ЗАГАДКА РАМАНУДЖАНА

> Рамануджан любил говорить, что формулы ему внушает во сне богиня Намаккаль. Интересно отметить, что действительно он часто, вставая по утрам с кровати, тут же записывал готовые формулы.
> *Сешу Айар и Рамачандра Рао*

Письмо в Кембридж. В самом начале 1913 года профессор Кембриджского университета Г. Г. Харди получил письмо из далекого Мадраса. В свои 36 лет Харди был уже одним из крупнейших специалистов по анализу и теории чисел, автором ряда великолепных математических работ. Отправитель же письма, Сриниваза Рамануджан, работал клерком в бухгалтерии почтового ведомства Мадраса с более чем скромным окладом в 20 фунтов в год. Он сообщал о себе, что не имеет университетского образования и после окончания школы самостоятельно занимается математикой, не следуя принятой системе, а «избрав свою дорогу». Математическое содержание письма выглядит достаточно неуклюже — вполне можно принять автора за самоуверенного любителя.

Само по себе такое письмо не могло произвести на Харди сильного впечатления. Но к письму было приложено некоторое количество формул, которые предлагалось опубликовать, если они интересны, чего сам автор не мог сделать из-за своей бедности. Просмотр формул насторожил Харди: он понял, что имеет дело с незаурядным явлением. Он заинтересованно отвечает Рамануджану, между ними завязывается интенсивная переписка. Постепенно у Харди собирается около 120 разнообразных формул.

Формулы Рамануджана касались в основном соотношений между бесконечными радикалами (вставка 2), бесконечными рядами, произведениями и цепными дробями (вставки 1, 3, 4), Вставка 1. Пример бесконечной суммы, вычисленной Рамануджаном.

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi}$$

Эта удивительная формула — одна из приложенных Рамануджаном к первому письму Харди. Каким образом сумма знакочередующегося ряда $a_0+a_1+a_2+\ldots$ с общим членом

$$a_n=(-1)^n(4n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\right)^3$$

может вдруг оказаться равной $2/\pi$, Харди долго не мог понять. В справедливости этой формулы как приближенного равенства читатель может убедиться с помощью калькулятора. Доказательство точного равенства неэлементарно.

тождеств между интегралами. Прежде всего было ясно, что они далеко выходят за пределы элементарной математики. Далее возникает цепь вопросов: известны ли они; если да, то самостоятельно ли получены автором письма; если нет, то верны ли они? Вскоре Харди понимает, что ситуация парадоксальна: он, несомненно, выдающийся специалист по современному анализу, имеет дело с россыпью неизвестных ему формул!

Большое впечатление на Харди произвели формулы с бесконечными рядами (см. вставку 1). После их изучения он приходит к выводу: «...в распоряжении Рамануджана должны быть какие-то очень общие теоремы, которые он от меня скрывает».

Но особо удивили Харди соотношения с бесконечными цепными дробями (одно из более поздних соотношений этого типа показано на вставке 3): «...эти соотношения поставили меня полностью в тупик; я никогда не видел ничего подобного. Достаточно бросить на них один взгляд, чтобы убедиться в том, что они могли быть написаны только математиком самого высшего класса».

Чудо из Кумбаконама. Как же сложился математик, который так удивил Харди? Сриниваза Рамануджан Айенгор родился 22 декабря 1887 г. на юге Индии в селении Эрод. Его детство в основном

Вставка 2. Бесконечно повторяющиеся радикалы.

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}=3.$$

Эту красивую формулу Рамануджан получил еще в школьные годы следующим образом: он написал последовательность очевидных равенств

$$\begin{aligned} n(n+2) &= n\sqrt{1+(n+1)(n+3)} = \\ &= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}} = \ldots, \end{aligned}$$

а затем подставил $n = 1$. Вопрос о законности перехода к пределу Рамануджана не интересовал. Действуя так же, читатель может попробовать самостоятельно получить похожую формулу

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}}=4.$$

протекало в маленьком городке Кумбаконам (в 260 км от Мадраса), где его отец работал бухгалтером в небольшой текстильной лавке. Рамануджан принадлежал к касте браминов, но богатство уже давно не было уделом его родственников. Его родители, а мать особенно, были глубоко религиозны. Рамануджан получил воспитание в традициях касты. Детство, проведенное в городе, где каждый камень связан с древней религией, в окружении людей, постоянно ощущающих свою принадлежность к высшей касте, сыграло большую роль в становлении Рамануджана.

