ФЕЛИКС КЛЕЙН

Славу великого математика Феликсу Клейну принесли работы, выполненные на протяжении одного десятилетия. Клейн прекратил активные занятия математикой в 33 года, но до конца дней оставался в центре научно-организационной жизни, полностью посвятив себя педагогической и литературной деятельности.

Рыцарские шпоры. Ф. Клейн родился в 1849 году в Дюссельдорфе. Здесь он окончил гимназию; в 1865 году поступил в Боннский университет. Уже на следующий год профессор Юлиус Плюккер (1801 — 1868) привлек семнадцатилетнего студента в качестве ассистента по физике. Плюккер начинал свою научную деятельность как геометр, но постепенно переключился на занятия экспериментальной физикой. Однако в последние годы жизни, после двадцатилетнего перерыва, Плюккер возвратился к геометрии. «Этот поворот сыграл решающую роль в моем собственном развитии» — писал Клейн. Посмертное издание последнего мемуара Плюккера (1869 г.) было подготовлено Клейном. Возможно, это и послужило причиной тому, что его диссертация (1868 г.), которой, по словам самого Клейна, он «заслужил рыцарские шпоры», и его первая публикация (1869 г.) были геометрическими.

Лишившись учителя, Клейн становится «странствующим рыцарем». Он посещает основные математические центры Германии (Геттинген, Берлин), устанавливает личные контакты с Клебшем, Вебером, Вейерштрассом. На подающего надежды молодого ученого, который хочет и умеет учиться, сразу обращают внимание. Не менее важны контакты Клейна со сверстниками. Особенно счастливой была дружба Клейна с великим норвежцем Софусом Ли (1842 – 1899); они познакомились в 1870 году в Берлине. С. Ли был на семь лет старше Клейна, но в 1870 го-

Феликс Клейн

ду делал лишь первые шаги в геометрии. Вскоре Клейн и Ли отправляются в Париж. Здесь они знакомятся с приемами французских геометров, которые умели с удивительной легкостью, «по воздуху» (С. Ли), получать важные геометрические результаты. Особое значение для дальнейшей научной судьбы Клейна и Ли имели встречи с Камиллом Жорданом (1838 – 1922). Как раз в 1870 году Жордан выпустил обширный труд по теории конечных групп, привлекший широкое внимание к работам Галуа (1811 – 1832). Возможно, «пропуском» к Жордану послужила для друзей первая работа Клейна, посвященная геометрическому исследованию так называемой поверхности Куммера, алгебраическое исследование которой перед этим предпринял Жордан.

Покинуть Францию Клейна заставила франко-прусская война. В самом начале войны Клейн заболел тифом; оправившись от болезни, он поселяется в Геттингене. Для Клейна наступает время великих свершений. Н. Бурбаки пишет, что Клейн завершил «золотой век» геометрии. Но прежде чем рассказывать о блестящем завершении этого века, вспомним о его начале.

«Золотой век» геометрии. Еще в XVII веке Дезаргу (1593 – 1662) и Паскалю (1623 – 1662) удалось при помощи центрального проектирования получить замечательные геометрические результаты. Об этих результатах забыли почти на полтора века. На большие возможности метода проектирования вновь обратил внимание Гаспар Монж (1746 – 1818); он рассказывал об этом в курсе начертательной геометрии, который читал в Политехнической школе. От «Описательной геометрии» Монжа (1795) и отсчитывает Н. Бурбаки «золотой век» геометрии.

Среди слушателей Монжа был Виктор Понселе (1788 – 1867). «Черта, которая возвышает его над всеми предшественниками,— это новый вид геометрической интуиции, — „проективное мышление“» (Клейн). Проективную геометрию Понселе создал в течение двух лет, проведенных им в плену в Саратове после войны 1812 года. Свои результаты Понселе рассказывал товарищам по плену, также слушавшим Монжа в Политехнической школе. Опубликованы эти результаты были в 1822 году в «Трактате о проективных свойствах фигур».

