$$\frac{\sin \alpha_{\text{падения}}}{\sin \alpha_{\text{преломления}}} = k,$$

где k — *коэффициент преломления,* константа для фиксированной пары сред.

В 1650 году Ферма дал замечательную интерпретацию этого закона. Он отправлялся от известного еще Герону Александрийскому факта, что равенство углов падения и отражения можно вывести из предположения, что при отражении свет выбирает наикратчайший путь (рис. 20).

Ферма предположил, что *путь распространения света между двумя точками есть такой путь, для прохождения которого свету требуется наименьшее время по сравнению с любым другим путем между этими точками,* — теперь это утверждение носит название «приниипа Ферма». Из принципа Ферма, в частности, следует, что поскольку в однородной среде скорость света постоянна, то наименьшее время приходится на путь наименьшей длины. Отсюда следует, что путь света в однородной среде, не имеющей препятствий, прямолинеен, а также закон отражения. Если же среда имеет переменную плотность, и скорость света в различных ее участках различна, то путь распространения света, на прохождение которого уходит наименьшее время, уже не должен быть прямолинейным. Посмотрим, что происходит в случае преломления. (Все наши дальнейшие рассмотрения относятся к плоскому случаю).

Пусть прямая l разделяет две среды (на плоскости), в первой из которых скорость света равна c_1, а во второй c_2; A_1 и A_2 — точки, лежащие по разные стороны от l. Найдем на l такую точку B, что $\sin\alpha_1/\sin\alpha_2 = c_1/c_2$, где α_1 — угол падения, α_2 — угол преломления (см. рис. 21). Существование и единственность такой точки B легко доказывается. Пусть C — любая другая точка прямой l. Опустим из нее перпендикуляры CE и CF на A_1B и A_2B соответственно.

Тогда $\angle ECB = \alpha_1$, $\angle FCB = \alpha_2$, и прохождение отрезка BE со скоростью c_1 займет столько времени, сколько прохождение отрезка BF со скоростью c_2. Значит, свету на прохождение пути A_1BA_2 нужно столько же времени, сколько на прохождение двух отрезков: A_1E со скоростью c_1 и FA_2 со скоростью c_2. Так как длины отрезков A_1C и A_2C больше длин отрезков A_1E и FA_2 соответственно, то свету на прохождение пути A_1CA_2 нужно больше времени, чем на прохождение пути A_1BA_2 и, значит,

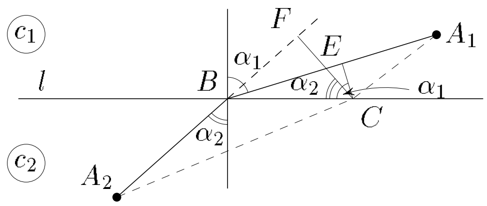


Рис. 21.

точка C не годится.

Таким образом, из принципа Ферма следует закон преломления Снеллиуса, причем коэффициент преломления светового луча из одной среды в другую оказывается равным отношению скоростей света в этой паре сред[1].

Из принципа Ферма также следует, что в сложной слоистой оптической среде, состоящей из горизонтальных «полос», в каждой из которых скорость света постоянна: $c_1, c_2, \ldots$ (рис. 22), свет будет распространяться по плоской ломаной с вершинами на разделяющих эти полосы прямых, причем если α_i — угол, который звено ломаной, лежащее в области со скоростью света c_i, образует с вертикалью, то $\sin\alpha_j/c_j = \mathrm{const}$ для всей ломаной. Действительно, если $\sin\alpha_j/c_j \neq \sin\alpha_{j+1}/c_{j+1}$ для некоторого j, то по принципу Ферма по такой ломаной свет распространяться не может: вершину ломаной на границе соответствующих сред можно передвинуть так (не меняя остальных вершин), что общее время, затраченное светом, уменьшится.

Если же в некоторой неоднородной оптической среде скорость света меняется непрерывно, но так, что в точках горизонталей (т. е. в точках с одинаковыми ординатами) она одна и та же: $c(y)$ (значение $y = 0$ соответствует начальному положению точки, из которой выходит луч), то предельным переходом получаем, что в этой среде путь распространения света между двумя точками есть такая кривая L, что

$$\frac{\sin\alpha(y)}{y} = \mathrm{const}, \tag{11}$$

[1] Принцип Ферма получил обоснование в волновой теории света, построенной Гюйгенсом в 1672 – 1673 годах.