С 5 лет Рамануджан в школе, к 10 годам он заканчивает начальную школу. Он начинает проявлять незаурядные способности, получает стипендию, обеспечивающую обучение в средней школе за половинную плату. В 14 лет студент из Мадраса дает ему двухтомное руководство по тригонометрии Лони. Вскоре Рамануджан изучил тригонометрию, и студент имел возможность пользоваться его консультацией в решении задач. К этому периоду относятся первые рассказы и легенды. Утверждается, что он сам открыл «формулу Эйлера о синусе и косинусе» и был очень расстроен, найдя эту формулу во втором томе Лони.

Вставка 3. Числовое тождество с бесконечной суммой и цепной дробью.

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+$$
$$+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

Это, возможно, самая красивая формула Рамануджана, истинное произведение математического искусства. Она неожиданно связывает бесконечный ряд и бесконечную цепную дробь. Удивительно, что ни ряд, ни цепная дробь не выражаются через известные постоянные π и e, а их сумма непостижимым образом оказывается равной $\sqrt{\pi e/2}$!

«Маленький брамин» полагает, что в математике, как и в других науках, следует искать присущую ей «высшую истину», расспрашивает учителей. Старшие дают маловразумительные ссылки на теорему Пифагора, а то и на вычисления с процентами.

«Синопсис элементарных результатов чистой и прикладной математики». Это двухтомное руководство английского математика Карра, написанное в 1880 – 1886 гг., попало к Рамануджану в 1903 г. — ему было тогда 16 лет. Эта книга сыграла огромную роль в формировании Рамануджана. В ней было собрано 6165 теорем и формул, почти без доказательств, с минимальными пояснениями. В основном книга посвящена алгебре, тригонометрии, анализу, аналитической геометрии.

Книга Карра стимулировала мальчика к самостоятельному выводу формул. Об этом говорят те, кто знал Рамануджана в эти годы. Постепенно меняется область его основных интересов: магические квадраты, потом квадратура круга (он находит π с точностью, позволяющей вычислить длину экватора с ошибкой, не превышающей $1-2$ *м*, гласит легенда) и, наконец, наступает очередь бесконечных рядов. Это уже начало подлинной математической жизни!

Книга Карра оказалась достаточно удачной для того, чтобы сформировать математический мир Рамануджана. Но ориентация на эту книгу имела и другие последствия. Поскольку книга не содержала доказательств, а в лучшем случае — наводящие соображения, у Рамануджана складывается своеобразный метод установления математической истины. К тому же он лишен в Индии подходящих руководств для того, чтобы проводить строгие доказательства.

«Его понимание сущности математического доказательства было более чем туманным; он пришел ко всем своим результатам, как ранним, так и более поздним, как верным, так и неверным, при помощи странной смеси интуитивных догадок, индуктивных соображений и логических рассуждений . . . »

Математическая судьба Рамануджана фактически полностью решилась в эти годы — направление научных поисков, способ думать он уже никогда не менял. Здесь можно выразить сожаление, что Рамануджан формировался в тяжелых условиях. В нормальных условиях он, несомненно, стал бы математиком с лучшей профессиональной подготовкой, но можно ли быть уверенным, что он был бы столь же уникален? Смог бы Рамануджан увидеть так много, если бы с детства был обучен правилам поведения в математике и доводил бы свои результаты до публикаций со строгими доказательствами, строил бы свой математический мир на базе всего достигнутого человечеством, а не на сравнительно небольшом числе фактов?

От чисел к формулам. В формировании математического мира Рамануджана было важно, что начальный запас математических фактов (в основном почерпнутый из книги Карра) объединился у него с огромным запасом наблюдений над конкретными числами. Он коллекционировал такие факты с детства. Его школьный товарищ вспоминал, что Рамануджан знал огромное число знаков в разложениях e, π и других чисел в десятичные дроби. Он обладал поразительными способностями подмечать арифметические закономерности, терпеливо рассматривая огромный числовой материал — искусство, которым виртуозно владели Эйлер и Гаусс, но которое было в значительной степени утрачено к XX веку. Многое в числовой кладовой открывалось при случайных обстоятельствах. Харди позднее вспоминал, как он навестил в больнице Рамануджана и сказал, что он приехал на такси со «скучным» номером 1729. Рамануджан разволновался и воскликнул: «Харди, ну как же, Харди, это число — наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы кубов двумя различными способами!» ($1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$). В книге Харди о творчестве Рамануджана метко сказано, что «каждое натуральное число было личным другом Рамануджана».

