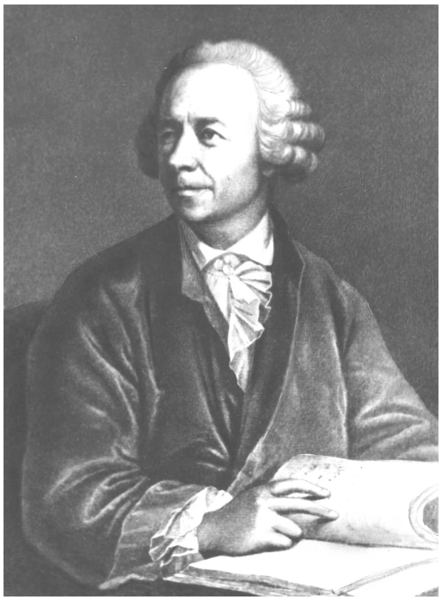
ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

Итак, Эйлер перестал вычислять и жить.
Кондорсе

В начале 1783 г. директором Петербургской Академии наук была назначена княгиня Екатерина Романовна Дашкова, которая за 20 лет до того была ближайшей сподвижницей Екатерины II в дни ее воцарения на российском троне. Известная своей изобретательностью княгиня придумывает безошибочный ход, который должен убедить академиков в ее приверженности науке. Она уговаривает сопровождать ее при первом посещении Академии престарелого Эйлера, который давно был не в ладах с академическим начальством и не посещал академических конференций. Слепой Эйлер появляется в сопровождении сына и внука. Дашкова вспоминала впоследствии: «Я сказала им, что просила Эйлера ввести меня в заседание, так как, несмотря на собственное невежество, считаю, что подобным поступком самым торжественным образом свидетельствую о своем уважении к науке и просвещению».

А всего через несколько месяцев в протоколах Академии было записано: «В заседании конференции 11 сентября 1783 г. академик Н. И. Фусс взял на себя обязанности секретаря[1], отсутствующего из-за кончины его знаменитого отца, г. Леонарда Эйлера, который умер от апоплексического удара 7 сентября в 11 часов вечера, в возрасте 76 лет, 5 месяцев и 3 дней, совершившего свой долгий и блестящий путь и сделавшего свое бессмертное имя известным всей Европе». Предвестник несчастья в виде легкого головокружения появился в начале сентября, когда Эйлер вычислял скорость поднятия аэростата. В день смерти он обсуж-

[1]Им был Иоганн-Альбрехт, старший сын Л. Эйлера.



Леонард Эйлер

дал с астрономом А. И. Лекселем результаты вычислений орбиты Урана, недавно открытого Гершелем.

Исключительность личности Эйлера, его беспрецедентная роль в истории Академии заставили искать нестандартные способы почтить его память. 23 октября академик Н. И. Фусс, ученик Эйлера и муж его внучки, произнес «Похвальное слово». Академики решили на свои средства изготовить бюст «бессмертного Эйлера, равно достойного восхищения своим гением и своими достоинствами», а их «прославленный начальник» (Дашкова) «прибавила к этому великолепную колонну, которая служит основанием этому бюсту»; вначале бюст установили в библиотеке, а затем — напротив кресла президента в зале заседаний (а в библиотеке осталась картина «Силуэты группы академиков Математического класса, занятых установкой бюста покойного Л. Эйлера»). В больших подробностях (включая качество бумаги) обсуждались вопросы, связанные с изданием трудов покойного.

Слухи о почестях ученому распространились далеко за пределы России. Непременный секретарь Французской Академии наук маркиз Кондорсе (менее чем через 10 лет он примет участие в революции и его имя вычеркнут из списков Петербургской Академии за «достойное порицания поведение ⟨...⟩ против суверена») сказал в своем «Похвальном слове»: «Итак, народ, который мы в начале этого века принимали за варваров, в настоящем случае подает пример цивилизованной Европе — как чествовать великих людей при жизни и уважать их память по смерти: и другим нациям приходится в данном случае краснеть, что они не только в этом отношении не могли предупредить Россию, но даже не в силах ей подражать». Хотя из далекого Парижа обстановка в Петербурге казалась более благополучной, чем была на самом деле, отношение к науке за 60 лет существования Петербургской Академии стало неузнаваемым.

Первые годы Академии. Петр I думал об организации Академии в России еще в последние годы XVII века. Начиная с 1711 г. он трижды обсуждал свои планы с Лейбницем и даже зачислил последнего на русскую службу. Лейбниц, великий фантазер, мечтавший о распространении академий по миру, впервые встретил государя, с таким энтузиазмом откликнувшегося на его идею. Лейбниц не считал отсутствие наук в России препятствием к созданию Академии и даже находил в этом некоторые преимущества. Однако мало кто в России разделял этот оптимизм. Один из самых образованных сподвижников Петра В. Н. Татищев говорил ему, что « . . . учить некого, ибо без нижних школ академия оная с великим расходом будет бесполезна». Петр отвечал: «Я имею жать скирды великие, а мельницы нет», а потому он решил вначале построить «водяную мельницу», хотя «воды довольно в близости нет, а есть воды довольно в отдалении», не надеясь успеть «делать канал», но в надежде, что мельница «наследников моих лучше понудит воду привести». Трудности на пути проекта были многочисленны, но в 1724 г. Сенат принял решение о создании Академии наук. В это время даже слово «наука» еще не существовало в русском языке и Академию назвали «де сиянс Академия».

В 1725 г. Петр умер, так и не дождавшись открытия Академии. Наступает черед наследников «принять участие в строительстве мельницы». Екатерина I не без колебаний осуществила замысел мужа, хотя и не разделяла его интереса к науке (как пишет современник, «похвальные речи ученых были непонятны Ее Величеству»). Судьба Академии все время висела на волоске. Она воспринималась как явление исключительно немецкое, и русская партия, в частности Меншиков, была настроена против нее. Публика плохо понимала функции Академии, и академики по мере сил демонстрировали свои достоинства. Дневник Петербурга, публиковавшийся в «Санкт-Петербургских ведомостях», сохранил запись о публичном чтении, устроенном академией по случаю коронации Петра II (1727 г.), когда академики Делиль и Бернулли дискутировали о вращении Земли вокруг Солнца, академик Байер произнес «похвальную оду латинскими стихами», а «в то же время для народа, гулявшего всю ночь на Царицыном лугу, были пущены фонтаны белого и красного вина». Академики пытались наладить контакты с русской публикой, два раза в неделю двери Академии открывались для посетителей. Иногда там можно было увидеть нечто удивительное. 24 февраля 1729 г. «профессор Лейтман умудрился изменить изображение государственного герба (с помощью призм) в портрет царствующего императора». Академики несколько утвердили себя успехами в организации «потешных огней» и иллюминаций, в сочинении торжественных од, в составлении гороскопов. Высокие материи не были в чести, разве что при составлении «ландкарт» да некоторых рекомендаций мореплавателям. В уставе 1747 г. будет записано: «Государству не может быть инако яко к пользе и славе, ежели будут такие в нем люди, которые знают течение тел небесных и времени, мореплавание, географию всего света и своего государства». А пока умирает в 1730 г. Петр II; Анна Иоанновна лишь однажды посещает Академию, а затем упоминания об Академии надолго исчезают из дневника Петербурга.

Академиков стали собирать в «социетет наук» еще при Петре I. Постепенно становилось ясно, что первоклассный состав набрать не удается: именитые ученые считали поездку в Россию мероприятием сомнительным и даже рискованным. Лейбница тогда уже не было в живых, а его ближайший последователь Христиан Вольф отказался принять пост президента. Первым президентом стал лейб-медик Блюментрост. Попробовали вместо именитых ученых приглашать их детей (в надежде, что способности к науке передаются по наследству, да и славное имя украсит академические списки). Так, приглашение знаменитому Иоганну Бернулли (1667 – 1748) было переадресовано его сыну. В многоступенчатой переписке долго было неясно, относится ли приглашение к старшему сыну Николаю (1695 – 1726) или среднему — Даниилу (1700 – 1782). В конечном счете поехали оба: Николай, прежде бывший профессором римского права, стал профессором математики (с окладом 1000 руб. в год), а Даниил — профессором физиологии (с окладом 800 руб.). Отец напутствовал сыновей словами: «...лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают». Мог ли он думать тогда, что не пройдет и года, как его старшего сына не станет!

Эйлер в Петербурге. С завистью провожал братьев Бернулли в 1726 г. ученик их отца Леонард Эйлер: «У меня явилось неописуемое желание отправиться вместе с ними ... Дело, однако, не могло так скоро осуществиться, а между тем названные молодые Бернулли крепко пообещали мне по прибытии своем в Петербург похлопотать о пристойном для меня месте».

Леонард Эйлер родился 4 (15) апреля 1707 г. в Базеле, в Швейцарии. Его отец, Пауль Эйлер, был сельским пастором. В молодости он успешно занимался математикой под руководством Якоба Бернулли (1654 – 1705), старшего брата Иоганна. Первые уроки Леонард получил от отца, последние классы гимназии он проходил в Базеле и одновременно посещал лекции по математике в университете, где преподавал И. Бернулли. Вскоре Эйлер самостоятельно изучает первоисточники, а по субботам И. Бернулли беседует с талантливым студентом, обсуждает неясные места. Леонард дружит с его сыновьями, особенно с Даниилом.

В 1723 г. Леонард получил степень магистра искусств; на испытании он произнес на латыни речь о сравнении философии Декарта и Ньютона. Пауль Эйлер считал, что сын должен повторить его карьеру, и Леонард покорно изучал богословие. И отец, и сын отчетливо понимали, что научная карьера бесперспективна. Хотя она и не была особенно престижной (в те годы в Швейцарии любили говорить: пусть учатся немцы, а у швейцарцев есть дела поважнее), число претендентов на профессорские места сильно превышало количество вакансий.

В 1727 г. Эйлер предпринял попытку занять кафедру физики в Базеле, заранее обреченную на неудачу. Тем временем он успешно участвует в конкурсе Французской Академии наук на наилучший способ расположения мачт на корабле. Примечательно, что «в гористой Швейцарии, из которой до того времени Эйлер никуда не выезжал, он, конечно, имел случай видеть корабль не иначе, как на картинках ...» (А. Н. Крылов). Это был первый, но не последний контакт Эйлера с морской наукой.

Даниил Бернулли выполнил обещание, данное при отъезде в Петербург: еще до попытки Эйлера устроиться в Базеле он узнал о возможности получить место адъюнкта по физиологии с окладом 200 рублей. Бернулли торопит, рекомендует ехать «еще этою зимою». Эйлера не смутило, что ему предстоит заниматься медициной. В те годы медицина не воспринималась как наука, далекая от математики. За примерами идти недалеко: его учитель И. Бернулли чередовал занятия математикой с медицинской практикой (как, впрочем, и с преподаванием греческого языка). Эйлер приступает к изучению анатомии и физиологии; позднее он удивлял окружающих медицинскими познаниями. Отъезд не удался столь быстро, как хотелось Д. Бернулли, но весной 1727 г. Эйлер получил «на проезд денег сто тридцать рублей векселем» и уехал в Россию. В Петербург он прибыл в день смерти Екатерины I.

Как и Д. Бернулли, Эйлер предпочитает в рамках занятий физиологией изучать гидродинамические проблемы кровообращения. Надо сказать, что эти проблемы в значительной мере стимулировали создание гидродинамики. В свои первые петербургские годы Эйлер вряд ли думал, что его жизнь так прочно будет связана с Академией. Само дальнейшее существование Академии казалось тогда крайне проблематичным. Потом Н. И. Фусс напишет: «Эйлер был украшением и славой нашей Академии в продолжение пятидесяти лет. На его глазах она начинала свое существование, несколько раз погибала и воскресала». Очень неуютно чувствовал себя Эйлер, когда гибель Академии представлялась ему реальностью. В один из самых тяжелых моментов, когда после кончины Петра II в 1730 г. началось массовое бегство академиков из России, отчаявшийся Эйлер ведет переговоры о поступлении на морскую службу. Но это не потребовалось. Напротив, освободившаяся вакансия позволила Эйлеру занять место профессора (академика) по кафедре физики (правда, с сравнительно невысоким окладом в 400 рублей). А через два года Д. Бернулли покинул Россию и Эйлер занял его кафедру математики (хотя его оклад — 600 руб. — лишь половина оклада, который получал на этом месте Бернулли).

