КОМПЛЕКСНЫЙ МИР РОДЖЕРА ПЕНРОУЗА

> Нельзя придумать ничего столь странного и невероятного, что не было бы уже высказано кем-либо из философов.
>
> *Р. Декарт*

На математическом конгрессе, который проходил в Хельсинки летом 1978 г., Роджер Пенроуз сделал пленарный доклад «Комплексная геометрия реального мира». Основная идея Пенроуза заключалась в том, что точки четырехмерного пространства-времени Минковского или Евклида (в евклидовой теории поля) естественно интерпретировать как комплексные прямые в трехмерном комплексном пространстве. Эта идея разрабатывалась Пенроузом в течение ряда лет в рамках его «твисторной программы» (твисторами он называет точки вспомогательного трехмерного комплексного пространства). Незадолго перед конгрессом появились первые результаты, которые уже нельзя было рассматривать как чисто интерпретационные (инстантонные решения уравнения Янга–Миллса и комплексные автодуальные решения уравнения Эйнштейна).

Что касается подхода Пенроуза, то он по существу не был новым: комплексная реализация пространства Минковского содержалась в теории однородных многообразий, восходящей к Эли Картану (1869 – 1951). Однако существенно не само по себе геометрическое наблюдение, а идея сделать его систематическим источником аналитических конструкций, а именно интегральных представлений для решений некоторых важных линейных и нелинейных уравнений математической физики. По счастливой случайности именно в это время в математике (алгебраической геометрии и теории функций многих комплексных переменных) появился весьма неэлементарный аппарат, необходимый для реализации этих планов (расслоения над проективным пространством, когомологии Коши–Римана ...).

Возвращаясь к геометрической идее Пенроуза, вероятно, нельзя не удивиться тому, что при изучении совершенно вещественного объекта — пространства-времени — появляются комплексные образования. Впрочем, геометрам второй половины XIX века такая возможность не показалась бы удивительной. Конструкция Пенроуза связана с математическими идеями, которым более ста лет и которые в последние десятилетия незаслуженно (быть может, из-за большой конкретности) стали забывать. Речь идет об идее Юлиуса Плюккера (1801 – 1868) рассматривать пространство, элементами (точками!) которого являются прямые из обычного трехмерного пространства. Эта идея разрабатывалась Плюккером на протяжении многих лет и в окончательном виде содержалась в посмертно изданном в 1868 – 1869 гг. Ф. Клейном и Р. Клебшем мемуаре «Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой линии в качестве пространственного элемента». Размерность пространства прямых равна четырем, и это, вероятно, первое четырехмерное пространство, появившееся в науке. Кажется удивительным, что в период появления четырехмерия в теории относительности и всеобщего увлечения четырехмерными образованиями никто не сопоставил четырехмерие Минковского с появившимся на 50 лет раньше четырехмерием Плюккера. В некотором смысле это и сделал Пенроуз (еще через 50 лет). Попытаемся и мы проследить возможный путь от Юлиуса Плюккера к Герману Минковскому (1864 – 1909), но для этого припомним еще более ранние события.

«Золотой век геометрии». Так Н. Бурбаки назвал XIX век — век развития проективной геометрии с ее фантастическим полетом геометрической интуиции и мощными аналитическими методами. Ведущее место проективной геометрии в геометрии XIX века было бесспорным. Характерно, что признание неевклидовой геометрии многими математиками было связано с реализацией ее как части проективной геометрии (интерпретация Клейна). Но зародилась проективная геометрия (ее называли еще новой геометрией) гораздо раньше. Лионский архитектор Жерар Дезарг

(1593 – 1662) опубликовал в 1639 г. брошюру «Первоначальный набросок попытки разобраться в том, что получается при встрече конуса с плоскостью». Дезарг строил теорию перспективы и изучал центральную проекцию одной плоскости на другую. Заметив, что при этом на первой плоскости есть точки, которые никуда не проектируются, а на второй — точки, в которые не проектируются никакие точки, он решил исправить это, введя идеальные бесконечно удаленные точки на плоскости. В модернизированном виде его идея состоит в том, что все параллельные между собой прямые «пересекаются» в одной общей бесконечно удаленной точке, а все бесконечно удаленные точки на плоскости образуют одну бесконечно удаленную прямую, которой следует дополнить плоскость. На расширенной (проективной) плоскости все утверждения о параллельности превращаются в частные случаи обычных утверждений о пересечении прямых, которые к тому же не имеют ограничений (любые две различные прямые пересекаются в единственной точке, быть может, бесконечно удаленной). Идеи проективной геометрии воспринимались с большим трудом, к тому же и Дезарг не смог придать им удобную для понимания форму. Среди участников кружка Марена Мерсенна (1588 – 1648) — предвестника Парижской Академии наук — он нашел лишь одного последователя. Это был 16-летний Блез Паскаль (1623 – 1662), доказавший знаменитую теорему о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение. Техника проективной геометрии позволила Паскалю свести общий случай к случаю окружности, так как по определению любое коническое сечение получается из окружности в результате центрального проектирования. Вообще, основные планы Дезарга и Паскаля состояли в том, чтобы с помощью проективной геометрии пролить свет на теорию конических сечений Аполлония — вершину греческой геометрии. Уже давно новая европейская математика, имевшая огромные успехи в алгебре и анализе, стремилась сразиться с великими греками на их собственной территории — геометрии. Казалось, что Дезарг и Паскаль достигли успеха, но сочинений Дезарга никто не мог понять, а Паскаль так и не закончил своего всеобъемлющего сочинения по проективной геометрии, оставив потомкам лишь маленькую афишу со своей теоремой о шестиугольнике. Об их работах забыли на 200 лет, а когда благодаря