Рамануджан стремительно пополняет запас фактов, почерпнутый у Карра. Он при этом с удивительной скоростью переоткрывает результаты Эйлера, Гаусса, Якоби. Так некогда юный Гаусс в Брауншвейге, лишенный литературы, реконструировал в короткий срок то, на что у его великих предшественников ушли десятилетия. Можно только удивляться, что реконструкции математики с такими скоростями возможны.

Постепенно коллекция наблюдений над конкретными числами уходит у Рамануджана на второй план перед миром формул. Формулы для него — не вспомогательное средство для доказательств или вычислений, но представляют самостоятельную цель. Внутренняя красота формулы имеет для Рамануджана бесконечную ценность. Его формулы можно рассматривать как прекрасные картины.

Выбор профессии. В 1904 г. Рамануджан поступает в Мадрасский университет, делает первые успехи не только в математике, но и в английском языке. Однако математика начинает занимать его целиком, и это не замедлило сказаться. Он не кончает даже первого курса, странствует с другом, делает попытку вернуться в университет, а затем закончить его экстерном (1907 г.). Но все безуспешно. В 1909 г. он женится; его жене девять лет, и она доживет до наших дней, трогательно сохраняя память о великом супруге. Рамануджан вынужден думать о средствах на жизнь, но он не может найти подходящего занятия. В 1910 г. он показывает свои математические результаты Рамасвари Айару, основателю Индийского математического общества, затем Сешу Айару, преподавателю Кумбаконамского колледжа, и Рамачандра Рао, крупному чиновнику, получившему математическое образование; позднее они стали биографами Рамануджана.

Рао помогает ему из своих средств, а затем устраивает клерком в почтовое управление. В 1911 г. появляется в печати сообщение Сешу Айара о результатах Рамануджана, а затем и его собственная статья. В судьбе Рамануджана начинают принимать участие влиятельные английские чиновники; с 1 мая 1913 г. на два года он обеспечен специальной стипендией в 75 рупий (5 фунтов) в месяц. Этого хватает на скромную жизнь, и Рамануджан оставляет карьеру клерка. Он становится «профессиональным математиком».

Итак, Рамануджан встретил среди окружающих определенное признание, но не понимание. Мы помним, что в начале 1913 г. он пишет Харди. Чего он ожидал от Харди? Найти, наконец, человека, способного понять и оценить его результаты, помочь и направить его дальнейшие исследования? Скорее повод был более прозаическим: от внешнего мира ему требовались не слава и признание, но обеспечение возможности существовать.

Надо сказать, что в научном плане адресат был выбран исключительно удачно: трудно было бы найти другого математика в мире, который смог бы так быстро и эффективно сориентироваться в результатах Рамануджана. Очень скоро Харди понимает, что от него требуется не оценка результатов безвестного любителя или младшего коллеги, но спасение огромного дарования. Одновременно его не оставляет мысль, что Рамануджан сообщает лишь немногое из того, что знает, что он обладает очень общими результатами, приводя лишь частные иллюстрации. Но главное — он не может реконструировать метод Рамануджана, и ему не терпится узнать, каким путем двигался его удивительный корреспондент. Неожиданно Рамануджан твердо отказывается описывать свой метод. В письме от 27 февраля 1913 г.: «...Вы просите меня сообщить мои методы доказательств... Вот что я хочу Вам сказать: проверьте мои результаты, и если они совпадают с Вашими, то Вы должны, по крайней мере, согласиться с тем, что в моих основных рассуждениях имеется какое-то зерно истины».

Харди подозревает, что Рамануджан боится, что его методами могут воспользоваться, пытается рассеять опасения, но 17 апреля получает ответ: «Ваше последнее письмо причинило мне боль... Я нисколько не опасаюсь того, что мои методы будут использованы другими. Напротив, я работаю моими ме-

Вставка 4. Тождество Роджерса — Рамануджана.