За эти годы Эйлер стал в Академии заметной фигурой. Большинство академиков не слишком ревностно относились к своим обязанностям, которые к тому же еще и не были четко определены. Эйлер не пренебрегал никакими поручениями: он постоянно делает доклады на академических конференциях, иногда занимая два, а то и три заседания подряд, читает публичные лекции, пишет учебник по арифметике для академической гимназии и научно-популярные статьи для «Примечаний» к «Санкт-Петербургским ведомостям», он в комиссиях по исследованию пожарного насоса, весов, «пильной машины» и магнитов, принимает разнообразные экзамены. Эйлер подробно вникает в многочисленные технические проекты. Забегая вперед, можно вспомнить исследования Эйлера по гидравлическим турбинам и заключения по проектам мостов через Неву, в том числе об одноарочном деревянном мосте И. П. Кулибина, работавшего в Академии механиком. Эйлер постоянно проявлял заботу об изобретателе. В их взаимоотношениях остался неясный момент. И. П. Кулибин 40 лет занимался созданием вечного двигателя («самодвижущихся машин»), и он утверждал, что Эйлер не отвергал возможности создания такой машины («...может де быть в свое время какому щастливому сделать такую машину и откроется»). С другой стороны, имеются и противоположные свидетельства. Надо сказать, что рассмотрение проектов вечных двигателей было постоянным занятием петербургских академиков. Напомним, что в 1775 г. Парижская академия отказалась рассматривать проекты вечных двигателей.

Начиная с 1733 г. Эйлер участвует в «экзамене» карт, и постепенно участие в картографической деятельности выходит среди его академических обязанностей на первый план. Встает вопрос о составлении генеральной карты России на основе уже составленных губернских карт, и Эйлер предлагает свой проект, сопровождая его словами: «Я уверен, что география российская через мои и г-на профессора Гензиуса труды приведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли». Острые разногласия с академиком Делилем привели Эйлера в 1740 г. к решению прекратить занятия картографией. Вероятно, состояние здоровья ученого тоже сыграло свою роль в принятии этого решения. 21 августа он писал академику Гольдбаху: «География мне гибельна. Вы знаете, что я за нее поплатился глазом, а теперь опять нахожусь в подобной опасности; когда мне сегодня утром послали часть карт на просмотр, то я тотчас же почувствовал новый припадок, потому что эта работа, требуя всегда рассмотрения одновременно большого пространства, сильнее утомляет зрение, чем простое чтение или одно писание». Эйлер потерял правый глаз в 1735 г., когда выполнил в три дня правительственное задание, на которое академики требовали несколько месяцев. Нет полной ясности, относилось ли это задание к картографии (так можно понять Эйлера) или к астрономическим вычислениям (так пишет Кондорсе).

На 1740 г. приходится еще один случай, когда Эйлер уклонился от данного ему поручения (других примеров не известно): он переадресовал придворному астроному составление гороскопа «Ивану-царевичу», будущему недолговечному императору Иоанну Антоновичу; впрочем, А. С. Пушкин сообщает иную версию этой истории: «Когда родился Иоанн Антонович, то императрица Анна Иоанновна послала к Эйлеру приказание составить гороскоп новорожденному. Эйлер сначала отказывался, но принужден был повиноваться. Он занялся гороскопом вместе с другим академиком. Они составили его по всем правилам астрологии, как добросовестные немцы, хотя и не верили ей. Заключение, выведенное ими, испугало обоих математиков — и они послали императрице другой гороскоп, в котором предсказывали новорожденному всякие благополучия. Эйлер сохранил однако ж первый и показывал его графу К. Г. Разумовскому, когда судьба несчастного Иоанна Антоновича совершилась».

Не перестаешь удивляться, что все эти многочисленные обязанности оставляли Эйлеру время для его главного дела — для занятий математикой. Именно в эти годы он сложился как великий ученый. Критически переосмыслив труды Лейбница и Ньютона по математическому анализу и механике и работы Ферма по теории чисел, он нашел свой собственный путь в науке. Почти все его книги и статьи были опубликованы позднее, но главное в научной судьбе Эйлера решилось в его первое петербургское десятилетие. Только фантастическая работоспособность и поразительная целеустремленность позволили Эйлеру совместить малозаметные миру занятия математикой с повседневными академическими заботами. Позднее он писал, что для молодого ученого необходимо, чтобы его специальность «была у него главным предметом, и он не $\langle\ldots\rangle$ отрывался от нее никакими другими занятиями». По мнению Эйлера, он имел такую возможность в Петербурге: «Такому вожделенному случаю не только доктор Гмелин обязан всем, что сделало известным его имя, но и я, и все прочие, имевшие счастье состоять некоторое время при Русской Императорской Академии. Должен сознаться, сколько мы обязаны благоприятным обстоятельствам, в которых только что находились. Что собственно до меня касается, то, в случае неимения такого превосходного случая, я бы вынужден был главнейше прилежать к другим наукам, от которых, по всем признакам, я бы отупел только. Его королевское величество (Фридрих II — С. Г.) недавно меня спрашивал, где я изучил то, что знаю. Я согласно истине ответил, что всем обязан моему пребыванию в Петербургской академии Наук».

В 1733 г. Эйлер женился на Екатерине Гзель, дочери академического живописца родом из Швейцарии, вывезенного Петром I из Голландии. Из тринадцати их детей выжили три сына и две дочери. Для благочестивого сына сельского пастора семья была крепостью, в которой он мог уберечься от вольных нравов северной столицы. Размеренная семейная жизнь, маленькие радости были необходимы Эйлеру для спокойной работы. Никакие научные занятия не могли быть для него поводом пренебречь семейными обязанностями. Например, он никогда не был безразличным к финансовым проблемам (ему приписываются слова «Где больше дадут, туда и служить пойду»).

1740 год был, возможно, самым тяжелым годом в жизни Эйлера. С одной стороны, все признаки благополучия: его академический оклад достиг максимума — 1200 руб. (столько получал Д. Бернулли); он успел многое понять в жизни русского общества и, в частности, в тонкостях академических взаимоотношений. Ему оказывал «честь своим особливым расположением» фельдмаршал Миних; Эйлер ладил даже со всемогущим управителем академии Шумахером, что удавалось немногим академикам. (Возможность спокойно заниматься наукой была для Эйлера важнейшим делом, да и вообще он всю жизнь избегал конфликтов. Можно вспомнить многолетние добрые отношения с И. Бернулли, который постоянно ссорился не только с учениками, но и с братом Якобом и сыном Даниилом.) С другой стороны, великий ученый, только приближавшийся к тридцатитрехлетнему рубежу, успел из-за постоянных перегрузок основательно подорвать свое здоровье. В 1740 г. он оказался в тяжелой депрессии, что было связано не только со здоровьем, но и с постоянным напряжением из-за неустойчивости политической жизни в России. У Эйлера хватило выдержки пережить десятилетие бироновщины, но предстоявшее после смерти Анны Иоанновны новое регентство испугало его. Он вспоминал, что «предвиделось нечто опасно», и «после кончины достославной императрицы Анны — при последовавшем тогда регентстве — дела стали идти плохо». К тому времени появляется возможность переехать в Берлин к Фридриху II, и Эйлер подает прошение об отставке: «...того ради нахожусь принужден, как ради слабого здоровья, так и других обстоятельств, искать приятнейшего климата и принять от его королевского величества прусского учиненное мне призывание. Того ради прошу императорскую академию наук всеподданейше меня милостиво уволить и снабдить для моего и домашних моих проезду потребным пашпортом...». Он обещает сохранить контакты с Академией, «а пришедши в лутчее здоровье, из немецкой земли опять в Россию возвратиться». Впрочем, в Пруссию Эйлер писал, что «твердо решился жить под славным правлением» Фридриха. 29 мая 1741 г. Эйлер увольняется со службы, а позднее удовлетворяется его просьба «почетным членом Академии наук учинить, с определением пенсии по двести рублев в год». Такая практика перевода уезжающих членов Академии в почетные с обязательством оказывать помощь Академии была обычной. С Эйлера берется обещание «через всегдашнюю корреспонденцию и другими математическими пиесами более того служить, нежели как он в действительной академической службе был».

На службе у «коронованного философа». Итак, Эйлер в Берлине. Фридриха II нет в городе. От покровительства наукам его постоянно отвлекает война: по его собственным словам, ему постоянно приходилось воевать с «тремя блудницами» (Марией-Терезией, Елизаветой, маркизой Помпадур). С года на год откладывается открытие Берлинской Академии наук (ее откроют в 1744 г.). А пока король присылает своему новому геометру ласковое письмо из лагеря Рейхенбаха. Эйлеру оказывают знаки внимания, его приглашают на придворный бал. Королеву-мать удивляют односложные ответы ученого на ее вопросы: «Однако отчего это Вы совсем не желаете со мной говорить?» Последовал ответ: «Государыня, простите, я отвык: я приехал из страны, где кто разговаривает, того вешают» (рассказ Кондорсе). Постепенно Эйлер втягивается в берлинскую жизнь. Поручений здесь не меньше, чем в Петербурге: он рекомендует королю книги по баллистике и сам печатает три тома работ на эту тему, обследует нивелировку канала между Гавелем и Одером и состояние дел в солеварнях у Шенебека, участвует в организации государственных лотерей и реформе вдовьих касс, дает отзывы на множество проектов. Все быстро поняли, что он может хорошо делать разнообразные дела и ни от чего не отказывается. После организации Берлинской Академии наук (1744 г.) Эйлер — директор ее математического департамента.

Однако отношения с королем сложились не самым лучшим образом. Показательно, что оклад Эйлера составлял половину оклада президента Академии Мопертюи. Эйлер редко удостаивался монаршей похвалы. Вот один из немногих случаев. Эйлер много занимался конкретными задачами оптики и в 1759 г. сконструировал для Фридриха очки, пришедшиеся ему впору; вот как сформулирована похвала: «...я не могу не похвалить Вашего старания извлечь пользу для людей из тех научных занятий, которые наполняют Ваше время. Мои дела не позволяют в настоящее время уделить должное внимание Вашим трудам, но я сделаю это при первой возможности». Эйлер пытается заинтересовать короля дифференциальным исчислением, но безуспешно. А еще Эйлер в 1747 г. «несвоевременно» опубликовал трактат против свободомыслия, что было при прусском дворе немодно. В этот момент ученый почувствовал себя неуютно: «Я замечаю, что наклонность к изящной литературе начинает здесь брать верх над математикою, так что у меня является опасение, чтобы моя личность скоро не сделалась здесь лишнею». Эйлер думает о переезде в Лондон.

В Берлине считали, что в обязанности ученых входит служить украшением гостиных, радовать приятной беседой. Французские ученые Мопертюи и Даржан блестяще владели этим искусством, а Эйлер — нет. Даржан пишет Фридриху об одном из своих коллег: «Между его стилем беседы и манерой Эйлера такая же разница, как между сочинениями Горация и трудами ученейшего и педантичнейшего Вольфа». В 1746 г. с Эйлером познакомился брат Фридриха Август-Вильгельм, он делится с королем своими впечатлениями: «... г-н Мопертюи познакомил меня с математиком Эйлером. Я нашел, что в нем подтверждается та истина, что все вещи несовершенны. Благодаря прилежанию он развил в себе логическое мышление и приобрел тем самым имя, но его внешность и неловкая манера выражаться затемняют все его прекрасные качества и мешают получить от них удовольствие». Фридрих отвечает: «Милейший брат! Я уже думал, что беседа с г-ном Эйлером не доставит тебе особого удовольствия. Его эпиграммы состоят в вычислении новых кривых, каких-либо конических сечений или астрономических измерений. Среди ученых бывают такие сильные вычислители, комментаторы, переводчики и компиляторы, которые полезны в республике наук, но в остальном отнюдь не блещут. Их употребляют подобно дорическим колоннам в архитектуре. Они принадлежат нижнему этажу как опоры всего здания и коринфских колонн, являющихся его украшением». Красноречивое свидетельство взглядов просвещенного монарха на науку и ученых!

Эйлер делил свое время между наукой и домом, но он не принадлежал к категории ученых, не интересовавшихся внешними событиями и избегавших общения с людьми. Его научные познания были энциклопедичны, он много знал по ботанике, химии, анатомии, медицине, хорошо знал языки древние и восточные, владел русским языком. После его смерти вспоминали, что он хорошо знал «лучших писателей древнего мира», «древнюю литературу по математике», «историю всех времен и народов». Н. И. Фусс писал в своих воспоминаниях, что Эйлер знал наизусть «Энеиду», причем помнил, каким стихом начинается и каким кончается каждая страница его экземпляра. Возможно, это было не то, что ценилось при прусском дворе, да и посмертные оценки всегда добры.

С некоторых пор Эйлер становится героем анекдотов, сочиняемых королем: «Некий геометр, потерявший при вычислениях глаз, вздумал сочинить менуэт с помощью a плюс b. Если бы его исполнили перед Аполлоном, то геометр рисковал бы тем, что с него, подобно Марсию, содрали бы кожу». Возможно, здесь содержится намек на трактат Эйлера по математической теории музыки. Королю стало известно, что Эйлер в театре не прекращает своих вычислений, — и ученый становится героем новой эпиграммы. Кстати, Эйлер не ценил театра, он лишь с огромным удовольствием посещал театр марионеток.