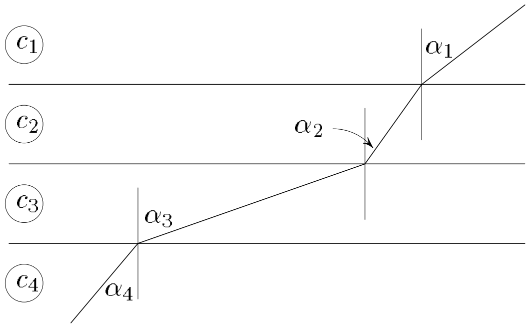


Рис. 22.

через $\alpha(y)$ обозначен угол, который касательная, проведенная к кривой L в точке с ординатой y, образует с вертикалью.

Чтобы перейти к задаче о брахистохроне, заметим, что соотношение (11) мы получили из принципа Ферма, пользуясь лишь тем, что в фиксированной точке нашей неоднородной среды величина скорости света фиксирована и не зависит от направления распространения света (в наших примерах она была постоянна на горизонталях). Но, как мы уже отмечали выше, для тела, движущегося только под действием силы тяжести, $|\overline{v}(y)| = \sqrt{2gy}$, где y — пройденный по вертикали путь, «потеря» высоты, — и мы получаем, что и в этой задаче величина скорости в каждой фиксированной точке плоскости фиксирована и не зависит от того, по какому пути происходит движение. Поэтому все выводы из принципа Ферма могут быть перенесены и сюда. Следовательно, чтобы попасть из одной заданной точки в другую за минимально возможное время, материальная точка должна двигаться по такому пути L, соединяющему эти две точки (мы предполагаем, что точки не лежат на одной вертикали), для которого

$$\frac{\sin\alpha(y)}{\sqrt{y}} = \mathrm{const}, \tag{12}$$

где $\alpha(y)$ — угол между вертикалью и касательной к кривой L, проведенными в точке с ординатой y.

Нам остается лишь отыскать кривую, удовлетворяющую условию (12).

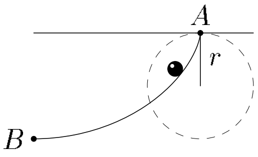


Рис. 23.

Опять циклоида! Математики XVII века привыкли к тому, что циклоида — это «палочка-выручалочка» во многих вопросах. И вот ей снова было суждено подтвердить свою «репутацию» — брахистохрона также оказалась циклоидой!

В самом деле, если через $\alpha(y)$ обозначить угол, который касательная, проведенная к циклоиде с параметром r (получающейся при качении без скольжения по прямой $\{y = 0\}$ круга радиуса r) в точке с ординатой y составляет с вертикалью, то $\sin\alpha(y) = \sqrt{y/2r}$ (см. формулу (9) на с. 126). Более того, как мы уже отмечали, циклоида является единственной кривой, удовлетворяющей этому соотношению. Таким образом, брахистохроной, соединяющей две данные точки A и B (не лежащие на одной вертикали), служит часть арки (или арка) перевернутой циклоиды (см. рис. 23), причем в «верхней» точке A находится острие этой циклоиды. Поскольку мы рассматриваем только одну (первую) арку циклоиды, то ее параметр r по точке B определяется однозначно.

Дуга циклоиды, являющаяся брахистохроной, может быть больше полуарки циклоиды. В этом случае материальная точка, двигаясь под действием силы тяжести по брахистохроне, сначала спустится вниз (дойдя до вершины перевернутой циклоиды), а затем начнет снова подниматься вверх. И тем не менее такое движение оказывается более экономным по времени, чем если бы материальная точка отправилась из A в B по прямой!

Для сравнения отметим, что хотя перевернутая циклоида является и таутохроной, и брахистохроной, в первом случае нужно брать дугу с концом в вершине циклоиды, а во втором — с началом в острие.

Несколько задач. Вернемся к оптике. Теперь мы знаем, что если в плоской неоднородной среде величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = k\sqrt{H - y}$ (т. е. аналогично изменению величины скорости материальной точки, движущейся под действием силы тяжести), то в такой среде свет между двумя точками будет распространяться по дугам перевернутых циклоид с остриями на прямой $\{y = H\}$.

