О ПОЛЬЗЕ КООРДИНАТ И ИСКУССТВЕ СЦЕПЛЯТЬ ГИПЕРБОЛОИДЫ

> Таким образом мы коротко и ясно изложили все, что оставили невыясненным древние относительно плоских и телесных мест. *П. Ферма*
>
> Я полагаю, что теперь ничего не пропустил из начал, необходимых для познания кривых линий. *Р. Декарт*

Пионерские идеи великих математиков претерпевают многочисленные изменения, прежде чем попасть на страницы учебников. В рафинированном виде их проще усваивать, яснее сфера их применимости, но что-то трудноуловимое при этом исчезает. Возможно, это логика открытия, ощущение материала , да и просто волнение перед открывающимися возможностями. Как разнятся энтузиазм создателей аналитической геометрии и ощущения студента, изучающего ее сегодня! Мы вспомним здесь лишь несколько эпизодов из истории создания аналитической геометрии, не пытаясь сколько-нибудь полно воссоздать эту историю, а закончим рассказ небольшим эпизодом в стиле аналитической проективной геометрии прошлого века, но на сравнительно современном материале. Очень соблазнительно попробовать рассуждать так, как это умели делать сто лет назад! Именно, мы докажем теорему о пяти гиперболоидах в пятимерном пространстве. Два однополостных двумерных гиперболоида называются сцепленными, если они имеют общую образующую и не лежат в одной трехмерной плоскости. Несколько гиперболоидов называются сцепленными, если они попарно сцеплены, причем образующие сцепления принадлежат одному семейству образующих. Если прямые сцепления разных пар гиперболоидов различны, то сцепление называется невырожденным.

Теорема. *Если в пятимерном пространстве невырожденно сцеплены четыре однополостных двумерных гиперболоида, то* *всякий пятый гиперболоид, сцепленный с тремя из них, сцеплен и с четвертым.*

Важной компонентой профессионализма у математика является умение априори оценить трудность задачи. В некотором смысле математики верят, что существует закон сохранения «нетривиальности», а потому у них заранее имеется предубеждение против легко решенной задачи, которую эксперты оценивали как трудную. Одно из проявлений этой традиции — уверенность, что любителю не по силам решить давнюю проблему. История математики показывает, что, хотя и можно привести противоречащие примеры, в среднем эти правила хорошо выполняются, по крайней мере на отрезках времени, сравнимых с жизнью человека. Те же случаи, когда происходит резкая переоценка трудности задач, отвечают революционным изменениям в математике. Когда они созревают в течение заметного времени (как было с алгебраической символикой или исчислением бесконечно малых), к ним успевают привыкнуть. Иная ситуация возникает, когда новая возможность, приводящая к решительной переоценке ценностей, открывается неожиданно. Нередко даже возникает желание объявить новые приемы незаконными. Выразительной иллюстрацией является реакция Гордана на решение Гильбертом его проблемы конечности числа инвариантов: «Это теология, а не математика». Дело в том, что Гильберт вместо привычного тогда непосредственного построения инвариантов, что удавалось в отдельных случаях с большим трудом, одним ударом доказал их существование в общем случае.

Однако, вероятно, ни одна революция в математике не происходила так остро, как проникновение аналитических методов в геометрию. Рушились представления о трудности геометрических задач, девальвировалась роль геометрической интуиции — гордости математиков. То, что требовало изысканных рассуждений, получалось в результате прямолинейных выкладок. В связи с этим возникло консервативное течение, борющееся за истинную геометрию, которую пытаются подменить скучной алгеброй. Для сравнения заметим, что куда более безболезненным было создание аналитической механики, когда Эйлер и Лагранж, отказываясь от геометрических методов Ньютона, превращали при помощи метода координат механику в раздел математического анализа. Ситуация в геометрии несколько напоминает переход к машинному производству, когда искусство кустарей терялось в однообразном потоке автоматической деятельности. Сегодня мы ясно видим, что аналитические методы не убили геометрическую интуицию, а напротив, позволяли «экономить» ее в сравнительно простых ситуациях и создавать интуицию более высокого уровня. Однако нельзя отрицать, что многое из того, что делалось в синтетической геометрии (так называют традиционную геометрию, не использующую координат), безвозвратно утрачено.

Итак, в 30-х годах XVII века два крупнейших математика того времени Ферма и Декарт открыли, что при помощи координат уравнению с двумя неизвестными можно поставить в соответствие кривую на плоскости. Это был неожиданный поворот воззрений, в частности, потому, что считалось, что раз одно уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечное число решений, его нет смысла рассматривать (так и сейчас иногда говорят в школе). Благодаря же геометрическому подходу это бесконечное множество неожиданно приобрело право гражданства. Не менее плодотворна и обратная возможность ставить в соответствие кривым задающие их уравнения. С этого и начинается аналитическая геометрия.

Решающее открытие состояло в том, что уравнениям первой степени в плоскости отвечают прямые, а уравнениям второй степени — конические сечения. Тем самым два основных объекта греческой геометрии оказались простейшими с аналитической точки зрения. Мечта геометров того времени состояла в том, чтобы усвоить и превзойти теорию конических сечений Аполлония. Ферма и Декарт убеждаются, что большинство утверждений на аналитическом языке получаются удивительно просто. Декарту удается аналитически решить несколько недоступных грекам задач на геометрические места точек. Как показывают высказывания, взятые в качестве эпиграфов, создатели аналитической геометрии не видят пределов для ее возможностей (плоскими местами греки называли прямую и окружность, а телесными — конические сечения). Еще многое не прояснено (не рассматриваются отрицательные координаты, нет четкой теоремы о приведении уравнения второго порядка к каноническому виду и т. д.), но все основания для оптимизма есть.

Прежде всего перед геометрией открываются новые горизонты, совершенно иной предстает ее структура. Не вызывает сомнений, что следующая еще не созданная глава геометрии — это теория кривых третьего порядка. Некоторые кривые этого класса рассмотрел Декарт, но естественно было попытаться построить общую теорию столь же подробно, как в случае кривых второго порядка. Прежде всего предстояло дать классификацию таких кривых. Задача эта оказалась оченьне простой, и ее решил Ньютон в 60-е годы XVII века (рукопись была опубликована много позже — в 1704 г.). О сложности задачи красноречиво говорит ответ: имеется 72 различных вида кривых третьей степени. Впрочем, ответ достаточно обозрим благодаря тому, что все виды кривых распределяются по четырем типам

$$xy^2 + cy = P(x), \quad xy = P(x), \quad y^2 = P(x), \quad y = P(x),$$

где P — многочлен третьей степени от x.