Как и его предшественники, Понселе каждую прямую пополняет бесконечно удаленной точкой, считая, что все параллельные друг другу прямые имеют общую бесконечно удаленную точку («пересекаются» в ней). Все бесконечно удаленные точки образуют бесконечно удаленную прямую. На пополненной плоскости параллельность становится частным случаем пересечения и не требует специального рассмотрения (например, утверждение, что через точку вне прямой проходит единственная прямая, ей параллельная, превращается в утверждение, что через две различные точки, одна из которых обычная, а другая — бесконечно удаленная, проходит единственная прямая). При центральном проектировании конечная точка может не иметь образа («уйти на бесконечность»), но на пополненной бесконечно удаленными точками плоскости это отображение уже взаимно однозначно.

Центральное проектирование переводит одну плоскость в другую; выполнив же несколько проектирований подряд, мы можем вернуться на исходную плоскость, получив преобразование этой плоскости. К таким преобразованиям (их стали называть проективными) относятся перемещения, гомотетии, растяжения. Проективные преобразования взаимно однозначны (на пополненной плоскости) и переводят прямые в прямые (позднее выяснилось, что всякое преобразование с этими свойствами проективно). Проективные преобразования, переводящие в себя бесконечно удаленную прямую, называются аффинными; аффинные преобразования взаимно однозначны на обычной плоскости. Понселе исследовал геометрические объекты, сохраняющиеся при проективных преобразованиях. Оказывается, при проективных преобразованиях коническое сечение также переходит в коническое сечение (но, например, гипербола может перейти в параболу, а всякое коническое сечение проективным преобразованием можно перевести в окружность). Чрезвычайно плодотворным оказалось следующее наблюдение. Пусть A, B, C, D — точки, лежащие на одной прямой, $\{A, B, C, D\} = \dfrac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$ —

двойное, или *ангармоническое* отношение четырех точек. Пусть при некотором проективном преобразовании точки A, B, C, D перешли в точки A', B', C', D' (они обязательно будут лежать на одной прямой). Тогда $\{A, B, C, D\} = \{A', B', C', D'\}$, то есть при проективных преобразованиях двойное отношение четырех точек сохраняется. Если одна из точек, например, D — бесконечно удаленная точка, то $\{A, B, C, D\}$ полагается равным $\dfrac{AC}{BC}$, и мы получаем, что при аффинных преобразованиях сохраняются отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой (почему?).

Далее Понселе пытается устранить исключительные случаи взаимного расположения конических сечений. Почему, например, два эллипса могут пересекаться в четырех точках, а пара окружностей — не более чем в двух? На этот вопрос дается удивительный ответ. Кроме пары *вещественных* точек пересечения, у окружностей имеется *универсальная* (одна и та же для всех окружностей на плоскости!) пара общих точек, не замеченных из-за того, что они являются ... мнимыми и бесконечно удаленными одновременно. Эти точки называются *циклическими.*

Теперь — несколько слов о четырех немецких математиках: Фердинанде Мёбиусе (1790 – 1868), Якобе Штейнере (1796 – 1863), Христиане фон Штаудте (1798 – 1867) и уже упоминавшемся Плюккере. С их именами связана ожесточеннейшая борьба между аналитическим и синтетическим направлениями в геометрии.

Здесь слова «анализ» и «синтез» употребляются в нестандартном смысле: аналитическая геометрия использует метод координат, в результате чего делается возможным применение алгебры и анализа в геометрии; синтетическая геометрия оперирует с непосредственными пространственными конструкциями.

Наиболее ожесточенным был поединок между аналитиком Плюккером и синтетиком Штейнером; Мёбиус (аналитик) и Штаудт (синтетик) держались в стороне от борьбы. Клейну было очень легко оказаться вовлеченным в борьбу на стороне аналитиков, но он сумел остаться над схваткой, возможно, руководствуясь правилом его знакомого физиолога Людвига: «Нужно удалиться на 600 километров от места споров и оттуда пересмотреть отношения».