Попробуйте сейчас решить несколько задач на отыскание в оптически неоднородной среде пути распространения света между двумя точками, если в этой среде задан закон изменения величины скорости света.

Задача 7. Величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = k(y - a)$. Докажите, что свет между двумя точками будет распространяться по дугам полуокружностей с диаметрами на прямой $\{y = a\}$ (причем «начальная» точка находится на этой прямой).

Задача 8. Величина скорости света меняется по закону

$$c(x, y) = \frac{k}{\sqrt{a - y}}.$$

Докажите, что в этом случае свет между двумя точками будет распространяться по дугам парабол.

Пока во всех задачах величина скорости света зависела только от y. Если же оптическая среда такова, что эта зависимость более сложная, например, величина скорости света постоянна не на горизонталях, а на каких-то кривых — *линиях постоянства скорости света,* — то свет между двумя точками будет распространяться по такой кривой L, для которой

$$\frac{\sin\alpha(c(x_0, y_0))}{c(x_0, y_0)} = \mathrm{const},$$

где $\alpha(c(x_0, y_0))$ — угол между касательной к кривой L и нормалью к линии постоянства скорости света $c(x, y) = c(x_0, y_0)$.

Задача 9. Величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = k\sqrt{1 - r^2}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от начала координат. Докажите, что в такой среде свет между двумя точками будет распространяться по дугам окружностей, перпендикулярных к окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

Задача 10. Величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = kr$. Докажите, что в этом случае свет между двумя точками будет распространяться по дугам гипоциклоид (см. «упражнения Ньютона» со с. 136).

Если в задачах 7 – 10 $c(x, y)$ интерпретировать как величину скорости некоторого механического движения, то полученные при решении этих задач траектории распространения света будут брахистохронами для соответствующих механических систем.

> Основная задача механики заключается в том, чтобы определить положение движущегося тела в любой момент времени. *Из школьного учебника по физике*

Аналогия между механикой и оптикой. Итак, в механике обычно ищется траектория материальной точки, если известны действующие на точку силы и заданы начальные положение и вектор скорости (начальные условия). Однако можно интересоваться не индивидуальными траекториями, а описанием всей совокупности траекторий при заданном законе изменения действующих сил (дополнительное задание начальных условий будет тогда выделять из этой совокупности траекторий конкретную траекторию). Так, классический результат Галилея о движении брошенного тела (горизонтально или под углом к горизонту) заключается в том, что в случае силы тяжести множество траекторий состоит из дуг парабол.

Использование оптики в чисто механических задачах навело на мысль попытаться выделить возможное множество траекторий для конкретной механической системы каким-нибудь условием минимальности, аналогичным принципу Ферма. Об этом думал Лейбниц, но первая формулировка принадлежит Мопертюи. Однако его построения касались всего мироздания в целом и не содержали точных утверждений. Первая точная формулировка принадлежит Эйлеру (учившемуся математике у Иоганна Бернулли). Она относится к следующей специальной ситуации.

Пусть материальная точка движется по плоскости под действием такой силы, что потенциальная энергия зависит только от положения точки: $U = U(x, y)$. В силу закона сохранения энергии величина скорости точки $|\overline{v}|$ тогда также зависит только от (x, y):

$$|\overline{v}(x, y)| = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x, y))}.$$

Рассмотрим плоскую неоднородную оптическую среду, в которой величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = \dfrac{k}{\overline{v}(x, y)}$. Принцип Эйлера состоит в том, что *траектории света, распространяющегося в такой среде, будут совпадать с возможными траекториями исходной механической системы* (материальной точки массы m с потенциальной энергией $U(x, y)$). Разумеется, принцип Эйлера можно сформулировать так, что в нем не будет идти речь о распространении света.

В частности, из задачи 8 и принципа Эйлера следует приведенное выше утверждение Галилея о траектории материальной точки, движущейся под действием силы тяжести.