Эйлер, прочно завоевавший репутацию одного из крупнейших, а может быть, крупнейшего математика Европы, в окружении Фридриха был обречен оставаться человеком второго сорта. Эйлер одно время выполнял функции президента Академии, и после уходя Мопертюи он рассчитывал занять этот пост. Но король прочил в президенты Даламбера, замечательного математика, который был десятью годами моложе Эйлера. Отказ Даламбера не решил вопрос в пользу Эйлера. «Французская опасность» была одной из причин, заставлявших Эйлера думать об отъезде из Берлина.

Тем временем в России с воцарением Елизаветы отношение к Академии изменилось к лучшему. После долгого перерыва в дневнике Петербурга за 1742 г. появляется запись: «Затишье в столице разнообразилось немногими зрелищами да учеными собраниями в Академии наук. В библиотечном зале ее с 17 февраля начались для публики, по два раза в неделю с 10 до 12 часов, физические лекции Крафта, и число посетителей этих бесед, вошедших в моду, оказывалось значительным. Там же открыты рисовальные классы с натуры». Президентом академии назначается 18-летний Кирилл Разумовский, брат фаворита императрицы. Перед этим будущий президент для порядка два года провел в разнообразных университетских городах и обзавелся дипломами. Контакты Эйлера с Академией не прерывались. Никто из почетных академиков так добросовестно не относился к своим обязанностям. За 25 лет пребывания в Берлине Эйлер опубликовал в изданиях Петербургской Академии 109 статей (за то же время в Берлине опубликовано 127). Он оказывает Российской Академии разнообразные услуги: заботится о пополнении библиотеки, подбирает темы для конкурсов на академические премии, ищет кандидатов на вакантные академические должности, занимается приобретением «волшебных» фонарей и фейерверков для придворных празднеств (эта обязанность все еще лежала на академии как одна из важнейших). Поражает интенсивность переписки Эйлера с русскими академиками, но прежде всего с правителем академии Шумахером.

В начале 50-х годов Эйлер устраивает в своем доме пансион для своих учеников. Он совмещает занятия с ними с обучением старшего сына Иоганна-Альбрехта, а кроме того, доходы от этого немаловажны для напряженного семейного бюджета. Одними из первых приезжают воспитанники академического университета С. К. Котельников и С. Я. Румовский, будущие академики (третий ученик Сафронов был через год отослан на родину, поскольку «так предан пьянству, что едва может быть от этого удержан»). Эйлер постоянно озабочен финансовыми проблемами. Он старается, чтобы его семья ни в чем не нуждалась. В 1753 г. Эйлер приобретает имение в Шарлоттенбурге с красивым домом, садом, большим количеством пахотной земли, 6 лошадьми и 10 коровами. В Швейцарии умер его отец, мать переехала к сыну. Эйлер выехал ей навстречу во Франкфурт-на-Майне. Биографов не перестает волновать вопрос, почему он не воспользовался естественным поводом посетить родной Базель: были на это причины сентиментальные или финансовые?

Семилетняя война увеличила житейские трудности. Валюта обесценилась почти вдвое, а жалование не увеличилось. Наступавшие русские войска разрушили имение в Шарлоттенбурге. Однако фельдмаршал Салтыков, узнав имя владельца имения, велит немедленно возместить ущерб; позднее Елизавета добавляет от себя огромную сумму в 4000 рублей. Эти детали свидетельствуют об особом характере взаимоотношений Эйлера с Россией. Он старается не прерывать контактов с Россией даже в военные годы. Это не только научные контакты. Скажем, в 1762 году он просит через Штеттин прислать 3 центнера «русского масла», центнер «хорошего белого меда», «несколько пудов вологодских свечей» и т. д.

После окончания войны (1763 г.) Эйлер все решительнее думает о возвращении в Россию. В 1746 и 1750 гг. он уже получал приглашения через Разумовского, но тогда вежливо отложил принятие решения на неопределенный срок. Эйлер едва не уехал в 1763 г., но неожиданно функции посредника в переговорах с королем взял на себя Даламбер. По-видимому, ему удалось убедить обе стороны, потому что в августе он констатирует в письме к Эйлеру: «Я, наконец, считаю себя счастливым, что сохранил королю и Академии такого человека, как Вы». В другом письме через неделю: «Я совершенно убедил его величество, что в Вас Академия понесет невознаградимую потерю, которая нанесет удар славе короля. Я полагаю еще до моего отъезда поручить его вниманию Ваши интересы». Эйлер отказался от переезда, но через два года разразился скандал: Эйлер вызвал гнев короля, заступившись во время ревизии за академического казначея.

Переговоры о переезде возобновились с новой силой, а воцарившейся на русском троне Екатерине II очень хотелось получить Эйлера в Петербурге. Эйлер сообщает свои условия: оклад в 3000 руб. (такой оклад получал президент, оклад академика обычно не превышал 1200 руб.), место академика по физике для сына Иоганна-Альбрехта, подходящие места для других сыновей — артиллериста и врача, — квартира, свободная от солдатского постоя, и, наконец, учреждение для него поста вице-президента с соответствующим чином. Эйлер не смог стать президентом Берлинской Академии и он хотел хотя бы отчасти реализовать свои честолюбивые планы в Петербурге (на место президента он не претендовал, считая, что в России его должен занимать вельможа). Приятель Эйлера академик Гольдбах (см. о нем ниже) служил в министерстве иностранных дел с высоким чином тайного советника. Видно, и Эйлеру захотелось оказаться на склоне лет генералом. 6 января 1766 г. Екатерина пишет канцлеру графу Воронцову: «Письмо к Вам г. Эйлера доставило мне большое удовольствие, потому что я узнаю из него о желании его снова вступить в мою службу. Конечно, я нахожу его совершенно достойным желаемого звания вице-президента Академии наук, но для этого следует принять некоторые меры, прежде чем я установлю это звание — говорю установлю, так как доныне его не существовало. При настоящем положении дел там нет денег на жалование в 3000 рублей, но для человека с такими достоинствами, как г. Эйлер, я добавлю к академическому жалованию из государственных доходов, что вместе составит требуемые 3000 рублей. У него будет казенная квартира и ни малейшей тени солдат. Хотя в Академии нет свободной кафедры физики с жалованием 1000 рублей для его старшего сына, однако я ему их назначаю, так же как дозволяю свободную практику второму (медику) и дам место, если он пожелает вступить на службу. Третий сын (артиллерист) будет помещен без всякого затруднения ... Я уверена, что моя Академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека». Узнав о желании Эйлера принять участие в перестройке Академии, императрица обещает «не предпринимать до его приезда никаких перемен в Академии, на тот конец, чтобы лучше уговориться с ним об улучшениях ...». С великим дипломатическим мастерством Эйлеру отказывают в чине: Эйлер может получить лишь чин коллежского советника (гражданский эквивалент полковника), что недостойно великого ученого: «Я дала бы, когда он хочет, чин, если бы не опасалась, что этот чин сравняет его с множеством людей, которые не стоят г. Эйлера. Поистине его известность лучше чина для оказания ему должного уважения». Эйлер, вероятно, быстро понял, что щедрая императрица умеет четко объяснить границы дозволенного, согласился со всеми условиями и решил «кончить дни свои на службе этой несравненной государыни».

Оказалось, что Фридрих не склонен легко расстаться со своим геометром. В частности, он воспользовался возможностью удержать в армии сына ученого. Все же разрешение на отъезд было получено. Вдогонку король в последний раз использует Эйлера как мишень для острот: «г. Эйлер, до безумия любящий Большую и Малую Медведицу, приблизился к северу для большего удобства к наблюдению их. Корабль, нагруженный его XX, его KK, потерпел крушение — все пропало, а это жалко, потому что там было чем наполнить шесть фолиантов статей, испещренных от начала до конца цифрами. По всей вероятности, Европа лишится приятной забавы, которая была бы ей доставлена чтением их» (из письма Даламберу). Вскоре Фридрих утешился, заполучив на место Эйлера молодого Лагранжа, поучительно мотивируя целесообразность его переезда в Берлин: «Необходимо, чтобы величайший геометр Европы проживал вблизи величайшего из королей».

Снова в России. Эйлер прибыл в Петербург 17 июля 1766 года. Он отсутствовал ровно 25 лет и приближался к своему шестидесятилетию. Поначалу Эйлер всерьез принял предложение Екатерины принять участие в реорганизации Академии. Он привез с собой подробный проект, причем он не стремился к автономии Академии, а напротив, ориентировался на тесное переплетение деятельности Академии и правительственных учреждений. Однако постепенно выяснилось, что императрица не склонна передоверять Эйлеру руководство Академией. Эйлер получил еще один урок того, что просвещенные монархи любят, чтобы их ученые знали свое место. Как старейшина академиков — декан — он имел немалое влияние на академические дела, но про пост вице-президента никто не вспоминал. А во главе Академии Екатерина поставила (продолжая традиции Елизаветы) младшего брата своего фаворита — графа В. Г. Орлова. Впрочем, возникла небольшая неувязка: пост президента все еще занимал Разумовский, который, будучи командиром Измайловского полка, оказал Екатерине поддержку во время переворота. Его не стали обижать, а для Орлова учредили пост директора академии. Новый директор по-своему неплохо относится к Эйлеру: заботится о здоровье, достает лекарства, но может и подшутить над стариком, выдав себя, «для проверки зрения» ученого, за бедного просителя из Швейцарии. Незадолго до ухода Орлова в 1774 г. произошел конфликт, после которого Эйлер перестал посещать конференции в академии. Однако он продолжал интересоваться ее делами, и академики нередко собирались на заседания в квартире Эйлера.

Эйлер привез с собой в Петербург кипу рукописей, которые не удалось опубликовать в Берлине из-за почти прекратившейся во время войны издательской деятельности. Но еще больше привез он в своей голове почти созревших, но не реализованных замыслов. А жизнь подсказывала ученому, что он должен торопиться. Вскоре после приезда он лишается зрения во втором глазу, но не прекращает работать, диктуя свои сочинения мальчику, не имевшему ни малейшего представления о математике. Приглашенный императрицей окулист барон Вентцель удалил катаракту на одном глазу, но предупредил, что перегрузка неминуемо приведет к возвращению слепоты. Так и случилось вскоре, ибо Эйлер предпочел потерю зрения пассивности. Он пробует привлечь к занятиям других ученых: своего сына, академиков Крафта, Фусса и Лекселя, но больше всего диктует то, что он знал и хотел поведать людям. За полтора десятка лет он продиктовал более 400 статей и 10 больших книг. К слепоте стала присоединяться глухота. В 1766 г. умирает жена, и Эйлер женится на ее сестре (так проще всего было сохранить порядок, принятый в доме). Сгорел дом и большая часть имущества. Ничто не может заставить Эйлера прервать работу. Летом 1777 г. Эйлера посетил Иоганн (III) Бернулли (1747 — 1807), племянник Даниила. Вот его впечатления: «Здоровье его довольно хорошо, и этим он обязан умеренному и правильному образу жизни. Зрением, по большей части утраченным, а одно время вовсе потерянным, он, однако, теперь лучше пользуется, чем многие воображают! Хотя он не может узнать никого в лицо, читать черного на белом и писать пером на бумаге, однако пишет на черном столе свои математические вычисления мелом очень ясно и порядочно в обыкновенную величину. Потом они вписываются в большую книгу одним или другим из его адъюнктов, Фуссом или Головиным (чаще первым из них). И из этих-то материалов составляются под его руководством статьи. Таким образом в протяжение пяти лет, которые прожил г. Фусс в доме Эйлера, приведено к окончанию 120 или 130 статей.».

Эйлер сохранил работоспособность до последних дней. Второй петербургский период продолжался 17 лет. В 1783 г. окончил свои дни сын сельского пастора, ставший величайшим математиком Европы. Похоронили Эйлера на Смоленском кладбище. Надпись на памятнике гласила: «Здесь покоятся бренные останки мудрого, справедливого, знаменитого Леонарда Эйлера». Через 50 лет обнаружилось, что могила утеряна, и лишь случайно (во время похорон невестки ученого) обнаружили «камень, погрузившийся мало-помалу от собственной тяжести в землю и поросший дерном». В Академии почувствовали себя неловко и решили установить новый памятник, «достойный знаменитого геометра». Позднее останки Эйлера были перенесены в некрополь Александро-Невской Лавры, где и сегодня можно увидеть его могилу.

Великое наследие. Научное наследие Эйлера поражает совершенно беспрецедентными размерами. При жизни увидели свет его 530 книг и статей. Последние годы жизни академические издания не справлялись с потоком научной продукции слепого ученого, и он шутливо обещал графу В. Г. Орлову, что его работы будут заполнять «Комментарии» Академии в течение 20 лет после его смерти. Эта оценка оказалась «оптимистической»: Академия занималась изданием трудов Эйлера 47 лет. Число работ дошло до 771, но составленная в 1910 г. Энестремом библиография содержала 886 названий, разбитых по рубрикам: философия, математика, механика, астрономия, физика, география, сельское хозяйство. С 1910 г. Швейцарское общество естествоиспытателей издает собрание сочинений Эйлера, распространяемое по международной подписке: по предварительной оценке оно составит 75 томов большого объема. К началу 80-х годов вышло 72 тома. Восемь дополнительных томов должна составить научная переписка Эйлера.