Деятельность аналитиков прежде всего требовала усовершенствовать метод координат. В плане синтетическом важно было дать бескоординатные определения объектов проективной геометрии, например, кривых второго порядка. Это сделал Штейнер —

очень колоритная фигура в истории математики. Швейцарский крестьянин, до 19 лет ходивший за плугом, он начал заниматься математикой в зрелом возрасте. Штейнер был решительно настроен против мнимых величин в геометрии, называя их «призраками» или «царством теней». Впрочем, фон Штаудт показал, что с мнимыми объектами, возникающими в проективной геометрии, можно связать эквивалентные им чисто вещественные конструкции. Другое важное достижение Штаудта состояло в том, что он сумел определить двойное отношение четырех точек непосредственно, без использования расстояний (которые не сохраняются при проективных преобразованиях).

И наконец, еще одно имя — английского математика Артура Кэли (1821 – 1895), долгое время занимавшегося математикой без отрыва от адвокатской практики. Мы остановимся на одном сочинении Кэли — знаменитом «Шестом мемуаре о формах» (1859 г.). Кэли заметил, что евклидовы перемещения выделяются из всех проективных преобразований тем, что сохраняют циклические точки. В результате, с использованием циклических точек, все объекты евклидовой геометрии (расстояния, величины углов и т. д.) можно определить через проективные понятия (сохраняющиеся при проективных преобразованиях). Кэли называет проективную геометрию *дескриптивной,* а евклидову — *метрической* и пишет: «Метрическая геометрия есть, таким образом, часть дескриптивной, а дескриптивная геометрия — вся геометрия». Следует иметь в виду, что раньше положение казалось прямо противоположным, а именно, что проективная геометрия — сравнительно бедная часть евклидовой. Далее Кэли замечает, что исходя из проективной геометрии можно ввести расстояния, отличные от евклидова (*метрики* или *мероопределения Кэли*): каждое такое расстояние на плоскости связывается с некоторой кривой второго порядка (вещественной или мнимой), так что это расстояние не меняется при всех проективных преобразованиях, сохраняющих рассматриваемую кривую.

Модель Кэли–Клейна. В 1869 году Клейн познакомился с теорией Кэли, а в конце того же года — довольно поверхностно — с геометрией Лобачевского. Тотчас же у него возникла мысль, что одна из метрик Кэли приводит к геометрии Лобачевского. Это была догадка, почти лишенная аргументации. Теория Кэли и теория Лобачевского радикально отличались внешне (вычисления с двойным отношением у Кэли и аксиоматическое изложение у Лобачевского), а геометрии Кэли были еще недостаточно разработаны для того, чтобы можно было проверять аксиомы геометрии Лобачевского. В феврале 1870 года Клейн, делая доклад по теории Кэли на семинаре Вейерштрасса, решился обнародовать свою гипотезу. На этом семинаре было не принято обсуждать фантастические проекты: «зарвавшемуся» молодому человеку объяснили, что «это две далеко отстоящие друг от друга системы»; Клейн же был столь мало подготовлен к защите своей гипотезы, что «позволил переубедить себя». Позднее он жаловался на Вейерштрасса, что у того «не было склонности распознавать с отдаления очертания еще не достигнутых высот». Но Клейн не перестал верить в свою гипотезу. Летом 1871 года он с помощью своего друга Штольца уже основательно изучил неевклидову геометрию и убедился в справедливости своей догадки. Даже обладая доказательством, Клейну было нелегко убедить окружающих в своей правоте. Вероятно, наиболее досадно было Клейну то, что среди несогласных с его утверждением до конца своей жизни оставался Кэли. «Состарившийся дух не в состоянии сделать выводы из созданных им самим положений», — писал Клейн.