Здесь автоматически возникает вопрос о том, что означает классификация. Для кривой, заданной уравнением в какой-то системе координат, ищется система координат, в которой ее уравнение выглядит особенно просто. Часто такую систему удается фиксировать почти однозначно, и тогда соответствующее уравнение естественно считать каноническим. Более общим образом, геометрию кривой составляют такие свойства ее уравнений, которые не зависят от системы координат, — инварианты. Мы видим, что на аналитическом языке очень рано начинает вырисовываться определение предмета геометрии. На синтетическом языке, вместо того чтобы менять систему координат, преобразуются сами фигуры и, как стало ясно лишь к концу XIX века (эрлангенская программа Клейна), изучаются их свойства, не меняющиеся при преобразованиях. Итак, в аналитической геометрии различные разделы отвечают различным классам систем координат, а в синтетической — группам преобразований.

Ньютон, занимаясь кривыми третьей степени, выяснил много общих вещей, необходимых для того, чтобы вычленять геометрическую компоненту из алгебраических фактов об уравнениях.

1. Прежде всего нужно было выявить геометрический смысл исходной аналитической характеристики кривой — порядка (степени задающего ее уравнения). Ньютон замечает, что порядок

совпадает с наибольшим числом точек, по которым прямая может пересечь кривую (в случае кривой порядка n для их определения возникает уравнение n-й степени от одного переменного). Тут появляются трудности с мнимыми точками пересечения, для рассмотрения которых еще нет средств.

2. Упомянем важнейшее обобщение этого утверждения: если кривые порядков k и l пересекаются более чем в kl точках, то они имеют бесконечное число точек пересечения. Иначе говоря, в последнем случае они имеют общую компоненту (алгебраическая кривая может распадаться на несколько компонент, например, кривая $Q_1Q_2 = 0$ распадается на $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$). Если же в этом случае одна кривая в естественном смысле неприводима (не распадается на компоненты), то она целиком содержится в другой. Эту теорему сформулировал Маклорен, младший современник Ньютона, а доказал почти через сто лет Безу, именем которого она и называется теперь. Более точная формулировка включает комплексные точки пересечения и точки пересечения, лежащие на бесконечности.

3. Ньютон имел много возможностей убедиться в эффективности метода координат. Он продемонстрировал это в процессе переноса на алгебраические кривые высокой степени различных фактов о конических сечениях. Вот, например, как обстоит дело с теорией диаметров. Напомним, что если для конического сечения, скажем для эллипса, провести хорды, параллельные некоторому направлению, то их середины лежат на одной прямой, называемой диаметром. Если для кривой порядка n провести пучок параллельных прямых и в пересечении каждой прямой получится n точек $x_1, \ldots, x_n$, то рассмотрим их центры тяжести $(x_1 + \ldots + x_n)/n$ (заметим, что они не зависят от выбора координаты на прямой; как и Ньютон, мы не обсуждаем случай мнимых точек пересечения). Теорема Ньютона утверждает, что все центры тяжести лежат на одной прямой.

В самом деле, выберем систему координат так, что параллельные прямые задаются уравнениями $y = \mathrm{const}$. Пусть $F(x, y) = 0$ — уравнение кривой в этой системе,

$$F(x, y) = ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-1} + \ldots .$$

Тогда точки пересечения $x_1, \ldots, x_n$ являются корнями уравнения $F(x,y) = 0$ по x при фиксированном y. По теореме Виета $(x_1 + \ldots + x_n)/n = -(by + c)/an$, т. е. все центры тяжести лежат на одной прямой $anx + by + c = 0$ — диаметре Ньютона.

4. Почти одновременно с созданием аналитической геометрии Дезарг, а вслед за ним Паскаль заложили основы проективной геометрии. Исходное наблюдение состояло в том, что применение центральной проекции позволяет упростить геометрические рассмотрения (например, все конические сечения получаются одно из другого проектированием). Возникает конкурирующий с аналитической геометрией способ упростить и продвинуть теорию Аполлония. Паскаль подготовил всеобъемлющий трактат, который был утерян, и о работах по проективной геометрии забыли на сто лет. Вероятно, не знал о них и Ньютон. Однако от него не ускользнуло, что использование проектирования (рассмотрение «тени от светящейся точки») очень упрощает теорию не только конических сечений, но и общих алгебраических кривых. Важнейшее наблюдение Ньютона состоит в том, что при проектировании сохраняется порядок кривой. Применительно к кривым третьего порядка он устанавливает, что любая кривая может быть приведена проектированием к одной из кривых вида $y^2 = P(x)$, где P — кубический многочлен. Это доказал позднее Клеро.

5. Геометрия кривых третьего порядка существенно богаче геометрии кривых второго порядка. Прежде всего, могут появиться особые точки: двойные (точки самопересечения, как $(0,0)$ у кривой $y^2 = x^2(x+1)$) и точки возврата (как $(0,0)$ у кривой $y^2 = x^3$). Далее, касательная в точке касания в общем случае имеет двукратную точку пересечения (соответствующий многочлен от одного переменного имеет двойной корень), но может иметь и трехкратную точку пересечения (для уравнений большей степени она может иметь еще большую кратность). Такие точки называются точками перегиба ($(0,0)$ у кривой $y = x^3$). У кривых третьей степени может быть до трех точек перегиба (точки $(0,0), (1,0), (2,0)$ у кривой $y^3 = x(x-1)(x-2)$). Маклорен заметил, что в этом случае все эти точки обязательно лежат на одной прямой (в примере прямая $y = 0$). В XVIII веке алгебраические кривые, прежде всего третьей и четвертой степеней, были в центре внимания

математиков. Эти вопросы излагались в первых учебниках аналитической геометрии. Однако многое оставалось невыясненным. Становилось ясно, что для построения гармоничной теории необходимо добавить точки, лежащие на бесконечности, а также мнимые точки, поскольку все время приходится решать алгебраические уравнения высоких степеней (уже в 1717 г. Стирлинг упоминает кривую с двойной мнимой точкой на бесконечности).

