ВЫСОКОЙ ГЕОМЕТРИИ НАЧАЛА

> Но это лишь начала некоей много более высокой Геометрии, которая распространяется на труднейшие и прекраснейшие задачи прикладной Математики, и едва ли комунибудь удастся заняться с той же легкостью такими вещами, не пользуясь нашим дифференциальным исчислением или ему подобными.
>
> *Лейбниц*

В 1684 г. в журнале «Acta Eruditorum», выходившем с 1682 г. в Лейпциге («Труды ученых», или, как говорят сейчас, «Ученые записки»), появилась семистраничная статья Готфрида Вильгельма Лейбница (1646 – 1716) «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Это была первая публикация по дифференциальному исчислению, хотя возникло оно лет на двадцать раньше, а первые шаги старше еще на пятьдесят лет и относятся к самому началу XVII века.

Золотой век анализа. Анализ бесконечно малых... Как видятся сегодня вехи героического века его создания? В самом начале XVII века Галилей (1564 – 1642) изучает равноускоренное движение в связи со свободным падением. Как исследовать неравномерное движение, если вся наша интуиция относится к равномерному движению? Можно считать, что на малых участках времени движение мало отличается от равномерного. Но удобнее считать, что на «бесконечно малых» интервалах оно просто является равномерным. Появляется очень расплывчатый образ неравномерного движения, рассыпающегося на бесконечное множество бесконечно малых интервалов (нулевых?) с равномерным движением. Лишь через двести лет этот образ удалось превратить в математически корректное понятие, но все это время

Готфрид Вильгельм Лейбниц

математики решительно и успешно работали с ним. А потом от прямолинейного движения перешли к криволинейному: движение тела, брошенного под углом к горизонту. Появляется идея рассматривать кривые как траектории движений. Так Галилей исследует параболу.

Впрочем, у Галилея был великий предшественник в этих рассмотрениях: Архимед определил свою спираль кинематически. Вообще, век анализа долго продолжался с оглядкой на Архимеда. Уже в XVI веке ученые настойчиво изучали его труды по вычислению площадей и объемов криволинейных фигур и тел. В Древней Греции был развит логически безупречный метод доказательства формул для криволинейных квадратур и кубатур — метод исчерпания. Формула доказывалась от противного при помощи приближения кривого тела с двух сторон ступенчатыми телами с любой точностью. Этим методом блестяще владел Архимед, а до него Евдокс доказал таким образом формулы для объема пирамиды и конуса. Теперь мы знаем (в XVII веке это не было известно), что когда Архимед искал формулы (а не доказывал их), он разрезал тело на бесконечно малые слои (неделимые), а потом пользовался механическими соображениями. Из переписки Галилея мы знаем, что он много думал о методе «неделимых», но не написал задуманной книги.

Вскоре после того, как математики XVII века занялись проблемой измерения криволинейных площадей и объемов, им стало тесно в рамках метода исчерпания. Первым, кто предпочитает двигаться по скользкой дороге бесконечно малых, был Кеплер (1571 – 1630). В 1616 г. выходит его «Новое измерение винных бочек», где он исследует практическое правило измерения объема бочки при помощи одного замера линейкой, просунутой в наливное отверстие. Он не приводит доказательства по Архимеду, смело работает с бесконечно малыми, но выражает уверенность в возможности провести строгое доказательство. Кеплер пишет, что он излагает принципы Архимеда «лишь настолько, насколько этого достаточно для удовлетворения ума, любящего геометрию, а полные во всех частях строгие доказательства следует искать в самих книгах Архимеда, если кто не убоится тернистого пути их чтения». Эта позиция (строгие доказательства провести можно, но мы этого делать не будем) надолго становится удобной защитой от необходимости проводить строгие доказательства. Вот несколько примеров. Ферма: «Было бы легко дать доказательство в духе Архимеда ⟨...⟩ достаточно предупредить об этом раз и навсегда, чтобы избежать постоянных повторений». Паскаль: «Один из методов отличается от другого только способом выражения». Барроу: «Это доказательство можно было бы удлинить апагогическим (от противного — С. Г.) рассуждением, но для чего?». Но находились критики, которые пытались остановить любителей вольно обращаться с бесконечно малыми, заклиная их именем Архимеда. Против Кеплера было направлено сочинение Андерсона, ученика Виета, «Иск Архимеда» (1616 г.). Еще через сто лет Ролль констатировал, что «характер точности не господствует больше в геометрии с тех пор, как к ней примешали новую систему бесконечно малых».

Кеплер еще при формулировке своего второго закона рассматривал площадь, заметаемую отрезком, соединяющим Солнце с планетой, как «сумму» этих отрезков. Каждый следующий математик пытался разработать более безопасные процедуры работы с бесконечно малыми. Кавальери (ок. 1598 – 1647) был близок к Галилею и удостоился от Галилея высшей похвалы — был назван «соперником Архимеда». Кавальери посвятил методу неделимых две книги (1635, 1647). Он исходит из того, что площадь определяется длинами отрезков, по которым фигура пересекается семейством параллельных прямых (аналогично для объема). Кавальери уверен, что его процедуры имеют преимущества по сравнению с приемами Кеплера: «Всякий, кто видел трактат упомянутого Кеплера о движении Марса, может легко убедиться на основании наших исследований, как легко ему было впасть в ошибку ⟨...⟩ исходя из предположения, что площадь эллипса равновелика совокупности всех расстояний планеты, вращающейся на эллиптической линии, от Солнца». Кавальери считал, что надо осторожно работать с непараллельными отрезками, но Кеплер не ошибался! Только интуиция могла защитить математиков от заблуждений при работе с бесконечно малыми.

Кавальери применяет свои методы к вычислению площади криволинейной трапеции под параболами $y = x^n$(в современных обозначениях $\int_a^b x^n\,dx$). С огромным трудом он постепенно увеличивает n, дойдя между 1635 г. и 1647 г. до $n = 9$. Но к этому времени Ферма (1601 – 1655) уже умел вычислять площади для всех рациональных $n \neq -1$ (в 1644 г. он сообщил об этом Кавальери, но первые результаты относятся еще к 1629 г.). Математики начинают ощущать свое превосходство над древними. В 1644 г. Торричелли писал: «Несомненно, что геометрия Кавальери есть удивительное по своей экономии средство для нахождения теорем ... Это — истинно царская дорога среди зарослей математического терновника ... Жаль мне древней геометрии, что она либо на знала, либо не хотела признавать учения о неделимых».