Поясним тепреь принцип Эйлера. Для простоты ограничимся случаем, когда $U(x, y)$, а значит и $|\overline{v}|$, зависит только от y. Поскольку на горизонталях потенциальная энергия постоянна, сила будет направлена вертикально, горизонтальная компонента вектора ускорения равна нулю, а горизонтальная компонента вектора скорости постоянна, то есть

$$|\overline{v}(y)| \sin \alpha(y) = \text{const}, \tag{13}$$

где $\alpha(y)$ — угол между вектором скорости и вертикалью в точке траектории с ординатой y. Соотношение (13) вместе с (11) и дает принцип Эйлера для данного частного случая. (В общем же случае следует учесть, что силы действуют перпендикулярно к линиям постоянства потенциальной энергии и что, следовательно, компоненты вектора скорости, касательные к этим линиям постоянства, не меняются.)

В современной механике принципы, обобщающие принцип Эйлера (такие, как, например, принцип Гамильтона), играют исключительно важную роль.

Эпилог

Героическая история циклоиды завершилась с концом XVII века. Она так таинственно возникала при решении самых разных задач, что никто не сомневался, что она играет совершенно исключительную роль. Пиетет перед циклоидой держался долго, но прошло время, и стало ясно, что она не связана с фундаментальными законами природы, как, скажем, конические сечения. Задачи, приводившие к циклоиде, сыграли огромную роль в становлении механики и математического анализа, но когда величественные здания этих наук были построены, оказалось, что эти задачи являются частными, далеко не самыми важными. Произошла поучительная историческая иллюзия. Однако, знакомясь

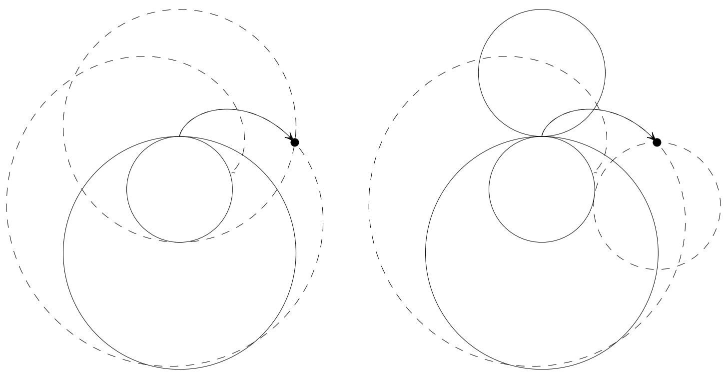


Рис. 24.

с поучительной историей циклоиды, можно увидеть много принципиальных фактов из истории науки.

Приложение

В этом приложении мы, как и обещали, объясним, почему перициклоиды (с. 143) совпадают с эпициклоидами. Напомним, что именно надо доказать.

Утверждение. *Пусть обруч радиуса R, висевший на неподвижном круге радиуса $r < R$, начинают катить без скольжения по этому кругу. Тогда точка обруча описывает ту же траекторию, которую описывала бы точка колеса радиуса $R - r$, катящегося снаружи по тому же кругу радиуса r (рис. 24).*

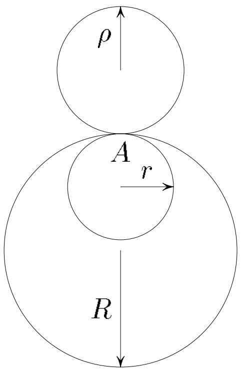


Рис. 25.

Обозначим радиус колеса $R-r$ через ρ. Напомним, что кривые, описываемые при указанном качении точками границы колеса, называются эпициклоидами, а кривые, описываемые точками обруча, — перициклоидам. Докажем, что при указанном в условии соотношении между радиусами ($R = r + \rho$) перициклоиды совпадают с эпициклоидами.

Зафиксируем по одной точке на колесе и на обруче. Пусть в начальный момент точки, наблюдаемые на колесе и обруче, совпадают с одной и той же точкой A границы неподвижного круга (рис. 25). Пусть для определенно-

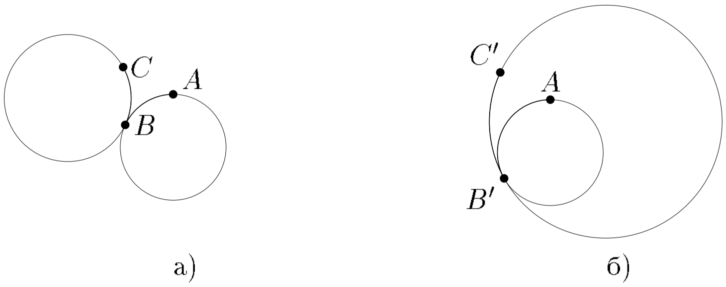


Рис. 26.

