ЖОЗЕФ ЛУИ ЛАГРАНЖ

Я занимаюсь геометрией спокойно и в тишине. А так как меня никто и ничто не торопит, то я работаю больше для моего удовольствия, нежели по должности; я похож на вельмож-охотников строиться: я строю, ломаю, перестраиваю до тех пор, пока не выйдет что-нибудь такое, чем я останусь доволен.
Лагранж

Письмо из Турина. В августе 1755 г. великий Эйлер (1707 – 1783) получил из Турина письмо от 19-летнего Лагранжа, который и прежде писал ему. У Эйлера, несомненно, уже успело сложиться мнение, что его корреспондент является талантливым зрелым математиком, несмотря на его молодость. И все же содержание последнего письма поразило ученого.

С конца XVII века внимание математиков все более привлекали задачи, которые сейчас принято называть вариационными, а тогда обычно называли изопериметрическими. Все началось с поставленной Иоганном Бернулли (1664 – 1748) задачи о брахистохроне — кривой наибыстрейшего спуска между двумя точками. Впрочем, задачи о кривых, обладающих теми или иными свойствами максимума-минимума, возникали и раньше: окружность при заданной длине ограничивает фигуру наибольшей площади (изопериметрическое свойство, отсюда и название класса задач), прямая — кратчайшее расстояние между точками и т. д. Число таких задач росло, математики с удовольствием решали их, подбирая свой «ключ с секретом» к каждой из них.

Однако стиль эпохи расцвета дифференциального и интегрального исчисления требовал попытаться найти *общий* метод, развить исчисление для решения изопериметрических задач. Замечательные математики, которые занимались этими задачами, интуитивно ощущали общие моменты в их решении. Многое сделал Якоб Бернулли (1654 – 1705). И все же картина оставалась

Жозеф Луи Лагранж

достаточно пестрой и для создания общего метода предстояло много поработать.

Эйлеру было в точности 19 лет, когда его учитель И. Бернулли поставил ему задачу о брахистохроне в среде с сопротивлением. Потом еще добавилась задача о кратчайших («геодезических») линиях на поверхностях. Вариационные задачи постоянно в поле зрения у Эйлера, и к 1732 г. у него выкристаллизовался общий метод решения таких задач. Еще 12 лет ушло на совершенствование метода, и в 1744 г. выходит итоговый мемуар о решении «изопериметрических задач в самом широком смысле». Метод иллюстрируется на решении более 60 самых разнообразных задач.

Сегодня мы ясно понимаем, в чем была трудность в решении вариационных задач: в некотором смысле они были преждевременны в анализе XVIII века. В то время аналитики занимались в основном функциями от одного переменного, в меньшей степени функциями от нескольких переменных. Однако кривые, фигурирующие в вариационных задачах, не характеризуются конечным набором параметров. Фактически эти задачи имеют дело с функциями от бесконечного числа переменных, а это уже вотчина анализа XX века (функционального анализа).

Основное наблюдение Эйлера состояло в том, что кривые, являющиеся решениями изопериметрических задач, отвечают решениям некоторых дифференциальных уравнений. В выводе этих уравнений Эйлер и видит основную задачу. Он действует очень осторожно, чтобы остаться в рамках привычного анализа: заменяет кривые ломаными (ведь они зависят от конечного числа параметров, характеризующих вершины) и следит за изменением фигурирующей в задаче величины при изменении только одной вершины. Искомое дифференциальное уравнение получается, но путь к нему достаточно тернист. Как напишет Деламбр (1749 – 1822; не путать с Даламбером!), верный друг и биограф Лагранжа, этот метод «не обладал всей той простотой, которая желательна в вопросе чистого анализа».

Эти слова, вероятно, отражают мнение Лагранжа. С решительностью, присущей молодости, он отваживается провести полностью схему, разработанную для функций, когда рассматривается главная линейная часть df приращения функции $f(x)$, отвечающая приращению dx аргумента x, и ищутся x, в которых $df(x) = 0$. Он рассматривает функции от кривых — функционалы (разумеется, специального вида) $I(l)$, не пугаясь, что фактически это функции от бесконечного числа переменных; для фиксированной кривой l рассматривает произвольное малое «возмущение» δl, определяет главную часть соответствующего приращения функционала — δI и для определения кривых, на которых $\delta I = 0$, получает дифференциальное уравнение, к которому Эйлер шел кружным путем, и которое ныне называется уравнением Эйлера–Лагранжа. Заметим, что Лагранж предусмотрительно вводит новое обозначение δ, которое похоже на обозначение дифференциала d, но отличается от него. Удачно введенное обозначение очень помогало делу.

Короткой информации Эйлеру было достаточно, чтобы оценить все преимущества усовершенствований Лагранжа. Начинается оживленная переписка, высокая оценка великого ученого окрылила начинающего математика. В письмах обсуждаются все усложняющиеся постановки задач: ведь сила нового метода должна быть продемонстрирована на решении новых задач, недоступных старой технике. Письмо Лагранжа возродило и у самого Эйлера интерес к экстремальным задачам. Уже в 1756 г. он делает в Берлинской академии два сообщения, связанные с методом Лагранжа. В том же году Лагранж по представлению Эйлера был избран иностранным членом этой академии — редкая честь для молодого ученого, который еще не успел опубликовать своих трудов (впрочем, в то время такому избранию придавали меньше значения, чем в наши дни).

Эйлер не спешит публиковать свои новые результаты, предоставляя своему молодому коллеге не торопясь подготовить к печати свою работу. Он разъясняет свою позицию в письме от

10 октября 1759 г.: «Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, чего только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после первых моих попыток я занимался едва ли не один, доведена тобой до величайшего совершенства. Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение. Я, однако, решил скрывать это, пока ты не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать у тебя часть заслуженной тобой славы». Замечательный пример научной этики!

Письмо Эйлера добавило решимости Лагранжу опубликовать сделанное, и во II томе «Туринских записок» за 1761 – 1762 гг. появляется его мемуар «Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных формул». В 1764 г. публикует свои результаты и Эйлер, предваряя публикацию словами: «После того как я долго и бесплодно трудился над решением этого вопроса, я с удивлением увидал, что в „Туринских записках“ задача эта решена столь же легко, как и счастливо. Это прекрасное открытие вызвало у меня тем большее восхищение, что оно значительно отличается от данных мною методов и значительно их превосходит по простоте». Несколько удивляет, что Эйлер не упоминает предшествовавшей переписки. Эйлер предлагает называть новый метод «вариационным исчислением» по аналогии с дифференциальным исчислением (δI называется вариацией).

Таким был научный дебют Лагранжа. В одном отношении он уникален. Известны и другие примеры, когда великие математики получали первые крупные результаты в том же возрасте, что и Лагранж. Однако при этом речь шла обычно о решении конкретных задач. Интерес же к совершенствованию метода как такового приходит с годами. Мы же видим, что уже в первой работе Лагранжа проявилось то, что будет всегда отличать его в дальнейшем: полное прояснение ситуации, совершенствование метода, поиск первопричины ценится выше конкретных задач.

Джузеппе Луиджи. Мы рассказали о первой великой работе Лагранжа, но все же стоит сказать несколько слов о более ранних событиях его жизни. Жозеф Луи Лагранж родился 25 января

1736 г. в Турине, в Италии. Впрочем, на родине его называли Джузеппе Луиджи. Его прадед приехал из Франции и поступил на службу к герцогу Савойскому, а дед и отец продолжали служить в должности казначея фабрик и строений. К рождению будущего математика семья разорилась. «Если бы я был богат, я, вероятно, не достиг бы моего положения в математике; а в какой другой деятельности я добился бы тех же успехов?» — говорил впоследствии ученый. Впрочем, поначалу семейные планы предназначали Жозефу Луи карьеру адвоката, и в 14 лет он определяется в Туринский университет. Однако вскоре он перешел в Артиллерийскую школу, что было связано с усилившимся интересом к математике. В 19 лет он — профессор математики в этой школе (по некоторым сведениям, еще раньше).

Первые попытки открыть новое в математике привели Лагранжа к открытию уже известного. Контакты с исключительно оригинальным итальянским математиком графом ди Фаньяно (1682 – 1766) помогли юноше понять, что серьезное изучение современной математики должно предшествовать самостоятельной работе. И мы видели, что первые результаты Лагранжа — это не счастливая находка юного дилетанта, а результат напряженной работы сложившегося профессионала. Умение всесторонне и критически осмысливать и перерабатывать предшествующий опыт отличало научную деятельность Лагранжа с первых его шагов.

Вокруг Лагранжа сложился кружок молодых математиков и физиков, который позднее преобразовался в Туринскую академию наук. С 1759 г. начинают выходить «Философско-математические сборники частного Туринского научного общества», которые привыкли называть просто «Туринскими записками». Мы уже говорили, что во II томе записок появился мемуар Лагранжа о вариационном исчислении, а I том содержал две его работы, в том числе статью «Исследование о природе распространения звука». В математическом плане здесь очень поучительны комментарии к задаче о колебании струны. В 1747 – 48 гг. эта задача была рассмотрена тремя крупнейшими математиками того времени Даламбером (1707 – 1783), Эйлером и Даниилом Бернулли (1700 – 1782). Между их толкованиями были существенные расхождения. Даламбер, первым решивший уравнение струны, считал, что начальное положение должно описываться функцией с единым аналитическим выражением (еще не было ясно, что это значит). Эйлер же настаивал, что эта функция может быть совершенно произвольной (как бы мы сказали, непрерывной), и это был первый случай, когда в анализе появились функции общего вида, задаваемые графиками, а не аналитическими выражениями. Наконец, Бернулли рассматривал гармонические колебания с разными частотами и утверждал, что что произвольное колебание разлагается в бесконечную суперпозицию гармонических колебаний, во что не верили ни Даламбер, ни Эйлер.