Как же обстоит дело в случае $n = -1$, выпавшем из рассмотрений Ферма? И здесь выяснилось поразительное обстоятельство: при квадратуре гиперболы появляются логарифмы ($\int_1^x dy/y = \ln x$). Этот замечательный факт постепенно выкристаллизовывался, начиная с работы Сент-Винцента (около 1647 г.). Логарифмы появились у Непера (1550 – 1617) в самом конце XVI века при помощи кинематических рассмотрений, очень напоминавших первые механические построения Галилея. Однако долго они воспринимались как чисто вычислительное средство (таблицы!) и не пересекались с теоретическими исследованиями. Как писал Торричелли, Непер «следовал только арифметической практике» (грубо говоря, еще не было логарифмической или показательной функций), и лишь с середины века эти функции начинают появляться (в значительной степени в связи с квадратурами). Это было принципиально, что при квадратуре алгебраической функции простого вида появляется трансцендентная. Был подробно исследован вопрос о квадратуре круга и его частей, и здесь выяснилось, что квадратура алгебраической функции ($\sqrt{1-x^2}$) ведет к тригонометрическим (круговым) функциям. Кстати, и синусоида появилась тогда же как промежуточный объект при вычислении площади под циклоидой («спутница циклоиды»).

Постепенно в круг интересов математиков все более начинают входить задачи на проведение касательных к кривым. Древние умели проводить касательные лишь к коническим сечениям, да еще Архимед умел строить касательную к своей спирали. Так что в этой задаче с самого начала математики XVII века были лишены поддержки древних. Начиная с 1629 г. Декарт (1596 – 1650) и Ферма, соревнуясь друг с другом, разрабатывают общие принципы построения касательных, причем последний связывает их с задачами на максимум и минимум. Параллельно Торричелли и Роберваль (1602 – 1675) предлагают искусственные приемы построения касательных, интерпретируя их как направления скорости при движении по кривой и искусно представляя движение по кривой как сложное движение, составленное из более простых. В 50 – 60-е годы, отправляясь от результатов Декарта – Ферма, Слюз, Гудде, Гюйгенс находят совершенно автоматические правила построения касательных к широким классам алгебраических кривых. Характерно, что никто из авторов не спешил обнародовать свое правило. В 1659 г. Гудде пишет Схоутену: «Я прошу вас сохранить в тайне все, что я вам пишу, и не говорить кому бы то ни было, что найдено нечто подобное. Необходимо, чтобы мои лучшие открытия либо были известны только самым интимным моим друзьям, либо чтобы они стали известны всем». Характерная иллюстрация эпохи! Информация распространяется в основном при помощи писем, редко выходят книги, а первый журнал («Журнал ученых» в Париже) стал выходить в 1665 г. Быстрая публикация еще не воспринималась как естественное средство сохранить приоритет. Считалось вполне допустимым «придержать» метод, чтобы самому извлечь максимальные следствия.

В 1668 г. Николай Кауфман (1620 – 1689), более известный под именем Меркатор, опубликовал в книге «Логарифмотехника» замечательный способ вычислять логарифмы:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots ,$$

где можно обеспечить любую точность, взяв достаточное число членов (ряд для $\ln 2$ был ранее получен Броункером). Позже выяснилось, что этот ряд знали уже Гудде (1656 г.) и Ньютон (1665), но они не торопились с публикацией. Постепенно ряды становятся важнейшим средством как для вычислений, так и для теоретических рассмотрений. Например, Грегори (1638 – 1675) имел очень интересный план применить ряды к доказательству трансцендентности π и к доказательству, что некоторые задачи (вычисление дуги эллипса или гиперболы) не сводятся к элементарным функциям.

Мы очень бегло описали ситуацию в первой половине века бесконечно малых, причем мы не только опустили многие славные страницы истории (результаты Паскаля, Ферма), не упомянули многие достойные имена (Валлис, Фабри), но и сильно огрубили картину, не обсуждая многочисленные переходящие друг в друга этапы становления результатов, авторство которых очень условно и часто несправедливо закреплено за теми или иными математиками: «...открытие произошло в результате почти неуловимых переходов, и спор по этому поводу о приоритете был бы равносилен спору месяцу скрипкой и тромбоном относительно точного момента появления определенной мелодии в симфонии» (Бурбаки).

К началу 60-х годов математики накопили немало фактов. Начал очерчиваться круг задач, решаемых при помощи бесконечно малых. Выкристаллизовались два основных направления: вычисление квадратур и построение касательных. Ситуация с этими задачами была существенно различной. В то время как в задаче о касательных, более молодой, появились достаточно общие методы, в задаче о квадратурах все оставалось на уровне отдельных задач и искусственных приемов. Например, Декарт был уверен, что общие приемы в этих задачах не существуют. Все более осознавалась замечательная связь, которая имелась между этими задачами. Они оказались взаимно обратными, что наиболее естественно было усмотреть при помощи кинематических рассмотрений: нахождение скорости (мгновенной) по пути сводится к построению касательной, а путь находится по скорости при помощи квадратур. Эта связь, которая наметилась уже у Галилея, в весьма полном виде появляется у Барроу (1630 – 1677) в его лекциях, изданных в 1669 – 1670 г., хотя эксплуатируется она еще явно недостаточно.