Учесть эти два обстоятельства можно в рамках комплексной проективной геометрии, начало которой положил Понселе. Его первое удивительное наблюдение состояло в том, что все окружности пересекаются в двух бесконечных удаленных мнимых точках. Эти точки, названные циклическими, управляют всей конформной геометрией плоскости. Другое великое открытие Понселе (он делит его с Жергонном) — это принцип двойственности, в силу которого каждое планиметрическое утверждение имеет двойник, где прямые заменяются на точки и обратно. В связи с этим естественно связывать с кривой не только множество ее точек, но и множество ее касательных. Возникает инвариант, двойственный порядку, — класс p. Это наибольшее число касательных, проходящих через точку. Для неособой кривой третьей степени $p = 6$. Общая формула для неособой кривой имеет следующий вид:

$$p = n(n-1). \tag{37}$$

Удивительно, что замечательные открытия Понселе, знаменовавшие создание нового типа геометрической интуиции, были сделаны на синтетическом языке, поскольку проективную геометрию еще не удалось объединить с аналитической. Еще не придумали координаты, которые обслуживали бы все точки проективной плоскости, включая бесконечно удаленные.

Такие координаты появились в 1827 – 1828 гг. у Мёбиуса и Плюккера. Особенно простой и удобной является конструкция однородных координат Плюккера. Он ставит в соответствие точке проективной плоскости тройку чисел $x = (x_0, x_1, x_2) \neq (0,0,0)$ с точностью до постоянного множителя: $(x_0, x_1, x_2) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$. Всякая прямая на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ задается уравнением $(\xi, x) := \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$, где $\xi \neq (0,0,0)$; ξ и $\lambda\xi$ соответствуют одной и той же прямой. Поэтому прямые на $\mathbb{P}^2$ естественно образуют другую проективную плоскость $\mathbb{P}^2_\xi$ с однородными координатами ξ. Прямым на $\mathbb{P}^2_\xi$ соответствуют точки $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_x$. В результате совершенно нетривиальный на синтетическом языке принцип двойственности на аналитическом становится почти очевидным.

Общее проективное преобразование координат имеет вид $\bar{x} = \sum a_{ji}x_i$, где $\det(a_{ji}) \neq 0$. Они характеризуются тем, что взаимно однозначны на $\mathbb{P}^2$ и переводят прямые в прямые.

Чтобы фиксировать аффинную структуру на $\mathbb{P}^2$, нужно некоторую прямую, например $x_0 = 0$ (но не обязательно ее), объявить бесконечно удаленной. Вне $x_0 = 0$ всегда можно выбирать координаты вида $(1, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Тогда $\tilde{x}_1 = x_1/x_0$, $\tilde{x}_2 = x_2/x_0$ будут декартовыми. При аналитическом подходе с самого начала бесконечно удаленная прямая ничем не выделена.

Отправляясь от предложенной Плюккером интерпретации принципа двойственности, естественно наряду с кривой $\Gamma = \Gamma_x$ на $\mathbb{P}^2_x$ рассмотреть двойственную кривую Γ_ξ на двойственной плоскости $\mathbb{P}^2_\xi$: точкам Γ_ξ отвечают касательные к Γ_x. Класс Γ_x совпадает с порядком Γ_ξ. Плюккер разрешил загадку, которую не смог разгадать Понселе (парадокс Понселе). Дело в том, что, как легко видеть, формула (37) не является двойственной самой себе. Плюккер обнаружил, что эта формула справедлива лишь для кривых без особенностей. Например, если Γ — неособая кривая третьей степени, то двойственная кривая обязательно имеет особенности. Плюккер нашел такую формулу для класса кривой с особенностями:

$$p = n(n-1) - 2d - 3r, \tag{38}$$

Здесь d — число двойных точек, а r — число точек возврата. Эта формула уже является самодвойственной. Заметим, что двойные точки двойственной кривой Γ_ξ (пусть δ — их число) соответствуют двойным касательным к исходной кривой, то есть прямым, имеющим две точки касания с Γ. Точки возврата Γ_ξ соответствуют касательным в точках перегиба Γ (пусть ρ — их число). Тогда $n = p(p-1) - 2\delta - 3\rho$. Одновременно получается формула для числа точек перегиба

$$\delta = 3n(n-2) - 6d - 8r. \tag{39}$$

В случае, когда особых точек нет, ее нетрудно получить непосредственно, записывая условие того, что точка является точкой перегиба в виде системы алгебраических уравнений, и применяя теорему Безу. В частности, если Γ — неособая кривая третьего порядка, то $p = 6$, у нее нет двойных касательных и имеется девять точек перегиба, некоторые из которых могут оказаться комплексными.

Строго говоря, формула (38) верна, если у кривой нет более сложных особенностей, чем простейшие точки самопересечения и возврата, а формула (39) — если все точки перегиба являются простейшими (кратность касания равна трем) и никакая прямая не может коснуться кривой более чем в двух точках; полные формулировки более громоздки.

Плюккер глубоко продумал вопрос о комплексных особых точках вещественных кривых. Собственно, приведенные формулы являются точными для комплексных особых точек и точек перегиба. Вопрос же о том, какие из этих точек могут быть вещественными, весьма нетривиален. Совсем не обязательно, чтобы все точки перегиба, число которых задается формулой (39), были вещественны. Например, среди девяти точек перегиба кривой третьего порядка без особенностей не более трех могут быть вещественными. «Необходим новый взлет пространственной интуиции, чтобы охватить то, что во всех случаях мнимо и остается мнимым», — писал Плюккер.

С Плюккером связан один из самых замечательных периодов в истории аналитической геометрии. Его ученик Клейн писал: «Целью Плюккера в геометрии и его достижением является новое построение аналитической геометрии. Он придерживался при этом метода, возникшего из традиций Монжа: полного сращения построения и аналитической формулы ... В геометрии Плюккера простое комбинирование формул переводится на язык геометрических соотношений, и наоборот, последними направляются аналитические операции. Вычисления у Плюккера по возможности опускаются, но зато развивается и широко применяется доходящая до виртуозности острота внутреннего восприятия, геометрического истолкования имеющихся аналитических уравнений».

Плюккер оказался объектом нападок со стороны Штейнера, замечательного геометра, но агрессивного противника аналитических методов в геометрии: использования уравнений, работы с мнимыми объектами. Атака Штейнера была столь энергична, что Плюккер более чем на 20 лет прервал занятия геометрией и вернулся к ним лишь незадолго до смерти.