Такой объем отражает не только поразительную скорость, с которой работал Эйлер, но и привычку систематически печатать научные тексты, в том числе и сравнительно спешно подготовленные. Большой разброс тематики отражает не только широту интересов и умение быстро войти в далекие области науки, но и многочисленные академические обязанности как в Петербурге, так и в Берлине. Некоторые публикации носят характер коротких реплик. Эйлер легко входил в научные контакты, давал разнообразные консультации, охотно думал над случайными, изолированными задачами, сообщаемыми его корреспондентами. Может показаться, что ученый разбрасывался, проявлял всеядность, но это только на первый взгляд. Случайные вопросы и задачи служили питательной почвой для хорошо спланированных размышлений. Эйлер умел своевременно останавливаться в своих раздумьях, если не видел реалистической возможности двигаться вперед. Он умел организовать свою жизнь так, чтобы многочисленные текущие дела не сильно отражались на основном направлении его работы.

Как это ни парадоксально, без большого преувеличения можно сказать, что всю свою жизнь Эйлер занимался почти исключительно математикой. В других областях науки (например, механике или астрономии) успех его был прежде всего связан с применением математических методов. Его философская установка на протяжении всей его жизни состояла в том, что естественнонаучные открытия должны получаться путем теоретической (в значительной степени математической) обработки небольшого числа общих, несомненных принципов. В своей швейцарской диссертации девятнадцатилетний Эйлер писал: «Я не считал необходимым подтвердить эту новую теорию опытом, потому что она полностью выведена из самых надежных и неопровержимых принципов механики и, таким образом, сомнение в том, верна ли она и имеет ли место в практике, просто не может возникнуть». Даже законы Ньютона Эйлер пытался вывести из более общих принципов, а в небесной механике он стремился не получать эмпирические формулы из обработки результатов наблюдений, а делать выводы непосредственно из закона всемирного тяготения. Он всюду стремился двигаться от теории к практике. Хотя Эйлер и был всю жизнь связан с экспериментом, это не было его сильной стороной. С. И. Вавилов писал: « . . . гений Эйлера был, по существу, математический ⟨. . .⟩ он плохо чувствовал эксперимент (хотя сам и экспериментировал) . . . »; в другом месте: «Математическому гению Эйлера не хватало физической интуиции Ньютона и Гюйгенса, позволявшей угадывать решение при отсутствии точной математической формулировки задачи или методов ее решения».

Арифметика. Обращаясь к математическому наследию Эйлера, естественно начать с его арифметических работ. Первые публикации Эйлера относятся к 1732 году — пятому году пребывания в Петербурге. У Эйлера было два великих предшественника в арифметике: Диофант и Ферма. Если отвлечься от предыстории, связанной с именем Диофанта (III век), то Пьер Ферма (1601 – 1665) был первым, кто обнаружил, что в арифметике имеются не только удивительные факты про конкретные числа, но и общие утверждения — теоремы. Формулировки значительного числа таких теорем Ферма оставил на полях «Арифметики» Диофанта (как нельзя кстати изданной в 1621 г.), в письмах и заметках. Ферма был одним из крупнейших математиков своего времени, он был в самом центре героической эпопеи создания анализа и аналитической геометрии, поддерживал переписку с ведущими математиками. Знаменательно, что он не смог заинтересовать всерьез арифметическими задачами никого из наиболее серьезных своих корреспондентов. Он нашел заинтересованных собеседников лишь среди математиков калибром ниже, таких как Френикль де Бесси (1605–1675). По трудно разгадываемым причинам одни научные теории увлекают всех (например, анализ в XVII веке), другие разрабатываются отдельными учеными, тщетно пытающимися привлечь внимание коллег. Можно вспомнить про проективную геометрию, созданную Ж. Дезаргом (1591 – 1661) и Б. Паскалем (1623 – 1662) — далеко не безвестными учеными, — забытую на полтора века и переоткрытую Г. Монжем (1746–1818) и его учениками. В 70-е годы XVII века заметки Ферма были частично собраны и опубликованы, но трудно себе представить судьбу арифметики Ферма, если бы не Эйлер.

П.Л. Чебышев (1821 – 1879) писал в 1849 году: «Эйлером было положено начало всех изысканий, составляющих общую теорию чисел. В этих изысканиях Эйлеру предшествовал Ферма ⟨...⟩ Но изыскания этого геометра не имели непосредственного влияния на развитие науки: его предложения остались без доказательств и без приложений. В этом состоянии открытия Ферма служили только вызовом геометрам на изыскания в теории чисел. Но, несмотря на весь интерес этих изысканий, до Эйлера никто на них не вызывался. И это понятно: эти изыскания требовали не новых приложений приемов, уже известных, или новых развитий приемов, прежде употреблявшихся; эти изыскания требовали создания новых приемов, открытия новых начал, одним словом, основания новой науки. Это сделано было Эйлером.».

По-видимому, Эйлер узнал о работах Ферма вскоре после своего приезда в Петербург в 1727 г. от Хр. Гольдбаха (1690 – 1764) и сохранил интерес к теории чисел на всю жизнь. Выдающиеся коллеги Эйлера отнеслись к его увлечению по меньшей мере без понимания. Д. Бернулли (1700 – 1782), который сам был не прочь немного позаниматься арифметическими задачами, в 1778 г. писал Н. И. Фуссу (1755 – 1826), ученику Эйлера, по поводу арифметических работ его учителя: « ... не находите ли Вы, что простым числам оказывают, пожалуй, слишком большую честь, расточая на них столько сил, и не отражает ли это рафинированный вкус нашего века?». Арифметические проблемы Эйлер обсуждает прежде всего с Гольдбахом, математиком очень оригинальным, но все же не относившимся к крупнейшим современникам Эйлера, таким, как Ж. Р. Даламбер (1717 – 1783) или А.К. Клеро (1713 – 1765).

Положение стало иным лишь к концу жизни Эйлера, когда благодаря его работам отношение к теории чисел стало меняться и он имел возможность обсуждать эти проблемы с Лагранжем в письмах 1772 – 73 гг.

Уже в 1729 г. Эйлер узнал от Гольдбаха об утверждении Ферма, что числа $F_n = 2^{2^n} + 1$ являются простыми при всех n. В 1732 году он обнаружил, что это утверждение неверно, а именно F_5 делится на 641. Наблюдение Эйлера не было результатом перебора: непосредственно искать делители у F_5 было нереалистично даже для такого виртуозного вычислителя, каким был Эйлер. Он вначале обнаруживает, что делители F_n имеют очень специальный вид (если они существуют): $k \cdot 2^{n+2} + 1$, а после этого обнаружить $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$ было нетрудно. Удивительно, что первый заход Эйлера на доказательство утверждений Ферма вывел его на единственное ошибочное утверждение. К счастью, это не поколебало доверия и интереса к арифметике Ферма.

Другой класс простых чисел в поле зрения Эйлера — это простые числа Мерсенна $M_p = 2^p - 1$ (p — простое). Делители M_p должны одновременно иметь вид $2pk - 1$ и $8l \pm 1$. Пользуясь этим, Эйлер доказал простоту числа $M_{31} = 2147483647$. С тех пор новых простых чисел Ферма обнаружено не было, а рекорды в мире простых чисел Мерсенна постоянно увеличиваются (рекорд 1983 г.: $p = 86243$; сегодня компьютеры поставляют простые числа Мерсенна с невероятным числом знаков).

В отношении чисел Мерсенна Эйлер заполнил также пробел, остававшийся от Евклида. Евклид знал, что если M_p — простое число, то $M_p(M_p + 1)/2$ — совершенное число (то есть число, равное сумме своих собственных делителей). Эйлер доказал, что каждое четное совершенное число представимо в таком виде (неизвестно до сих пор, существуют ли нечетные совершенные числа). Эйлера интересует, существуют ли многочлены $P(n)$, которые при всех натуральных n принимают простые значения. Он получает отрицательный ответ, но замечает, что значения многочлена $41 - n + n^2$ просты при всех $n \leqslant 40$.

Эйлер снабжает доказательством «малую теорему Ферма», утверждающую, что число $a^{p-1} - 1$, где a — целое, не делящееся на p, а p — простое, делится на p; но, не ограничившись этим, он находит и доказывает ее обобщение на непростой делитель: если a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)}-1$ делится на m (здесь $\varphi(m)$ — число натуральных чисел, взаимно простых с m и меньших m; при простом p имеем $\varphi(p)=p-1$). Обнаружив, что функция натурального аргумента $\varphi(m)$ (ее назовут функцией Эйлера) обладает замечательными свойствами, он тем самым открывает важную главу теории чисел — теорию арифметических функций. Эйлер движется очень логично. Он подмечает, что для некоторых a число a^k-1 делится на p при $k<p-1$, а для некоторых — нет. В последней ситуации a называют первообразным корнем по модулю p. Эксперимент убеждает Эйлера, что первообразные корни существуют для всех простых p, но доказать этого он не смог (доказательство нашли позднее Лежандр и Гаусс). Эйлер умел доказывать трудные теоремы, но он умел и трезво оценивать свои возможности. Он никогда не концентрировал размышления над одной трудной задачей на годы, а наступал на математические тайны широким фронтом.

Еще одно утверждение, сформулированное Ферма без доказательства, привлекло внимание Эйлера. Речь идет о представимости квадратов n^2 в виде $kp-1$, где p — простое число. При $p=3$ таких квадратов не бывает (почему?), а при $p=5$ имеем $2^2=5-1$. Ферма утверждал, что для всякого простого p вида $4l+1$ существует квадрат вида $kp-1$, а для $p=4l-1$ таких квадратов не существует. В 1747 г. Эйлер после нескольких безуспешных попыток доказывает это утверждение Ферма и продолжает движение в естественном направлении: для каких p число $kp+2$ может быть квадратом и, шире, для каких p при фиксированном a число $kp+a$ может быть квадратом? При $a=2$ гипотеза состоит в том, что квадраты такого вида существуют при $p=8l\pm1$ и не существуют в остальных случаях. Общая гипотеза: квадраты вида $kp+a$ (p — простое) существуют (как говорят, a является квадратичным вычетом по модулю p) или не существуют (a — квадратичный невычет) одновременно для всех простых p из арифметической прогрессии $b+4ak$ ($k=1,2,3,\ldots$). Это утверждение позднее получило название «квадратичного законом взаимности». Эйлер смог доказать его, кроме $a=-1$, лишь для $a=3$. Далее Лагранж и Лежандр рассматривали случаи различных a, пока 19-летний Гаусс не нашел полное доказательство гипотезы Эйлера (в нашей книге оно изложено в главе о Гауссе).

Следующий круг вопросов, унаследованный у Ферма, — это решение уравнений в целых числах. Наиболее знаменитое утверждение Ферма — его «Великая теорема»: уравнение $x^n + y^n = z^n$ при натуральном $n > 2$ не имеет решений в целых положительных числах (при $n = 2$ такие решения существуют и называются пифагоровыми тройками). В 1738 году Эйлер находит доказательство «Великой теоремы Ферма» для $n = 3, 4$, но он отказался от попыток доказать теорему для бо́льших n, несмотря на немотивированное утверждение Ферма о существовании доказательства для произвольного n. Великая теорема Ферма была доказана Э. Уайлсом в 1995 году.

Однажды Ферма предложил Френиклю и Сен-Мартену построить прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами, у которого сумма катетов и гипотенуза — квадраты, то есть решить в целых числах систему уравнений $x + y = u^2, \quad x^2 + y^2 = v^4$. Ферма заподозрили в том, что он дал «невозможную» задачу. Эйлер исследовал эту систему, замечательную тем, что ее наименьшее решение дается 13-значными числами: 1 061 652 293 520, 4 565 486 027 761.

Эйлер рассматривает уравнение $x^2 - Dy^2 = 1$, $D \neq a^2$, которое он называет уравнением Пелля. Он обнаруживает связь его наименьшего решения с разложением $\sqrt{D}$ в бесконечную цепную дробь. Многочисленные примеры убеждают Эйлера, что получается периодическая цепная дробь, но доказательство этого факта лишь позднее нашел Лагранж.