Мишелю Шалю (1793 – 1880) вспомнили, большинство результатов было открыто заново.

Новая жизнь проективной геометрии началась в работах Гаспара Монжа (1746 – 1818) и его учеников, среди которых был Виктор Понселе (1788 – 1867). В работах Понселе, по словам Феликса Клейна (1849 – 1925), появляется новый вид геометрического мышления — проективное мышление. Находясь в плену в Саратове после похода Наполеона 1812 г., Понселе предавался буйной геометрической фантазии, делясь своими открытиями с товарищами по Политехнической школе, учениками Монжа. Свои результаты он собрал в «Трактат о проективных свойствах фигур», вышедший лишь через десять лет. К систематическим занятиям геометрией он уже больше не вернулся: отвлекали государственные и военные дела, преподавание, занятия фортификацией, теорией машин («водяное колесо Понселе»). К концу жизни он снова занялся геометрией, но в основном огорчался, что не смог регулярно уделять внимание математике, что другие разрабатывают проективную геометрию не так, как по его мнению следовало бы, и что Шаль некстати вспомнил о Дезарге.

Понселе исходит из того, что так как на проективной плоскости не бывает исключений во взаимном положении прямых, то не должно быть исключений и во взаимном положении кривых второго порядка. Но почему же тогда эллипсы обычно пересекаются в четырех точках, а их частный случай — окружности — только в двух? И Понселе находит ответ: все окружности проходят через две фиксированные точки (их называют циклическими). Однако мы не замечаем этих точек, поскольку они, с одной стороны, являются бесконечно удаленными, а с другой — мнимыми. Так в вещественной геометрии впервые появились комплексные числа (к которым и в алгебре только начинали привыкать!). Циклические точки стали одним из основных объектов геометрии: с их помощью можно объяснить все вещественные метрические соотношения на плоскости.

Другое поразительное открытие Понселе, честь которого он делит с Жозефом Жергонном (1771 – 1859), — это закон двойственности — новый способ получения геометрических утверждений. Грубо говоря, он состоит в том, что в теореме о взаимном положении точек и прямых на проективной плоскости можно всюду поменять местами слова «прямая» и «точка» и несколько отредактировать текст (заменить «пересекается» на «проходит» и т. д.), чтобы сделать его осмысленным, после чего получается новая теорема. Например, утверждение «Две различные прямые имеют общую точку» (пересекаются) переходит в новое утверждение «Через две различные точки проходит единственная прямая».

Отныне проективизм становится господствующим методом в геометрии. Впрочем, долгое время проективные идеи воспринимались как некоторое устройство («черный ящик») для получения евклидовых теорем. Бесконечно удаленные элементы воспринимались как идеальные чужеродные элементы, упрощающие рассмотрения (так сначала воспринимались и комплексные числа). Однако последовательный проективизм требует рассматривать бесконечно удаленные точки как неотличимые от конечных и при этом не интересуется, например, поведением кривых на бесконечности (асимптотами и т. д.). Дискуссии об идеях проективной геометрии надолго заняли умы геометров. Это становится особенно заметным, если обратиться к немецкой геометрии середины XIX века, когда творили такие замечательные геометры, как Фердинанд Мёбиус (1790–1868), Юлиус Плюккер, Якоб Штейнер (1796–1863), Кристиан фон Штаудт (1798–1867). Их деятельность проходила в обстановке ожесточенной борьбы между «аналитиками» и «синтетиками», разногласия между которыми могут показаться сегодня не более аргументированными, чем противоречия между остроконечниками и тупоконечниками у Свифта. Аналитики пользовались преимущественно координатным представлением геометрических образов, открывавшим возможность для использования методов алгебры и анализа. Синтетики считали, что эти методы лишают геометрию ее истинного духа, подлинной геометрической интуиции.