Лагранж придумывает остроумный прием, рассматривая струну постоянной плотности как предел невесомых струн с равномерно распределенными одинаковыми грузами в конечном числе. Вопрос о колебаниях такой струны с грузиками рассматривается элементарно. Делая предельный переход, Лагранж подтверждает мнение Эйлера. Позднее, повторяя это рассуждение в «Аналитической механике», он вспоминал: «Этим именно путем я в первом томе „Туринских записок“ доказал правильность построения Эйлера, которое не было достаточно обосновано». Вскоре Лагранж имел еще одну возможность убедиться в том, насколько прав был Эйлер, настаивая на необходимости пользоваться в анализе общими (неаналитическими) функциями: при изучении движения воздуха в трубах постоянного сечения возникали кривые, которые в некоторой точке превращаются в прямые («смешанные» функции, по терминологии Эйлера). Те же рассмотрения с предельным переходом убедили Лагранжа в правоте Бернулли; он был близок к доказательству возможности разложить произвольную функцию по гармоникам (в ряд Фурье), но точного доказательства пришлось ждать еще сорок лет.

Мы уже видели, какое одобрение у Эйлера получили первые работы Лагранжа. Работа о струне заставила обратить на него внимание другого из его великих современников — Даламбера: «До свидания, сударь, Вы достойны, если я не ошибаюсь, играть великую роль в науках, и я аплодирую началу Вашего успеха». Как скажет Деламбр, «среди этих знаменитейших геометров внезапно выступает двадцатитрехлетний молодой человек, при том не только как им равный, но как арбитр между ними, который, чтобы прекратить трудную борьбу, указывает каждому из них, в чем он прав и в чем он ошибается, исправляет эти ошибки и дает истинное решение, которое хотя и было предугадано, но не могло быть получено». Это наблюдение точно передает стиль статьи Лагранжа, а письма к нему Эйлера и Даламбера в самом деле отражают готовность воспринимать Лагранжа как арбитра.

Основания статики. Лагранж был душой Туринского кружка. Опубликованные в «Туринских записках» статьи его товарищей несут отчетливый след сильного влияния Лагранжа. Особенно это относится к статье Фонсене, который был, по-видимому, лишь соучастником предпринятого Лагранжем систематического продумывания основ механики. Потом с сюжета этой статьи начнется его знаменитая «Аналитическая механика», и он очень выразительно демонстрирует, как основательно Лагранж взялся за дело.

Речь идет о сопоставлении двух важнейших начал статики: принципа рычага и принципа сложения сил, приложенных к одной точке. Архимед положил в основу этой теории рычага аксиому о равновесии рычага с равными плечами и грузами и о двойной нагрузке на точку опоры в этой ситуации. Многие авторы пытались уточнить и дополнить рассуждения Архимеда, но они, по словам Лагранжа, «нарушив простоту, $\langle\ldots\rangle$ почти ничего не выиграли с точки зрения точности». Лагранж отмечает, что первую часть аксиомы естественно считать очевидной из соображений симметрии: «нельзя усмотреть основания, в силу которого один груз перетянул бы другой». Он, однако, не видит никаких логических оснований к тому, что нагрузка на точку опоры при этом должна быть равна обязательно сумме весов грузов: «по-видимому, все механики рассматривали это допущение как результат повседневного наблюдения, которое учит нас, что тяжесть тела зависит только от его массы, но ни в какой мере не зависит от его формы». Лагранж предлагает вывод второй половины аксиомы Архимеда из первой. Он рассматривает однородную треугольную пластину ABC, где основание AB равнобедренного треугольника горизонтально. Вершины A, B нагружаются равными грузами P, а вершина C — грузом $2P$. Пластина опирается на среднюю линию MN, параллельную AB (рис. 31). Она будет находиться в равновесии, что следует из рассмотрения пары рычагов AC, CB с точками опоры M, N в силу первой части аксиомы Архимеда. Но тогда в равновесии будет и рычаг CF, где F — середина AB, точка опоры E — середина CF (в ней пересекаются MN и CF). Значит, нагрузка в точке F должна быть равна грузу $2P$ в точке C (строго говоря, здесь применяется обращение первой части аксиомы Архимеда, которое легко выводится), а это в точности нагрузка на точку опоры в рычаге AB. Лагранж аккуратно отмечает, что прием с рассмотрением равновесия плоской пластины относительно стержня он почерпнул у Гюйгенса.

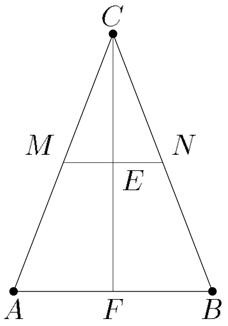

Рис. 31.

Далее, Лагранж рассматривает принцип сложения сил, приложенных к одной точке, который легко обосновывается при помощи рассмотрения сложения движений. Существенная разница в принципах состоит в том, что в одном случае силы прикладываются к разным точкам, а в другом — к одной. Тем не менее многие утверждения статики можно выводить как из одного принципа, так и из другого. Возникает желание вообще отказаться от принятия принципа рычага за аксиому, но Лагранжа настораживает, что все известные выводы аксиомы Архимеда из закона сложения сил весьма искусственные: «...хотя, строго говоря, оба принципа рычага и сложения движений всегда приводят к одним и тем же результатам, интересно отметить, что наиболее простой случай для одного из этих принципов становится наиболее сложным для другого».

Интуиция позволила Лагранжу безошибочно обнаружить тонкое место, хотя он и не смог до конца объяснить его. Оно связано с взаимоотношением механики и геометрии. Дело в том, что закон сложения сил, приложенных к одной точке, не зависит от аксиомы параллельных, в то время как в пространстве Лобачевского нагрузка на точку опоры рычага всегда превышает сумму весов приложенных грузов. В выводе второй половины аксиомы Архимеда используется утверждение о том, что высота равнобедренного треугольника пересекается со средней линией в ее середине, что опирается на аксиому параллельных и неверно в геометрии Лобачевского. По-видимому, Лагранж еще не знал этого, хотя известно, что он размышлял над проблемой пятого постулата.

Принцип наименьшего действия. Во II томе «Туринских записок» вслед за мемуаром о вариационном исчислении была помещена статья Лагранжа «Приложение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, для решения различных задач динамики». И здесь Лагранж следует по стопам Эйлера. В 1744 г. Мопертюи (1698 – 1759) сформулировал очень общий и туманный принцип, согласно которому все в природе, включая механическое движение, происходит так, чтобы некоторая величина — действие — достигала своего минимального значения. Эйлер для случая движения точки в центральном поле превратил это неопределенное утверждение в совершенно точное, определив действие в этом случае как интеграл скорости по пути $\int v\,ds$. Лагранж обобщил принцип Эйлера на случай произвольной системы точек, между которыми имеются связи, и которые взаимодействуют произвольным образом. Определив действие в этой общей ситуации, Лагранж, пользуясь разработанной им техникой вариационного исчисления, решает разнообразные задачи динамики, включая гидродинамику. У него нет сомнений, что при помощи этого принципа можно построить все здание механики. В «Аналитической механике» он напишет: «Таков тот принцип, которому, хоть и не вполне точно, я даю название *принцип наименьшего действия* и на который я смотрю не как на метафизический принцип, а как на простой и общий вывод законов механики. Во втором томе „Туринских записок“ можно увидеть применение, которое я дал ему для разрешения многих трудных проблем механики. Это принцип, будучи соединен с принципом живых сил и развит по правилам вариационного исчисления, даст тотчас же все уравнения, необходимые для решения каждой проблемы».

Как напишет Фурье (1768 — 1830), «Он сводит все законы равновесия и движения к одному принципу и, что не менее удивительно, он их подчиняет одному методу исчисления, изобретателем которого он сам является».

Первые астрономические работы. Мы видим, что деятельность Лагранжа начала развиваться в рамках традиционных для математики XVIII века вопросов, проблематики, находившейся в сфере интересов его старших современников Эйлера и Даламбера. Логика эпохи неминуемо должна была привести его к необходимости попробовать свои силы в небесной механике. Не было более животрепещущей проблемы, чем проблема согласования наблюдаемого движения небесных тел с законом всемирного тяготения. Было необходимо выяснить, с одной стороны, объяснимы ли в рамках этого закона несомненные отклонения от законов Кеплера, как тогда говорили, «неравенства», с другой стороны — чем вызваны различные дополнительные закономерности в небесной механике. Например, почему мы наблюдаем только одну сторону Луны? Объяснение этого феномена Парижская Академия наук выбирает в качестве темы для своей премии за 1764 г.

Надо сказать, что темы для академических премий в Париже выбирались с большим вкусом, а получение такой премии математиком, особенно молодым, было очень престижным. Работа

Лагранжа удостаивается первой премии и восторженного отзыва Даламбера: «Я прочел с большим удовольствием плоды Ваших прекрасных работ о либрации, они достойны премии, которую Вам вручат».

Собственно законы движения Луны были очень точно выведены из наблюдений Кассини (1626 – 1712): ось вращения Луны неподвижна относительно поверхности, период вращения и период обращения вокруг Земли совпадают, ось вращения имеет постоянный угол с плоскостью эклиптики (земной орбиты) и, наконец, оси вращения Луны, эклиптики и лунной орбиты находятся в одной плоскости. Лагранж показывает, что из-за того, что поверхность Луны отклоняется от сферической, притяжение Земли постепенно выравнивает периоды собственного вращения Луны и вращения вокруг Земли. Лагранж близко подходит к объяснению последнего закона Кассини, что не удавалось прежде Даламберу, но ошибается в оценках. Лишь в 1780 г. ему окончательно удается обосновать теорию Кассини.