Ферма утверждал, что всякое простое число вида $4k+1$ может быть представлено в виде суммы двух квадратов, причем единственным образом (простые числа вида $4k + 3$, как легко показать, не представляются в виде суммы квадратов). Эйлер устанавливает, что верно и обратное: если представление N в виде суммы квадратов существует и единственно, то N — простое число. Он показывает, что этим свойством иногда можно пользоваться для доказательства простоты N. Например, число 1 000 009 составное, поскольку наряду с представлением $1000^2 + 3^2$ имеется представление $235^2 + 972^2$. Далее, Эйлер показывает, что аналогичным свойством обладают формы $x^2 + 2y^2$, $x^2 + 3y^2$. В виде x^2+2y^2 представляются, причем единственным образом, простые числа вида $8m + 1$, $8m + 3$, а числа, допускающие неединственное представление, являются составными. Аналогично единственное представление в виде $x^2 + 3y^2$ допускают только простые числа (они имеют вид $6m + 1$). После этого Эйлер переходит к общей задаче: верно ли, что число N допускает единственно представление в виде $x^2 + Dy^2$ (D фиксировано) тогда и только тогда, когда N — простое число. Это утверждение оказалось верным при всех $D \leqslant 10$, но при $D = 11$ удалось предъявить составное число, допускающее единственное представление. Ситуация заинтриговала. Эйлера. Он назвал число D удобным, если в виде $x^2 + Dy^2$ единственным образом представляются лишь простые числа. Эйлер получает критерий, позволяющий проверять удобство чисел, и с любопытством выписывает удобные числа одно за другим; после 10 идут 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24 ... Постепенно удобные числа встречаются все реже. В первой тысяче их набралось 62, но Эйлер упорно продолжает вычисления, вероятно надеясь подметить закономерность. Он обнаружил еще только три удобных числа: 1320, 1365, 1848, хотя, не теряя терпения, он перебрал все числа до 10000 и несколько дальше. Эйлер имел все основания высказать гипотезу, что совокупность удобных чисел ограничивается найденными им 65 числами. Гаусс сделал рассмотрения Эйлера более корректными, но новых удобных чисел не нашел. Сейчас доказана конечность множества удобных чисел, но неизвестно, существуют ли удобные числа, большие 1848. Эта работа очень характерна для творческого метода Эйлера, проделывавшего огромную экспериментальную вычислительную работу как для проверки гипотез, так и с целью увидеть новые закономерности. Из великих математиков этим индуктивным методом в совершенстве владел, пожалуй, только Гаусс.

На этом мы кончим обзор той стороны арифметической деятельности Эйлера, в которой он был последователем Ферма. Он включил утверждения Ферма в далеко продуманную картину мультипликативной (связанной с делимостью) теории чисел, безошибочно увидев практически все ее основные теоремы и проблемы. Доказательство некоторых ключевых утверждений осталось на долю последователей Эйлера. Уже по некоторым примерам можно увидеть особенности научного стиля Эйлера. Перед ним было несколько прекрасных задач, на которых можно было сосредоточиться на годы, если не на всю жизнь, но никакая конкретная проблема не имела для Эйлера приоритета перед воссозданием целостной картины, перед неудержимым желанием двигаться вперед. Он постоянно возвращался к неполучившимся задачам, умело дозируя время, уделяемое той или иной проблеме. Трудность возникавших проблем, сознание, что он вынужден отказаться от получения строгого доказательства, привели Эйлера к формированию способов установления математической истины, отличных от доказательства. Эксперимент выходит на первый план не только при обдумывании задачи или гипотезы: тщательно проведенный числовой эксперимент на большом материале во внутренней системе ценностей Эйлера иногда равнозначен установлению истины. Он говорит о «познанных, но не доказанных истинах» и стремится к тому, чтобы такого рода аргументация получила гражданство в математике. Получение строгого доказательства для Эйлера остается важнейшей целью, но на некоторой стадии он сознательно отказывается от дальнейшего поиска, тщательно прорабатывая эвристические соображения.

Аналитическая теория чисел. Теория чисел обязана Эйлеру идеей, которая вскоре совершенно изменила ее лицо. Речь идет о применении в арифметике математического анализа. Трудно было представить такую возможность. Поначалу она удивила самого Эйлера: «И хотя мы здесь рассматриваем природу целых чисел, к которой Исчисление Бесконечно Малых кажется неприложимым, тем не менее я пришел к своему заключению с помощью дифференцирований и других уловок».

Эйлер для разных s рассматривает сумму бесконечного ряда

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots \tag{14}$$

(позднее ее назовут дзета-функцией Римана, и она сыграет в арифметике исключительную роль). Путем нестрогого рассуждения Эйлер доказывает, что эта бесконечная сумма совпадает с бесконечным произведением по простым числам

$$\zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1}\ldots\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\ldots. \tag{15}$$

Это рассуждение состоит в следующем: при $s > 0$ множитель $(1-p^{-s})^{-1}$ можно рассматривать как сумму бесконечной геометрической прогрессии $1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \ldots$. Перемножая эти бесконечные суммы по всем простым p и ограничиваясь произведениями слагаемых, в которых при всех p, кроме конечного числа, берется 1, мы приходим к бесконечной сумме (14). Тут надо еще многое добавить, чтобы это рассуждение стало строгим, начиная с придания смысла сумме бесконечного числа слагаемых и произведению бесконечного числа множителей. У Эйлера этого нет. Он чувствует, что эти рассмотрения ведут к исключительно серьезным арифметическим результатам, но сам может предъявить лишь новое доказательство восходящей еще к Евклиду теоремы о бесконечности множества простых чисел. Дело в том, что еще Я. Бернулли знал, что суммы n слагаемых $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ стремятся к бесконечности, т. е. $\zeta(s)$ стремится к бесконечности при $s \to 1$, чего не может произойти с произведением (15), если число различных p конечно. Может показаться, что гора родила мышь, но чутье не обмануло Эйлера. Это стало ясно, когда Дирихле доказал бесконечность числа простых чисел в арифметической прогрессии с взаимно простыми первым членом и разностью (обобщение теоермы Евклида), отправляясь именно от намеченного доказательства Эйлера (доказательство Евклида не переносится на случай арифметических прогрессий, отличных от натурального ряда).

Эйлер приоткрывает еще одну тайну в мире простых чисел. Его аналитическое чутье, сильно опережавшее технические возможности, подсказывает, что $\sum_{p<x} \frac{1}{p}$ при больших x близка к $\ln \sum_{n<x} \frac{1}{n}$, а это — первый шаг в получении закона распределения простых чисел в натуральном ряду. Эйлер чувствует, что функцию $\zeta(s)$ можно продолжить даже на те значения s, для которых ее нельзя определить как сумму ряда. Более того, он замечает связь между значениями ζ в точках s и $1 - s$ (то, что позднее будет сформулировано Риманом в виде знаменитого функционального уравнения). Эйлер исследует значения $\zeta(s)$ в целых точках. Мы расскажем ниже, как он разобрался со случаем четных аргументов, а симметрию между s и $1-s$ он рассчитывал применить к исследованию ζ в нечетных точках. Но он потерпел неудачу, поняв, что в отрицательных четных точках продолжен-

ная ζ равна нулю. Отметим, что об арифметической природе значений дзета-функции в нечетных точках стало кое-что известно лишь в самые последние годы: в 1979 году было доказано, что число $\zeta(3)$ иррационально, а летом 2000 года был анонсирован результат, согласно которому среди чисел, являющихся значениями дзета-функции в нечетных точках, содержится бесконечно много различных иррациональных чисел.

Ряды и бесконечные произведения. Бесконечные суммы и бесконечные произведения были любимым объектом Эйлера в анализе. Бесконечными суммами (рядами), в частности, степенными рядами $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$, много пользовался Ньютон (например, при исследовании бинома $(1+x)^\alpha$ для нецелых α). Ньютон, не очень акцентируя на этом внимание, имел в виду ряды, у которых сходятся суммы последовательных n слагаемых (как у убывающей геометрической прогрессии). Хотя Эйлер прекрасно понимает, что ряд может не суммироваться, он смело работает с рядами, не заботясь о сходимости: формально перемножает, делит ряды, почленно дифференцирует и т. д. Это предвестие современной работы с формальными рядами в алгебре. Не ограничиваясь формальными действиями, Эйлер хотел приписывать числовые значения расходящимся рядам. Потомки неоднократно осуждали его за в самом деле сомнительные утверждения типа $1-3+5-7+\ldots=0$, $\ldots+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n}+1+n+n^2+n^3+\ldots=0$. А с другой стороны, Эйлер брал частичные суммы гармонического ряда $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ и замечал, что если вычесть $\ln n$, то разность будет стремиться к конечной константе $0{,}577216\ldots$, ныне носящей имя Эйлера. Это — важный пример выявления природы расходимости. Не имея необходимого аппарата, Эйлер почувствовал, что расходящиеся ряды необходимы в математике, а поразительная интуиция страховала его при нестрогих рассуждениях от ошибочных выводов. В то же время его эпигоны, не имевшие столь мощной защиты, допустили немало ошибок и нелепостей.

Эйлер смотрит на бесконечные ряды как на многочлены бесконечной степени и по аналогии формулирует для них правило разложения в бесконечное произведение линейных множителей. Если сумма ряда $1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ равна нулю в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, то она совпадает с бесконечным произведением $\left(1-\dfrac{x}{\alpha_1}\right)\ldots\left(1-\dfrac{x}{\alpha_n}\right)\ldots$. Эйлер не дает этому утверждению ни обоснования, ни строгой формулировки, а прямо переходит к примерам. Он исходит из бесконечного ряда

$$\sin x = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots;$$

его сумма имеет нули при $\alpha_{\pm k} = \pm\pi k$, откуда делается вывод:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots.$$

Формально выполняя умножения скобок, собирая коэффициент при x^2 и сравнивая с коэффициентом в ряду слева, получаем

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Это — значение дзета-функции в точке $s = 2$. Полученный ряд исследовал еще Я. Бернулли, но не смог найти его сумму. Эйлер к этому ряду присматривался давно. Он вначале знал его сумму с семью знаками: 1,6449340, а потом вычислил еще восемь знаков. Понимая, что проведенные им выкладки строго не оправданы, Эйлер прежде всего нашел $\pi^2/6$ с семью знаками и сравнил с известным ему ответом. Получилось совпадение! Это происходило в 1735 г. Сравнивая коэффициенты при дальнейших степенях в ряду и произведении, Эйлер без труда находит $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/42 \cdot 6!$. Он понимает, что $\zeta(2n) = c_n\pi^{2n}$ и интересуется природой коэффициентов c_{2n}. Для них он получает рекуррентные формулы, достаточные для вычислений, но это не удовлетворяет Эйлера.

Почти в то же время Эйлера волновала другая числовая последовательность, возникшая из совершенно другой задачи. Он хотел применить интегралы к оценке сумм большого числа слагаемых $S(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$. Получилась формула (теперь ее называют формулой Эйлера – Маклорена):

$$S(n) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12} - \frac{f''(n)}{720} + \frac{f'''(n)}{30240},$$

и далее при следующих производных — загадочные коэффициенты, которые Эйлер умел вычислять, но не знал простой закономерности для них. Каково же было удивление Эйлера, когда обнаружилось, что коэффициенты в его формуле равны $(-1)^{n-1}c_n/2^{2n-1}$. Только величайшим математикам природа дарит такие удивительные совпадения! Ведь прямой связи между задачами нет. А потом Эйлер вспомнил о замечательной числовой последовательности B_n, возникшей у Я. Бернулли при вычислении суммы k-х степеней первых n натуральных чисел (B_n сейчас называют числами Бернулли), и оказалось, что $B_{2n} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n!)c_n}{2^{2n-1}}$. Кроме того, при разложении $z/(e^z-1)$ по степеням z коэффициент при z^n равен $B_n/n!$. Числа Бернулли были известны до Эйлера, но Эйлер был первым, кто понял, что они таинственным образом возникают в самых разных задачах.

Эйлера постоянно волновало, что его вычисления $\zeta(2n)$ необоснованы. Он придумывает еще один аргумент, усиливающий выводы из его числовых экспериментов. Среди рассмотренных им примеров был пример, основанный на разложении $1 - \sin x$ в ряд и бесконечное произведение. Он приводил к соотношению $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots$, которое уже было строго выведено Лейбницем непосредственно из геометрического определения π. Эйлер оценивает это совпадение как очень сильное: «Для нашего метода, который может некоторым показаться недостаточно надежным, здесь обнаруживается великое подтверждение. Поэтому мы вообще не должны сомневаться в других результатах, выведенных тем же методом». Эйлер настаивает на серьезном отношении к недоказанным утверждениям, прошедшим экспериментальную проверку и получившим косвенные подтверждения. Он понимает, что в современной ему ситуации математика потеряет многое, если жестко придерживаться евклидовских правил установления истины. Впрочем, он не отказывается от поисков строгого обоснования и через десять лет находит существенно более простое обоснование разложения $\sin x$ (кстати, основанное на связи тригонометрической и показательной функций в комплексной области).