Среди синтетиков наиболее активен был Штейнер, крестьянский сын, который до 19 лет ходил за плугом, затем был учеником и сподвижником знаменитого педагога Иоганна Песталоцци (1746–1827), и лишь в зрелом возрасте обратился к математике. Штейнер обладал удивительной геометрической интуицией, полет его пространственного воображения нельзя было передать даже чертежами, и он отказывался от них на лекциях, которые читались в затемненных аудиториях, чтобы помочь слушателям сосредоточиться. Решительный протест вызывали у Штейнера комплексные числа, эти «призраки», «царство теней в геометрии», которыми так много пользовались аналитики. По мнению Клейна, возможно, нетерпимость Штейнера была причиной того, что Плюккер (типичный аналитик) прекратил надолго занятия геометрией и возобновил их лишь после смерти Штейнера.

Проективные координаты. Аналитики ставили перед собой задачу такого введения координат на проективной плоскости, при котором можно было охватить не только конечные, но и бесконечно удаленные точки. Здесь решающая конструкция (однородные координаты) принадлежит Юлиусу Плюккеру. Он предложил характеризовать точки проективной плоскости не двумя, а тремя числами $(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$, но считать, что отличающиеся общим множителем тройки (x_0, x_1, x_2) и $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ соответствуют одной и той же точке плоскости. Тогда можно считать, например, точки с $x_0 \neq 0$ «конечными» и для них всегда брать тройки с $x_0 = 1$, т. е. $(1, X_1, X_2)$, где $X_1 = x_1/x_0, X_2 = x_2/x_0$ — неоднородные (декартовы) координаты. Точки с $x_0 = 0$ составляют бесконечно удаленную прямую. Впрочем, эту прямую можно фиксировать произвольно. Проективные преобразования плоскости, при которых прямые переходят в прямые, соответствуют линейным преобразованиям однородных координат. Прямые на проективной плоскости задаются уравнениями $\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$, где $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \neq (0, 0, 0)$ определяется с точностью до скаляряого множителя. Это навело Плюккера на мысль считать (ξ_0, ξ_1, ξ_2) однородными координатами прямых, и тогда получается, что прямые образуют другой (двойственный) экземпляр проективной плоскости. Такая интерпретация делает предельно прозрачным принцип двойственности Понселе–Жергонна.

С помощью однородных координат легко понять и теорему Понселе о пересечении окружностей, которая в синтетическом варианте требует высокой геометрической интуиции. В неоднородных координатах уравнения окружностей имеют вид $X_1^2 + X_2^2 + aX_1 + bX_2 + c = 0$, или в однородных координатах

$$x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_0 + bx_2x_0 + cx_0^2 = 0.$$

Ясно, что на всех этих кривых лежит пара точек $(0, 1, i)$, $(0, 1, -i)$, т. е. это в самом деле мнимые бесконечно удаленные точки ($\{x_0 = 0\}$ — бесконечно удаленная прямая).

В трехмерном проективном пространстве точки характеризуются четырьмя числами $(x_0, x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0, 0)$, заданными с точностью до пропорциональности. Можно считать, что $\{x_0 = 0\}$ — бесконечно удаленная плоскость. Плоскости задаются уравнениями $x_0\xi_0 + \ldots + x_3\xi_3 = 0$, т. е. имеется двойственность между проективным пространством точек и проективным пространством плоскостей.

Многообразие прямых (плюккеровы координаты). Следующий естественный вопрос, который заинтересовал Плюккера, — это конструкция совокупности прямых в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. Оказалось, что в отличие от ситуации с плоскостями (и с прямыми на плоскости) мы приходим здесь к совершенно новому геометрическому образованию. Множество прямых в $\mathbb{P}^3$ зависит от четырех параметров. В декартовых координатах X_1, X_2, X_3 почти все прямые можно записать в виде $X_1 = \alpha_1 X_3 + \beta_1$, $X_2 = \alpha_2 X_3 + \beta_2$. Этой параметризацией не охвачены прямые, параллельны плоскости $X_1 O X_2$, а есть еще и бесконечно удаленные прямые.

Плюккер предлагает ввести координаты на всей совокупности прямых. Он рассуждает следующим образом. Прямая определяется парой своих различных точек, т. е. $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ (однородные координаты в $\mathbb{P}^3$), где x и $\tilde{x}$ не пропорциональны. Однако эти пары можно выбирать разными способами. Чтобы избавиться от этой неопределенности, следует рассмотреть выражения

$$p_{ij} = x_i \tilde{x}_j - x_j \tilde{x}_i, \tag{48}$$

уже не зависящие (с точностью до пропорциональности) от выбора точек. При этом $p_{ii} = 0$, $p_{ij} = -p_{ji}$. Назовем набор шести чисел p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23} *плюккеровыми координатами прямой.* Поскольку точки задавались однородными координатами, наборы $\{p_{ij}\}$ и $\{\lambda p_{ij}\}$ соответствуют одной и той же прямой. Если все p_{ij} равны нулю, то x и $\tilde{x}$ пропорциональны, что мы исключили. В результате естественно рассматривать ненулевой набор из шести чисел $\{p_{ij}\}$ с точностью до пропорциональности в качестве однородных координат точки в пятимерном проективном пространстве $\mathbb{P}^5$.