Несколько слов о самой модели Кэли–Клейна. «Точками» в этой модели являются внутренние точки круга (круг можно заменить областью, ограниченной любой кривой второго порядка), а «прямыми» — хорды этого круга (без концов). Точки пересечения «прямых» определяются естественным образом; ясно, что через «точку» вне «прямой» проходит бесконечное число «прямых», не пересекающих исходную, то есть налицо отрицание аксиомы параллельных из евклидовой геометрии. Надо еще убедиться в том, что все остальные евклидовы аксиомы для описанной модели выполняются: это и будет означать, что модель Клейна — это модель геометрии Лобачевского. Сравнительно просто проверяются аксиомы, касающиеся взаимного положения точек и прямых. Но когда дело доходит до проверки аксиом равенства, то прежде всего надо договориться, какие отрезки считать равными; унаследовать соответствующие понятия евклидовой геометрии нельзя. Клейн, следуя Кэли, полагает длину отрезка AB равной

$|\ln\{A, B, \alpha, \beta\}|$, где α и β — точки пересечения «прямой» AB с границей рассматриваемого круга (эту окружность называют абсолютом). Проективные преобразования, сохраняющие абсолют, сохраняют так определенное «расстояние», т. е. являются перемещениями в модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского.

Итальянский математик Эудженио Бельтрами (1835 – 1900) наметил другой путь к обоснованию геометрии Лобачевского еще в 1868 году. Он обнаружил поверхность — псевдосферу, — кратчайшие линии на которой (геодезические) ведут себя так, как прямые в геометрии Лобачевского. Затем Бельтрами отобразил некоторым образом псевдосферу в круг и получил те же формулы, что позже и Клейн в своей теории.

Клейн исследовал другие неевклидовы геометрии, к которым приводят метрики Кэли, обнаружив, в частности, модель геометрии Римана (в геометрии Римана сумма углов треугольника больше π, в геометрии Лобачевского она всегда меньше π).

Обсудим теперь, что же дает модель Кэли – Клейна для геометрии Лобачевского. Прежде всего — это отличный от аксиоматического способ изложения, более наглядный. Клейн предваряет свою публикацию (1871 г.) словами, что его цель — «дать новое наглядное изложение математических результатов работ, относящихся к теории параллельных, и сделать их доступными ясному пониманию» (примерно так же формулирует свою цель и Бельтрами). Однако построение модели решает далеко не только методическую проблему. Ныне модель Кэли – Клейна рассматривается прежде всего как средство доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского. В модели Кэли – Клейна объекты геометрии Лобачевского формируются на языке евклидовой геометрии, так что после перевода на этот язык теоремы геометрии Лобачевского превращаются в теоремы евклидовой геометрии, и, таким образом, геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива евклидова геометрия.

Клейн видел основное значение построенной им модели в другом. Он ставил во главу угла проективную геометрию, равноправными и независимыми частями которой являются геометрии Евклида и Лобачевского. В этом плане подчеркивалась независимость построенной модели геометрии Лобачевского от евклидовой геометрии, для чего, в свою очередь, была важна возможность строить проективную геометрию, не пользуясь евклидовой (по Штаудту). Именно этот момент вызывал у Кэли подозрения в существовании порочного круга. Клейн писал: «Вместо того чтобы внутри нашей метрической геометрии строить образы неевклидовой геометрии, мы обосновываем свободную от всяких метрическими представлений проективную геометрию, которая содержит в себе как частные случаи, поддающиеся отчетливой классификации, все известные геометрические системы».

Эрлангенская программа. Веками слово «геометрия» употреблялось только в единственном числе. Но вот появилась геометрия Лобачевского, затем геометрия Римана, и наконец, математики поняли, что существует много различных геометрий. Возник естественный вопрос: что же такое геометрия? В 1872 году Клейн высказал свою точку зрения в лекции, прочитанной им в связи со вступлением в профессорскую должность в Эрлангене. Так появилась «Эрлангенская программа», по-видимому, самое известное сочинение Клейна. По существу в нем нет новых результатов, все внимание сконцентрировано на поисках принципа, позволяющего систематизировать очень аморфное образование, в которое превратилась к тому времени геометрия.