Приведем несколько примеров геометрических конструкций Плюккера. Однако прежде вспомним, что в уравнение n-й степени от двух переменных входит $(n+3)n/2+1$ коэффициентов, которые определены с точностью до постоянного множителя (это нетрудно доказать по индукции). Поэтому кривая порядка n определяется заданием $(n+3)n/2$ точек (для определения коэффициентов уравнения возникает нужное число линейных уравнений). В частности, для определения прямой нужно задать две точки, конического сечения — пять, кривой третьего порядка — девять. Однако эти точки должны быть общего положения, и с ростом n это условие становится все более деликатным. Обратим внимание, что по теореме Безу две кривые порядка n обычно пересекаются в n^2 точках. Но $n^2 > n(n+3)/2$ при $n > 3$, а через эти n^2 точек проходит две (на самом деле бесконечное число) кривых порядка n. Это обстоятельство, получившее название парадокса Крамера, очень волновало геометров от Маклорена до Эйлера, и, вероятно, лишь Плюккер в нем окончательно разобрался.

Посмотрим, как доказал Плюккер теорему Паскаля. Напомним, что шесть точек $A_1, A_2, \ldots, A_6$ на коническом сечении $Q = 0$ последовательно соединяются в замкнутую ломаную — шестиугольник Паскаля (эта ломаная может иметь самопересечения). Пусть p_i — это сторона A_iA_{i+1}, $L_i = 0$ — уравнение прямой, проходящей через p_i. Пусть B_1, B_2, B_3 — точки пересечения противоположных сторон : $(p_1, p_4), (p_2, p_5), (p_3, p_6)$ соответственно. Утверждается, что B_1, B_2, B_3 лежат на одной прямой. Паскаль свел общий случай к случаю окружности, но и для окружности доказательство не слишком просто.

А вот как рассуждал Плюккер. Он провел через девять точек $\{A_i, B_j\}$ кривые третьего порядка. В общем положении через девять точек проходит единственная кривая, но $\{A_i, B_j\}$ не является общим набором (см. выше о парадоксе Крамера). Через $\{A_i, B_j\}$ будут проходить все кривые из пучка кривых

$$L_1L_3L_5 + \mu L_2L_4L_6 = 0, \tag{40}$$

зависящих от произвольного параметра μ. Заметим, что для каждой из точек A_i, B_j в каждом из двух слагаемых есть множитель, аннулирующийся на ней. Пусть C — какая-либо точка кривой $Q = 0$, отличная от A_j; подберем μ так, чтобы координаты C удовлетворяли (40). Мы фиксировали кривую третьего порядка, но при ее пересечении с кривой второго порядка $Q = 0$ или должно возникать не более $2 \cdot 3 = 6$ точек, или число точек пересечения бесконечно. Поскольку мы имеем, по крайней мере, семь точек пересечения $A_1, \ldots, A_6, C$, то число точек пересечения бесконечно и ввиду неприводимости кривой $Q = 0$ она должна целиком содержаться в кривой (40), то есть левая часть (40) должна делиться на Q. После деления на Q возникает линейное выражение M, и на прямой $M = 0$ должны лежать точки B_1, B_2, B_3, поскольку они не могут лежать на коническом сечении $Q = 0$ (иначе бы какая-то из прямых $L_j = 0$ пересекала $Q = 0$ в трех точках).

Прием, в котором используются пучки кривых и выбор подходящей кривой из пучка, которая в силу теоремы Безу должна распадаться (в примере — на коническое сечение и прямую), очень характерен для Плюккера. Неопределенный множитель μ постоянно присутствует в его рассмотрениях (его часто так и называли — «плюккерово μ»).

Плюккер по-новому ставит вопрос о приведении уравнения кривой к каноническому виду, стремясь к тому, чтобы уравнение выглядело попроще и его алгебраическая структура отражала непосредственно какие-то геометрические свойства кривой Например, Плюккер показывает, что уравнение третьей степени всегда может быть записано в виде

$$L_1 L_2 L_3 - M^3 = 0, \tag{41}$$

где $\{L_i, M\}$ — линейные формы от координат. Для доказательства возможности представления подсчитывается число независимых параметров, которые входят в (41). В линейной форме три коэффициента, в четырех формах $\{L_i, M\}$ их 12, но (41) сохраняется, если L_1, L_2, L_3 умножить на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а M — на $\sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$. Поэтому независимых параметров равно $12 - 3 = 9$, а поскольку общее уравнение третьей степени, как мы видели, содержит девять независимых параметров (на один меньше, чем число коэффициентов), то Плюккер сделал вывод, что общее уравнение всегда можно преобразовать в равенство (41). К этим рассуждениям нужно еще добавить некоторые моменты, чтобы они стали строгим доказательством. Вероятно, это был один из первых примеров, когда подсчет числа параметров использовался как эвристический прием и как средство доказательства.

Какая же геометрия стоит за представлением (41)? Пусть A_j — точки пересечения прямых $L_j = 0$ и $M_j = 0$. Эти точки лежат на кривой, причем A_j — трехкратная точка пересечения кривой (41) и прямой $L_j = 0$. Это означает, что A_1, A_2, A_3 — точки перегиба, а $L_j = 0$ — касательные в этих точках. Кроме того, $M = 0$ — прямая, на которой лежат три точки перегиба A_1, A_2, A_3 Такие прямые называют прямыми перегиба. Если перейти к рассмотрению комплексных точек перегиба, то их, как отмечалось, для неособой кривой девять. Оказывается, что прямая (комплексная), проходящая через любые две точки перегиба, обязательно содержит третью. Так что возникает двенадцать прямых перегиба. Эта конфигурация из девяти точек и двенадцати прямых перегиба очень интересна, и она специально изучалась в проективной геометрии

Специальную структуру предложил Плюккер и для уравнения четвертой степени

$$L_1 L_2 L_3 L_4 - \Omega^2 = 0, \tag{42}$$

где $\{L_i\}$ — линейные формы, а Ω — квадратный многочлен. Вспомним, что в общее уравнение четвертой степени входит 14 независимых параметров. В квадратном многочлене шесть коэффициентов, так что в (42) участвует $3 \cdot 4 + 6 = 18$ коэффициентов. При этом можно умножить $\{L_i\}$ на числа $\{\alpha_i\}$ и одновременно Ω — на число $\sqrt[4]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$. В результате число независимых параметров равно $18 - 4 = 14$. Плюккер делает вывод, что представление (42) является общим.