Объяснение неравенств в движении спутников Юпитера выбирается в качестве темы Парижской Академии наук за 1766 г. Решение аналогичных вопросов для Луны принесло в свое время славу Клеро (1713 – 1768) и Даламберу. В случае спутников Юпитера возникают дополнительные сложности, в частности, из-за того, что спутников несколько, а также из-за близости Сатурна. Эйлер удивлялся, что Лагранж смог справиться с этой задачей в работе, получившей премию: «Иррациональная формула, выражающая расстояние от Юпитера до Сатурна, не может быть представлена достаточно сходящимся рядом, и в этом состоит основное препятствие. Я сильно сомневаюсь, чтобы его можно было преодолеть ... Сейчас мне тем более интересно знать, каким образом г-н Лагранж преодолел те же трудности в своей работе, получившей премию, и так как я не имею оснований сомневаться в успешности его решений, то можно льстить себя надеждой, что теоретическая астрономия в настоящее время доведена до наивысшей степени совершенства». Когда через 24 года Лаплас (1749 – 1827) вернулся к проблеме спутников Юпитера, чтобы закончить начатое Лагранжем, он с восхищением говорил о результатах своего предшественника, полученных при помощи «возвышенного (sublime) анализа».

Посещение Парижа. В 1766 г. Лагранжу исполнилось 30 лет. Это был важный рубеж в его жизни. Провинциальный Турин становился тесен для научной деятельности Лагранжа. В личной жизни он был непритязателен, отличался слабым здоровьем, его скромность в общении с людьми нередко приобретала форму застенчивости и даже нелюдимости. Но общение с коллегами он умел ценить и использовать. Поначалу его удовлетворяли контакты с товарищами по туринскому кружку, в работу которых он вкладывал много сил и души, но этих своих коллег он давно перерос. Не было у него систематических контактов с Фаньяно, который был стар, а в 1766 г. умер. Он вел обширную переписку, но как много дает непосредственное общение с учеными, Лагранж имел возможность убедиться во время поездки в Париж в 1755 г. Лагранж сопровождал своего друга Карачиоли, назначенного посланником в Лондон. Впрочем, до Лондона Лагранж не доехал. «Опасно заболев после обеда у аббата Нолле, на котором Нолле угощал его кушаньями, приготовленными на итальянский лад, Лагранж не мог поехать в Лондон, а остался для лечения в Париже и по выздоровлении поспешил вернуться в Турин», — вспоминал Деламбр.

Дело было в том, что в северной Италии для приготовления пищи используют касторовое масло, предварительно сильно прожаренное. На кухне у Нолле, где решили приготовить обед «на итальянский лад», воспользовались касторовым маслом без необходимой подготовки, и оно в полной мере проявило свои известные лекарственные свойства. Однако в научном плане болезнь была плодотворной. Лагранж много общается с крупнейшими французскими математиками Даламбером (1717 – 1783), Клеро, Кондорсе (1743 – 1794), но и среди менее знаменитых ученых были такие, которые остались его друзьями на всю жизнь. Лагранж неоднократно повторял, что эти полгода, проведенные в Париже, были самым счастливым периодом в его жизни.

В 1766 г. Эйлер уезжает из Берлина в Петербург, освободив место директора физико-математического класса Берлинской академии наук. Он предлагает Фридриху II в качестве своего преемника Лагранжа. Эта кандидатура была энергично поддержана Даламбером, с мнением которого король считался в еще большей степени. Лагранжу было послано приглашение с выразительной мотивировкой: «необходимо, чтобы величайший геометр Европы проживал вблизи величайшего из королей». Быть может, в отношении себя Фридрих был прав, но вряд ли при живых и работающих Эйлере и Даламбере Лагранж воспринимался как величайший геометр Европы. Вероятно, король несколько успокаивал свое уязвленное самолюбие, поскольку он не смог заполучить в свою академию Даламбера и должен был расстаться с Эйлером.

И все же несомненно, что к своему тридцатилетию Лагранж был допущен на математический Олимп. Он уже сложился как математик; основы всего, что он будет делать, были заложены, стал ясен стиль его занятий, его сильные и слабые стороны. Лагранж начал свою математическую жизнь как ученик Эйлера и Даламбера в самом высоком смысле этого слова. Он продолжал разрабатывать начатые ими проблемы, находить в них новые ракурсы, неведомые его учителям. Их восхищение было тому свидетельством. Своеобразно преломилось у Лагранжа творчество его учителей: он усваивает постановки задач, почти угаданные гениальной интуицией Эйлера, разрабатывает их до полной ясности, оттачивая необходимые понятия и технические средства, что было скорее характерно для Даламбера. И в дальнейшем сила Лагранжа будет прежде всего не в открытии новых путей, но в поразительной способности углубить, прояснить, дополнить единственно нужными штрихами картину, которую до него пытались нарисовать другие. И никакие трудности на этом пути Лагранжу не были страшны.

Лагранж в Берлине. Том «Туринских записок» за 1766 – 69 гг. еще содержит работу Лагранжа, восхитившую Эйлера: он сделал совершенно ясной природу некогда угаданной Эйлером формулы для сложения эллиптических интегралов. И, как было уже однажды, Эйлер с энтузиазмом возвращается к уже оставленному сюжету. А уже в ноябре 1766 г. Лагранж в Берлине, хотя король Сардинии неохотно расстался с ученым. Лагранж оказался в Академии не в лучшие ее дни. Здесь не было ни Эйлера, ни Даламбера, ни Мопертюи. Однако здесь работал очень оригинальный математик Ламберт (1728 – 1777), доказавший в частности, иррациональность числа π. У Лагранжа и Ламберта много точек соприкосновения в математике, чем-то они напоминают друг друга и по-человечески. Их дружба продолжалась десять лет до смерти Ламберта и была очень существенна для них обоих. Нелегко было замкнутому Лагранжу приспособиться к жизни прусского двора. Но он, в отличие от Эйлера, смог это сделать и избежать конфликтов. Лагранж ведет размеренную жизнь: внешние обязанности, встречи, переписка занимают большую часть дня, но весь вечер после обязательной прогулки отдан занятиям наукой в тишине, за закрытыми дверями. Лагранж женился и в связи с этим произошел обмен письмами с Даламбером. Даламбер: «Я узнал, что Вы сделали опасный скачок. Великий геометр должен прежде всего вычислить свое счастье. Я думаю, что результатом вычисления не было бы супружество». Лагранж: «Я не знаю, хорошо ли, худо ли я вычислил, или лучше — я совсем не вычислял, потому что я поступил бы как Лейбниц, который не мог решиться на женитьбу. Признаюсь, что я никогда не имел склонности к супружеству ⟨...⟩ надо было сделать добро одной из моих родственниц; надо было, чтобы кто-нибудь имел попечение обо мне и моих делах». Но вышло так, что Лагранжу вскоре пришлось ухаживать за женой, умиравшей от туберкулеза, и он безупречно выполнял свой долг.

«Аналитическая механика». Лагранж провел в Берлине чуть больше двадцати лет. Это была пора его зрелости, самый продуктивный период его жизни. Есть несколько великих ученых, в наследии которых есть одна главная книга («Начала» у Ньютона, «Маятниковые часы» у Гюйгенса). У Лагранжа такой книгой была «Аналитическая механика». Она вышла в 1788 году, когда Лагранж был уже в Париже. Но она вобрала в себя то главное, что было сделано в Берлине, а задумано еще в Турине.

Замысел книги лучше всего усвоить из слов самого автора: «Имеется уже несколько руководств по механике, но план этого сочинения совершенно новый. Я имел в виду привести всю теорию этой науки и искусство решения относящихся к ней задач к общим формулам, простое развитие которых давало бы все необходимые для решения всякой задачи уравнения. Я надеюсь, что тот способ, которым я старался этого достигнуть, не оставит желать ничего большего». «Это сочинение, кроме того, будет полезно и в другом отношении: оно объединит и представит с общей точки зрения различные до сих пор уже найденные принципы, служащие для решения вопросов механики, покажет их взаимную связь и зависимость и даст возможность иметь суждение об их верности и области их применимости.» Далее, об особенностях изложения: «В этом сочинении нет чертежей. Методы, в нем излагаемые, не требуют ни геометрических построений, ни механических рассуждений, для них требуются лишь алгебраические операции, подчиненные правильному и однообразному ходу. Любители анализа с удовольствием увидят, что механика становится новою его отраслью, и будут мне признательны за такое расширение его области».

Итак, коротко говоря, Лагранж собирается показать, что чисто аналитических процедур достаточно для решения механических задач (чтобы подчеркнуть это, Лагранж демонстративно не пользуется чертежами), что можно предложить «однообразные» (как мы бы сказали сегодня, алгоритмические) правила рассмотрения таких задач и что имеются простые общие принципы, на которых вся механика может быть построена. Насколько оригинальной была эта точка зрения? Можно вспомнить, что Эйлер был первым, кто в своей «Механике» 1736 г. отказался от чисто геометрических рассмотрений Ньютона в пользу аналитического метода, основанного на рассмотрении изменения координат и систем дифференциальных уравнений (Лагранж называет эту книгу «первой большой работой, в которой к учению о движении был применен анализ»). С другой стороны, вышедшая в 1743 г. «Динамика» Даламбера предваряется словами: «В настоящем сочинении я поставил себе двойную цель: расширить рамки механики и сделать подход к этой науке гладким и ровным … Одним словом, я стремился расширить область применения принципов, сокращая в то же время их число». И Лагранж очень высоко оценил трактат Даламбера: «…в нем предложен прямой и общий метод, с помощью которого можно разрешить, или во всяком случае выразить в виде уравнений, все проблемы механики, какие только можно представить».