По Клейну, *основным атрибутом всякой геометрии является некоторый набор G взаимно однозначных преобразований некоторого множества M.* Преобразований должно быть достаточно много для того, чтобы каждую точку множества M можно было перевести в другую некоторым преобразованием из G (в этом случае говорят, что G действует на M транзитивно). Такая точка зрения была навеяна, конечно, проективной геометрией, в которой с самого начала первичными были некоторые преобразования (центральные проектирования), в то время как в евклидовой геометрии (в традиционном изложении) первичны другие объекты: прямые, отрезки, равные фигуры и т. д.

Следующее положение состоит в том, что набор преобразований G должен быть *группой.* Это означает, что любые два преобразования из G, выполненные подряд, можно заменить одним преобразованием, также из G; кроме того, вместе с каждым преобразованием $g \in G$ в G входит и *обратное к нему:* g^{-1} (если g переводит x в y, то g^{-1} переводит y в x). Например, движения плоскости или ее проективные преобразования проективной плоскости образуют группу.

Итак, с каждой *группой преобразований* G связывается некоторая геометрия. Что же составляет содержание такой геометрии? Прежде всего — нахождение *инвариантов группы* G — свойств, которые сохраняются при действии преобразований из G (точнее, если какой-то объект нашей геометрии обладает инвариантным свойством, то каким бы преобразованием из G мы на него ни действовали, получится объект, также обладающий этим свойством). Для группы перемещений евклидовой геометрии инвариантами являются все известные геометрические свойства, так как мы не различаем положения фигур на плоскости. Однако и в традиционном курсе геометрии имеются нетривиальные утверждения об инвариантах преобразований, не являющихся перемещениями. При гомотетиях сохраняются равенство углов, свойство кривой быть окружностью, отношение длин отрезков, отношение площадей. Имея некоторый запас инвариантных свойств, можно конструировать новые. Относительно гомотетий инвариантными будут свойство прямой быть биссектрисой угла, свойство кривой быть полуокружностью. Относительно осевых растяжений свойство кривой быть окружностью уже не будет инвариантом, но будет инвариантом свойство кривой быть эллипсом (а также гиперболой или параболой); сохраняется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой (но не на разных), отношение площадей. Следствием является инвариантность свойства точки делить отрезок в данном отношении, свойства прямой быть медианой треугольника. Можно показать, что всякое аффинное преобразование можно представить в виде композиции перемещений и осевых растяжений, а потому все указанные свойства инвариантны относительно аффинных преобразований (пример проективного инварианта — двойное отношение — приведен на с. 367).

Выделение инвариантов — только первый слой геометрии. Ее основное содержание составляют *теоремы о соотношениях между инвариантными свойствами* (эти соотношения называют *сизигиями*). Например, теорема о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит их в отношении $1:2$, сконструирована из аффинных инвариантов: быть точкой пересечения прямых, делить отрезок в данном отношении, быть медианой треугольника. Именно поэтому, если она справедлива для одного треугольника, она справедлива для его образа при аффинном преобразовании, и ее достаточно проверить для одного треугольника, например, равностороннего (аффинным преобразованием можно преобразовать любой треугольник в любой другой). В теоремах о пересечении биссектрис и высот выводится зависимость между инвариантами гомотетий.

На возможность использования геометрических преобразований для получения новых теорем обратил внимание в 1837 году Шаль: «Теперь каждый в состоянии взять какую-нибудь известную истину и применить к ней различные общие принципы преобразований; так он получит другие истины ... Гений больше не является необходимым для того, чтобы вносить свою лепту в построение величественного храма науки». Однако если понимать рецепт Шаля буквально: взять любую теорему и применить к ней произвольное преобразование, — то получится верное утверждение, но с такой корявой формулировкой, что у него будет мало шансов остаться в «храме науки». Подумайте, например, во что превратится теорема о пересечении биссектрис, если сделать осевое растяжение. Как объяснить, в какую прямую перейдет биссектриса? Клейн объясняет, что важно, напротив, понять, какие из преобразований утверждения не меняют, подобрать преобразования, максимально упрощающие картину, и доказать утверждение в полученной (более простой) форме. Вот традиционный пример. Аффинным преобразованием любой треугольник можно превратить в равносторонний, и поскольку в теореме о точке пересечения медиан речь идет о соотношении между аффинными инвариантами, то эту теорему достаточно проверить для равностороннего треугольника (что уже очень просто).