Это тождество

$$1+\frac{x}{1-x}+\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^6)(1-x^{11})\cdot\ldots\cdot(1-x^4)(1-x^9)(1-x^{14})\ldots}$$

Рамануджан нашел в 1911 году, но не сумел его доказать. Не сумел его доказать и Харди. В 1917 году, просматривая журнальную литературу (что он делал довольно редко), Рамануджан наткнулся на оставшуюся незамеченной статью английского математика Роджерса 1894 года, где эта формула была доказана. Оказалось, далее, что это тождество тесно связано с числом $p(n)$ разбиений на слагаемые (см. вставку 5). А совсем недавно оно появилось в исследованиях ... по статистической физике.

тодами 8 лет и не нашел никого, кто бы понимал или оценил их. Как я уже писал в моем последнем письме, я нашел в Вас внимательного и понимающего друга и готов передать в Ваше полное распоряжение те немногие результаты, которыми я располагаю. Только в силу новизны моих методов я не решаюсь даже сейчас сообщить Вам мой путь вывода тех формул, которые я сообщил Вам в моих предыдущих письмах ...».

Для Харди не было сомнений: для Рамануджана необходимы контакты с настоящими математиками. Обеспечить в Индии это невозможно, и ему необходимо срочно перебраться в Англию. Удалось договориться о стипендии в Кембридже. Однако предстояло убедить в необходимости поездки самого Рамануджана, которого нынешнее положение вполне устраивало. К тому же против поездки категорически возражала мать, согласие которой было для сына обязательным. Друзья пытаются сформировать общественное мнение, активно действует кембриджский математик Невил, в начале 1914 г. посетивший Мадрас. Он обращается к ректору университета за поддержкой, но безуспешно.

То, что было не под силу ученым, легко осилила ... богиня Намаккаль (согласно легенде, из ее уст во сне Рамануджан узнавал новые формулы). Мать увидела во сне сына, сидящего в большом зале в окружении европейцев, и богиня повелела не противить-

Вставка 5. Теорема Харди – Рамануджана.

Эта теорема дает оценку числа $p(n)$ разбиений натурального числа n на натуральные слагаемые. (Например, $p(5) = 7$, так как $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.) Именно,

$$p(n) \sim A_n e^{\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)},$$

где $A_n = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{6}\left(n-\frac{1}{24}\right)} - \dfrac{1}{2\left(n-\frac{1}{24}\right)^{3/2}}\right)$ — функция от n. Например, при $n = 200$ «приближенная» формула Харди – Рамануджана дает $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$. Это — точный ответ! Наиболее загадочна в формуле для $p(n)$ маленькая «поправочка» $(-1/24)$, придуманная Рамануджаном. Никто — ни Харди, ни даже сам Рамануджан — не сумел объяснить, откуда она взялась. Опять вмешательство богини Намаккаль? Так или иначе, именно эта таинственная поправка обеспечила точность оценки. Однако Харди и Рамануджан не ограничились приближенной формулой: впоследствии они получили точное *равенство* для вычисления $p(n)$.

ся отъезду. 17 марта 1914 г. Рамануджан отбыл в Англию. Он будет два года получать стипендию по 250 фунтов стерлингов в год. Из них 50 фунтов будет получать мать. По приезде вскоре стипендия была еще увеличена на 60 фунтов.

В Кембридже. Рамануджану 27 лет. Лучшие годы для становления математика прожиты в Индии без контакта с серьезными учеными, без доступа к математической литературе. В разных странах, в разные времена человек ощущает себя сложившимся в разном возрасте. Для Индии начала века, с очень низкой продолжительностью жизни, 27 лет — возраст зрелого человека. Вдова Рамануджана вспоминала, что он любил составлять гороскопы, и его собственный гороскоп предсказывал ему смерть до достижения 35-летнего возраста.

Харди предстояло принять очень ответственное решение: надо ли прервать занятия Рамануджана с тем, чтобы он смог освоить современную математику? Выбор Харди был, по-видимому, единственно возможным: не менять стиля и направлений исследования Рамануджана, лишь по возможности корректируя их с учетом современной математики и стараясь объяснять новые вещи, обращая внимание на подходящую литературу. Харди писал:

«Его ум уже сложился, и он так и не стал „ортодоксальным“ математиком. Однако он еще был способен учить новые вещи и делал это весьма хорошо. Было невозможно обучать его систематически, но мало-помалу он воспринимал новые точки зрения. В частности, он усвоил, что такое доказательство, и его поздние статьи, при том, что в некоторых отношениях они оставались необычными и индивидуальными, воспринимались как работы хорошо информированного математика. Однако его методы оставались по существу прежними».