Далее, точки пересечения каждой прямой $L_i = 0$ с коническим сечением $\Omega = 0$ являются двукратными точками пересечения с кривой (42). Таким образом, каждая прямая $L_i = 0$ имеет две точки касания с кривой (вместо четырех точек пересечения для общих прямых). Такие касательные называют двойными. Итак, в уравнении (42) участвуют четыре двойных касательных, причем восемь их точек касания лежат на одном коническом сечении. С этим открытием Плюккера связан следующий курьез. У кривой четвертого порядка имеется, как нетрудно подсчитать, 28 двойных касательных (считая комплексные). Плюккер ошибочно предположил, что точки касания любой четверки из них лежат на коническом сечении. На самом деле каждая пара двойных касательных входит лишь в пять четверок, обладающих этим свойством. Ошибку Плюккера обнаружил не кто иной, как Штейнер. Алгебраические кривые фактически возникали и в синтетической геометрии, а приведенный пример показывает, что представителям этой школы пока хватало геометрической интуиции, чтобы на равных соревноваться с аналитиками. Демонстративный отказ от использования аналитических средств лишь постепенно выявил слабые стороны школы Штейнера.

Точки трехмерного проективного пространства $\mathbb{P}^3$, согласно Плюккеру, задаются четверками однородных координат $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0,0)$, $x \sim \lambda x$, $\lambda \neq 0$. Плоскости в $\mathbb{P}^3$ составляют двойственное проективное пространство $\mathbb{P}^3_\xi$, $\xi \in \mathbb{P}^3_\xi$ отвечает плоскость $\langle \xi, x\rangle = 0$. В то же время многообразие прямых G является совершенно новым геометрическим объектом. Его изучение — одно из основных достижений Плюккера. Прямые в $\mathbb{P}^3$ задаются четырьмя параметрами, например, можно фиксировать две различные плоскости, и тогда почти все прямые задаются точками пересечения с этими плоскостями. Таким образом, многообразие G четырехмерно. На G естественно вводятся координаты (Штифеля), которые можно воспринимать как обобщение однородных координат. Зададим прямую парой ее различных точек x, y. Расположим x, y в матрицу $X = \binom{x}{y}$ с двумя строками и четырьмя столбцами. Прямая состоит из точек вида $z = \lambda_1 x + \lambda_2 y$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$, то есть λ — однородные координаты на ней. Матрица X определяется по прямой с точностью до левых умножений на невырожденную матрицу второго порядка: $X \mapsto gX$ (соответствует переходу к другой паре точек на прямой). Положим $X = (X_1, X_2)$, где

X_1, X_2 — квадратные матрицы второго порядка. Тогда если $\det X_1 \neq 0$, то координаты можно выбрать так, что $X_1 = E$ — единичная матрица (берутся точки x с $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ и y с $y_0 = 0, y_1 = 1$). На G возникает аффинная координатная карта с координатами $X_2 = (u_{ij})$, ее замыкание совпадает с G. Плюккер перешел от матрицы X к ее минорам. Это знаменитые плюккеровы координаты, которые очень удобны при построении геометрии прямых. Рассмотрим две задачи, связанные с геометрией прямых.

1. Представим пространство $\mathbb{P}^3$ в виде объединения попарно непересекающихся прямых. Заметим, что если фиксировать аффинную структуру в $\mathbb{P}^3$, то проективно пересекающиеся прямые переходят либо в пересекающиеся, либо в параллельные (пересекаются «на бесконечности»). В то же время непересекающимся прямым соответствуют скрещивающиеся прямые в аффинном пространстве. Поэтому на аффинном языке речь идет о представлении пространства в виде объединения попарно скрещивающихся прямых.

Мы явно укажем разбиение, а именно, рассмотрим прямые, соединяющие x с $\sigma(x) = (-x_1, x_0, -x_3, x_2)$ то есть $X = \binom{x}{\sigma(x)}$. Надо лишь проверить, что $\sigma(x) \neq \lambda x$, и что если y — точка такой прямой, то $\sigma(y)$ также лежит на этой прямой. Это следует из непосредственно проверяемого соотношения $\sigma(\lambda_0 x + \lambda_1 \sigma(x)) = -\lambda_1 x + \lambda_0 \sigma(x)$. Указанное свойство означает, что прямые или не пересекаются, или совпадают. В G возникает двумерное подмногообразие прямых.

2. Исследуем в пространстве $\mathbb{P}^3$ поверхности с двумя семействами прямолинейных образующих. В аналитической геометрии учат, что среди поверхностей второго порядка в $\mathbb{R}^3$ имеется два типа поверхностей, обладающих этим свойством: однополостные гиперболоиды (их уравнение приводится к виду $x^2 + y^2 - z^2 = 1$) и гиперболические параболоиды (их канонические уравнения: $z = x^2 - y^2$). Покажем, что даже в классе всех поверхностей (а не только второго порядка) других поверхностей с этим свойством нет. Разумеется, есть большое число поверхностей с одной системой образующих (развертывающиеся поверхности), однако условие существования двух систем оказывается очень жестким и

оставляет лишь однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Заметим, что в проективном пространстве однополостные гиперболоиды и гиперболические параболоиды (проективно) эквивалентны: в подходящих однородных координатах их уравнение имеет вид $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. Таким образом, с проективной точки зрения можно говорить лишь об однополостных гиперболоидах.

Уточним используемые термины. Будем говорить, что на поверхности S имеются два семейства прямолинейных образующих, если через каждую ее точку проходят по крайней мере две различные прямые, целиком лежащие на S. Такая поверхность S называется неприводимой, если не существует меньшей поверхности $S_0 \subset S$, на которой также лежат два семейства прямолинейных образующих. Мы хотим избежать в дальнейшем обсуждения аналитических тонкостей, связанных с точным определением понятия поверхности, и поэтому будем апеллировать лишь к интуитивным представлениям о поверхностях. Эта часть наших рассуждений не будет строгой, но те, кто владеют соответствующей техникой, без труда обнаружат, как превратить эти рассуждения в строгие, скажем, для аналитических поверхностей.

Теорема. *Всякая неплоская неприводимая (аналитическая) поверхность в $\mathbb{P}^3$ с двумя семействами прямолинейных образующих является однополостным гиперболоидом.*

Доказательство. 1. Если указанная поверхность имеет плоский кусок, то она совпадает с плоскостью. Грубо говоря, образующие, проходящие через точки плоского куска, порождают плоскость.

2. Фиксируем на поверхности образующую l. Тогда все образующие, пересекающие l, порождают поверхность. Очевидно, что точки объединения зависят от двух параметров, а аналитические уточнения мы договорились опускать.