Итак, множество прямых оказалось естественно вложенным в $\mathbb{P}^5$. Поскольку оно зависит от четырех параметров, числа p_{ij} должны удовлетворять еще одному соотношению. И действительно, можно проверить, что всегда выполнено тождество

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0. \tag{49}$$

Нетрудно также убедиться, что других соотношений нет, а именно: по любому ненулевому набору чисел $\{p_{ij}\}$, удовлетворяющих соотношению (49), можно найти x, $\tilde{x}$, удовлетворяющие условию (48).

С геометрической точки зрения уравнение (49) задает в $\mathbb{P}^5$ поверхность второго порядка. Если перейти к координатам

$$\begin{aligned} p_{01} &= u_0 - u_3, & p_{23} &= u_0 + u_3, & p_{02} &= u_4 - u_1, \\ p_{13} &= u_4 + u_1, & p_{03} &= u_2 - u_5, & p_{12} &= u_2 + u_5, \end{aligned}$$

то уравнение (49) запишется в виде

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 = 0. \tag{50}$$

Таким образом, множество прямых в трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ вкладывается как поверхность второго порядка («квадрика») (50) (или (49)), в пятимерное проективное пространство $\mathbb{P}^5$. Это открытие Плюккера сыграло принципиальную роль в формировании современных математических идей; оно устанавливало изоморфизм двух совершенно различных геометрических структур: многообразия прямых в $\mathbb{P}^3$ и квадрики в $\mathbb{P}^5$. После этого лучшие геометры Софус Ли (1842–1899), Феликс Клейн, Эли Картан с любовью коллекционировали подобные изоморфизмы. Но потом интересы сместились в сторону общего взгляда на многообразия, когда работают лишь с координатами, не интересуясь геометрической природой точек.

Последователей Плюккера интересовал в первую очередь следующий вопрос: если рассматривать уравнение квадрики в $\mathbb{P}^5$ не с тремя плюсами и тремя минусами (сигнатура (3.3)), как в (50), а с сигнатурой (4.2) или (5.1), то будут ли допускать эти квадрики аналогичную геометрическую интерпретацию? Софус Ли обнаружил, что во множестве сфер в трехмерном пространстве можно таким естественным образом ввести однородные координаты, что в $\mathbb{P}^5$ получится квадрика сигнатуры (4.2) (геометрия сфер Ли). Феликс Клейн ввел в четырехмерном пространстве некоторые довольно изысканные координаты, которые он назвал «гексосферическими», и эти координаты заполнили в $\mathbb{P}^5$ квадрику сигнатуры (5.1).

Нас также будет интересовать эта задача, но мы рассмотрим другой путь ее решения. Дело в том, что при переходе к комплексному пространству исчезает различие между квадриками с различными сигнатурами, так как, умножая на i, всегда можно перейти к координатам, в которых уравнение имеет вид $z_0^2 + \ldots + z_5^2 = 0$ (все вещественные квадрики являются вещественными формами одной комплексной). Привычная логика проективной геометрии заключается в том что если мы хотим перейти от одной вещественной формы к другой, то нужно «окомплексить» задачу и осуществить переход в комплексном пространстве.

Комплексная картина. Пусть $\mathbb{CP}^3$ — комплексное проективное пространство, $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ — комплексные однородные координаты; через точки $z, \tilde{z}$ проходит комплексная прямая, состоящая из точек вида $\lambda z + \mu \tilde{z}$. В множестве комплексных прямых вводятся комплексные плюккеровы координаты p_{ij}, удовлетворяющие уравнению (49), которое приводится к виду (50), где u_j комплексны.

На комплексной квадрике $Q \subset \mathbb{CP}^5$, задаваемой уравнением (50), рассмотрим вещественные подповерхности. Если считать все u_j вещественными, то будем иметь случай, рассмотренный выше. Однако u_0, u_1, u_2, u_5 можно считать вещественными, а $u_3 = iv_3$, $u_4 = iv_4$ — чисто мнимыми, или только $u_3 = iv_3$ чисто мнимым, а остальные координаты вещественными. Тогда получим вещественные поверхности (u и v вещественны!):

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + v_3^2 + v_4^2 - u_5^2 = 0, \tag{S}$$

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + v_3^2 - u_4^2 - u_5^2 = 0. \tag{H}$$

Это соответственно сфера и однополостный гиперболоид (в однородных координатах). Поскольку эти вещественные поверхности лежат на комплексной квадрике Q, а точкам Q соответствуют комплексные прямые, то естественно попытаться выяснить, какие комплексные прямые соответствуют точкам поверхностей (S) и (H).