сти и колесо, и обруч катятся по кругу против часовой стрелки. Если в некоторый момент колесо касается неподвижного круга в точке B, то точка, наблюдаемая на его границе (точка эпициклоиды), занимает такое положение C, что длины дуг AB и BC равны (дуга BC выбирается с учетом направления качения) — рис. 26а.

Аналогично, положение точки C', наблюдаемой на обруче (точки перициклоиды), в тот момент, когда он касается неподвижного круга в точке B', находится из условия равенства длин дуг AB' и $B'C'$, с учетом направления качения (см. рис. 26б).

Докажем, что для любой точки B на границе неподвижного круга можно так подобрать точку B' (тоже на границе неподвижного круга), что соответствующие точки C (эпициклоиды) и C' (перициклоиды) совпадут (рис. 27а). (Из нашего доказательства будет ясно также, как по B выбирать B'.)

Возьмем точку B' так, чтобы отношение длин дуг AB и BB'

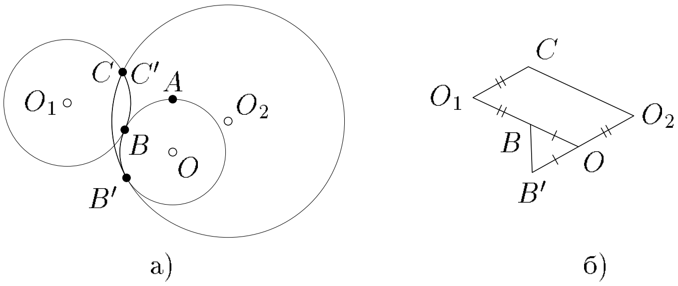


Рис. 27.

было равно ρ/r: тогда радианная мера дуги BC равна радианной мере дуги BB' — обозначим ее через φ. Имеем

$$\text{дл.}\, AB = \text{дл.}\, BC = \rho\varphi, \quad \text{дл.}\, BB' = r\varphi.$$

Поэтому дл. $B'C'$ = дл. $AB' = r\varphi + \rho\varphi$, и радианная мера дуги $B'C'$ также равна φ. Пусть O — центр неподвижного круга, O_1 — положение центра колеса в момент, когда оно касается неподвижного круга в точке B, O_2 — положение центра обруча в момент касания обруча с неподвижным кругом в точке B'; точки $\{O, B, O_1\}$ и $\{O_2, O, B'\}$ лежат на одной прямой.

Пусть $0 < \varphi < \pi$. Имеем (рис. 27б) $OB = OB' = r$, $O_2B' = R$, $OO_2 = R - r = \rho$, $O_B = O_1C = \rho$, $O_1O = r + \rho = R$, $\angle BOB' = \angle OO_1C = \varphi$, Значит, четырехугольник OO_1CO_2 — параллелограмм, откуда $O_2C = R$, $\angle CO_2B' = \varphi$. Таким образом, точка C лежит на окружности радиуса R с центром в O_2, причем радианная мера дуги $B'C$ равна φ. Это и означает, что C совпадает с C'. Итак, мы доказали, что если по неподвижному кругу прокатились дуги колеса и обруча одной и той же радианной меры $\varphi < \pi$, то получившиеся точки эпициклоиды и перициклоиды совпадут.

Остается убедиться в справедливости этого утверждения и при $\varphi \geqslant \pi$. Посмотрите сами, во что превращается рисунок 27а при $\varphi = \pi$, а также при $\pi < \varphi < 2\pi$. Отметим, что поскольку разность между длинами обруча и колеса равна $2\pi r$ — длине границы неподвижного круга, то в тот момент, когда и колесо, и обруч сделают полные обороты, наблюдаемые точки, вновь попав на границу неподвижного круга, займут одно и то же положение A_1. Случай $2\pi < \varphi < 4\pi$ сводится к случаю $\varphi < 2\pi$, если считать точку A_1, начальной точкой вместо A. Если же считать A_1, начальной точкой и одновременно изменить направление качения, то случай $\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ сведется к случаю $\varphi \leqslant \pi$.