Эти соображения позволяют уточнить рецепт Шаля. Пусть подмечено некоторое соотношение между аффинными инвариантами в равностороннем треугольнике единичной площади: например, пусть λ — площадь шестиугольника, образованного «тридианами» — прямыми, соединяющими вершины треугольника с точками, делящими противоположную сторону на три равные части. Тогда *в любом* треугольнике отношение площади шестиугольника, образованного тридианами, к площади всего треугольника равно λ. Теперь вы легко можете придумать другие теоремы такого рода.

Один из важнейших моментов в рассуждениях Клейна — это выяснение взаимоотношения между геометриями, связанными с группами G_1, и G_2, если $G_1 \subset G_2$. (Говорят, что G_1 — подгруппа группы G_2.) У большей группы G_2 меньше инвариантов, чем у G_1, и все теоремы, связанные с группой G_2, верны и для геометрии, связанной с меньшей группой G_1.

Поэтому в каждой конкретной геометрии важно найти такие утверждения, которые останутся справедливыми и для геометрий с более широкими группами преобразований. Иногда возможность «перенесения» утверждения в геометрию с более широкой группой преобразований становится ясной лишь после переработки формулировки утверждения.

Идеология Кэли на языке эрлангенской программы состоит в том, что можно двигаться обратным путем, рассматривая группу преобразований, сохраняющих некоторый фиксированный объект. При этом часто инварианты для подгруппы можно конструировать при помощи инвариантов для группы (расстояния в евклидовой и неевклидовых геометриях — при помощи двойного отношения).

Инварианты для большей группы и соотношения между ними обычно описывать проще. В частности, для проективной группы задачу нахождения инвариантов можно сделать полностью алгебраической и решить.

«Эрлангенская программа» завершила «золотой век» классической геометрии. Число новых геометрий возрастает; постепенно геометрический язык пронизывает значительную часть математики. «Классическая геометрия переросла себя и из живой самостоятельной науки превратилась в универсальный язык современной математики, обладающий исключительной гибкостью и удобством» (Н. Бурбаки).

Экстерн в школе Римана. После «Эрлангенской программы» Клейн обращается к теории алгебраических функций — области, в которой работали Гаусс, Лежандр, Абель, Якоби, Вейерштрасс, Риман. Наиболее близкими Клейну оказались идеи Римана (1826–1866), с которым он не был лично знаком. По словам Клейна, он был «экстерном в школе Римана, ⟨...⟩ а экстерны, как известно, если берутся за какое-нибудь дело, то работают с особенным рвением, ибо к работе их побуждает только глубокий интерес». Позднее Клейн писал, что видел свою задачу в сочетании Римана с Галуа, — то есть в проникновении теории групп в геометрическую теорию функций комплексного переменного. По собственному мнению Клейна, это была главная область его научной деятельности.

К сожалению, об этой деятельности Клейна рассказать мы не сумеем, поскольку здесь уже нужно требовать от читателя специальных знаний, далеко выходящих за рамки школьной программы. Но все же об одном обстоятельстве мы упомянем.

Клейн занимался так называемой *проблемой униформизации.*

Рассматривая важные частные случаи, он надеялся со временем разобраться и с общей задачей. Но в 1881 году Клейн обнаружил серию статей никому не известного французского математика Анри Пуанкаре (1854 – 1912), который по существу проблему униформизации решил[1]. Это драматическое событие Клейн встретил достойно. Он начал переписку с Пуанкаре; они обменялись 26 письмами. Клейн, уже известный математик (хотя только на 5 лет старший Пуанкаре), выступает в роли очень тактичного учителя. Он знакомит Пуанкаре с теорией Римана, о которой тот не имел представления, но мгновенно усвоил. Клейн решается на соревнование с Пуанкаре: улучшает доказательство основного результата и намечает его обобщение. Эта история окончилась для Клейна печально: «Цена, которую мне пришлось заплатить за мои работы, была во всяком случае очень велика, так как мое здоровье оказалось совершенно расшатанным ... Только к осени 1884 года положение несколько улучшилось, но прежней степени творческой активности я уже не достиг никогда ... Моя собственная творческая деятельность в области теоретической математики закончилась в 1882 году».