Активность в области теории бесконечно малых к концу 60-х годов заметно падает. Ферма и Декарта уже нет в живых, Гюйгенс уже сделал свои главные работы. Остававшиеся задачи с трудом поддавались искусственным приемам, да и не было на математическом небосклоне такого созвездия математиков первой величины, как двадцать лет назад. Необходим был перелом, для которого требовался очень талантливый человек, который бы отважился на некоторое время отказаться от движения вперед и переосмыслил все с самого начала, разгрузил теорию от искусственных приемов, и только упростив и систематизировав способы решения известных задач, двинулся вперед. Необходимо было превратить теорию бесконечно малых в исчисление — набор достаточно простых формальных, но широко действующих рецептов. Нужно было превратить теорию из искусства в ремесло. В таком виде ее не только можно будет вывести из узкого круга посвященных, но и крупным математикам это позволило бы без затраты усилий пройти часть пути и сконцентрировать усилия на более глубоких вопросах. Характерно, что еще работающие гиганты, прежде всего Гюйгенс, не чувствовали в этом потребности: их устраивала работа по-старому. Этот труд должен был взять на себя математик следующего поколения.

«Бог сказал: да будет Ньютон! — и наступил свет» — сказано в популярном четверостишии А. Попа. Ньютон (1642 – 1727) и создал исчисление во время своих двухлетних чумных каникул (1665 – 67 гг.) в Вулсторпе, когда после окончания Кембриджского университета он оказался на своей ферме отрезанным из-за чумы от внешнего мира. В эти два года он получил свои самые замечательные результаты по механике и математике. Перед этим он слушал лекции Барроу и возможно от него усвоил идею систематически рассматривать кривые как функции от времени: «вероятно, что лекции д-ра Барроу могли навести меня на рассмотрение образования фигур с помощью движения, хотя я теперь и не помню этого». Очень поучительное высказывание! Ньютон строит исчисление флюксий. У него независимое переменное — это всегда время, и флюксии — это скорости, производные по времени. Подробно разрабатываются правила вычисления флюксий (наши правила дифференцирования). Дальше исследуется обратная задача — нахождение флюент. Это операция интегрирования, и Ньютон систематически выясняет, какие правила для нее можно получить, эксплуатируя то, что она обратна дифференцированию (нахождению флюксий по Ньютону).

Это дает немало удобных приемов, поскольку с флюксиями (производными) все выглядит просто. По такой схеме — дифференцирование предшествует интегрированию — обычно строится анализ и сегодня. Но главный конек Ньютона — это ряды. Он очень ценит свою формулу для бинома $(1 + x)^k$ при любых (не обязательно натуральных) k. Он воспринимает ряды как универсальный метод решения аналитических задач и не видит для него ограничений.

В октябре 1666 г. Ньютон составляет черновой набросок теории, а в 1669 г. летом он передает конспект своих результатов Барроу, а через него Коллинзу в Лондон. В 1670 – 71 гг. Ньютон готовит подробное сочинение по методу флюксий, но не находит издателя, и сочинения Ньютона по анализу начали появляться в печати лишь после 1704 г. Кое-какая информация о его работах распространялась среди математиков, кое-кто имел возможность познакомиться с рукописью, хранившейся у Коллинза. Ньютон не торопился с публикацией, спокойно наблюдая как некоторые его результаты переоткрывались и публиковались другими (например, результаты о рядах — Меркатором). Вряд ли кто-нибудь из окружающих мог оценить важность исчисления, более обращали внимание на конкретные результаты. Да и сам Ньютон больше ценил их и выдвигал на первый план метод рядов, а не исчисление. Итак, к 70-м годам «активными остаются только Ньютон в Кембридже и Дж. Грегори, уединившийся в Абердине, к которым в скором времени со всем пылом неофита (вновь посвященного — С. Г.) присоединяется Лейбниц» (Бурбаки).

Лейбниц и его путь в математику. Всю свою жизнь Лейбниц был нацелен на глобальные проблемы, на всеобъемлющие теории. Его путь в математику был нестандартен, и в этом отчасти причина того, что он отдавал предпочтение методу в век, когда более ценили конкретные результаты. В жизни Лейбница было много планов. Некоторые поражают своей грандиозностью. Новые замыслы вытесняли старые, нередко увлекавшемуся автору не хватало реализма. Почти ни одной из задуманных книг он не дописал до конца, а большинство оставил в самом начале (лишь несколько книг по философии постигла лучшая участь). Но как трудно сохранить реализм, когда замыслы далеко обгоняют век!

Уже с 13 – 14 лет Лейбниц мечтает о перестройке логики, о создании алфавита человеческих мыслей, в котором можно было бы записывать все мыслительные процессы. Постепенно зреет главная идея его жизни: создание «универсальной характеристики», «универсального языка». «Универсальная математика является, так сказать, логикой воображения»; она должна заняться всем, «что в области воображения поддается точным определениям». Язык должен быть защищен от записи неправильных мыслей: «химеры, которые не понимает даже тот, кто их создает, не смогут быть записаны его знаками». Он грезит о машине, которая будет доказывать теоремы, хочет превратить мышление в исчисление, арифметизировать его так, чтобы можно было заменять рассуждения вычислениями и решать споры при помощи математических выкладок. Трижды приступал Лейбниц к реализации своего грандиозного, сильно опередившего время замысла, но всякий раз останавливался, пройдя лишь первые шаги. Только в XX веке, когда многое из задуманного Лейбницем оказалось явью в рамках математической логики, стало ясно, что его замыслы были не столь утопичны, сколь прозорливы.

Лейбница интересуют разнообразные применения математики, и он верит в безграничные ее возможности. Он готовится стать юристом и в 18 лет пытается строить юриспруденцию как математическую теорию с аксиомами и теоремами, думает о применении вероятностных соображений в судопроизводстве. В 20 лет он оказывается от кафедры в Нюрнбергском университете: его не привлекает спокойная академическая карьера. Планы Лейбница более честолюбивы: «я давно в душе лелеял другое» и «я считал недостойным молодого человека сидеть, точно пришпиленный к месту; дух мой горел желанием стяжать большую научную славу и посмотреть свет». Он принимает приглашение герцога Иоганна Филиппа и переезжает в Майнц. Лейбниц хочет воспользоваться ситуацией и, пусть в рамках довольно скромного государства, создать совершенный свод законов. Постепенно его планы становятся все более широкими и одновременно менее реалистическими. Он задумывает перестройку всей юридической науки, начинает три грандиозные монографии. Вероятно, когда в 1717 г. непременный секретарь Французской академии наук Фонтенель в «Похвальном слове Лейбницу» назвал его великим юристом, у него были основания.