Эйлер продолжает манипуляции с бесконечными произведениями. Он вычисляет ряд, отвечающий бесконечному произведению $s(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$, и замечает, что в нем многие степени отсутствуют:

$$s(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{46} + \ldots;$$

у ненулевых членов знаки меняются через два. Для Эйлера не составило труда разгадать закономерность последовательности показателей ненулевых слагаемых. Он рассматривает последовательные разности: $1, 3, 2, 5, 3, , 7, 4, \ldots$, разбивает получившуюся последовательность на две: натуральный ряд и последовательность нечетных чисел, и в результате для исходной последовательности показателей получает представление: члены k-й пары — это $m = \dfrac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, причем знак при x^m совпадает с $(-1)^k$. Однако Эйлеру не удается даже на формальном уровне доказать совпадение бесконечного произведения и ряда: «Я долго тщетно разыскивал строгое доказательство равенства между этим рядом и бесконечным произведением $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$, и я предложил этот вопрос некоторым из моих друзей, способности которых в этом отношении мне известны, но все согласились со мной, что это преобразование произведения в ряд верно, хотя никто не сумел раскопать какой-либо ключ для доказательства. Таким образом, это познанная, но не доказанная истина ...». Кстати, числа вида $(3k^2 - k)/2$ были известны еще греческим математикам (по крайней мере, Никомаху в I веке); это так называемые пятиугольные числа.

К обсуждаемой задаче Эйлер пришел, отправляясь от другой задачи. Пусть a_m (b_m) — число представлений натурального числа m в виде суммы четного (нечетного) числа различных слагаемых. Проанализировав, какими способами возникает член x^m при перемножении $(1-x)$, $(1-x^2), \ldots$, нетрудно убедиться, что коэффициент при x^m в точности равен $a_m - b_m$. Это означает, что утверждение, к доказательству которого стремился Эйлер, равносильно тому, что $a_m = b_m$ для всех m, отличных от $(3k^2 \pm k)/2$, а для этих чисел $|a_m - b_m| = 1$ (знак можно уточнить). Именно это утверждение интересовало Эйлера, а рассмотрение бесконечных произведений и рядов — это лишь способ доказать его.

Эйлер связывает с рассмотренным рядом $s(x)$ еще одно замечательное арифметическое утверждение для $\sigma(n)$ — суммы делителей числа n. Манипулируя с $s'(x)/x$, Эйлер получает

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \dots .$$

Полученное соотношение Эйлер называет «наиболее необычайным законом чисел, относящимся к сумме их делителей». Не видя никакого пути к его прямому доказательству, он проверяет закон при $n \leqslant 20$, а затем при $n = 101$ (простое число) и 301 и пишет: «Примеры, которые я только что разобрал, безусловно рассеют любые сомнения, которые мы могли бы иметь в отношении справедливости этой формулы. Это прекрасное свойство чисел тем более удивительно, что мы не чувствуем никакой разумной связи между структурой моей формулы и природой делителей, с суммой которых мы здесь имеем дело».

Аддитивная теория чисел. Задачи о числе представлений натуральных чисел в виде сумм слагаемых некоторой природы (как говорил Эйлер, задачи о «разбиении чисел») долго были в центре его внимания. Возможно, первоначальный толчок дали задачи, содержавшиеся в письме Ф. Ноде (1740 г.), фамилия которого ничего не говорит нашему современнику[1]. К этим задачам Эйлер применил аппарат бесконечных произведений. Вот несколько примеров. Эйлер утверждает, что

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots}.$$

Рассуждение состоит в том, что если умножать левую часть последовательно на $(1-x)$, $(1-x^3)$, $(1-x^5), \dots$, то постепенно будут исчезать все ненулевые степени, а это и означает тождество (это рассуждение можно сделать строгим при помощи теории пределов). После раскрытия скобок в левой части получается ряд $1 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, где a_k — число представлений k в виде суммы различных натуральных слагаемых. Правая часть при помощи суммы бесконечной геометрической прогрессии записывается в виде

$$(1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)\dots,$$

[1] Знаменательно, что Эйлер стартовал не только от великих источников, как это было в случае Ферма, но иногда с совершенно случайных задач.

и она равна $1+b_1x+b_2x^2+\ldots$, где b_k — число представлений k в виде суммы нечетных слагаемых, среди которых могут быть одинаковые (почему?). Эйлер делает вывод о совпадении числа представлений $a_k=b_k$. Попробуйте доказать это совпадение непосредственно, и вы убедитесь, что не видно, как подойти к этой задаче.

Следующее рассуждение исходит из тождества

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots=1+x+x^2+x^3+\ldots;$$

чтобы убедиться в его правдоподобности, можно умножить обе части на $(1-x)$ и проследить, как последовательно исчезают ненулевые степени x в обеих частях. Из него сразу следует, что каждое число одним и только одним способом представляется в виде суммы различных степеней двойки (числа таких представлений — коэффициенты в степенном ряду, полученном после преобразования левого произведения).

Метод Эйлера позднее получил название метода производящих функций. Функции натурального аргумента $a(n)$ (например, число каких-то разбиений n) ставится в соответствие функция, являющаяся суммой бесконечного ряда $A(x) = a(0)+a(1)x+ +a(2)x^2+\ldots$. Идея Эйлера, подтвержденная на многочисленных примерах, состояла в том, что в свойствах функции $A(x)$ своеобразно проявляются арифметические свойства последовательности $a(n)$. Характерно, что чисто арифметическое доказательство результатов Эйлера о разбиениях, доказанных Эйлером аналитически, было получено лишь во второй половине XIX века. Методом Эйлера был позднее доказан ряд замечательных результатов. Например, Якоби не только передоказал теорему Лагранжа о представлении натурального числа в виде суммы четырех квадратов, но и нашел число таких представлений.

Задачи о разбиениях отходили от арифметики Диофанта и Ферма не только по методам, но и по постановкам. Они начинали аддитивную теорию чисел (в отличие от мультипликативной). К аддитивной теории чисел относились и знаменитые проблемы Гольдбаха, поставленные в письме к Эйлеру. Среди них широко известна гипотеза, что каждое нечетное число представимо в виде суммы трех простых, а каждое четное — двух. Для достаточно больших нечетных чисел это было доказано И. М. Виноградовым. Эйлер, верный своим правилам, тщательно продумал эти задачи. Гипотезу о том, что каждое нечетное число n есть сумма простого и удвоенного квадрата, он проверил при $n < 2500$ (это не доказано и по сей день). Он сформулировал несколько новых гипотез. Например, осталась недоказанной гипотеза Эйлера, что всякое простое вида $8k+3$ есть сумма удвоенного простого числа вида $4l+1$ и нечетного квадрата. Упомянем еще одну арифметическую гипотезу Эйлера, происхождение которой трудно реконструировать: число $3^{\sqrt{2}}$ является трансцендентным. Обобщение этого утверждения составило одну из проблем Гильберта, решенную А. О. Гельфондом. Еще один пример удивительного предвидения!

Анализ. Мы уже говорили о работах Эйлера по анализу в связи с рядами и бесконечными произведениями. Дифференциальное и интегральное исчисление были созданы в течение XVII века, в окончательной форме — в трудах Ньютона и Лейбница. Эйлер приходился «научным внуком» Лейбницу (через И. Бернулли). Уже в конце XVII века встал вопрос о создании руководства по исчислению бесконечно малых; эту цель преследовал «Анализ бесконечно малых» (1696 г.) маркиза Лопиталя, ученика И. Бернулли. Свое продумывание анализа Эйлер сопровождает созданием сквозной монографии по анализу, чему была подчинена значительная часть жизни Эйлера. В 1748 г. выходят два тома «Введения в анализ бесконечно малых». Второй том — это аналитическая геометрия. Первый том — замечательный учебник, который с интересом могли бы читать студенты и сегодня, — содержит всё из «обыкновенного» анализа, что, по мнению Эйлера, должно предшествовать анализу бесконечно малых. Здесь много элементарного материала и задач. Вот одна из них: «После потопа человеческий род размножился от шести человек; положим, что 200 лет спустя число людей возросло до 1 000 000 человек; требуется узнать, на какую свою часть число людей должно было бы увеличиваться ежегодно». Но при этом подробное изучение элементарных функций содержит и разложение в ряды, и выход в комплексную область. Здесь же — вычисления $\zeta(2n)$ и теория разбиений натуральных чисел. В 1755 г. выходит «Дифференциальное исчисление», в 1768 – 1770 г. — три тома «Интегрального исчисления», а после смерти Эйлера — еще один том добавлений.

Мы имеем возможность лишь очень мало сказать об аналитических результатах Эйлера. Прежде всего он внес принципиальный вклад в эволюцию полнятия функции. К тому времени математики ясно понимали, что функция является основным объектом анализа, знали большое число конкретных функций, но только подходили к пониманию общего понятия. С точки зрения математика, занимавшегося приложениями, функция всегда задается какими-то аналитическими выражениями. С другой стороны, при построении дифференциального и интегрального исчисления работа с явными выражениями часто неудобна. Здесь более эффективен геометрический взгляд на функцию. Эйлер, в поле зрения которого были и приложения, и общая теория, параллельно развивал обе точки зрения на функции. Он был первым, кто отважился отождествить общие функции с произвольными (непрерывными) кривыми, имеющими единственные точки пересечения с вертикалями. Как писал Риман, «Эйлер первым ввел эти (произвольные — С. Г.) функции в Анализ и, опираясь на геометрическую наглядность, приложил к ним исчисление бесконечно малых».

Но Эйлер не только развил для произвольных функций анализ, он указал реальную ситуацию, когда произвольные функции возникают в приложениях. В 1748 г., исследуя формулу для изменения со временем формы колеблющейся струны, Эйлер подчеркивает, что в начальный момент времени форма струны может быть произвольной. В то же время Даламбер, который нашел эту формулу на год раньше, имел массу неприятностей из-за уверенности, что начальная форма должна задаваться аналитическим выражением (в частности, он пришел к выводу, что неразрешима задача о колебании струны, изогнутой по дуге параболы). В 1761 г. Лагранж подчеркнул заслугу Эйлера в использовании общих функций: «...они необходимы для большого числа важных вопросов динамики и гидродинамики ⟨...⟩ г-н Эйлер является, как я полагаю, первым, кто ввел в анализ этот новый род функций в своем решении проблемы о колеблющихся струнах ...». Со времени Эйлера существенно поменялась терминология: его общие («разрывные», или «механические») функции являются непрерывными с нашей точки зрения, а непрерывные в его смысле функции после Лагранжа стали называть аналитическими. Эйлер был уверен, что общие функции не допускают аналитического представления. Он решительно возражал Д. Бернулли, считавшему (в связи с задачей о струне), что общие функции являются суперпозициями гармоник. Через 70 лет правоту предположения Д. Бернулли подтвердил Фурье.

Как ни замечательны результаты Эйлера в области формирования общего понятия функции, они не идут ни в какое сравнение с колоссальной работой по отбору и изучению специальных классов «хороших» функций, необходимых в приложениях. В изучении специальных функций он решительно выходит за пределы элементарных функций. Мы уже говорили о дзета-функции, введенной еще в 1830 г. Продолжая исследования Валлиса, Эйлер ищет функцию $\Gamma(x)$, которая принимала бы в целых точках значения $n!$, а затем и функцию $\mathrm{B}(x,y)$, которая в целых точках совпадает с $\dfrac{(n+m)!}{n!m!}$ (числом сочетаний). Так появились знаменитые эйлеровы интегралы (гамма- и бета-функции).

Математики XVIII века знали, что элементарных функций недостаточно, и помнили о мечте Лейбница разобраться с высшими трансцендентными функциями, однако трезвая оценка показывает, что регулярных способов разобраться с этой проблемой тогда не было. Отдельные примеры функций появлялись у разных математиков, но мы теперь ясно видим, что это была задача для XIX века, и одновременно, что Эйлер, руководствуясь неведомыми чувствами, практически без пробелов угадал все специальные функции, которые составляют предмет высшего анализа. Мы уже говорили об эйлеровских интегралах и ζ-функции. К этому можно прибавить бесселевы функции, некоторые виды тэта-функций, гипергеометрическую функцию Гаусса (разумеется, это более позднее название!), при различных значениях параметров в которй получается большинство специальных функций, появляющихся в математической физике. Наконец, Эйлер сделал важнейшие шаги в теории эллиптических интегралов, включая теорему сложения. От этих результатов отправлялись Лежандр и Гаусс, Абель и Якоби. Вошло в привычку, что если появляется новый естественный класс функций, то его надо поискать у

Эйлера. В последние годы в самых разных задачах теории чисел, алгебры, топологии, геометрии мистическим образом появляется дилогарифм $\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$. Оказалось, что Эйлер знал о замечательных свойствах этой функции, в частности, о теоремах сложения.

Важнейший технический прием, которого не хватало Эйлеру, — это продолжение специальных функций в комплексную область. Но Эйлер уже делал первые шаги в построении комплексного анализа: он наряду с Даламбером (правда, в связи с задачами гидромеханики) рассмотрел уравнения Коши – Римана, которые задают аналитические функции комплексного переменного; пользовался комплексными подстановками для вычисления вещественных интегралов, а в последние годы жизни вычислял вещественные интегралы через интегралы от комплексных функций, очень близко подойдя к теории Коши контурного интегрирования на комплексной плоскости. Эйлер понимал неизбежность «комплексного» мира.