В чем же тогда новизна задуманного Лагранжем? В том, что он последовательно довел до конца намеченное его предшественниками, превратил их замечательные этюды в универсальный рабочий аппарат. Он достаточно скромно оценивает свою программу и ни в коей мере не сопоставляет себя с Ньютоном, «на долю которого выпало счастье объяснить мировую систему». Лагранж тщательно изучает и излагает на страницах «Аналитической механики» предшествующие работы. Исторические страницы являются украшением книги. Впрочем, Лагранжу ставили в упрек, что в этот обзор попали определения основных механических понятий и они оказались недостаточно проработаны.

Итак, начало своей механики Лагранж «собирает» из того, что уже сделали другие. Механика делится на статику и динамику. Мы уже говорили о двух началах статики: принципах рычага и сложения движений. К ним еще присоединяется принцип виртуальных (возможных) скоростей (его теперь чаще называют принципом виртуальных перемещений или виртуальных работ), который восходит к Галилею и разрабатывался Стевином, братьями Бернулли, Даламбером. Принцип состоит в том, что в условиях равновесия равна нулю работа всех сил на любых бесконечно малых перемещениях, совместимых со связями, наложенными на элементы механической системы. Лагранж «лишь» записывает это условие в виде аналитического уравнения и стремится доказать не только работоспособность принципа, что уже было сделано другими, но прежде всего его универсальность, достаточность для обоснования всей статики. «Получив эту общую формулу, Лагранж с искусством, едва ли не ему одному присущим и, может быть, доселе непревзойденным, развивает из этой формулы общие свойства равновесия сил и дает решение главнейших задач статики...» (А. Н. Крылов). Очень поучительно также предложенное в книге обоснование принципа при помощи рассмотрения системы блоков.

Переходя к динамике, Лагранж эксплуатирует идею Даламбера о сведéнии динамики к статике. В несколько ином варианте ее на конкретных задачах разрабатывали Герман и Эйлер. Речь идет о том, что если отделить ту часть сил, которая не направлена на движение, а уравновешивается реакциями связей (Даламбер говорил о потерянных побуждениях к движению), то эти силы удовлетворяют условию на силы, под действием которых тело находится в равновесии. Исходя из этого Лагранж получает из основного уравнения для статики основное уравнение для динамики. Это эмоциональная вершина книги. Цель дальнейшего — продемонстрировать, что из основного уравнения (одной формулы!) может быть выведена вся механика.

Реализация этой программы начинается с вывода из основного уравнения всех «начал механики»: закона сохранения энергии, закона движения центра тяжести, принципа площадей. Кульминация этой части — вывод принципа наименьшего действия из основного уравнения. Лагранж понимает, что, в свою очередь, его уравнение можно вывести из принципа наименьшего действия, и, возможно, его более ранние планы состояли в построении аналитической механики на основе этого принципа. Сегодня именно этот способ построения наиболее распространен, Лагранж же предпочел начинать с основного уравнения. Возможно, здесь сыграли роль тактические соображения: современники еще не были готовы к восприятию вариационного изложения механики.

Следующая задача Лагранжа — научить работать с основным уравнением. Главное — учесть связи, наложенные на точки системы. По этой причине удобно перейти от декартовых координат точек, на которые наложены соотношения, к каким-то обобщенным координатам, которые уже могут меняться независимо. Это может быть угол отклонения маятника или широта и долгота точки, двигающейся по сфере. Лагранж показывает, что для произвольных независимых координат уравнение движения записывается через кинетическую энергию T и потенциальную энергию U системы, причем достаточно их разности $L = T - U$ — функции Лагранжа. Эти уравнения называют теперь уравнениями Лагранжа второго рода.

Уравнения первого рода относятся к случаю, когда связи не удается или нежелательно разрешать до конца, т. е. остается несколько уравнений на координаты. Лагранж показывает, как написать уравнения движения через уравнения связей, причем в эти уравнения входят величины, которые можно интерпретировать как силы реакции отдельных связей. Так впервые появились множители Лагранжа, вероятно, самый популярный элемент его математического наследия (мы еще поговорим о них ниже).

Основная часть книги посвящена реализации разработанной схемы для ряда важных конкретных ситуаций: малые колебания, движение тел под действием взаимного притяжения (в основном, небесная механика), несвободные движения (в частности, маятники), движение твердого тела.

Лагранж реалистически оценивает возможности разработанной им программы. У него нет иллюзии, что редукция механических задач к рассмотрению дифференциальных уравнений означает решение этих задач, поскольку «они (уравнения — *С. Г.*) требуют еще интегрирований, которые зачастую превышают возможности известного нам анализа». В связи с этим он разрабатывает приближенные методы и с большим вниманием относится к специальным случаям, когда интегрирование может быть явно осуществлено (это очень созвучно точке зрения современной математической физики).

Под таким углом зрения он, вслед за Эйлером, рассматривает задачу о вращении твердого тела — «волчка».

Лагранж был целеустремлен в доказательстве возможности превратить механику в главу анализа, вывести всю механику из простого общего принципа. Идея дедуктивного построения механики по образцу евклидовой геометрии не была новой. Недаром Ньютон назвал свою книгу «Началами», а свои законы — аксиомами. Но никто прежде не выполнял эту программу достаточно последовательно. Всякая последовательность сопряжена с самоограничениями, которые кажутся курьезными по прошествии времени, когда доказываемые предложения уже кажутся несомненными. В самом деле, зачем было Лагранжу совсем отказываться от чертежей или во всех рассмотрениях «вести родословную» от основного уравнения? Но такова логика развития науки.

Лучше других могли оценить Лагранжа те, кто продолжал его дело. Две стороны современной механики связаны с именами Лагранжа и Гамильтона (1805 – 1865). Вот что писал Гамильтон: «Лагранж, может быть, сделал больше, чем все другие аналитики, для того, чтобы придать широту и гармонию таким дедуктивным исследованиям, показав, что самые разнообразные следствия относительно движения системы тел могут быть выведены из одной основной формулы; красота разработанного таким образом метода, высокое качество результатов делают из этого великого произведения род научной поэмы».

Замечательная особенность конструкций Лагранжа заключалась в том, что они нашли применения далеко за пределами механики. Лагранжевы уравнения появились в теории электромагнетизма. Как напишет Пуанкаре, «Чтобы доказать возможность механического объяснения электричества, нет надобности искать это самое объяснение, достаточно составить лагранжевы функции T и U, представляющие обе составные части энергии, по ним составить лагранжевы уравнения и сличить затем, согласны ли эти уравнения с законами, получаемыми экспериментально».

Труд Лагранжа был образцом для Максвелла (1831 – 1879) при создании аналитической теории электричества: «Лагранж поставил себе цель свести динамику к чистому анализу. Он начинает с выражения элементарных динамических отношений между чисто алгебраическими величинами, и из полученных таким образом уравнений он выводит свои окончательные уравнения путем чисто алгебраического процесса. Некоторые величины (выражающие взаимодействия между частями системы, поставленными в зависимость между собой физическими связями) появляются в уравнениях движения составных частей систем, и исследование Лагранжа с математической точки зрения есть метод исключения этих величин из конечных уравнений. Следя за постепенным ходом этих исключений, мы занимаемся вычислениями, оставляя в стороне динамические идеи».

Особенно эффективным средством экспансии идей Лагранжа за пределы механики стал принцип наименьшего действия: «Все обратимые процессы, будь они по природе механического, электродинамического или термического характера, все они подчинены одному и тому же принципу, дающему однозначный ответ на все вопросы, касающиеся хода процесса. Этот закон не есть принцип сохранения энергии, который хотя и приложим ко всем явлениям, но определяет их ход неоднозначно; это принцип более общий — принцип наименьшего действия» (М. Планк).

Лагранж видел свое предназначение в создании универсального языка механики. Ради этого он в максимальной степени абстрагировался от специфики конкретных задач, столь привлекательных для его великих предшественников. Позднее Пуассон (1781 – 1840) писал: «Желательно, чтобы геометры пересмотрели основные вопросы механики с физической точки зрения. Для того, чтобы раскрыть законы движения и равновесия, их нужно было рассматривать с чисто отвлеченной точки зрения; и в направлении этих абстракций Лагранж пошел настолько далеко, насколько это можно себе представить, когда он заменил физические связи внутри тел уравнениями, связывающими координаты отдельных их точек; в этом и состоит сущность его аналитической механики. Но наряду с этой замечательной концепцией можно было бы воздвигнуть теперь физическую механику ...».

Насыщать свою схему конкретным физическим содержанием Лагранж предоставил последующим поколениям. Разработанный им метод оказался прямо приспособленным к решению задач техники, от которых он также полностью отвлекался при создании аналитической механики. А. Н. Крылов перечисляет непосредственно последовавшие применения лагранжевой механики: теория механизмов Понселе, инженерный расчет сооружений, в частности, больших железных мостов, потребовавшихся в связи с развитием железных дорог, баллистические задачи, возникающие с переходом от гладкоствольных к нарезным орудиям (после Крымской войны), теория гироскопов. Он заканчивает: «В 1805 году под Трафальгаром корабли Нельсона громили с дистанции пистолетного выстрела и сваливались на абордаж. Под Цусимой стрельба велась на дистанцию около 7 000 *м*, в Ютландском бою — на дистанцию от 14 000 до 18 000 *м*. С тех пор дальность боя орудий значительно увеличена, а при таких дальностях, чтобы достигнуть меткости, необходим целый ряд сложных гироскопических приборов — все они рассчитываются по лагранжевым уравнениям.