3. Если имеются две непересекающиеся образующие l_1, l_2, то образующие, пересекающие обе образующие l_1, l_2, также порождают поверхность.

В самом деле, поскольку образующие, пересекающие l_1, порождают поверхность, то через каждую точку l_2 проходит образующая, пересекающая l_1. Объединение этих образующих также должно совпадать с поверхностью.

4. Аналогично для любого числа попарно непересекающихся образующих объединение образующих, их все пересекающих, совпадает с поверхностью.

5. Для пары пересекающихся образующих l_1, l_2 почти все образующие, пересекающие одну из них, не пересекают другую. Действительно, пусть m — отрезок на l_2. Через каждую точку m должна проходить образующая, отличная от l_2. Если все они пересекают l_1, то они порождают часть плоскости, проходящей через l_1, l_2.

Таким образом, на поверхности имеется бесконечное множество попарно непересекающихся образующих. Нам достаточно, что есть три таких образующих.

6. Покажем, что поверхность, указанная в теореме, однозначно определяется тройкой своих попарно непересекающихся образующих. Она совпадает с объединением всех прямых в $\mathbb{P}^3$, пересекающих все три фиксированные прямые.

В правдоподобности этого утверждения можем убедиться, пользуясь излюбленным приемом Плюккера с подсчетом числа параметров. Множество всех прямых зависит от четырех параметров. Пересечение с каждой прямой — это одно условие на параметры (иначе, через каждую точку пространства проходит двухпараметрическое семейство, поэтому через точки прямой проходит трехпараметрическое семейство прямых). Требуя пересечения с тремя прямыми, мы накладываем три условия, так что остается однопараметрическое семейство прямых, которое порождает поверхность.

Для корректности нужно убедиться, что эти условия независимы. Поэтому осуществим отбор прямых более эффективно. Пусть l_1, l_2, l_3 — попарно непересекающиеся прямые. Найдем прямые, их все пересекающие. Пусть $A \in l_1$, тогда $A \notin l_2$. Проведем плоскость через A и l_2. Эта плоскость пересечет l_3 в некоторой точке B. Дело в том, что в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ прямая, не лежащая в плоскости, пересекает ее, а прямая l_3 не может лежать в плоскости, поскольку l_2 и l_3 не пересекаются. Прямая AB будет единственной прямой, пересекающей все три прямые l_1, l_2, l_3 и проходящей через A. Итак, множество прямых, пересекающих тройку попарно непересекающихся прямых, можно параметризовать точками пересечения с одной из них.

7. Докажем, что объединение этих прямых является однополостным гиперболоидом. Проведем доказательство аналитически. Одновременно докажем, что через три попарно непересекающиеся прямые проходит в $\mathbb{P}^3$ однополостный гиперболоид, причем единственный.

Пусть l_1, l_2, l_3 — три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$. Будем задавать прямые как пересечения плоскостей, то есть системами двух линейных уравнений $\langle \xi, y \rangle = 0$ и $\langle \eta, y \rangle = 0$. Выберем однородные координаты так, чтобы l_1 задавалась системой $y_0 = 0, y_1 = 0$, а l_2 — системой $y_2 = 0, y_3 = 0$. Это можно сделать, поскольку они не пересекаются (и левые части задающих их уравнений можно принять за координаты). Пусть тогда l_3 задается системой

$$\begin{cases} \xi_0 y_0 + \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = 0, \\ \eta_0 y_0 + \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0 \end{cases}$$

Векторы (ξ_0, ξ_1), (η_0, η_1) не могут оба быть нулевыми, поскольку тогда бы l_2 и l_3 совпадали. Более того, эти векторы не могут быть пропорциональны и, в частности, ни один из них не может быть нулевым. Действительно, если $(\eta_0, \eta_1) = (\lambda\xi_0, \lambda\xi_1)$, то точка $(-\xi_1, \xi_0, 0, 0)$ будет общей для l_2 и l_3. Аналогично показывается, что (ξ_2, ξ_3) и (η_2, η_3) не могут быть пропорциональными. Поэтому можно сделать следующую замену координат:

$$\begin{aligned} x_0 &= \xi_0 y_0 + \xi_1 y_1, & x_1 &= \eta_0 y_0 + \eta_1 y_1, \\ x_2 &= \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3, & x_3 &= \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3. \end{aligned}$$

В силу сказанного выше о пропорциональности векторов такая замена допустима. В этих координатах l_1 задается уравнениями $x_0 = x_1 = 0$, l_2 — уравнениями $x_2 = x_3 = 0$, и l_3 — уравнениями $x_0 + x_2 = x_1 + x_3 = 0$. Однако все эти прямые лежат на однополостном гиперболоиде

$$x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0. \tag{43}$$

Рассматриваемые три прямые входят в однопараметрическое семейство образующих

$$\begin{aligned} &\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 = 0, \\ &\lambda_0 x_2 + \lambda_1 x_3 = 0, \quad (\lambda_0, \lambda_1) \neq (0, 0). \end{aligned} \tag{44}$$

Второе семейство образующих состоит из прямых

$$\begin{aligned} &\mu_0 x_0 + \mu_1 x_2 = 0, \\ &\mu_0 x_1 + \mu_1 x_3 = 0, \quad (\mu_0, \mu_1) \neq (0, 0). \end{aligned} \tag{45}$$

Напомним, что образующие одного семейства попарно не пересекаются, а любые образующие из разных семейств пересекаются, так что через каждую точку проходит по образующей каждого семейства.

Прямые в каждом семействе параметризуются точками проективной прямой $\mathbb{P}^1_\lambda$, $\mathbb{P}^1_\mu$ (λ, μ — однородные координаты). С каждым гиперболоидом связываются на многообразии прямых G две кривые. Кривые, которые допускают взаимно однозначное отображение на проективную прямую, называются рациональными (допускают рациональную параметризацию). Рациональными кривыми являются не только прямые в проективном пространстве, но и кривые второго порядка. Таким образом, с каждым однополостным гиперболоидом в $\mathbb{P}^3$ связываются две замечательные рациональные кривые на G. В духе геометрического подхода Плюккера один и тот же геометрический объект проявляется либо в виде однополостных гиперболоидов в точечной геометрии $\mathbb{P}^3$, либо в виде простейших рациональных кривых на многообразии прямых G (класс этих кривых можно описать непосредственно).