У Лейбница немало интересных идей, но скоро приходит очередь совершенно другого замысла. Живший в Майнце известный дипломат Бойнебург увлекает Лейбница грандиозными планами изменить европейскую политику. Их замыслам тесно в провинциальном Майнце. Они берутся за предложение курфюрста Бранденбургского найти мотивировку для избрания на польский престол немецкого князя. Лейбниц сочинил блестящий меморандум, который, впрочем, не помешал проиграть дело: правильная практическая дипломатия оказалась эффективнее политического памфлета. Следующий прожект касался организации союза немецких государств против Франции. Он содержал немало остроумных ходов, но реализовать его не удалось. Наконец, третий грандиозный проект: вовлечь Францию в войну с Турцией с тем, чтобы ослабить ее влияние в Европе. Для реализации проекта Лейбниц едет в Париж. Единственным результатом было то, что Лейбниц по существу лишился поддержки курфюрста, который не очень был заинтересован в советнике, пытавшемся через его голову перестраивать европейскую политику.

Возможно, то обстоятельство, что Лейбниц остался не у дел, переключило эту кипучую натуру на математику. Первоначально в планах Лейбница математике предназначалась вспомогательная роль. В 1666 г. он издает в Лейпциге «Диссертацию о комбинаторном искусстве», в которой он сообщает, что его не интересует открытие новых арифметических истин: математика должна помочь ему разработать «логику открытия». И в Майнце он находит время для «математических досугов». В 1676 г. он работает над конструкцией арифметической машины, интересуется машиной Паскаля. Лейбниц привез в Париж некоторые математические результаты. Осенью 1672 г. они были темой обсуждения с Гюйгенсом, который в те годы работал в Париже. Речь шла о суммировании числового ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ при помощи подбора такой последовательности $b_1, b_2, b_3, \ldots$, что $a_n = b_n - b_{n+1}$. Тогда $a_1 + \ldots + a_n = b_1 - b_{n+1}$. Лейбниц рассматривает ряд примеров, когда работает его правило, и удачно, что под правило подошел пример, предложенный Гюйгенсом:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

(здесь $b_n = 1/n$). Они оба не знали, что этот прием не был нов, да и речь шла об очень частном вопросе. Лейбниц тем не менее был высокого мнения о своих достижениях. Позднее он трезво оценивал ситуацию: «Когда я приехал в 1672 г. в Париж, я был математиком-самоучкой, но опыт мой был невелик, мне не хватало терпения пройти долг цепь доказательств... Я хотел плавать самостоятельно без учителя ... В этом высокомерном математическом невежестве я уделял внимание только истории и праву, видел в их изучении свою цель. Однако математика была для меня более приятным развлечением».

В 1673 г. Лейбниц посетил Лондон в составе майнцской дипломатической миссии. Контакты с английскими математиками подействовали на него отрезвляюще. Он узнал что его основные результаты не новы, а современная математика далеко впереди. У Лейбница оставался единственный путь войти в современную математику — начать все с начала. 27 лет — не самый подходящий возраст для старта в науку молодых, но Лейбница это не смущает, он имел все основания позднее назвать себя «самым учащимся из смертных» (письмо Я. Бернулли, 1703 г.). С осени 1673 г. начинаются годы математического ученичества Лейбница, умело направляемого Гюйгенсом. Гюйгенс угадал в самоуверенном «переростке» подлинный дар. «...Гюйгенс, который, как я предполагаю, считал меня более способным, чем я был на самом деле, дал мне экземпляр только что изданного „Маятника“. Для меня это было началом или поводом для более глубоких математических занятий.» Итак, все началось с великой книги «Маятниковые часы». Затем последовали Сент-Винцент, Декарт, Слюз, Валлис, и прежде всего Паскаль. Лейбниц увидел, что Паскаль по существу применяет очень общий метод к частной задаче и, пораженный, что «глаза Паскаля были закрыты», пытается вычленить этот метод и применить его к другим задачам. Так появляется так называемый метод «характеристического треугольника», в котором бесконечно малый треугольник заменяется конечным, что было существенным прогрессом по сравнению с методом неделимых. Лейбницу было бы неплохо почитать и более классические тексты, но он торопится; он в самом деле смог пробраться «к геометрии воистину с черного хода». Появляются результаты, удивившие Гюйгенса, например, ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

Потом оказалось, что его знал Грегори. Гюйгенс рассчитывал, что при помощи ряда можно получить квадратуру круга (а Грегори, напротив, рассчитывал таким способом доказать трансцендентность π). Лейбниц занимается не только анализом. Он пытается найти формулу для решения общего алгебраического уравнения (именно общего, частные проблемы его мало интересуют), анализирует формулу Кардано в комплексной области (удивляет Гюйгенса соотношением $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$), работает над циркулем, который позволяет находить корни любого уравнения (подобно тому как обычный циркуль позволяет находить корни квадратного).

Все же главные результаты связаны с бесконечно малыми. Лейбниц писал, что уже в 1673 г. он «заполнил несколько сот страниц», но еще «не считал этот труд достойным быть изданным. Ибо мне наскучило заниматься мелочами, когда передо мной открылся Океан».

Много теорем было получено в первый год «ученичества», но большинство из них можно было найти у Грегори или Барроу. Однако общие приемы позволяли получать все проще и единообразнее. Путь Лейбница был выбран: он строит исчисление бесконечно малых.

Характер его таланта, его предыдущий научный опыт как нельзя лучше отвечали этой цели. Он четко продумывает вопрос о классе функций, которые должно рассматривать в анализе (само слово «функция» впервые появляется у Лейбница в 1673 г.). Он решительно отвергает идею ограничиться алгебраическими функциями (геометрическими кривыми по Декарту) и считает, что необходимо рассматривать и трансцендентные функции (термин Лейбница; Декарт в этих случаях говорил о механических кривых). С первых шагов он сопровождает построение исчисления разработкой символики, которая в конечном счете приняла у него вид, дошедший до наших дней.