Таких примеров из техники и физики можно привести неисчислимое множество, но и сказанного достаточно, чтобы видеть то значение, которое имеет знаменитое сочинение Лагранжа в общем развитии науки и техники во всех их областях, и то, насколько Лагранж был прав, что, не останавливаясь на частностях, придал своему изложению самую общую аналитическую форму; поэтому его методы одинаково приложимы и к расчету движения небесных тел, и к качаниям корабля на волнении, и к расчету гребного винта на корабле, и к расчету полета 16-дюймового снаряда, и к расчету движения электронов в атоме. Отсюда можно судить о необыкновенной гениальности создателя этих методов — Жозефа Луи Лагранжа». Эти строки были написаны в 1936 г.

Небесная механика. Среди нескольких типов механических задач, рассмотренных Лагранжем, несомненный приоритет имели задачи небесной механики. Такова была система ценностей в математике XVIII века, и ни один крупный математик не мог пройти мимо задач, связанных с согласованием закона всемирного тяготения с результатами непосредственных астрономических наблюдений. Мы видели, что Лагранж начал заниматься этими задачами еще в Турине и он энергично продолжил эти занятия в Берлине. В поле зрения Лагранжа все основные проблемы небесной механики. Он разрабатывает технику вычисления элементов орбит планет и комет по трем наблюдениям. И вновь характерная деталь: разработка метода не сопровождается ни одним конкретным вычислением орбиты. Лагранж видит свою роль лишь в решении математической задачи, после чего метод передается в руки вычислителей: «Я воздержусь от всяких подробностей, но я льщу себя надеждой, что не найдется ни одного сколько-нибудь понятливого вычислителя, который не был бы в состоянии применить к комете теорию, изложенную в этом труде». Создается впечатление, что у Лагранжа не было вкуса к конкретным задачам. Метод, не опробованный на практике, разумеется, несмотря на всю его глубину, содержал слабые места. Существенная адаптация метода к практике связана с именем Гаусса (1777 – 1855), который постоянно вычислял орбиты, причем ему приходилось торопиться, чтобы наблюдатели успели найти потерянный астероид или чтобы его вычисления удалось использовать для непосредственного наблюдения кометы. И соответствующий метод, в существенном созданный Лагранжем, связывается с именем Гаусса.

Основная трудность заключалась в том, что, как выяснилось, достаточно точное описание движения небесных тел требует учета взаимодействия сразу нескольких тел: на движении Луны реально сказывается взаимодействие не только с Землей, но и с Солнцем, в движении больших планет Сатурна и Юпитера должно проявляться их взаимное притяжение. Более того, сопоставляя данные наблюдения, начиная с древних времен, удалось выявить устойчивые отклонения от законов Кеплера — «неравенства». Необходимо было выяснить, в самом ли деле эти «неравенства» объясняются в рамках закона всемирного тяготения «вмешательством» третьих тел. Пафос «Начал» Ньютона был не только в том, что он вывел законы Кеплера из закона всемирного тяготения, но и в том, что ему удалось в рамках этого закона объяснить некоторые «неравенства» в движении Луны. Эстафету Ньютона приняли Эйлер, Клеро, Даламбер. Объяснение неравенств оказалось делом трудным, и не раз отчаявшиеся ученые начинали сомневаться в универсальности закона всемирного тяготения.

Самое естественное было бы явно решить задачу трех тел: описать движение тройки тел, взаимодействующих согласно закону всемирного тяготения. Довольно скоро стало ясно, что, по-видимому, это сделать невозможно, но Лагранж в работе 1772 г. максимально проясняет ситуацию. С огромным искусством он показывает, что исходную систему дифференциальных уравнений 18 порядка можно преобразовать к системе 6 порядка, но вид этой системы уже не оставлял никаких надежд на дальнейший успех. А затем он выделяет случаи, когда интегрирование может быть выполнено: в одном случае все три тела в начальный момент времени находятся на прямой, в другом — в вершинах равностороннего треугольника при специальных соотношениях на остальные параметры. Лагранж рассматривает эти уравнения ради чистой любознательности, но про них вспомнили, когда выяснилось, что каждый из астероидов юпитеровой группы образует вместе с Юпитером и Солнцем треугольник, близкий к равностороннему.

Следующая возможность заключалась в том, что в тройке тела обычно неравноправны, и естественно рассматривать парное взаимодействие, на которое накладывается возмущение, исходящее от третьего тела. И Лагранж начинает систематически разрабатывать математическую теорию возмущений, основы которой уже были заложены его великими предшественниками. При возмущении естественно считать, что орбита остается эллиптической, но несколько варьируются ее параметры. Выделяют два типа возмущений: периодические и вековые. Периодические возмущения существенно зависят от положения тела на орбите, и они со временем в среднем компенсируются. Вековые возмущения определяются лишь взаимным положением орбит в целом, они могут накапливаться и приводить к неустойчивости Солнечной системы. Именно последнее обстоятельство было причиной пристального интереса к вековым возмущениям. С другой стороны, для изучения возмущений на сравнительно коротких отрезках времени (что необходимо в случае периодических возмущений) было еще недостаточно наблюдательного материала, в то время как для изучения вековых возмущений реально воспользоваться неточными наблюдениями древних. Периоды возмущений могут сильно превышать периоды обращения, и долгопериодические возмущения могут выглядеть как вековые. Важнейшая задача — научиться различать их.

Лагранж, занимаясь проблемой вековых возмущений, отступил от своей привычки и постоянно ориентировался на явные числовые примеры. Этими проблемами он занимался параллельно с более молодым, но уже зарекомендовавшим себя Лапласом (1749–1827). Они чрезвычайно отличались по стилю занятий наукой. Для Лапласа ориентирами были совершенно конкретные задачи небесной механики, и метод для него был лишь средством достижения конкретных целей. Его никогда не привлекало вычленение метода в чистом виде, его совершенствование вне потребностей конкретных задач. При работе над близкими задачами выявлялись сильные и слабые стороны каждого из великих ученых. Лаплас показывает, что в первом порядке отсутствуют вековые возмущения для больших полуосей орбит Юпитера и Сатурна (а кандидаты на эту роль оказались долгопериодическими с огромным периодом). Лаплас уверен в справедливости аналогичного утверждения для всех планет, и, хотя это не означало бы доказательства устойчивости Солнечной системы (возмущения рассматривались лишь в первом порядке), это несомненно был бы серьезный шаг в этом направлении. Лаплас безуспешно пытается найти общее доказательство, а Лагранж при помощи своего общего метода получает доказательство, как выразился Якоби, «росчерком пера».

А вот противоположный пример. Лагранж потратил много сил, пытаясь объяснить вековое ускорение среднего движения Луны, обнаруженное в 1693 г. Галлеем (1656 – 1742), первооткрывателем значительного числа известных к тому времени «неравенств». Лагранж пробует использовать свой излюбленный трюк с неполной сферичностью Луны, затем аналогичным свойством Земли. Попробовав все казавшиеся ему мыслимыми возможности, Лагранж приходит к выводу, что либо наблюдения древних содержат принципиальные огрехи, либо вообще этот эффект необъясним в рамках закона всемирного тяготения. Одновременно он разработал технику учета членов высшего порядка при рассмотрении вековых возмущений. Он обнаружил, что в случае Юпитера и Сатурна эти члены несущественны, и экстраполировал это наблюдение на все остальные случаи. Лаплас, имевший существенно больший вычислительный опыт, понял, что ситуация со спутниками из-за их быстрого вращения может быть существенно иной. Он вначале обнаружил, что члены, открытые Лагранжем, дают существенный вклад для спутников Юпитера, а затем, проделав те же вычисления для Луны, получил ускорение Галлея.

Плодотворное научное сотрудничество Лагранжа и Лапласа не переросло в ссору лишь благодаря удивительной тактичности и выдержке Лагранжа. Честолюбивый, увлекающийся Лаплас неоднократно давал повод к обиде необоснованными претензиями и даже некорректными поступками. Характерный эпизод произошел в 1774 г., когда Лаплас, живший в Париже, ознакомился с посланной туда работой Лагранжа о вековых возмущениях до ее опубликования. Он быстро увидел дополнительные возможности и опубликовал свою статью, опередившую статью Лагранжа. Лаплас предваряет статью словами: «Я не взялся бы за это дело, если бы не прочитал превосходную работу г. Лагранжа, присланную в Академию и имеющую появиться в следующих томах». Он добавляет различные аргументы в пользу своей торопливости, говорит о желании поскорее познакомить публику со всеми возможностями метода Лагранжа, но его нетактичность сомнений не вызывает. А Лагранж ... поблагодарил Лапласа за усовершенствование его метода, поскольку «от этого науки смогут лишь выиграть». В 1779 году Лагранж писал Лапласу: «Я рассматриваю ссоры как совершенно бесполезные для преуспеяния науки и как ведущие только к потере времени и покоя ...». Всю свою жизнь он неукоснительно следовал этому правилу.