При переходе на аффинный язык могут встретиться две возможности: либо никакая образующая не лежит в бесконечно удаленной плоскости, и тогда мы получаем однополостный гиперболоид в аффинном смысле, либо такая образующая есть, и тогда мы получаем гиперболический параболоид. В последнем случае в бесконечно удаленной плоскости лежит на самом деле пара пересекающихся образующих (по одной из каждого семейства). Это связано с тем, что в любой плоскости, проходящей через образующую, лежит одна образующая, пересекающая первую. Сказанное можно перефразировать следующим образом: если в трехмером аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$ имеется тройка попарно непересекающихся прямых, то на них можно натянуть однополостный гиперболоид, если не существует плоскости, параллельной всем трем, или гиперболический параболоид, если такая плоскость существует. Бесконечно удаленная прямая этой плоскости принадлежит второму семейству образующих. Иначе, для каждого семейства образующих гиперболического параболоида имеется плоскость, им всем параллельная.

Доказанное утверждение об однополостных гиперболоидах можно интерпретировать как утверждение о «жесткости» поверхностей, образованных двумя семействами прямолинейных образующих. Такую конструкцию нельзя «пошевелить», если зафиксированы три прямые одного семейства. Это обстоятельство используется в реальных конструкциях из прямолинейных стержней в виде гиперболоида, например, в знаменитой шуховской радиобашне в Москве.

Переходим к заключительной части, посвященной сцеплению гиперболоидов. Центральный объект классической проективной геометрии — различного рода конфигурации точек, прямых, плоскостей. В ней коллекционируются случаи, когда одни геометрические соотношения (например, тройка прямых проходит через одну точку, три точки лежат на одной прямой, шесть точек лежат на одном коническом сечении и т. д.) влекут другие: конфигурации Дезарга, Паскаля и т. п. Приведенный результат позволяет исследовать конфигурации в многомерном проективном пространстве, включающие двумерные однополостные гиперболоиды. Поскольку будут рассматриваться лишь двумерные гиперболоиды (то есть гиперболоиды в $\mathbb{P}^3$), то мы далее слово «двумерный» часто опускаем.

Точки n-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^n$ будем задавать однородными координатами $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Зафиксируем геометрические соотношения для прямых в $\mathbb{P}^n$. Через любые две непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}^n$ можно провести единственную трехмерную плоскость. Для тройки попарно непересекающихся прямых возникает геометрическое соотношение: «лежать в одной трехмерной плоскости». Для четверки попарно непересекающихся прямых, лежащих в одной трехмерной плоскости, возникает соотношение: «принадлежать одному (двумерному) однополостному гиперболоиду». Напротив, три попарно непересекающиеся прямые, лежащие в одной трехмерной плоскости, всегда порождают однополостный гиперболоид.

Как уже говорилось в начале, два двумерных однополостных гиперболоида в $\mathbb{P}^n$ называют сцепленными, если они имеют общую образующую и не лежат в одной трехмерной плоскости. Несколько двумерных однополостных гиперболоидов в $\mathbb{P}^n$ называют сцепленными, если они попарно сцеплены и прямые сцепления на каждом из них принадлежат одному семейству образующих, которое называют отмеченным. Сцепление называется невырожденным, если каждая прямая сцепления принадлежит лишь двум гиперболоидам.

Пусть в пятимерном проективном пространстве $\mathbb{P}^5$ имеется четверка невырожденно сцепленных двумерных однополостных гиперболоидов. Задание такой четверки равносильно заданию четверки трехмерных плоскостей в $\mathbb{P}^5$, находящихся в общем положении. Расшифруем, что это означает. Напомним, что, как правило, k-мерная и l-мерная плоскости в $\mathbb{P}^n$ пересекаются по $(k+l-n)$-мерной плоскости (а в вырожденной ситуации по плоскости большей размерности). Тогда две трехмерные плоскости в $\mathbb{P}^5$ обычно пересекаются по прямой $(3+3-5=1)$, а три — вообще не пересекаются $(1+3<5)$. Итак, тройка трехмерных плоскостей в $\mathbb{P}^5$ в общем положении не имеет общих точек. Следовательно, любые две из этих плоскостей пересекаются по прямой (если бы две из них пересекались по двумерной плоскости, то она в пересечении с третьей плоскостью дала бы точку: $2+3-5=0$).

Соответственно, четверка плоскостей находится в общем положении, если любые три из них не имеют общих точек, а следовательно, любые две пересекаются по прямым. В каждой такой трехмерной плоскости возникает тогда тройка прямых, по которым она пересекается с другими плоскостями. Эти прямые попарно не пересекаются, и на них можно натянуть (двумерный) однополостный гиперболоид. Возникает четверка невырожденно сцепленных гиперболоидов. С другой стороны, если имеется четверка невырожденно сцепленных гиперболоидов, то порождаемые ими трехмерные плоскости, очевидно, будут находиться в общем положении. Теперь можем сформулировать основное утверждение, которое несколько сильнее, чем сформулированная в начале статьи теорема о пяти гиперболоидах.

Теорема. *Пусть имеется четверка невырожденно сцепленных двумерных однополостных гиперболоидов в пятимерном проективном пространстве $\mathbb{P}^5$. Тогда всякая трехмерная плоскость, пересекающая два из них по образующим из отмеченных семейств, пересекает два остальных гиперболоида также по образующим из отмеченных семейств. Четверка прямых пересечения с гиперболоидами на секущей плоскости лежит на одном однополостном гиперболоиде.*

Следствие (о пяти гиперболоидах). *Если имеется четверка невырожденно сцепленных однополостных двумерных гиперболоидов в $\mathbb{P}^5$, то всякий гиперболоид, сцепленный с тремя из них, сцеплен с четвертым.*

Следствие имеет место в силу того, что плоскость пятого гиперболоида удовлетворяет условиям теоремы. Утверждение теоремы является более сильным, чем следствие. Мы можем произвольно выбрать по одной образующей из отмеченных семейств на двух гиперболоидах Они не будут пересекаться, и через них проходит единственная трехмерная плоскость. Эта плоскость пересечется с плоскостями двух других гиперболоидов по прямым. Утверждается, что эти прямые лежат на гиперболоидах. Это очень сильное утверждение, поскольку на трехмерной плоскости имеется четырехпараметрическое семейство прямых, а мы утверждаем, что прямая пересечения попадает на однопараметрическое подсемейство образующих гиперболоида. К этому добавляем, что четыре прямых пересечения лежат па одном гиперболоиде.