Интерпретация вещественных квадрик на языке комплексных прямых (случай сферы). В случае (S) имеем:

$$\begin{aligned} &p_{01} = u_0 - iv_3, \qquad &&p_{23} = u_0 + iv_3, \qquad &&p_{02} = iv_4 - u_1, \\ &p_{13} = iv_4 + u_1, \qquad &&p_{03} = u_2 - u_5, \qquad &&p_{12} = u_2 + u_5. \end{aligned}$$

Таким образом, точкам (S) соответствуют плюккеровы координаты, удовлетворяющие условиям:

$$p_{23} = \bar{p}_{01}, \quad p_{13} = -\bar{p}_{02}, \quad \operatorname{Im} p_{03} = \operatorname{Im} p_{12} = 0. \tag{51}$$

Этими условиями точки (S) полностью характеризуются. Тогда, если прямая с такими плюккеровыми координатами проходит через $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$, то можно считать, что второй точкой будет $\tilde{z} = (-\bar{z}_3, \bar{z}_2, -\bar{z}_1, \bar{z}_0)$. Итак, точкам вещественной квадрики (S) соответствуют комплексные прямые в $\mathbb{CP}^3$, проходящие через точки (z_0, z_1, z_2, z_2) и $(-\bar{z}_3, \bar{z}_2, -\bar{z}_1, \bar{z}_0)$.

Чем примечательны эти прямые? Через каждую точку $z \in \mathbb{CP}^3$ проходит прямая такого вида, причем единственная. В результате все пространство $\mathbb{CP}^3$ разбивается в объединение непересекающихся прямых. Это разбиение (расслоение) играет важную роль в математике, и появилось оно не слишком давно, вне связи с рассмотрениями Плюккера. Если пересечь полученное расслоение $\mathbb{CP}^3$ с вещественным проективным пространством $\mathbb{P}^3$, то получится расслоение $\mathbb{P}^3$ на прямые, соединяющие (x_0, x_1, x_2, x_3) и $(-x_3, x_2, -x_1, x_0)$. На простом языке мы получаем разбиение обычного трехмерного пространства на попарно скрещивающиеся прямые (в таком виде задача была предложена на Московской математической олимпиаде в 1979 г.). Реализация (S) в качестве расслоения $\mathbb{CP}^3$ — это первая из основных конструкций теории твисторов.

Реализация гиперболоида как семейства прямых. В случае (H) имеем:

$$p_{23} = \bar{p_{01}}, \quad \operatorname{Im} p_{13} = \operatorname{Im} p_{02} = \operatorname{Im} p_{03} = \operatorname{Im} p_{12} = 0. \tag{52}$$

Пусть сначала для простоты $p_{03} \neq 0$. Ввиду однородности координат можно считать $p_{03} = 1$ и выбирать точки на соответствующей прямой с координатами $z_0 = \tilde{z}_3 = 1$, $z_3 = \tilde{z}_0 = 0$. После этого они находятся однозначно. Из условия (52) следует, что $z = (1, a, c, 0)$, $\tilde{z} = (0, c, b, 1)$, где a и b вещественны. Чем же примечательны прямые, проходящие через данные пары точек? Непосредственно проверяется, что все точки, лежащие на этих прямых (т. е. точки вида $w = \lambda z + \mu\tilde{z}$, λ, μ комплексные), должны удовлетворять условию

$$\operatorname{Im}(w_1\bar{w}_0 + w_2\bar{w}_3) = 0. \tag{53}$$

Если снять ограничение $p_{03} \neq 0$, то окажется, что других прямых, все точки которых удовлетворяют условию (53), нет. Следовательно, условие (53) задает в $\mathbb{CP}^5$ поверхность N вещественной размерности 5 так, что все комплексные прямые, лежащие на N, — это прямые, плюккеровы координаты которых удовлетворяют условию (52), а, стало быть, это прямые, соответствующие точкам вещественной поверхности (H). Заметим, что поверхность N полностью содержит вещественное проективное пространство $\mathbb{P}^3$, и что, вообще говоря, семейство комплексных прямых, зависящее от четырех вещественных параметров, как следует из подсчета размерностей, заполняет область в $\mathbb{CP}^3$. Поэтому можно ожидать, что поверхность N обладает уникальными свойствами Действительно, это единственная, с точностью до проективных преобразований, поверхность, на которой умещается четырехпараметрическое семейство комплексных прямых. Этот результат имеет вещественный аналог. Имеется много линейчатых поверхностей в трехмерном пространстве, на которых лежит однопараметрическое семейство прямых, но лишь на однополостном гиперболоиде лежат два различных семейства (этим свойством из неплоских поверхностей обладает еще гиперболический параболоид $X_3 = X_1^2 - X_2^2$, но с проективной точки зрения он эквивалентен однополостному гиперболоиду).