Арифметические работы. Хотя во весь берлинский период механика была главным делом Лагранжа, в его поле зрения попадают и другие математические вопросы, в том числе несколько арифметических задач. Он занимался ими под несомненным влиянием Эйлера. Арифметике посвящено всего 9 небольших работ. Они носят характер самостоятельных этюдов, это маленькие шедевры, за которыми не просматривается намерения создать большое полотно (что было характерно для его занятий механикой). Быть может, это были упражнения в часы отдыха от главного дела жизни. Итак, Лагранж идет по следам Эйлера: он доказывает, что в периодическую цепную дробь разлагаются квадратичные иррациональности и только они (утверждение Эйлера, оставленное без доказательства), продолжает исследование уравнения Ферма-Пелля, занимается квадратичными вычетами, несколько продвинувшись в доказательстве квадратичного закона взаимности, сформулированного Эйлером. Поучительно доказательство теоремы Вильсона ($(p-1)!+1$ делится на p для простого p), основанное на связи с малой теоремой Ферма и по существу использующее многочлены над конечным полем. Популярна теорема Лагранжа о приближении вещественных чисел рациональными. Наиболее известный арифметический результат Лагранжа утверждает возможность представить любое натуральное число можно в виде суммы не более четырех квадратов. Это утверждение восходит к Ферма, и его, по-видимому, пытался доказать Эйлер.

Алгебраические размышления. Проблемы алгебраических уравнений и их систем занимали Лагранжа в разных аспектах. Некоторые задачи были инспирированы его занятиями небесной механикой. Он интересовался и приближенным вычислением корней, и отделением корней, и исключением неизвестных из системы алгебраических уравнений. Но одна из работ Лагранжа, по словам Коши, знаменовала начало новой эры в алгебре.

В 1770–71 гг. вышел мемуар «Размышления об алгебраическом решении уравнений», несомненно задуманный еще в Турине. Собственно, это целая книга, занимающая более 200 страниц. Наряду с «Аналитической механикой», это вершина творчества Лагранжа.

В XVI веке подряд были открыты формулы для решения уравнений 3 и 4 степеней, а потом два века не удавалось найти формулу для уравнения 5 степени. Появлялось немало замечательных задач, которые отвлекали математиков от этой загадочной проблемы и утешали. Однако немало достойных математиков, среди них — Лейбниц (1646 – 1716) и Эйлер, не теряли надежды. Все чувствовали, что хорошо бы вместо того, чтобы искусственно получать формулу для каждой степени, как это было фактически, найти единый прием, который годится для всех степеней. Чирнгауз (1651 – 1708) сообщает своему другу Лейбницу, что ему удалось придумать универсальную подстановку, которая преобразует общее уравнение n-й степени в двучленное $y^n + a = 0$ (а ведь это и нужно для решения в радикалах!). Эта подстановка дает известную формулу для $n = 3$ и годится для $n = 5$. Лейбниц вынужден огорчить друга: при $n = 5$ для нахождения коэффициентов подстановки придется решать уравнения более высокой степени, чем 5. Потом Эйлер обнаружил, что при $n = 3$ и $n = 4$ формулу удается получить, делая подстановки вида $x = \sqrt[n]{A} + \ldots + \sqrt[n]{F}$, но продвинуться дальше и ему не удалось.

Ситуация несомненно требовала более глубокого продумывания, и кому, как не Лагранжу, было взяться за это дело. Ведь он уже проявил себя непревзойденным мастером добираться до глубинного существа проблемы, выявлять общую структуру там, где другим видятся разрозненные ситуации. Он начинает с исследования формул при $n \leqslant 4$, обращая особое внимание на выражения, стоящие под знаками радикала n-й степени. Для квадратного уравнения $x^2 + ax + b = 0$ это $\Delta = \frac{a^2}{4} - b$, для кубического $x^3 + ax + b = 0$ это $\Delta_\pm = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$ (причем $x = \sqrt[3]{\Delta_+} + \sqrt[3]{\Delta_-}$). Величины $\Delta_\pm$ являются корнями квадратного уравнения, коэффициенты которого рационально (т. е. при помощи арифметических операций) выражаются через коэффициенты исходного уравнения. Лагранж ищет выражение $\Delta_\pm$ через корни x_1, x_2, x_3 и замечает, что $\Delta = x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2$, где ε — какой-то корень уравнения $y^3 = 1$, отличный от 1.

Здесь следует остановиться и обсудить, какой же корень имеет в виду Лагранж. Сегодня ответить на это вопрос не представляет труда, поскольку имеются два комплексных корня $\varepsilon_\pm = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, но Лагранж не имел возможности работать с комплексными корнями (этому в нужном объеме научились позднее). И все же он решительно оперирует с «воображаемыми» корнями в твердой уверенности, что у кубического уравнения всегда три корня (с учетом кратностей). Н. Бурбаки пишет: «...Лагранж, как Эйлер и все их современники, без всяких сомнений формально оперирует с „полем корней“ многочлена (или, говоря его языком, рассматривает „воображаемые корни“ этого многочлена), хотя математика его времени не содержала ничего, что могло бы оправдать такой способ рассуждений. Поэтому Гаусс, который с самого начала был решительным противником безудержного формализма XVIII века, со всей силой обрушивается в своей диссертации на это злоупотребление».

Итак, два корня из 1 дают $\Delta_\pm$. На самом деле мы не имеем возможности различить заранее корни x_1, x_2 x_3, но, как бы мы их ни занумеровали, функция $\Delta(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2$ при любых их перестановках (а их $3! = 6$) будет принимать только два значения $\Delta_\pm$. Это — решающее наблюдение Лагранжа! Для квадратного уравнения $\Delta = (x_1 - x_2)^2$ и вообще не меняется при перестановке корней. В случае уравнения 4 степени под радикалом 4 степени возникают выражения вида $x_1x_2 + x_3x_4$, где x_j — корни, и они при $4! = 24$ способах нумерации корней могут принимать только три различных значения.

При этом легко проверяется, что если имеется функция, рационально выражающаяся через корни уравнения n-й степени и принимающая только q значений при всевозможных перестановках корней, то эта функция является корнем уравнения степени q, коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения. Это наблюдение Лагранж называет «истинным принципом и, так сказать, метафизикой уравнений 3 и 4 степени». Именно поэтому решение кубического уравнения сводится к квадратному, а уравнения 4 степени — к кубическому.

Выходит, надо искать рациональные функции от корней, которые принимают $q < n$ значений при всевозможных перестановках. Но этому очень мешает быстрый рост числа перестановок с ростом n. Прежде всего можно заметить, что коэффициенты исходного уравнения являются рациональными функциями корней, вообще не меняющимися при перестановках корней ($q = 1$), но надо искать менее тривиальные возможности. Лагранж называет резольвентами выражения $x_1 + x_2\varepsilon + \ldots x_n\varepsilon^{n-1}$, где $\varepsilon \neq 1$ — корень из единицы, наподобие тех, что участвовали в формулах для квадратного и кубического уравнения. Их отсутствие для биквадратного уравнения естественно связать с непростотой числа 4. Можно было ожидать, что что резольвенты должны были бы появиться и в формулах для уравнений более высокой степени, но вот что показывают вычисления: функция $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ принимает при перестановках $(n-1)!$ значений. Имеем $(n-1)! < n$ при $n \leqslant 3$. Итак, Δ — корень уравнения степени $(n-1)!$ с коэффициентами, рационально выражающимися через исходные.

Можно видоизменить это утверждение для простого n: Δ являются корнями уравнения степени $n - 1$, коэффициенты которого, в свою очередь, суть корни уравнения степени $(n-2)!$ с коэффициентами, рационально выражающимися через исходные. В случае $n = 5$ коэффициенты уравнения 4 степени являются корнями уравнения 6 степени. Становится понятно, откуда возникали уравнения больших степеней в построениях Чирнгауза и Безу! Вывод Лагранжа: «Отсюда следует, что весьма сомнительно, чтобы методы, которые мы рассмотрели, могли дать полное решение уравнения пятой степени».

Далее естественно не ограничиваться резольвентами и выяснить, нет ли других функций от корней, принимающих небольшое число q значений. Ради этого Лагранж исследует группу перестановок, по существу закладывая основы теории групп. Как только появилась групповая терминология, ряд утверждений Лагранжа автоматически превратился в теоремы теории групп. Пусть функция $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ от корней принимает при перестановках q значений; тогда имеется подмножество (подгруппа!) из $n!/q$ перестановок, которые функцию δ не меняют. Отсюда следует, в частности, что q — делитель $n!$. Поэтому существенно изучить подгруппы в группе перестановок. Если описать все «большие» подгруппы в этой группе, а именно подгруппы из $5!/q$ элементов, где $1 < q < 5$ то будут описаны все функции от корней, принимающие $q < 5$ значений. Здесь Лагранж остановился.

Он не сомневается, что это единственный способ получения формул, но окончательных результатов не получает: «Вот, если я не ошибаюсь, истинные принципы решения уравнений и анализ, наиболее пригодный, чтобы привести к решению; как мы видели, все сводится к некоторому исчислению комбинаций, с помощью которого получаются априори результаты, которые следует ожидать».

Группу перестановок подробно исследовал Коши. Руффини (1765 – 1822) доказал отсутствие нетривиальных функций от корней уравнений 5 степени, принимающих меньше 5 значений, будучи уверен, что он доказал неразрешимость уравнения 5 степени в радикалах. Однако оставалось доказать, что существование таких функций в самом деле необходимо для существования нужной формулы. Полное доказательство неразрешимости дал Абель (1802 – 1829). А перед этим была работа Гаусса о построении правильных многоугольников циркулем и линейкой или, что эквивалентно, о выражении корней уравнения $y^n - 1 = 0$ при помощи квадратных радикалов. В ней головоломные трюки с перестановками корней позволили решить задачу двухтысячелетней давности. Проблема разрешимости алгебраических уравнений нашла окончательное решение в теории Галуа (1811–1832). Но первым был Лагранж... Впрочем, связь корней с перестановками примерно в то же время обнаружил Вандермонд (1735–1796). Хотя он и сделал меньше, он увидел главное, и несправедливо, что в истории математики тень Лагранжа заслонила заслуги этого ученого.