Лейбниц, как никто до него, понимал важность удачной символики, причем не только в математике. Исчисление бесконечно малых дало ему прекрасный повод для реализации этой идеи. Хорошая символика не только упрощает пользование исчислением, но и по существу необходима для овладения им. В 1678 г. Лейбниц писал Чирнгаузу: «Следует заботиться о том, чтобы знаки были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления». Лейбниц всюду искал возможность ввести удобную символику. Стоит упомянуть, что к нему восходит метод решения систем линейных уравнений при помощи определителей, в связи с чем он писал Лопиталю (1693 г.): «Часть секрета анализа состоит в искусстве хорошо употреблять применяемые знаки, и по этому малому образцу Вы видите, сударь, что Виет и Декарт еще не познали все его тайны». Следует подчеркнуть, что в исчислении Ньютона не было развитой символики. Он сам писал, что «не дал своего метода в форме символов и не придерживался какого-либо определенного вида символов для флюент и флюксий». Показательно, что Гюйгенс не оценил пользы аналитической символики. При его даровании он был в состоянии без нее обходиться. Лейбниц пытался объяснить преимущества: «Я вполне себе представляю, что вы располагаете методом, эквивалентным моему исчислению разностей. Ибо то, что я называю dx или dy, вы можете обозначить другой буквой. Однако это примерно то же самое, как если бы вместо корней или степеней всегда хотели подставлять буквы … Посудите сами, насколько это было бы затруднительно … » То, без чего мог обойтись Гюйгенс, было совершенно необходимо для превращения анализа в повседневное практическое средство. Вероятно, символика явилась решающей причиной, по которой мы пользуемся сегодня анализом в варианте Лейбница.

Уже в 1674 г. Лейбниц уверен, что «все учение о суммах и квадратурах может быть сведено к анализу — вещь, на которую никто до сих пор не надеялся». К концу 1675 г. в первом приближении исчисление построено, и Лейбниц имел повод убедиться в его эффективности. Важным моментом было решение задачи Дебона, которой занимался Декарт, но не смог довести решение до конца: «Еще в прошлом году я поставил перед собой вопрос, который можно отнести к труднейшим во всей геометрии, поскольку распространенные до сих пор методы здесь почти ничего не дают. Сегодня я нашел его решение и я приведу его анализ» (11 ноября 1675 г.). Речь идет о нахождении кривой с постоянной подкасательной (отрезок между проекцией точки A на ось OX и точкой пересечения касательной в точке A с осью OX). Трудность заключается в том, что решение связано с логарифмической функцией. К середине 1676 г. дифференциальное и интегральное исчисление сложилось окончательно. Он поражается, что «благодаря этому исчислению все предстает перед очами и в уме с восхитительной краткостью и ясностью».

Лейбниц, как и Ньютон, стремился создать мощный метод, не заботясь на этой стадии о достаточно строгом обосновании исчисления. «Ньютон и Лейбниц, повернувшись спиной к прошлому, решили временно искать оправдание новым методам не в строгих доказательствах, а в обилии результатов и их взаимной согласованности» (Н. Бурбаки). Еще на стадии ученичества Лейбницу казалось, что Грегори слишком увлекается «доказательствами на античный лад». Для Лейбница конкретные результаты, в первую очередь, рассматривались как возможная иллюстрация его метода. Возможно, здесь сказалось, что он никогда не умел легко делать выкладки и всегда завидовал вычислителям «из железа или меди». Позднее (1696 г., письмо Лопиталю) он связывал это с тем, что одновременно занимался многими разными вещами: «Моему уму, занятому другими предметами, не удается сосредоточиться в необходимой мере, из-за этого я ежеминутно спотыкаюсь, а когда я напрягаю внимание, у меня появляется неприятное ощущение какого-то жара». В 1699 г.: «вычисления становятся приятнее, когда их делишь с кем-нибудь, а я не в состоянии долго заниматься вычислениями, если мне не помогают».

В 1675 г. в Париже у Лейбница был достойный напарник, его соотечественник Чирнгауз (1651–1708). Их способности были во многом дополнительны, и это делало их сотрудничество особенно плодотворным. Чирнгауз занимался больше всего алгебраическими уравнениями, но интересовался также и квадратурами. Лейбницу было больно, что его товарищ не смог оценить пользу исчисления: «...некоторые квадратуры, которые получены тобою пространно, но изящно, и сами по себе красивы, я считаю только следствиями общего исчисления. А пишу я это, мой друг, так как с сожалением вижу, что ты часто теряешь много времени и только потому, что не пожелал с достаточным вниманием отнестись к некоторым моим замечаниям» (1678 г.).

Лейбниц, разумеется, слышал, что Ньютон владеет какими-то мощными методами, и решает обсудить с ним свой новый метод. Через посредничество Ольденбурга (секретаря Королевского общества) в 1676 г. происходит обмен письмами. Лейбниц сообщает о задачах, которые он умеет решать, просит сообщить о методах Ньютона, обещает рассказать о своем методе. Еще ранее Лейбниц писал Ольденбургу, что создание метода — единственная вещь, которой он придает значение, Результаты Лейбница не удивили Ньютона. Он сразу заметил, что задача Дебона сводится к квадратуре гиперболы (логарифмам), а по поводу ряда для π заметил, что потребовалось бы 1000 лет, чтобы сосчитать 20 десятичных знаков. Очень скупо говорит Ньютон о методе. Ясно лишь, что центр тяжести в его рассмотрениях — на степенных рядах. Ньютон утверждает, что он в состоянии решить при их помощи любое дифференциальное уравнение. Основная часть информации закодирована в двух анаграммах, в которых высказывания зашифрованы первыми буквами содержащихся в них слов (5accdae10effh...). Ньютон расшифровал их много позднее. Это был старинный способ сохранить приоритет. Быть может, концентрация внимания на степенных рядах помешала Лейбницу осознать, что у Ньютона имеется исчисление.