Последние 40 лет. Начиная с 1886 года Клейн работает в Геттингене. Благодаря Клейну этот город превратился в подлинную столицу математики. По его инициативе в Геттинген приглашаются талантливые молодые математики (среди них — Гильберт). Клейн никогда не переставал интересоваться новыми идеями. Его лекционные курсы, частично записанные и изданные, посвящены самым разным областям математики, механики, физики. Многогранна организационная и общественная деятельность Клейна. 50 лет руководил он изданием одного из основных математических журналов «Mathematische Annalen». Своеобразной лебединой песней Клейна были его «Лекции о развитии математики в XIX столетии», читанные в 1914–1919 годах и изданные посмертно его учениками Курантом и Нейгебауэром. Приведем выдержку из их предисловия: «Эти лекции являются зрелым плодом богатой жизни, проведенной в центре научных событий, вы-

[1] Общая проблема униформизации еще фигурировала в числе проблем Гильберта (1900 г.) и была полностью решена в 1907 году независимо Пуанкаре и Кёбе.

ражением проникновенной мудрости и глубокого исторического понимания, высокой человеческой культуры и мастерского дара изложения».

Значительную часть времени и сил тратил Клейн на разработку проблем школьного преподавания математики и подготовку учителей, чем, вероятно, до него не занимался ни один математик такого масштаба. «Вряд ли есть предмет, — писал Клейн, — в преподавании которого царила бы такая рутина, как в преподавании математики. Курс элементарной математики вылился в определенные рамки и точно замер раз навсегда в установившихся пределах. Время от времени по тому или иному поводу одни задачи заменяются другими, исключаются одни параграфы и вводятся другие; но по существу на всем материале школьной математики это почти не отражается. Новые учебники алгебры носят отпечаток алгебры Эйлера, как новые учебники геометрии отпечаток геометрии Лежандра. Можно подумать, что математика — мертвая наука, что в ней ничто не меняется, что в этой области знания нет новых идей, по крайней мере таких, которые могли бы сделаться достоянием неспециалистов, предметом общего образования».

Клейн стремится учесть в преподавании состояние современной науки, связь математики и физики. Он рекомендует систематически пользоваться преобразованиями в геометрии, отказаться от традиционного разбиения школьной математики на предметы. Школьный курс должен быть пронизан понятием функции; тщательно продумываются пути воспитания у учеников «функционального мышления». Изложение геометрии, по мнению Клейна, должно начинаться в неаксиоматическом варианте, а аксиоматический метод должен появляться уже тогда, когда ученики в состоянии его осознать.

С большим тактом поддерживал Клейн контакты с людьми, занимающимися школьной математикой, четко ограничив круг своей компетенции, никогда не вмешиваясь в вопросы, требовавшие опыта непосредственной работы в школе. Клейн читал лекции для учителей, которые частично изданы. Наиболее известна его «Элементарная математика с точки зрения высшей». Это не лекции по методике математики и не расширенный курс школьной математики. «Я хочу, чтобы настоящая книга оказалась полезной тем, что побудит иного учителя нашей средней школы к самостоятельному размышлению о новом, более целесообразном изложении того учебного материала, который он преподает. Исключительно с такой точки зрения надо смотреть на мою книгу, а не считать ее готовым учебным планом; разработку последнего я всецело предоставляю тем, кто работает в школе. Если кто-нибудь предполагает, что я иначе понимал свою деятельность, то это недоразумение» (Клейн).