Имеем двухпараметрическое семейство плоскостей, удовлетворяющих условию теоремы: их можно задавать, произвольно выбирая по одной образующей из отмеченных семейств на двух гиперболоидах. На каждой плоскости возникает по гиперболоиду. Все эти гиперболоиды (двухпараметрическое семейство) попарно сцеплены в силу теоремы.

Вернемся к доказательству теоремы. Мы проведем его аналитически, аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Зададим трехмерные плоскости в $\mathbb{P}^5$ как пересечения гиперплоскостей, то есть системой двух линейных уравнений $\langle \xi, y\rangle = \langle \eta, y\rangle = 0$ в однородных координатах. Пусть имеем четыре трехмерных плоскости l_1, l_2, l_3, l_4, из которых никакие три не имеют общих точек. Выберем однородные координаты так, чтобы l_1 задавалась системой $y_0 = y_1 = 0$, l_2 — системой $y_2 = y_3 = 0$, l_3 — системой $y_4 = y_5 = 0$. Это можно сделать, поскольку l_1, l_2, l_3 не имеют общих точек, а следовательно, левые части уравнений, задающих их, независимы (одновременно обращаются в нуль лишь на нулевом наборе). Пусть l_4 задается в этой системе координат уравнениями

$$\sum_{i=0}^{5} \xi_i y_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{5} \eta_i y_i = 0.$$

Векторы (ξ_0, ξ_1), (η_0, η_1) не могут быть одновременно нулевыми, поскольку это означало бы, что плоскости l_2, l_3, l_4 имеют общую прямую $y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0$, по которой пересекаются l_2 и l_3. Покажем, что они не могут быть также пропорциональными, в частности, ни один из них не может быть нулевым. Пусть $(\eta_0, \eta_1) = (c\xi_0, c\xi_1)$. Тогда точка $(-\xi_1, \xi_0, 0, 0, 0, 0)$ будет принадлежать трем плоскостям l_2, l_3, l_4, а мы предположили, что они не имеют общих точек. Аналогично можно показать, что пары векторов $(\xi_2, \xi_3), (\eta_2, \eta_3)$ и $(\xi_4, \xi_5), (\eta_4, \eta_5)$ непропорциональны. В результате сделаем замену координат

$$\begin{aligned} &x_0 = \xi_0 y_0 + \xi_1 y_1, \qquad x_1 = \eta_0 y_0 + \eta_1 y_1, \qquad x_2 = \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3, \\ &x_3 = \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3, \qquad x_4 = \xi_4 y_4 + \xi_5 y_5, \qquad x_5 = \eta_4 y_4 + \eta_5 y_5. \end{aligned}$$

В этих координатах плоскости l_1, l_2, l_3, l_4 задаются соответственно системами уравнений:

$$\begin{gathered} x_0 = x_1 = 0, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = x_5 = 0, \\ x_0 + x_2 + x_4 = x_1 + x_3 + x_5 = 0. \end{gathered}$$

Все эти четыре плоскости включаются в семейство трехмерных плоскостей

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_4 = 0, \quad \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_5 = 0. \tag{46}$$

Обозначим плоскость, задаваемую (46), через Σ_λ. Параметры естественно считать однородными координатами на двумерной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$: $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0,0)$; λ и $c\lambda$ задают одну и ту же плоскость. Плоскости l_1, l_2, l_3, l_4 соответствуют параметрам $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$.

Исследуем попарные пересечения $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$, $\lambda \neq c\mu$. Это прямая в $\mathbb{P}^5$, точки которой удовлетворяют системе четырех уравнений, полученных объединением (46) для λ и μ. При этом очевидно, что $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ зависит лишь от прямой $\{\lambda, \mu\}$ на параметрической плоскости $\mathbb{P}^2$, соединяющей точки λ и μ. Поэтому если фиксировать λ, то прямым $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ на параметрической плоскости $\mathbb{P}^2$ соответствуют прямые, которые проходят через λ. На множестве прямых на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, которые проходят через фиксированную точку, естественно вводится структура проективной прямой. Исследуем прямые $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ при фиксированном λ более конкретно. Пусть для определенности $\lambda_0 \neq 0$ (это фактически не ограничивает общности,так как λ_0 можно заменить другим λ_j). В качестве однородных координат на Σ_λ возьмем набор (x_2, x_3, x_4, x_5). В этих координатах прямые $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ задаются системой:

$$\begin{gathered} \bar{x}_0 x_2 + \bar{x}_1 x_4 = 0, \quad \bar{x}_0 x_3 + \bar{x}_1 x_5 = 0, \\ \bar{x}_0 = \mu_0\lambda_1 - \lambda_0\mu_1, \quad \bar{x}_2 = \mu_0\lambda_2 - \lambda_0\mu_2. \end{gathered} \tag{47}$$

Если λ, μ не пропорциональны, то $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1) \neq (0,0)$. Таким образом, $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ зависит лишь от прямой $\{\lambda, \mu\}$. Из системы (47) видно, что прямые $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ при фиксированном λ являются семейством образующих некоторого однополостного гиперболоида H_λ в трехмерной плоскости Σ_λ. Следовательно, мы получили семейство сцепленных гиперболоидов H_λ, зависящих от двух параметров $\lambda \in \mathbb{P}^2$. Это сцепление является вырожденным, поскольку через образующую $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu$ проходят все гиперболоиды H_ν, где ν принадлежит прямой $\{\lambda, \mu\}$.

Осталось доказать, что всякая трехмерная плоскость, пересекающая два различных гиперболоида H_λ, H_μ по образующим из отмеченных семейств, является одной из плоскостей семейства Σ_λ. Дело в том, что все плоскости семейства пересекают все гиперболоиды H_λ по образующим из отмеченных семейств, в том числе и четверку исходных. Пусть теперь трехмерная плоскость порождается различными прямыми $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_{\lambda'}$ и $\Sigma_\mu \cap \Sigma_{\mu'}$, и ν — точка на параметрической плоскости $\mathbb{P}^2$, являющаяся пересечением прямых $\{\lambda, \lambda'\}$ и $\{\mu, \mu'\}$ (они не могут совпадать). Тогда Σ_ν содержит $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_{\lambda'}$, $\Sigma_\mu \cap \Sigma_{\mu'}$, а потому совпадает с рассмотренной плоскостью. (Фактически мы доказали разрешимость некоторой системы линейных уравнений на ν, которую можно было бы рассмотреть непосредственно.) Итак, доказательство теоремы о сцеплении гиперболоидов завершено.