Лейбниц не согласен, что ряды решают все проблемы. «Мы пока, насколько мне известно, не располагаем общим обратным методом касательных». Ему видится иная картина. Надо пытаться сводить решение дифференциальных уравнений к известным квадратурам. Важно разобраться, хватает ли элементарных функций и квадратур гиперболы и круга (логарифмической и тригонометрических функций). Грегори приводил веские аргументы в пользу того, что для вычисления длин дуг эллипса или гиперболы (будущие эллиптические интегралы) этих квадратур мало. Тогда надо «установить какие-то другие высшие основные фигуры» (в другом месте «высшие трансцендентности в геометрии»), которых достаточно для решения дифференциальных уравнений. Ньютона и эта постановка не застает врасплох: он сообщает, при каких α и β интеграл $\int x^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx$ сводится к известным квадратурам. Переписка прервалась по инициативе Ньютона, кроме того в 1677 г. умер Ольденбург, через которого она велась.

Математика и «завоевание умов» государей. Да и жизнь Лейбница решительно поменялась. От его парижского периода остались лишь черновики и наброски статей. У него зреет план подготовки всеобъемлющего труда «Математика бесконечного», но жизненные перемены отвлекли его от математики.

Нам не дано знать, опять ли взыграло у Лейбница политическое честолюбие, или он не нашел возможности обеспечить себе жизнь занятиями наукой (возможно, протестантство помешало ему получить место в Парижской академии наук). Так или иначе, с конца 1676 г. он на службе у герцога Иоганна Фридриха в Ганновере. Он едет в Ганновер кружным путем, посещает Лондон, где видится со многими математиками, но не встречается с Ньютоном, встречается со Спинозой в Голландии.

Итак, Лейбниц смог получить место лишь у второсортного государя, да и то поначалу он лишь герцогский библиотекарь. Не самое завидное место для 30-летнего ученого политика, еще не отказавшегося от честолюбивых замыслов. Но Лейбниц полон энтузиазма и мечтает о лучшей библиотеке в мире, пока размер реально отпускаемых средств не охладил его. Его допускают к юридической деятельности, но предпочитают загружать повседневными делами, к которым он не имел вкуса, в отличие от глобальных юридических проблем. Очень ограниченно допускают Лейбница к дипломатической деятельности. Так, ему поручается подготовить текст, мотивирующий право герцога участвовать во франко-германских мирных переговорах. Иоганн Фридрих был католическим монархом в протестантском государстве, и Лейбниц хотел воспользоваться этим обстоятельством для реализации своей заветной идеи: объединить католическую и протестантскую религии.

В 1678 г. на престоле новый герцог Эрнст Август, при котором дела стали идти хуже. Но Лейбниц полон проектов, спектр которых необычайно велик: усовершенствование кладки печей, производства гвоздей, молотков, усовершенствование колес экипажей, удочек, рулей кораблей, литейного производства, пожарного дела, реорганизация архивов, составление «Свода законов Эрнсто-Августов» и т. д. Почти ни один проект не нашел поддержки. Дальше всего зашло дело с планом усовершенствования водяных двигателей на рудниках в Гарце. В 1685 г. реализация была прервана, поскольку была признана бесперспективной. В каждом проекте Лейбница была остроумная находка, но ему часто не хватало реализма. Успех наступал тогда, когда за доводку идеи брался талантливый практик. Так было с паровой машиной: «...Лейбниц, рассыпая вокруг себя, как всегда, гениальные идеи без заботы о том, припишут ли заслугу открытия этих идей ему или другим, — Лейбниц, как мы знаем теперь из переписки Папена (изданной Герландом), подсказал ему при этом основную идею: применение цилиндра и поршня» (Ф. Энгельс). В качестве курьеза упомянем, что Лейбниц предлагал патеру Гримальди, направлявшемуся в Китай, ознакомить просвещенного императора с двоичной системой счисления и при ее помощи обратить в христианство (доказав единственность божества).

Постоянная борьба за влияние при дворе надолго отвлекла Лейбница от математики. Новое обращение Лейбница к математике стимулировалось двумя обстоятельствами. С 1682 г. при поддержке Лейбница стали выходить «Ученые записки» в Лейпциге, и Лейбниц предполагает публиковать там свои результаты. В 1683–84 гг. в журнале публикуются статьи Чирнгауза о квадратурах, в которых Лейбниц обнаруживает следы своих недавних бесед с автором без необходимых ссылок. Когда-то Лейбниц безуспешно пытался убедить Чирнгауза в эффективности исчисления, теперь он напечатал сам некоторые результаты в этом направлении. Очень вероятно, что Чирнгауз не помнил, что первоисточником его утверждений были высказывания Лейбница. Так бывает, что непонятые мысли прячутся глубоко, а через некоторое время возникают как свои собственные.

В мае 1684 г. Лейбниц напечатал статью с осторожной критикой Чирнгауза (без приоритетных претензий и без указания полной фамилии), а в октябре выходит его знаменитая статья, о которой мы говорили в начале. На семи страницах формулируются основные правила дифференциального исчисления, обсуждается связь с задачами на максимум и минимум и о точках перегиба, рассматривается несколько примеров (вывод закона преломления, задача Дебона). Очень оптимистична оценка: «То, что человек, сведущий в этом исчислении, может получить прямо в трех строках, другие ученейшие мужи принуждены были искать, следуя сложными обходными путями». По существу в это время Лейбниц не занимается анализом. Он лишь печатает немногое из своих математических «кладовых». Он печатает еще несколько статей. Среди них в 1686 г. вышла статья «о глубоко скрытой геометрии и анализе неделимых, а также бесконечных». В ней впервые появляется в печати интеграл (он еще называется суммой, но обозначается через $\int$; термин «интеграл» ввел И. Бернулли). Здесь четко формулируется взаимная обратность операций дифференцирования и интегрирования, подчеркивается необходимость рассмотрения трансцендентных функций в анализе. В статье приводятся краткие исторические замечания. Ньютон называется «глубочайшего дарования геометром». Отмечается, что публикация его методов способствовала «немаловажному приращению науки». На этом фактически закончился второй период математической жизни Лейбница.