Кризис. Математика была единственной страстью Лагранжа, и ее было достаточно, чтобы заполнить всю его жизнь, доставить ему немало счастливых минут. Все было подчинено занятиям наукой. Деламбр передает отношение Лагранжа к музыке: «Я ее люблю, поскольку она меня изолирует; я слышу первые три такта, на четвертом такте не различаю ничего, я предаюсь своим размышлениям, ничто меня не прерывает, и тогда я решаю наиболее трудные из проблем». Для Лагранжа было характерно, что великие цели познания истины, мировой гармонии не переплетались у него с личными амбициями, с желанием соревноваться, обгонять современников. Если он узнавал, что кто-то успешно занимается проблемой, над которой он сам думал, он немедленно прекращал размышления с искренним ощущением «освобождения от обязанности». Благодаря этому Лагранжу было присуще необычайное душевное равновесие, дававшее силы стойко переносить тяготы жизни, не прекращать напряженных занятий.

Лишь одно могло поколебать Лагранжа — потеря ориентиров, неуверенность в выборе правильных целей. И это ощущение начинает появляться вскоре после переезда в Берлин. В 1772 г. он пишет Даламберу: «Не кажется ли Вам, что высшая геометрия близится отчасти к упадку, ее поддерживаете только Вы и Эйлер». Это пишет ученый, который находится в расцвете сил (ему 36 лет), у которого начинает складываться его «Аналитическая механика», и который только что опубликовал алгебраический мемуар, определивший развитие алгебры на 100 лет вперед!

Это высказывание заслуживает обдумывания. Разумеется, Лагранж видел, чем ему заниматься в ближайшие 10–15 лет, но более далекие перспективы представлялись ему сомнительными. А возможно, стали сказываться особенности стиля занятий Лагранжа. Он наметил основные направления в молодости, с известной долей консерватизма следовал им, и не без оснований надеялся на выполнение поставленных задач в обозримом будущем. Вероятно, ощущение конца математики не могло возникнуть у Эйлера, который всю свою долгую научную жизнь активно искал новые задачи, переходил от одной задачи к другой, не боясь многое оставить незавершенным. Стоит обратить внимание, что Лагранж не решается поставить себя в один ряд с Эйлером и Даламбером. Это не проявление формальной скромности. Характерно также, что он завидовал своим современникам, которые легко умели находить новые задачи, например, Монжу (1746 – 1818): «Этот черт Монж всегда полон новых и смелых идей» или «Этот пострел со своей теорией образования поверхностей идет к бессмертию».

Ощущение заката математики не покидает Лагранжа. 21 сентября 1781 г. он опять пишет Даламберу: «Я начинаю чувствовать силу моей инерции, которая понемногу увеличивается, и я не могу сказать с уверенностью, что в течение будущего десятилетия я еще буду заниматься математикой. Я думаю также, что шахта становится слишком глубока, и что ее придется рано или поздно бросить, если не будут открыты новые рудоносные жилы. Физика и химия представляют ныне сокровища гораздо более блестящие и более легко эксплуатируемые; таким образом, по-видимому, все всецело обратились в эту сторону, и возможно, что места по геометрии в Академии Наук сделаются когда-нибудь тем, чем являются в настоящее время кафедры арабского языка в университетах».

Может возникнуть естественное недоумение. Что касается аналитической механики, то намеченное близилось к концу, но в алгебре пока лишь был разработан язык, получены прикидочные результаты, но программа еще была достаточно неопределенной, и нужно было разворачивать работу. Но таковы законы психологии научного творчества: один человек не может двигаться по трудной дороге бесконечно далеко. Материал должен был отстояться, да и нужен был результат типа результата Гаусса, подтвердившего на примере высокую эффективность работы с перестановками корней. Для Абеля и Галуа принципиальна была и работа Лагранжа, и работа Гаусса.

В Париже. Предчувствие не обмануло Лагранжа. В 1787 году, вскоре после смерти Фридриха II, он переехал в Париж и, по существу, прекратил активные занятия математикой. Лагранжу 51 год. В один 1783 год мир лишился и Эйлера, и Даламбера. Лагранжа восторженно встречают французские ученые, теперь он несомненно «первый геометр Европы», и лишь Лаплас может всерьез конкурировать с ним. К Лагранжу неравнодушны при дворе. Он необычно легко отвлекается от геометрии в пользу занятий философией, химией, историей, медициной. Может быть, Лагранж надеялся начать новую жизнь в науке? Обстановка в Париже располагала к разнообразной научной деятельности. Процветали научные кружки, были популярны контакты между учеными разных специальностей. Особенно активен в установлении таких связей был химик Лавуазье (1743 – 1794). Ученые активно интересовались общественными проблемами, ролью науки в жизни государства.

Лагранж не оставил математику: еще будут появляться его работы, он будет активно интересоваться работами других, мы будем еще говорить о его педагогической деятельности, об оригинальных учебниках, но пик его научной деятельности уже прошел. К тому же вскоре наступило время, когда большинство французских ученых (за исключением, возможно, Лапласа) прервали свои обычные занятия.

Впереди была революция, в которой ученые приняли самое активное участие. Никогда прежде не представлялась для них возможность непосредственно влиять на жизнь страны. Они входят в муниципалитет, Учредительное и Законодательное собрания; астроном Байи становится мэром Парижа, математик Лазар Карно возглавляет оборону Франции (его называли «организатором побед»), а Монж становится морским министром. Резко активизировалась и деятельность ученых, направленная на решение практических задач.

Лагранж держится в стороне от политики. Закон 1793 г. предписывает иностранцам покинуть Францию, но специальный декрет Комитета общественного спасения делает для Лагранжа исключение. В самые трудные дни он не покидает Франции, разделяя судьбу своих коллег. Участие в политической жизни стоило жизни Байи и Кондорсе. Лавуазье был казнен как откупщик.

Лагранж пристально наблюдает за происходящим. Деламбр сохранил слова Лагранжа, сказанные после гильотинирования Лавуазье: «Нужен был один момент, чтобы снести эту голову, и, может, будет недостаточно ста лет, чтобы появилась подобная».

Как ученый, Лагранж добросовестно выполняет все поручения. Постепенно размножились многочисленные комиссии и бюро, в которые было принято включать ученых. Он занимается проблемами ремесленных промыслов, измерением долготы на море, оценивает запасы хлеба и мяса в стране, чтобы оценить вероятность возникновения голода. Пишет работу с расчетом взрывной силы пороха в орудийном стволе (она не было опубликована при жизни автора, возможно, это была одна из первых засекреченных научных работ).

Особенно энергично ученые были включены в работу Комиссии мер и весов. Сегодня непросто уяснить, почему во время голода и разрухи, при постоянной военной опасности такое колоссальное внимание уделялось реформе системы мер и весов. Разнобоем в системе мер объясняли многие беды, с большим эмоциональным накалом говорили о том, что несовершенство мер — средство эксплуатации народа. Еще одна сторона дела заключалась в том, что неудобство системы мер — проблема интернациональная, и удачно созданная система могла бы послужить укреплению престижа революции на международной арене. С этой точки зрения важно было выбрать единицы, не связанные ни с какими национальными традициями. Епископ города Отена Талейран, будущий наполеоновский дипломат, предложил воспользоваться идеей, восходящей к Гюйгенсу, и взять за основу длину секундного маятника, т. е. маятника с периодом колебаний, равным одной секунде. Но восторжествовала идея принять за единицу длины долю меридиана.

Работы были задуманы на высочайшем уровне. Лавуазье и Гаюи измерили вес воды; начались геодезические измерения, на которые не было средств, им мешали взаимоотношения с Испанией, да и положение на местах в самой Франции. Но революционному конвенту не терпелось ввести систему мер «на все времена, всем народам» (девиз, позднее выгравированный на эталоне метра). Проблемы метрической системы обсуждаются в Конвенте в 1793 г. наряду с самыми острыми вопросами. Комиссия обвиняется в медлительности, и некоторые ее члены изгоняются «по недостатку республиканской добродетели и ненависти к тиранам» — такого обвинения могло хватить для того, чтобы попасть на гильотину!

Обязанности Лагранжа в комиссии носили не столь острый, теоретический характер. Он занимался выбором базиса для новой системы и предлагал взять за основу простое число 11. Он считал важным, чтобы какие-то доли основной единицы не превратились со временем в самостоятельные единицы. В конечном счете все было построено на основе десятичной системы.

Закрытая на время Академия возрождается в виде Института Франции, и Лагранж стоит во главе физико-математического разряда.

Педагогическая деятельность. Революционная Франция в бурные, богатые переменами 1793–95 годы много внимания уделяла реформе образования. «После хлеба просвещение есть важнейшая потребность народа» — провозгласил Дантон. О народном образовании думали не меньше, чем о снабжении народа хлебом. Организуются Нормальная школа для подготовки учителей и Политехническая школа (первоначально она называлась Центральная школа общественных работ) для подготовки военных инженеров. Никогда прежде не занимавшийся преподаванием Лагранж с увлечением читает лекции в обеих школах. При его интересе к продумыванию основ, лекции — повод заново осмыслить современную математику, ее фундаментальные понятия, связи между различными областями. Из лекций родились его книги: «Теория аналитических функций» в 1797 г. и «Лекции по исчислению функций» в 1801 г.