Работает Рамануджан очень интенсивно и плодотворно. У него много общих интересов с Харди. Фантастическая интуиция Рамануджана, объединившись с рафинированной техникой Харди, дает замечательные плоды. К Рамануджану приходит признание: в 1918 г. он становится профессором университета в Кембридже; его выбирают в Королевское общество (английскую академию наук). Никогда прежде индус не удостаивался таких почестей.

Жилось Рамануджану непросто. Он строго следовал всем религиозным ограничениям, как и обещал родителям. В частности, он был вегетарианцем и был вынужден готовить себе сам. Он отказывался нарушать правила, даже когда тяжело заболел в 1917 г. Вероятно, нерегулярность в питании ускорила болезнь (так считал и сам Рамануджан, как вспоминала вдова). Оставшиеся два года в Англии Рамануджан провел в больницах и санаториях, вынужденный ослабить интенсивность занятий математикой.

Непросто было вписаться Рамануджану в кембриджскую жизнь, полную чуждых условностей и традиций. Природная вежливость, стремление не быть источником для дискомфорта окружающим, так присущие индийской культуре, помогали Рамануджану по крайней мере внешне приспособиться к университетской жизни.

Харди очень много делал для Рамануджана: следил за его занятиями, стремился восполнить пробелы в его образовании, заботился о его положении в обществе и быте. Рамануджан до последней минуты был полон трогательной признательности и любви к нему...

Возвращение и смерть. Заболев, Рамануджан начинает думать о возвращении на родину. Лишь к началу 1919 г. его здоровье улучшилось настолько, чтобы совершить далекую поездку по морю. Ему было готово место в Мадрасском университете — слава его достигла Индии. Рамануджан пишет ректору благодарственное письмо, извиняется за то, что последнее время болезнь не давала возможности работать достаточно интенсивно. Но он так и не смог приступить к работе в университете. Жить на родине (и вообще жить) ему оставалось менее года. После трех месяцев в Мадрасе Рамануджан перебрался в Кумбаконам. В январе 1920 г. он посылает последнее письмо Харди, где сообщает о работе над новым классом тэта-функций. Ни врачи, ни родные не могут уговорить смертельно больного ученого прервать работу. 26 апреля 1920 г. Рамануджан умер. Ему еще не исполнилось 33 года.

Память. Весть о смерти Рамануджана потрясла его друзей и в Индии, и в Англии. Они чувствовали свой долг разобраться в том удивительном явлении, каким был Рамануджан. Харди пишет: «Возможно, что великие дни формул окончились и Рамануджану следовало бы родиться на 100 лет раньше; но он был величайшим создателем формул своего времени».

Друзья и коллеги старались оценить место Рамануджана в современной математике. Они не сомневались в его удивительных способностях, фантастической красоте формул, но все сходились на том, что сам выбор сюжетов, которых настойчиво держался Рамануджан, не позволяет ему занять достойное место в истории математики.

Прошло более полувека, и сегодня мы отчетливо видим то, что не могли предвидеть Харди и его современники. Гений Рамануджана оказался созвучен не только прошлому, но и будущему математики. Арифметические формулы Рамануджана нередко оказывались ключевыми на новых этапах алгебраической теории чисел, и можно было только удивляться, как он смог увидеть их, не зная того, без чего их увидеть нельзя. А потом пришло возрождение интереса к конкретным явным формулам как внутри математики, так и в сфере ее приложений. Современная математическая и теоретическая физика обращаются порой к весьма абстрактным разделам математики, и при этом очень изысканные явные формулы играют важную роль. Вот два недавних примера, связанные с Рамануджаном.

Р. Бакстер, прославившийся построением точно решаемых моделей статистической механики, при исследовании модели «жесткого гексагона» неожиданно обнаружил, что постоянно имеет дело с тождествами Роджерса – Рамануджана (вставка 4 на с. 398) и Рамануджана.

Нобелевский лауреат С. Вайнберг недавно вспоминал, как, занимаясь в начале 70-х годов очень популярной сейчас теорией струн, он столкнулся с задачей об оценке функции разбиений $p(n)$ для больших n. Выяснилось, что нужные формулы получили Харди и Рамануджан в 1918 г. (вставка 5 на с. 399)

Красота формул Рамануджана даровала им способность возрождаться при самых необычных обстоятельствах.