Дела при дворе складывались все хуже. К 1685 г. окончательно провалился гарцский проект. Герцог нацелился стать девятым курфюрстом (князья, участвующие в выборах императора). В этой игре Лейбницу отводится немаловажная, но четко ограниченная роль. Он должен провести изыскания по истории дома Вельфов, к которому относился герцог. Они были необходимы для подкрепления претензий. Любознательного Лейбница скромная деятельность историографа вполне привлекала. Она, в частности, давала ему возможность вырваться из Ганновера.

В 1687 г. он отправляется в трехлетнюю поездку для работы в архивах Германии и Италии. За десять лет безвыездной ганноверской жизни его контакты с учеными были крайне ограничены. Он пытается заменить их активной перепиской: еще в Майнце число его корреспондентов приближалось к 50, в Ганновере их число возросло до 70, а к началу нового века и до 200. Все же письма не могут заменить личных контактов. Подводя итоги путешествия, Лейбниц напишет: «Путешествие отчасти послужило тому, чтобы освободить меня от обычных обязанностей и дать моему духу исцеление, и я получил удовлетворение от бесед, которые имел обыкновение вести со многими искусными в науках и эрудированными людьми». Кроме того, Лейбницу тесно на службе у ганноверского герцога. Для его планов важно «завоевать ум большого государя». Он получает аудиенцию у императора Леопольда в Вене («Я прожил день, которого желал уже двадцать лет»). В числе благосклонно встреченных предложений — проект организации Академии наук в Вене. Но скоро императору, занятому войной с Францией, стало не до Академии.

С 1690 г. Лейбниц снова в Ганновере. Он рассчитывает за дватри года закончить «Историю Вельфов». Но оценка оказалась, как всегда, слишком оптимистической. Слишком фундаментальны были его замыслы, а они еще расширялись по мере работы. Ограничивать задачу Лейбниц не умел, и книга тяжелым грузом висела на нем до конца его дней.

В Ганновере Лейбница ждало отправленное еще в 1687 г. письмо Якоба Бернулли (1654 – 1705). Я. Бернулли прочел статьи Лейбница и проникся духом нового исчисления. Пока он ожидал ответа Лейбница, он начал активно работать в анализе, вовлекая в занятия своего младшего брата Иоганна (1667 – 1748). Лейбниц нашел понимание, которого ждал много лет. О лучших учениках не приходилось и мечтать. Лейбниц получил свою научную школу (то, чего был лишен Ньютон). В контактах с братьями Бернулли Лейбниц начал систематически развивать анализ. Они печатали статьи в «Acta eruditorum», обменивались письмами, обсуждали задачи. Позднее к триумвирату присоединился маркиз Лопиталь (1661 – 1704), ученик И. Бернулли. В 1692 г. И.Бернулли изготовил лекции по дифференциальному исчислению, но не опубликовал их, а в 1696 г. вышел первый курс по дифференциальному исчислению — «Анализ бесконечно малых для исследования линий» Лопиталя. Мы не будем останавливаться на результатах, полученных в эти годы Лейбницем и его сотрудниками, но обсудим, как в результате этих исследований менялся взгляд его на анализ.

Еще в конце века Лейбницу кажется, что в математике все сделано: «Я рассматриваю отныне чистую математику только как упражнение, служащее для развития искусства мыслить. Ибо для практических целей в ней почти все открыто с помощью новых методов». В сентябре 1692 г. он сообщает о своих планах Гюйгенсу: «Я хочу, чтобы мы могли еще в этом веке довести до завершения анализ чисел и линий, по крайней мере, в главном, дабы избавить от этой заботы человеческий род, чтобы отныне вся проницательность человеческого разума обратилась к физике». Но, как свидетельствует письмо к Лопиталю от 1708 г., он уже не так оптимистичен: «Не следует удивляться, что анализ бесконечно малых делает только первые шаги и что мы не хозяева положения и в квадратурах, и в обратной задаче касательных и, в еще меньшей мере, при решении дифференциальных уравнений ...» Он ясно видел, что естественные задачи не сводятся к известным квадратурам и не видел способна систематизировать «высшие трансцендентности». Это уже была задача для двух следующих столетий.

Научный авторитет Лейбница рос. Одним из свидетельств этого было избрание его во французскую Академию наук в 1699 г. (как только разрешили выбирать некатоликов). Но ему все труднее было совмещать службу с наукой. Он рвался за пределы Ганновера. С 90-х годов он на службе еще у двух немецких государей. В 1700 – 1711 гг. к этому присоединяется служба у бранденбургского курфюрста Фридриха III, ставшего прусским королем. Здесь по проекту Лейбница организуется научное общество, но интриги заставили Лейбница покинуть Берлин перед самым его открытием. Возобновляется идея организовать имперскую академию в Вене, в 1713 г. это твердо обещают, но потом Карл VI решает отказаться от слишком дорогой игрушки. География интересов Лейбница расширяется: «Я не принадлежу к числу тех, которые питают страсть к своему отечеству или какой-нибудь другой нации, мои помыслы направлены на благо всего человеческого рода; ибо я считаю отечеством небо и согражданами всех благомыслящих людей.» Так писал Лейбниц Петру I в январе 1712 г. Они познакомились в 1711 г. на свадьбе царевича Алексея и несколько раз встречались.

Петр принял Лейбница на русскую службу тайным советником юстиции для помощи в упорядочении российского законодательства. Обсуждается вопрос об организации академии в Петербурге. Круг вопросов, обсуждаемых с царем, необъятен: отыскание пути из полярных морей в Тихий океан, христианские миссии в Китай, объединение православия с католицизмом и протестантизмом (созыв вселенского собора), создание широкой антифранцузской коалиции. Похоже, что они нашли общий язык. Эта активность Лейбница не доставляла радости ганноверскому герцогу. Хотя его и сделали тайным советником, желание Лейбница «дослужиться» до вице-канцлера не осуществилось. Новый герцог (с 1698 г.) Георг Людвиг настойчиво выражает желание наконец увидеть «книгу-невидимку» — давно ожидаемую «Историю Вельфов». Лейбница по существу отстраняют от всех дел и стараются ограничить его внешние контакты. За ним прочно укрепляется репутация охотника за государями, о чем свидетельствует недоброе высказывание его помощника по историческим занятиям Эккарда (оно относится ко времени предсмертной болезни): «если царь или дюжина вельмож пообещают ему жалование, то он сможет подняться». А тяжело больной ученый из последних сил пытается завершить нескончаемую «Историю».