Основной замысел Лагранжа красноречиво характеризует полное название первой книги: «Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно малых, исчезающих, пределов и флюксий и сведенные к алгебраическому анализу конечных величин». Дело в том, что почти два века математики решительно пользовались бесконечно малыми, хотя понятие это оставалось расплывчатым и не существовало убедительных обоснований правил работы с ними. Однако было несомненно, что разработанный формализм позволяет получать правильные результаты, которые на другом пути получать не удавалось, и отказаться от языка бесконечно малых (что предполагалось поначалу) было уже невозможно. Непозволительно долго ситуация оставалась запутанной.

В 1784 г. Берлинская академия предлагает в качестве темы для конкурса построить «ясную и точную теорию того, что в математике называют бесконечным. Известно, что высшая геометрия постоянно принимает бесконечно большие и бесконечно малые. Однако древние геометры и даже аналисты тщательно избегали всего, что касается бесконечного, и великие современные аналисты признают, что выражение „бесконечная величина“ противоречиво. Академия поэтому желает получить объяснение того, как из противоречивого допущения было выведено столько истинных теорем, и чтобы был указан верный, ясный, словом — подлинно математический принцип, который мог бы заменить бесконечное, не делая слишком трудными или долгими производимые при помощи этого средства исследования». Инициатором конкурса, несомненно, был Лагранж.

Его точка зрения заключалась в том, что понятие бесконечно малой в самом деле является противоречивым, но исчисление построено так удачно, что возникающие ошибки взаимно компенсируются и всегда получается правильный ответ. Еще во II томе «Туринских записок» за 1760–61 г. Лагранж писал, что исчисление «исправляет само собой принимаемые в нем ложные допущения». Как писал Клейн (1849–1925), он «отказывался от анализа как от общей дисциплины, понимая под ним просто собрание формальных правил, относящихся к частным специальным функциям», и «такое самоограничение устраняло для того времени целый ряд затруднений». Итак, точка зрения Лагранжа состояла в том, что сделать исчисление бесконечно малых содержательным принципиально нельзя, что нужно смотреть на него формально, каким-то образом убедиться, что ошибки в самом деле компенсируются, и спокойно пользоваться исчислением.

Мы вновь сталкиваемся с готовностью математиков XVIII века иметь дело с чисто формальными процедурами (мы уже говорили о работе с «воображаемыми» корнями уравнений). В XX веке аналогичная точка зрения возродилась в рамках программы

Гильберта обоснования математики, в которой бесконечности воспринимаются как формальные объекты, и нужно лишь убедиться в непротиворечивости правил обращения с ними с тем, чтобы быть уверенными в правильности полученных при их помощи высказываний о конечных объектах.

Прогноз Лагранжа не оправдался. Содержательное обоснование анализа на основе пределов было к тому времени уже далеко продвинуто Даламбером. Но Лагранж, как видно из названия книги, отверг это обоснование вместе со всеми другими. Его замысел очень интересен. Он замечает, что нет проблемы в построении правил дифференцирования для многочленов, и на таком же алгебраическом языке можно строить дифференциальное исчисление для функций, разложимых в бесконечные степенные ряды. Лагранж, как и его предшественники, уверен, что всякая функция допускает такое разложение (лишь Коши опроверг это мнение). Лагранж опирается на свою интуицию аналитика-практика, которая подсказывала, что все функции, встречающиеся в приложениях, допускают разложение в ряд. Через сто лет на этом пути строил теорию аналитических функций комплексного переменного Вейерштрасс, однако как способ обоснования анализа вещественных функций эта программа оказалась несостоятельной. Н. Бурбаки пишет: «Монументальная работа Лагранжа представляет попытку основать анализ на одной из наиболее спорных концепций Ньютона, именно на той, в которой спутаны понятия производной функции и функции, разложимой в степенной ряд, и извлечь из него (ряда — *С. Г.*), рассматривая коэффициент первого порядка в ряде, понятие дифференцирования. Разумеется, такой математик, как Лагранж, не мог не получить при этом важных и полезных результатов, как, например (способом, не зависящим от исходного предположения, о котором мы говорили), общее доказательство формулы Тейлора с остаточным членом в виде интеграла и его оценкой посредством теоремы о среднем. Работа Лагранжа явилась к тому же исходным пунктом метода Вейерштрасса теории функций комплексного переменного, так же как и современной теории формальных степенных рядов. Но с точки зрения его непосредственной цели она является скорее шагом назад, чем продвижением вперед».

Показательно, что Лагранж никогда не путал проблемы обоснования анализа с построением собственно анализа, его применениями. В предисловии ко второму изданию «аналитической механики» (1811 г.) Лагранж пишет: «Мы сохранили обычные обозначения дифференциального исчисления, так как они соответствуют системе бесконечно малых величин, принятой в настоящем трактате. Если дух этой системы хорошо усвоен, и если в точности его результатов убедились с помощью геометрического метода первых и последних отношений или с помощью аналитического метода производных функций, то бесконечно малые величины можно применять в качестве надежного и удобного средства для сокращения доказательств».

На страницах «теории аналитических функций» впервые появился знаменитый метод Лагранжа нахождения условного экстремума. При нахождении наибольшего и наименьшего значения функции от нескольких переменных, скажем, $f(x, y)$, неминуемо возникает задача о нахождении экстремума при каком-то условии на переменные, например, $\varphi(x, y) = 0$, причем не всегда удобно переходить к меньшему числу параметров. Нахождение экстремума функции одного переменного на отрезке сводится к сравнению значений функции во внутренних стационарных точках и на концах. Для нахождения экстремума в области D многих переменных нужно сравнить значения f во внутренних стационарных точках и значения на границе, но граница уже не состоит из двух точек, и возникает задача об условном экстремуме на границе. Однако это только одна из многочисленных ситуаций, где возникает условный экстремум.

Лагранж замечает, что указанная выше задача сводится к нахождению таких λ, что функция $f+\lambda\varphi$ имеет стационарные точки при $\varphi = 0$. Возникает система уравнений для нахождения этих точек. Аналогично рассматривается случай любого числа переменных и условий. «Метод неопределенных множителей Лагранжа» был навеян результатами Лагранжа о механических системах со связями. В приложениях множители Лагранжа часто допускают содержательную интерпретацию. Сегодня сфера применения идеи Лагранжа расширилась. В частности, ее развитием является линейное программирование, а применительно к экономическим задачам множители Лагранжа часто удается интерпретировать на языке цен.

Последние годы. При директории и консулате положение Лагранжа упрочилось. В годы империи он становится графом, сенатором, кавалером ордена Почетного Легиона. Наполеон не был равнодушен к математике и хорошо понимал истинную цену Лагранжу. Будни императора оставляли ему мало времени для покровительства наукам. Он ограничивался раздачей наград да короткими характеристиками, непосредственно предназначавшимися для истории. Лагранжа он назвал «Хеопсовой пирамидой науки».

10 апреля 1813 г. Лагранж умер. Деламбр вспоминает, с каким удивительным умиротворением встретил он свой последний час:

«Я почувствовал, что умираю; мое тело ослабело мало-помалу, мои духовные и физические способности незаметно угасают; я с любопытством наблюдаю постепенный прогресс уменьшения сил, и я достигну конца без сожаления, без печали, ибо спуск очень отлогий ... Я завершил свой путь; я снискал некоторую известность в математике. Я не питал к кому-либо злобы, я никому не сделал плохого, и я хочу кончить свой путь ...»

В свой бурный век Лагранж смог прожить размеренную жизнь. Современники затруднялись припомнить детали, которые могли бы оживить его биографию. Про него не рассказывали анекдоты, как про Лапласа. А. Н. Крылов замечает, что история с обедом на итальянский лад в Париже (рассказанная выше), возможно, была единственным приключением в жизни Лагранжа. Вспоминали, что Лагранж помог улучшить положение Ламберта в Берлине, что он не побоялся в грозном 1793 году заступиться за Деламбра, которого хотели выгнать из комиссии мер, что он трогательно заботился о Пуассоне, когда тот был его учеником в Политехнической школе, что он умел удивительно слушать собеседника. А иногда возникает маленький, но выразительный штрих: все существо Лагранжа «было проникнуто тихой иронией».

И неожиданно именно этот скромный человек стал восприниматься как образец великого ученого и человека, причем не только математиками. Гёте писал: «Математик совершенен лишь постольку, поскольку он является совершенным человеком, поскольку он ощущает в себе прекрасное, присущее истине; только тогда его творчество становится основательным, чистым, ясным, одухотворенным, действительно изящным. Все это требуется, чтобы уподобиться Лагранжу». И в другом месте: «Лагранж был безупречным человеком и именно поэтому и великим. Если безупречный человек наделен талантами, то он всегда становится благом человечества, носителем счастья и благородства, будь то художник, исследователь природы, поэт или кто-либо другой».

Эйлер и Лагранж воспринимаются сегодня как величайшие математики XVIII века, учитель и ученик, дарования которых поразительно дополняли друг друга. Эйлер, стремившийся заглянуть как можно дальше вперед, говорить о вещах, для которых еще нет подходящего языка, оставить потомкам задачи, которые долго будут служить ориентирами, и Лагранж, во всем добиравшийся до глубинных структур, стремившийся создать картину, лишенную белых пятен, передать последующим поколениям язык и методы, которые долгое время будут достаточны для решения новых задач.