Подведем некоторые итоги. Мы начинали с квадрики вещественных прямых в $\mathbb{P}^3$, затем перешли к квадрике комплексных прямых в $\mathbb{CP}^3$. Среди вещественных поверхностей второго порядка, лежащих на этой комплексной поверхности, имеются как поверхность вещественных прямых, так и два других типа поверхностей: одни поверхности соответствуют расслоениям комплексного проективного пространства $\mathbb{CP}^3$ на комплексные прямые, а — другие пятимерным вещественным поверхностям в $\mathbb{CP}^3$, на которых имеется семейство комплексных прямых, зависящее от четырех вещественных параметров. На этом примере отчетливо виден феномен, который «выстрадали» геометры XIX века. Во-первых, вещественные объекты часто допускают интерпретацию на комплексном языке. Во-вторых, если мы делаем вещественную задачу комплексной, а затем, обратно, смотрим, какие вещетвенные задачи приводят к той же комплексной, то часто получаем новые содержательные геометрические задачи.

Метрика в многообразии прямых. Плюккер и его последователи занимались также изучением геометрии многообразия прямых $Q \subset \mathbb{CP}^5$. Они исследовали, как преломляются на языке Q различные геометрические факты об исходном проективном пространстве $\mathbb{CP}^3$. Точкам в $\mathbb{CP}^3$ соответствуют на Q двумерные поверхности прямых, проходящих через эти точки, плоскостям — двумерные поверхности прямых, лежащих в этих плоскостях (два семейства плоских образующих квадрики Q). Результативным был и обратный путь, когда в $\mathbb{CP}^3$ рассматривались семейства прямых, плюккеровы координаты которых удовлетворяли одному соотношению (комплексы) или двум (конгруэнции). В качестве примера рассмотрим такой факт.

Прямые в трехмерном пространстве иногда пересекаются. Как выражается это в плюккеровых координатах? Оказывается, что если $\{p_{ij}\}$ и $\{p'_{ij}\}$ — плюккеровы координаты двух прямых, то они пересекаются тогда и только тогда, когда

$$p_{01}p'_{23} - p_{02}p'_{13} + p_{03}p'_{12} + p_{23}p'_{01} - p_{13}p'_{02} + p_{12}p'_{03} = 0. \qquad (54)$$

Мы выведем тождество (54) при упрощающем предположении (которое уже однажды делалось), что $p_{03} \neq 0$, $p'_{03} \neq 0$. Тогда $p_{03} = p'_{03} = 1$, и прямые проходят соответственно через точки $(1, \alpha_1, \alpha_2, 0), (0, \beta_1, \beta_2, 1)$ и $(1, \alpha_1', \alpha_2', 0), (0, \beta_1', \beta_2', 1)$ (по существу мы перешли от однородных координат к неоднородным). В этом случае точки прямой p задаются уравнениями

$$z_1 = \alpha_1 z_0 + \beta_1 z_3, \quad z_2 = \alpha_2 z_0 + \beta_2 z_3,$$

и аналогично для p'

$$z_1 = \alpha_1' z_0 + \beta_1' z_3, \quad z_2 = \alpha_2' z_0 + \beta_2' z_3.$$

Прямые пересекаются, если имеется общее решение (z_0, z_1, z_2, z_3) этой системы четырех уравнений или системы двух уравнений с двумя неизвестными (z_0, z_3):

$$\begin{cases} z_0(\alpha_1 - \alpha_1') + z_3(\alpha_2 - \alpha_2') = 0, \\ z_0(\beta_1 - \beta_1') + z_3(\beta_2 - \beta_2') = 0. \end{cases} \tag{55}$$

Таким образом, прямые пересекаются тогда и только тогда, когда равно нулю выражение

$$\begin{aligned} &\rho(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = \\ &\quad = (\alpha_1 - \alpha_1')(\beta_2 - \beta_2') - (\alpha_2 - \alpha_2')(\beta_1 - \beta_1'). \end{aligned} \tag{56}$$

Современный математик назвал бы выражение (56) «расстоянием». Правда, это выражение может быть равно нулю при $p \neq p'$, и вообще комплексно. Но это не смущало даже геометров XIX века. Клейн вспоминает, как любили они пользоваться прямыми, расстояние вдоль которых равно нулю (изотропные прямые). Ли называл эти прямые «сумасшедшими» и говорил, что французские геометры умеют с их помощью получать доказательства «по воздуху». Назовем и мы величину ρ расстоянием между прямыми $p = (\alpha, \beta)$ и $p' = (\alpha', \beta')$.