О систематических занятиях наукой не могло быть и речи. В 1695 г. он пишет: «Нет слов, чтобы описать, насколько я не сосредоточен. Ищу в архивах разные вещи и собираю ненапечатанные рукописи, с помощью которых надеюсь пролить свет на историю Брауншвейгского дома. Я получаю и отправляю немалое число писем. У меня столько нового в математике, столько мыслей в философии, столько других литературных заметок, которым я не могу дать погибнуть, что я часто не знаю, за что раньше приняться, и я чувствую, как прав был Овидий, восклицая: изобилие делает меня нищим … Уже свыше двадцати лет назад французы и англичане видели мою счетную машину … Теперь же с помощью собранных мною рабочих готова машина, позволяющая перемножать до двенадцати разрядов … А прежде всего я хотел бы закончить свою „Динамику“, в которой, я полагаю, наконец нашел истинные законы материальной природы … Мои друзья, которые знают о построенной мною высшей геометрии, настаивают на издании моей „Науки о бесконечном“, содержащей основы моего нового анализа. К этому надо добавить новою „Характеристику положения“, над которой я работаю, и еще значительно более общие вещи относительно искусства открытия. Но все эти работы, за вычетом исторических, идут украдкой. Вы ведь знаете, что при дворе ищут и ожидают совсем иного! Поэтому время от времени мне приходится заниматься вопросами международного права и прав имперских князей, особенно моего господина … Тем временем мне часто приходится обсуждать религиозные разногласия … И я все же стараюсь привести в порядок мои юридические размышления. » В 1697 г.: «Если вы все это взвесите, ⟨…⟩ то пожелаете мне иметь помощников, молодых людей или друзей, ученых проницательных и прилежных, которые хотели бы меня поддержать. Ибо я многое могу дать, но не все из того, что я вижу, я могу завершить, и я охотно передал бы это другим, если бы это дало им самим прославиться, лишь бы это послужило общему делу, благу человеческого рода и тем самым славе Божьей». В письме И. Бернулли от 1697 г.: « … ежедневные размышления на темы не только математики но и физики, и самой глубокой философии, истории и права, размышления, которые я записываю самым кратким образом, чтобы не дать им пропасть ⟨…⟩ Добавьте к этому мои идеи о построении естественного права ⟨…⟩; но прежде всего я занят новым анализом для рассуждений всякого рода … Предоставляю вам самому решать, много ли у меня времени для основательных занятий геометрией». О математике он часто думал в экипаже (из письма И.Бернулли мы узнаем, что так он придумал правило дифференцирования интеграла по параметру в 1697 г.). Идеи переполняют ученого; он увлечен замыслом создания «геометрии положения». «Я не решаюсь еще опубликовать мои проекты характеристики положения, ибо если я не придам ей убедительность, приведя сколько-нибудь существенные примеры, то ее примут за фантазию. Тем не менее я предвижу, что дело не может не удаться» (письмо Лопиталю, 1694 г.). Разумеется, ничего не было опубликовано, а великий замысел пытался разгадать Эйлер. Когда в XIX веке создавалась дифференциальная геометрия, а затем топология, каждый раз думали, что это и есть осуществление проекта Лейбница.

Последние годы жизни Лейбница были омрачены полемикой с Ньютоном о приоритете. Постепенно спор перерос в обвинение Лейбница в плагиате. Намекали на то, что он, возможно, познакомился с рукописями Ньютона в Лондоне. Сегодня независимость открытия Лейбница представляется доказанной. В Лондоне не было достаточно подробного текста, в первый приезд Лейбниц не был готов воспринять теорию Ньютона, не было никого, кто понимал исчисление настолько, чтобы передать его Лейбницу; ко второму визиту в Лондон Лейбниц уже владел своим исчислением. Вначале полемика проходила без участия Ньютона и Лейбница. Удивительно, что Ньютон, который всегда уходил от приоритетных споров, да и мало заботился о сохранении приоритета, на этот раз энергично включился в полемику. Вероятно, Лейбниц очень задел его, ни разу не признав в нем творца нового исчисления (теперь уже появились публикации). В Англии организовали подлинную травлю Лейбница. Была создана специальная комиссия, был подготовлен сборник материалов. В 1714 г. Лейбниц пытается написать свою «Историю и происхождение дифференциального исчисления», но он не смог противостоять английскому давлению.

Все осложнилось еще из-за того, что в 1714 г. герцог становится королем Англии Георгом I. Лейбниц рассчитывает переехать в Лондон, стать королевским историографом, но ему в оскорбительной форме отказывают даже в поездке на коронацию (заставляя завершать «Историю»). Сыграло свою роль и то, что король не хотел иметь в своей свите поверженного противника Ньютона, ставшего всеанглийской знаменитостью. Умер Лейбниц в 1716 г. Его скромно похоронили под плитой с краткой надписью «Прах Лейбница».

Когда-то Лейбниц писал Петру I: «Хотя мне часто приходилось действовать на политическом и юридическом поприщах, и знатные князья иногда в этих вопросах пользуются моими советами, я все-таки предпочитал науки и искусства, так как они постоянно содействуют славе Господней и благосостоянию всего рода человеческого $\langle\ldots\rangle$ науки и ремесла составляют настоящее сокровище человеческого рода, ибо посредством их искусство превозмогает природу и цивилизованные народы отличаются от варварских. Поэтому я с малолетства любил науки, занимался ими и имел счастье ⟨...⟩ сделать разные и очень важные открытия, восхваленные в печати беспристрастными и знаменитыми людьми. Я не находил только могущественного государя, который достаточно интересовался бы этим».

По-видимому, с годами приоритеты Лейбница сместились: он долго отдавал предпочтение политике перед наукой, но жизнь жестоко научила его, как неблагодарно положение ученого во дворцах.