Наиболее знаменитым результатом Эйлера в комплексном анализе является его открытие связи между показательной и тригонометрической функциями в комплексной области, которую невозможно увидеть, оставаясь в пределах вещественных чисел. Формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ Ж. Л. Лагранж (1736 – 1813) назвал «одним из наиболее прекрасных анлитических открытий, сделанных в настоящем веке». Формула производит сильное впечатление и сегодня. Ее можно очень естественно получить через ряды или функциональные уравнения, и редко вспоминают, как она появилась в математике XVIII века. Удивительно, что логика ее открытия была достаточно прямолинейной. В начале века И. Бернулли (1667 – 1748), учитель Эйлера, занимаясь задачей об интегрировании рациональных дробей, обратил внимание на соотношение $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{x-i} - \dfrac{1}{x+i}\right)$. Если его формально проинтегрировать, то слева получается арктангенс, а справа — логарифм, правда, мнимого аргумента. После несложных преобразований получается формула

$$x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 - i \operatorname{tg} x}{1 + i \operatorname{tg} x}, \tag{16}$$

которая тривиально преобразуется в формулу Эйлера. Хотя И. Бернулли и не выписал (16), он безуспешно пытался придать смысл встречавшимся здесь вычислениям с мнимыми величинами. На этой почве возникла известная дискуссия (1712 – 13 гг.) между Бернулли и его учителем Лейбницем о логарифмах отрицательных чисел (чему равен $\ln(-1)$?), а в 1714 г. «формула Эйлера» промелькнула без необходимых обоснований у Рождера Коутса (1682 – 1716), рано умершего сподвижника Ньютона. Эйлер, будучи хорошо осведомленным в проблемах, волновавших его учителя, в 1728 г., отправляясь от вычислений, выводит (16), а в 1739 г. он развил теорию логарифмов в комплексной области так, что все формулы стали корректными и противоречия исчезли ($\ln(-1) = (2k+1)\pi i$, где k — произвольное целое число).

Поиски специальных функций невозможно отделить от выделения важных классов дифференциальных уравнений. Уже никто не сомневался, что явно проинтегрировать произвольные дифференциальные уравнения нельзя. Эйлер активно участвует в выделении тех уравнений, которые возникают из физики. Он рассматривает ряд уравнений в связи с задачами гидромеханики, колебания струн и мембран, распространения звука: здесь и уравнение Лапласа, и некоторые варианты волнового уравнения, и др. Для Эйлера был характерен аналитический взгляд на физику. Он стремился свести физические задачи к решению тех или иных дифференциальных уравнений. В механике он первый перешел от геометрического языка Ньютона к аналитическому.

Подводя итоги деятельности Эйлера в области анализа, подчеркнем, что Эйлер отдавал предпочтение аналитическим методам при решении как общематематических, так и прикладных задач. Но никогда анализ не был для Эйлера самоцелью. Можно вспомнить, что он (в отличие от Даламбера) упорно искал чисто алгебраическое доказательство основной теоремы алгебры (существование комплексного корня у любого алгебраического уравнения). Алгебраического доказательства найти не удалось, и Г. Фробениус (1849 – 1917) с сожалением отмечал, что замечательным алгебраическим рассмотрениям Эйлера не отдано должного, а многие из них несправедливо приписываются Гауссу.

Геометрия. Занятия Эйлера геометрией носили более отрывочный характер. Второй том «Введения в анализ» является первым учебником аналитической геометрии. Очень многое в аналитической геометрии идет от Эйлера. Он первым рассмотрел аффинные преобразования (и ввел этот термин), исследовал группу вращений, связав полученные при этом результаты с движением твердого тела. Эйлер продумывал возможности применения анализа к геометрии, сделав первые шаги в дифференциальной геометрии. Одним из первых рассмотрел он и геометрические задачи, связанные с картографией, отправляясь от вопроса, в каком смысле плоское изображение на карте подобно соответствующей картине на сфере (поверхности земного шара). Многим показалась неожиданной обнаружившаяся при этом связь с комплексными числами.

Даже в элементарной геометрии Эйлер обнаружил факты, которые никто не заметил прежде, например, что в треугольнике ортоцентр, центр описанной окружности и центр тяжести лежат на одной прямой — прямой Эйлера. Кажется, и теорему о пересечении трех высот треугольника в одной точке (ортоцентре), пропущенную у Евклида, никто до Эйлера явно не сформулировал.

Вероятно, более других геометрических утверждений популярна теорема Эйлера для многогранников: $B + \Gamma = P + 2$, где B — число вершин, Γ — число граней, P — число ребер. Интересно, что Эйлер увидел это соотношение на примерах, но не смог поначалу доказать его в общем виде, проверив вместо этого теорему для любых пирамид, призм, некоторых составных многоранников, правильных многогранников. Эйлер и в геометрии борется за доверие к математическому эксперименту: «Итак, поскольку верность этого утверждения во всех этих случаях оправдывается, нет никакого сомнения, что оно имеет место для любых тел, так что это предложение представляется достаточно обоснованным». Лишь позднее он нашел общее доказательство.

Эйлер уже не вызывал своих коллег на состязание по решению задач, как это делал еще Ферма, но он охотно обменивался с ними как решенными, так и нерешенными задачами. Отсюда его результаты по традиционной тематике математических состязаний: магическим квадратам, дружественным числам и т. д. Популярные книги до сих пор сохранили несколько просто формулируемых задач, либо придуманных Эйлером, либо им впервые решенных. Можно вспомнить об обходе шахматной доски конем так, чтобы ни одна клетка не проходилась дважды. Другая известная задача — доказать невозможность обойти семь кенигсбергских мостов так, чтобы ни один мост не проходился дважды. На примере этой задачи видно, что Эйлера интриговали нестандартно решаемые задачи, поскольку эта нестандартность могла иметь далеко идущие последствия. В марте 1736 г. Эйлер пишет «мужу славному и знатному Мариони»: «Некогда мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге и окруженном рекой, через которую перекинуто семь мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь обойти их, переходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что что никто до сих пор не мог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно. Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство. Поэтому мне пришла в голову мысль, не отностится ли она случайно к геометрии положения, которую в свое время исследовал Лейбниц.» Лейбниц в самом деле оставил несколько загадочных реплик о невиданной геометрии, «которая раскрывается перед нами в положении, как алгебра в величинах» (письмо к Гюйгенсу, 1679 г.). Эйлер безуспешно пытается выяснить подробности о «геометрии положения». Он разрабатывает метод, позволяющий решить эту задачу и по существу относящийся к началам топологии. Он чувствует, что рассмотренная задача — лишь отголосок более глубоких проблем: «Если бы можно было привести здесь другие, более серьезные задачи, этот метод мог бы принести еще большую пользу, и им не следовало бы пренебрегать». Через месяц в письме к Элеру в Данциг обсуждается обобщение задачи о мостах и констатируется: «Ты можешь убедиться, славнейший муж, что это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике. Итак, я не знаю, как так получается, что вопросы, имеющие совсем мало отношения к математике, скорее разрешаются математиками, чем другими. Между тем ты, славнейший муж, определяешь место этого вопроса в геометрии положения, что касается этой новой науки, то, признаюсь, мне неизвестно, какого рода относящиеся сюда задачи желательны были Лейбницу и Вольфу.» Так Эйлер вслед за Лейбницем видел впереди новую область геометрии — геометрии формы, без измерений, — черты которой стали проясняться через полтора века.

Механика. Механика была с самого начала в поле зрения Эйлера. Уже в 1736 г. выходит его «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически». Это первая книга 29-летнего ученого. Эйлер тщательно изучил «Начала» Ньютона, в которых механика изложена на геометрическом языке. Он обнаружил, что с точки зрения приложений к конкретным задачам более эффективен переход на аналитический язык при помощи использования координат. В конечном счете механическая задача преобразуется в чисто математическую задачу решения дифференциальных уравнений. Это направление в механике продолжил Лагранж, который в предисловии к своей «Аналитической механике» констатировал: «В этой работе вовсе нет чертежей, в ней только алгебраические операции». Эйлер ясно отдавал себе отчет, что сведение механической задачи к математической еще не означает ее решения: « ... Хотя принципы механики, на которых основаны все законы движения, по-видимому, достаточно известны и достаточно применимы к общим явлениям для того, чтобы с их помощью подчинить изменения движения аналитическим формулам, однако очень часто анализ становится недостаточным для решения уравнений ... Разве мы не видим, что принципы механики каждый день приводят нас к дифференциальным уравнениям, решение которых может быть найдено только при таком развитии анализа, от которого он еще очень далек.»

Механика Ньютона не выходила за пределы движения материальных точек, потом Декарт рассмотрел движение плоских пластин, но только Эйлер перешел к изучению специфики движения твердого тела конечных размеров. Сделал он это в книге, вышедшей в свет через 29 лет после выхода его «Механики».

Механика Ньютона начинается с аксиом — трех его законов. Эйлер считал, что они нуждаются в существенно большей мотивировке, и их следует вывести из каких-то более первичных законов мироздания. Предпринятая в 1736 г. попытка в этом направлении была сомнительной. А. Н. Крылов пишет, что Эйлер получил лишь «разжиженные» законы Ньютона, и находит корни пожеланий Эйлера в его привычке к занятиям богословием. Когда Эйлер был в Берлине, перед ним неожиданно открылся новый путь разработать для механики более естественные основания. В 1744 г. Мопертюи предположил, что все законы движения и равновесия в природе могут быть выведены из того, что всякое движение происходит так, чтобы минимальное значение приняла некоторая величина — действие. Мопертюи отправлялся от оптики (принцип Ферма), переходил к механике, но затем толковал свой закон максимально широко и путано, давал своему закону наименьшего действия теологическое толкование, утверждая, что что минимальность действия является следствием «наиболее мудрого употребления могущества Творца». Мопертюи не пошел дальше простых механических применений, он увлекся глобальными проблемами, которые вскоре вовлекли его в горячую дискуссию, дорого ему стоившую. Даламбер писал: «Этот спор о действии, если нам будет позволен сказать, несколько походит на некоторые религиозные споры по ожесточению, с которым он велся, и по количеству людей, принявших в нем участие, ничего в этом не смысля».

Эйлер с самого начала на стороне Мопертюи. Ему не чужда и теологическая интерпретация: «Действительно, так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума». Но прежде всего Эйлер ищет точную формулировку принципа, которая позволила бы ему изменить законы механики. Он находит такую формулировку в случае центральных сил, хотя и не дает доказательства. Как писал сам Мопертюи по поводу Эйлера, «Этот великий геометр не только обосновал принцип более фундаментально, чем это сделал я, но его взор, более объемлющий и более проникновенный, чем мой, привел его к открытию следствий, которые я не извлек».

Утверждения Мопертюи были настолько общими, что в дискусии (точнее сказать, скандале) приняли участие люди, далекие от физики, и среди них Вольтер, имевший с Мопертюи давние счеты и разразившийся сатирическим памфлетом «Диатриба доктора Акакии уроженцу Сен-Мало». В конечном счете Мопертюи был морально раздавлен, но от Вольтера досталось и Эйлеру, ярому защитнику Мопертюи. Его можно безошибочно узнать в ученом, который пытается снискать себе славу среди европейских математиков тем, что «производит на бумаге максимум вычислений». Речь идет об ученом, который считает не менее чем на 60 страницах вместо того, чтобы подумать и потратить не более десяти строк, который считает три дня и три ночи, не потратив четверть часа на обдумывание правильного пути. Вот как преломился у Вольтера образ гениального вычислителя.

Эйлера нередко упрекали и упрекают, что он переоценил путаные высказывания Мопертюи, почти демонстративно подчеркивая вторичность своих работ. Намекали даже, что практичный Эйлер стремился угодить всесильному (перед дискуссией) президенту Берлинской Академии наук. Но думается, что такое отношение к работе Мопертюи было органично для Эйлера: он умел ценить пионерские работы и понимал, сколь в несовершенном виде предстают в них идеи. Мопертюи высказал то, что естественно было сделать Эйлеру. Эйлер все время искал для механики более надежное основание, чем законы Ньютона, которые он не готов был принять за первичные. Ему не суждено было догадаться, что необходимый принцип можно было почерпнуть из его любимого вариационного исчисления.

Астрономия. Занятия Эйлера астрономией — продолжение его занятий механикой. Его область интересов — небесная механика. Он смог реализовать здесь свои поразительные вычислительные способности (как писал французский астроном Араго, он «вычислял так, как человек дышит»). Эйлеру одному из первых стали доступны вычисления, опережавшие результаты наблюдений. Старая небесная механика только экстраполировала результаты наблюдений, новая — исходила прежде всего из закона всемирного тяготения. Первые шаги в этом направлении сделаны самим Ньютоном, давшим теоретическое определение ускорения движения Луны и объяснившего некоторые аномалии (как стали говорить, неравенства) в ее движении. Как всегда, Эйлер ясно осознает насущные задачи небесной механики. Прежде всего надо попытаться объяснить «неравенства» в движении больших планет Юпитера и Сатурна их взаимным притяжением, накладывающимся на притяжение Солнца. Эйлер далеко продвигается к вожделенной цели — объяснить так называемые «большие неравенства», проявляющиеся в систематическом ускорении Юпитера и замедлении Сатурна. Однако Эйлеру не удалось довести вычисления до результата, хорошо согласующегося с наблюдением, хотя он и двигался по правильному пути (это удалось позднее Лапласу).