Итак, расстояние ρ равно нулю тогда и только тогда, когда прямые пересекаются. Этим условием расстояние определяется почти однозначно. Более строго расстояние определяется с точностью до конформной замены (гомотетии). Это означает, что однозначно определяются углы и отношения расстояний в окрестности любой фиксированной точки с точностью до величин, малых относительно расстояний до этой точки.

Свяжем с каждой точкой $p \in Q$ множество точек $V_p \subset Q$, находящихся от p на нулевом расстоянии ($\rho(p,p') = 0$, прямые p, p' пересекаются). Множество V_p называется конусом изотропии; оно совпадает с пересечением квадрики Q и касательной плоскости к Q в точке p.

Расстояние на поверхностях (S), (H). Найдем след расстояния ρ на поверхности (S). Мы опять ограничимся точками, у которых $p_{03} \neq 1$. Тогда из условия (51) следует, что $\beta_1 = \bar{\alpha}_2$, $\beta_2 = -\alpha_1$, и в качестве координат на (S) можно брать только пару комплексных чисел (α_1, α_2). Следовательно,

$$\rho_{(S)}(\alpha;\alpha') = |\alpha_1 - \alpha_1'|^2 + |\alpha_2 - \alpha_2'|^2. \tag{57}$$

Это расстояние уже лишено всех недостатков расстояния ρ в общем случае: оно неотрицательно и обращается в нуль только при $\alpha = \alpha'$. Полученный факт согласуется с тем, что прямые, которые соответствуют точкам (S), не пересекаются. Мы получили обычное евклидово расстояние на четырехмерной вещественной сфере в пятимерном евклидовом пространстве.

Теперь ограничим ρ на гиперболоид (H) и вновь возьмем точки $p_{03} = 1$. Пусть $M \subset$ (H) — множество таких точек на (H). Тогда, в силу условий (52), α_1, β_2 вещественны, а $\beta_1 = \bar{\alpha}_2$. Сделаем замену: $\alpha_1 = t - x_1$, $\beta_2 = t + x_1$, $\beta_1 = x_2 + ix_3$, где все (t, x) вещественны. В результате выражение (56) примет вид

$$\begin{aligned}\rho_{(H)}&(t,x;t',x') = \\ &= (t-t')^2 - (x_1 - x_1')^2 - (x_2 - x_2')^2 - (x_3 - x_3')^2.\end{aligned} \tag{58}$$

Это в точности метрика Минковского (она вещественна, но не положительно определена). Если пересечь конус V_p при $p \in M$ с поверхностью M, то получится световой конус с вершиной p. Итак, естественно возникающее из геометрии прямых расстояние на квадрике Q индуцирует на сфере (S) евклидово расстояние, а на гиперболоиде (H) расстояние Минковского.

Точкам $M \subset$ (H) соответствуют те прямые на поверхности N, которые не пересекают прямой $z_0 = z_3 = 0$. Многообразие (H) играет важную роль в физических теориях — это конформное расширение пространства Минковского M. Оно получается из M

приклеиванием на «бесконечности» светового конуса (подобно тому, как у евклидова пространства имеется расширение с помощью одной бесконечно удаленной точки, а не целой бесконечно удаленной плоскости, как в случае проективного расширения). Если рассматривать проективные преобразования пространства $\mathbb{CP}^3$, сохраняющие поверхность N, то они будут переводить прямые на N в прямые на N, пересекающиеся прямые — в пересекающиеся прямые. Тем самым на (H) будут индуцироваться преобразования, переводящие друг в друга световые конусы V_p. Таким образом получаются все конформные преобразования пространства Минковского (движения, гомотетии, инверсии), относительно которых нередко инвариантны физические теории (безмассовые). Чтобы получить группу собственно движений (группу Пуанкаре), надо ограничиться преобразованиями, которые сохраняют также и прямую $z_0 = z_3 = 0$. Итак, геометрия пространства Минковского в полной мере возникает в рамках геометрии Плюккера пространства прямых.

Имеется ли естественный путь в обратном направлении? Как, исследуя пространство Минковского, обнаружить то вспомогательное трехмерное пространство (пространство твисторов по Пенроузу), прямые в котором соответствуют точкам пространства Минковского? Это можно сделать с помощью световых конусов V_p. Напомним, что точкам V_p соответствуют прямые, пересекающие прямую p. Все прямые, соответствующие точкам, лежащим на одной образующей V_p (световой прямой), пересекают прямую p в одной и той же точке. В результате возникает соответствие между точками поверхности N и световыми прямыми; N можно рассматривать как множество световых прямых на (H). Если перейти к комплексной картине, то точки $\mathbb{CP}^3$ отождествляются с комплексными «световыми» прямыми на Q (половиной двумерных образующих конусов V_p).