Теория движения Луны была в центре внимания Эйлера. Самой злободневной была задача объяснения периодического движения перигея орбиты (с периодом 9 лет). Учет возмущения упорно давал период 18 лет, пока в 1749 году Клеро не показал, что учет возмущающих членов следующего порядка дает правильный период. Эйлер признавал, что Клеро, сконцентрировавший усилия на решении этой задачи, опередил его: «...в этом вопросе у г-на Клеро, пожалуй, нет более сильного противника, чем я ⟨...⟩, хотя я и был в этом вопросе предшественником г-на Клеро, у меня не хватило терпения пуститься в столь пространные вычисления». Хотя теория Эйлера и не дала столь выигрышного итога, как результат Клеро, она имела последствие исключительной важности. На ее основе в 1755 г. Майер (1723 – 1762) составил таблицы движения Луны невиданной точности. Они дали способ измерять долготу на борту корабля, конкурентоспособный со способом, использующим хронометр (изобретенный Харрисоном в 1735 г.). Признанием заслуг Майера в решении давно стоявшей практической задачи (см. главу о Гюйгенсе) стало присуждение ему в 1765 году (посмертно) премии английского парламента размером в 3000 фунтов. Одновременно Эйлеру была присуждена премия в 300 фунтов «за теоремы, при помощи которых недавно умерший профессор Майер из Геттингена построил свои Лунные Таблицы, позволившие достичь большого прогресса в деле нахождения долгот на море».

Много занимался Эйлер вычислением эллиптических (невозмущенных) орбит комет. В частности, это относится к знаменитой комете Лекселя 1769 г., необычайно близко подошедшей к

Земле (10 мая 1983 г. впервые за 200 лет комета подошла к Земле на сравнимое расстояние).

Хотя Эйлеру не удалось построить теорию движения планет, исходящую лишь из законов Ньютона и полностью согласующуюся с экспериментом, он верил в непоколебимость закона всемирного тяготения. Когда-то после неудач с объяснением неравенств в движении Луны Эйлер, как и другие его современники, подумывал об «уточнении» закона Ньютона. Однако дальнейшее развитие теории движения Луны, по словам Эйлера, показало, что «чем более строго она согласована с законом Ньютона, тем лучше она представляет наблюдаемые явления». Эйлер не сомневался, что то же справедливо и в отношении всей небесной механики. Поучительна позиция Эйлера в отношении подхода к решению задачи трех тел: «Я должен прежде всего заметить, что мы ничего не выиграли бы, употребив какой угодно труд на интегрирование этих уравнений. С одной стороны, я сильно сомневаюсь, чтобы когда-либо был найден способ для этого; а с другой стороны, если бы даже посчастливилось вывести их интегралы, то эти интегралы были бы крайне сложны и не принесли бы почти никакой пользы для употребления в астрономии. Для этой цели их все равно пришлось бы заменять подходящими приближениями. Но если речь идет о приближенных выражениях, то их столь же легко получить непосредственно, из дифференциальных уравнений.»

«Письма к принцессе». Взаимоотношения ученых и монарших особ — небезынтересный сюжет в истории науки. Мы уже имели шанс поговорить об этом. Дело не только в том, что контакты с сильными мира сего бывали необходимы для обеспечения существования ученых и их работы. Нередко они тешили себя надеждой, что их знания могут способствовать воспитанию совершенного монарха (можно вспомнить о Лейбнице и ганноверском курфюрсте — будущем короле Англии, Декарте и шведской королеве Христине). Вряд ли Эйлер имел такие планы в отношении принцессы Ангальт-Дессауской, старшей дочери маркграфа Бранденбург-Шверинского, племянницы Фридриха II. Вероятно, Эйлеру было приятно заниматься с любознательной смышленой принцессой, да и ее отношение к ученому отличалось от отношения большинства родственников короля. Постепенно у принцессы становится все меньше времени для занятий, и Эйлер решает заполнить пробелы в уроках письмами: «Мои намерения продолжать с Вами занятия геометрией встречают новые препятствия, это составляет для меня истинное горе, но я хочу восполнить пропуски своими письмами, насколько это возможно по сущности предмета». Эйлера увлекает возможность систематически изложить свои глобальные взгляды на мироздание, жизнь, религию. Постепенно письма к принцессе ориентируются на дальнейшую публикацию. В 1768 – 1774 гг. выходят три тома «Писем о разных физических и философских материях, писаных к некоторой немецкой принцессе».

Письма энциклопедичны, создается впечатление, что Эйлер стремится рассказать все, что успел продумать. Некоторое представление о широте обсуждаемых вопросов дает перечень тем, с которых начинается первый том: понятие притяжения, скорость звука и музыка, свет, зрение и строение глаза, закон всемирного тяготения, морские приливы и отливы, монадология Вольфа, «об отношении души к телу», «о явлениях естественных», «о лучшем из миров и происхождении всех зол», «о состоянии души после смерти», «об идеалистах, эгоистах и материалистах», «о совершенстве языка», «о силлогизме», «о нравственных и физических страданиях», «о назначении человека», «обращение грешников», «о чудесах человеческого голоса» и т. д.

Большинство ученых не приняли философские тексты, хотя многие отмечали достоинство страниц, относящихся к популярному изложению научных знаний. Благожелательный Кондорсе писал: «этот труд представляет нечто весьма ценное по той ясности, с которой в нем изложено все самое главное и важное из области астрономии, оптики и теории звука. Что касается тех мыслей Эйлера, которые относятся к философии, они скорее остроумны, чем глубоки.» Эйлер воспользовался страницами «Писем» для борьбы против свободомыслия в науке, против материализма. Он высмеивает «односторонних химиков, анатомов, физиков, которые все ушли в свои опыты. Сколько бы им ни говорили о свойствах и существе души, они соглашаются только с тем, что поражает их внешние чувства.» Все это, вместе с размышлениями Эйлера о религии, вызвало резкие отзывы Лагранжа и Даламбера. 2 декабря 1768 г. Лагранж писал Даламберу: « ... имеется одно сочинение, которого он не должен был бы публиковать ради своей чести: это „Письма к немецкой принцессе“ ». А 15 июля 1769 года он писал, что «Письма», возможно, позабавят Даламбера выходками против вольнодумцев. В ответ Даламбер сравнивает «Письма» с ньютоновскими комментариями к Апокалипсису и пишет: «Наш друг — великий аналитик, но довольно плохой философ»; в письме от 7 августа: «Вы имели полное основание говорить, что, дорожа своей честью, он не должен был печатать это произведение. Это просто невероятно, как такой великий гений, каким он является в геометрии и анализе, может быть в метафизике ниже самого маленького школяра, чтобы не сказать таким плоским и абсурдным, и вот действительно подходящий случай воскликнуть: не все богами даровано одному».

А публике «Письма» понравились! Об этом свидетельствует, что только в XVIII веке они выдержали четыре издания на русском языке (первоначально они были напечатаны по-французски). Это контрастирует с тем, как туго расходились научные труды Эйлера (в письме к конференц-секретарю Миллеру из Берлина Эйлер пишет, что из 500 экземпляров «Дифференциального исчисления» разошлось лишь 100; на «Теорию движения твердого тела» с трудом нашли 12 подписчиков). Уже в наши дни В. И. Вернадский писал, что перед «Письмами к принцессе» «останавливаешься в восхищении перед широтой и обдуманностью в единое, которое бьет ключом из этого произведения его досугов, не менее характерного для XVIII века, чем какие-нибудь создания тогдашнего искусства или музыки».

Популяризаторское искусство, проявившееся на лучших страницах «Писем к принцессе», было одним из проявлений выдающегося педагогического мастерства Эйлера. Другим его проявлением является продуманность вводимых понятий и современность обозначений (от Эйлера идут обозначения тригонометрических функций; он впервые рассматривал значения последних за пределами $[0; 2\pi]$ и т. д.). Много сил ученый отдавал воспитанию своих учеников, которые постоянно жили в его доме. Тексты его сочинений были ориентированы не только на сообщение его результатов, но и на демонстрацию его искусства: «Он предпочитал обучение своих учеников тому небольшому удовольствию, которое он бы получил, изумляя их. Он думал, что недостаточно сделал бы для науки, если бы не прибавил к открытиям, которыми он обогатил науку, чистосердечного изложения идей, приведших его к этим открытиям» (Кондорсе). Отсюда и готовность публиковать недоказанные результаты с мотивировкой их правдоподобия, и даже неточные, но поучительные вычисления. Вот как он ответил критику, обнаружившему пробелы в его работе по диоптрике: «Вы заблуждаетесь, мой дорогой, если думаете, что эта работа потому бесполезна. Наоборот, она очень ценная, ибо содержит расчеты, которые независимо от объекта самого по себе, по своему ходу и приложению, могут служить образцом; короче говоря, это все-таки расчеты нового вида, а это весьма не бесполезно».

Заключительные замечания. Мы не имели возможности коснуться многих сторон деятельности Эйлера: оптики, картографии, баллистики, теории корабля и т. д. Мы хотим еще раз подчеркнуть, что в богатом наследии Эйлера математика занимает особое место, а в своих математических работах он был прежде всего аналитиком. По работам Эйлера учились великие математики XIX века. «Читайте Эйлера — это наш общий учитель», — говорил Лаплас. По словам Гаусса, «изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить». Никто всерьез никогда не оспаривал репутацию Эйлера как великого математика. Однако в последующих оценках сказалось то, что Эйлер многие трудные проблемы не доводил до окончательного решения. Если не оценивать его деятельность в целом, а лишь по законченным большим результатам, то он уступает другим великим ученым. Скажем, сделав многое в небесной механике, он не оставил результатов, подобных объяснению быстрого движения перигелия лунной орбиты или вычислению возмущенной орбиты кометы Галлея с предсказанием ее следующего возвращения, полученных Клеро. В арифметике Лежандр и Гаусс нашли трудные доказательства существования первообразных корней и квадратичного закона взаимности, высказанных Эйлером.

В 1842 г. Якоби в письме к П. И. Фуссу отмечает важное свойство математического наследия Эйлера: «В последнее время я вновь основательно изучал интегральное исчисление Эйлера

и опять удивлялся, какой свежей сохранилась эта семидесятилетняя книга, в то время как современную ей книгу Даламбера совершенно невозможно читать. Причина, мне кажется, в его примерах. Потому что эти примеры имеют не просто побочное значение иллюстраций, они составляют все содержание, которое имели в то время общие предложения.» Эйлера упорно сравнивали с Даламбером при жизни; Якоби продолжает делать это после их смерти. В мае 1841 г. он пишет Фуссу: «Удивительно, что сейчас невозможно прочитать хоть строчку, оставленную Даламбером, в то время как лучшие работы Эйлера еще читают с восхищением, а умерли они в один и тот же год. Кажется, что Даламбер истощил все свое изящество в беллетристике.» Вкусы у Якоби и Фридриха II не совпадали, но к Даламберу Якоби определенно несправедлив.

Эйлера ценили прежде всего те, кто изучал его труды, а не оценивал наследие по вершинам, кто учился у него и пользовался его провидческими идеями.

В заключение приведем один курьез, который, впрочем, больше характеризует особенности академической «демократии» в России, чем заслуги Эйлера. В последний год XIX столетия петербургские ученые загодя думали о праздновании предстоящего в 1907 году 200-летия великого ученого. 6 февраля 1899 г. на общем собрании академии обсуждалось предложение отделения физико-математических наук о сооружении по международной подписке памятника Эйлеру в Петеррбурге. Против этого предложения решительно выступил академик (по математике) Н. Я. Сонин (1849 – 1915). Он говорил, что труды Эйлера устарели, что его значительно превзошли Лагранж и Гаусс, что «следы деятельности Эйлера практически заметены». В общем, памятники следует ставить великим ученым, а Эйлер является разве что выдающимся, а потому для него вполне достаточно бюста в конференц-зале, который и был уже установлен вскоре после смерти ученого. Было еще мнение, что непонятно, почему памятник надо непременно устанавливать в Петербурге, а не в Базеле, где Эйлер родился, или в Берлине, где он работал почти так же долго, как в Петербурге. Вопрос был поставлен на голосование. Голоса разделились поровну, а это, согласно академическому уставу, означало, что в памятнике Эйлеру отказано. Демократия победила!

Сегодня в Петербурге имеется Математический институт имени Эйлера, но памятника пока нет.