Замечание об аналитических приложениях. Поучительность изложенной геометрической картины не вызывает сомнений. Но, как уже отмечалось, в рамках теории Пенроуза она лишь повод для новых аналитических построений. К сожалению, мы имеем возможность лишь очень поверхностно остановиться на них. Идея Пенроуза заключается в том что аналитическим объектам на четырехмерном многообразии M (в евклидовой теории на (S)) должны соответствовать в некотором смысле эквивалентные объекты на N или $\mathbb{CP}^3$. Эти объекты должны быть проще, чем их двойники на M и (S), и значительная часть уравнений математической физики на M и (S) является просто следствием того, что объекты, первоначально заданные на трехмерном многообразии, каким-то путем переносятся на четырехмерное многообразие. Следует отметить, что многие дифференциальные уравнения возникают как соотношения при переходе (интегральном преобразовании) на многообразия большего числа измерений. Это важный и пока недостаточно изученный источник получения и решения уравнений. В простейшем примере, который принадлежит Фрицу Йону, при интегрировании функции в трехмерном пространстве (вещественном) по прямым получаем на четырехмерном пространстве прямых решения некоторого (ультрагиперболического) дифференциального уравнения второго порядка. Пенроуз и его последователи сталкиваются с аналогичными эффектами в более сложной комплексной ситуации. Поэтому приходится иметь дело не с функциями, а со значительно более сложным объектом — когомологиями. Оказалось, что при переходе от M и (S) к $\mathbb{CP}^3$ действительно получаются более простые и классические уравнения: какой-то вариант уравнений Коши–Римана из теории аналитических функций. При этом удалось рассмотреть не только линейные уравнения математической физики (Дирака–Вейля, Максвелла, линеаризованное уравнение Эйнштейна), но и некоторые нелинейные (Янга–Миллса).

Автодуальные метрики. В заключение остановимся еще на одном направлении в исследованиях Пенроуза. Пока мы имели дело с плоским пространством-временем Минковского. В общей теории относительности интересуются искривленными четырехмерными многообразиями, которые должны удовлетворять сильным нелинейным ограничениям (например, вакуумному уравнению Эйнштейна). Построение решений уравнений Эйнштейна — трудная задача. Пенроуз, исходя из реализации пространства Минковского как семейства прямых в $\mathbb{CP}^3$, ищет многообразия, которые удовлетворяли бы уравнению Эйнштейна, как семейства кривых на каких-то трехмерных многообразиях. Метрика при этом должна получаться из условия пересечения кривых (пересекающиеся кривые находятся на нулевом расстоянии). Он с самого начала ограничивается комплексной ситуацией. Для этого в неплоском случае имеются дополнительные причины: на многообразии кривых не бывает неплоской метрики Эйнштейна сигнатуры (3.1), как у метрики Минковского, но бывает риманова сигнатуры (4.0).

Переход к комплексным рассмотрениям замечательным образом упрощает ситуацию, делает ее более геометричной. Ряд инвариантов кривизны многообразия, которые в вещественном случае вводятся аналитически, в комплексном случае приобретает ясный геометрический смысл (тензоры Риччи и Вейля). Пенроуз показывает, что некоторый класс комплексных решений уравнения Эйнштейна (автодуальных) получается, если определенным образом возмутить комплексную структуру в окрестности одной прямой в $\mathbb{CP}^3$ и рассмотреть некоторое семейство кривых, «близких» к прямым. К сожалению, этот путь содержит чрезвычайно неэффективный момент при нахождении семейства кривых. Однако в некоторых случаях вычисления удалось довести до явного выражения для метрики.

Позднее появились некоторые другие геометрические идеи, как строить явные решения нелинейных уравнений, включая уравнение Эйнштейна, пользуясь языком твисторов. Одна из них состоит в том, что в восьмипараметрическом семействе кривых второго порядка в $\mathbb{CP}^3$ описываются такие четырехпараметрические подсемейства, что условия пересечения индуцируют на них метрики Эйнштейна. Таким образом получаются некоторые известные решения, а также много новых. Эта идея — вполне в русле идеологии Плюккера: условие пересечения прямых дает плоскую метрику, а пользуясь кониками, мы строим неплоские метрики.

Идеи твисторной программы за последние годы получили существенное развитие, хотя, быть может, первончальные надежды на роль твисторов в теоретической физике оказались слишком оптимистичными. Внутри математики твисторы нашли замечательные применения в многомерном комплексном анализе, но прежде всего — в геометрии и топологии, где они привели к революции в теории четырехмерных многообразий.