НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

globus ГЛОБУС

Общематематический семинар. Выпуск 2

Под редакцией М. А. Цфасмана и В. В. Прасолова

Москва
Издательство МЦНМО
2005

УДК 51(06)
ББК 22.1я5
Г54

Издание осуществлено при поддержке РФФИ
(*издательский проект* № 02-01-14080).

Глобус. Общематематический семинар / Под ред. М. А. Цфасмана и В. В. Прасолова. — М.: МЦНМО, 2004— . — ISBN 5-94057-064-X.

Г54

Вып. 2. — 2005. — 216 с. — ISBN 5-94057-069-0.

Цель семинара «Глобус» — по возможности восстановить единство математики. Семинар рассчитан на математиков всех специальностей, аспирантов и студентов.

Второй выпуск включает доклады В. М. Бухштабера, А. М. Вершика, Э. Б. Винберга, С. Г. Гиндикина, С. М. Гусейн-Заде, Ю. Г. Зархина, Д. А. Лейтеса, Н. С. Надирашвили, Ю. А. Неретина, В. В. Никулина, С. П. Новикова, А. Г. Сергеева.

УДК 51(06), ББК 22.1я5

ISBN 5-94057-064-X
ISBN 5-94057-069-0 (Вып. 2)

Предисловие

Перед Вами второй выпуск докладов на семинаре «Глобус» — общематематическом семинаре Независимого Московского университета. Как и в первом выпуске (М.: МЦНМО, 2004), авторы пытаются поделиться с коллегами из других частей математики видением своей области, от основных понятий до самых свежих результатов.

Краевые задачи УрЧП, теоремы о среднем, гармонические функции и случайные блуждания ждут Вас в докладе Н. С. Надирашвили. Доклад Ю. Г. Зархина посвящён линейной алгебре, связанной с проблемой Ходжа. В. В. Никулин рассказывает о классе бесконечномерных алгебр Ли — о лоренцевых алгебрах Каца—Муди. Преобразование Радона, точнее, его обобщение на орисферы симметрических пространств — сюжет доклада Э. Б. Винберга. Ю. А. Неретин говорит о квазиинвариантных мерах относительно групп диффеоморфизмов. Д. А. Лейтес — о счёте когомологий алгебр Ли и об их связи с голономными и неголономными структурами. А. М. Вершик рассказывает о предельных формах выпуклых многогранников и диаграмм Юнга. В. М. Бухштабер — о симметрических многочленах от векторов. В докладе С. Г. Гиндикина обсуждается интегральная геометрия как обобщение теории представлений. С. П. Новиков рассказывает, чем пуассоновские структуры лучше лагранжевых. Доклад А. Г. Сергеева — о физике и математике вихревых уравнений. И, наконец, С. М. Гусейн-Заде говорит о мотивном интегрировании в алгебраической геометрии.

Как видите, области действительно очень многообразны. Блажен, кто всё это поймёт!

Спасибо докладчикам и слушателям.

Отдельное спасибо сотрудникам издательства: А. С. Протопопову, В. Ю. Радионову и Ю. Н. Торхову.

Доклады записаны В. В. Прасоловым. Ему — особая благодарность.

М. А. Цфасман

Н. С. Надирашвили

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Я расскажу об обращении теоремы Гаусса о среднем значении гармонической функции. Это вот что такое. Пусть u — гармоническая функция в $\mathbb{R}^n$, т. е. функция u дважды дифференцируема и $\Delta u = 0$. Тогда в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ функция u равна своему среднему значению относительно сферы произвольного радиуса r с центром в данной точке x. Я буду это записывать так: $u(x) = \fint\limits_{S_x^r} u\,dx$. Вместо сферы можно взять шар, который я буду обозначать B_x^r. Таким образом, из гармоничности следует формула $u(x) = \fint\limits_{S_x^r} u\,dx$. Меня интересует обращение этой импликации. Сейчас я уточню, что имеется в виду.

Первые результаты в этом направлении получил Кёбе около 1900 г. Он доказал, что если функция u непрерывна, и для любого x и любого r верна формула $u(x) = \fint\limits_{S_x^r} u\,dx$, то функция u гармоническая.

Бросается в глаза, что этот результат не оптимальный: мы накладываем слишком много условий, поскольку мы что-то утверждаем про функцию $n+1$ аргумента, а результат содержит всего n аргументов. Естественно попытаться убрать какой-то квантор. В этой задаче естественно попытаться убрать квантор всеобщности перед радиусом и вместо него поставить квантор существования. Предположим, что для любого x найдётся $r > 0$, для которого $u(x) = \fint\limits_{S_x^r} u\,dx$. Верно ли, что функция u гармоническая? Если вопрос поставить буквально так, то легко строится контрпример.

Чтобы построить соответствующий пример, давайте возьмём функцию f, зависящую только от $\|x\|$. Эта функция будет кусочно-линейная. Она будет осциллировать между $2 - \frac{1}{n}$ и $-\left(2 - \frac{1}{n}\right)$ (рис. 1). Промежутки, на которых функция постоянна, я выберу достаточно большими. Легко проверить, что если промежутки будут достаточно большими, то для

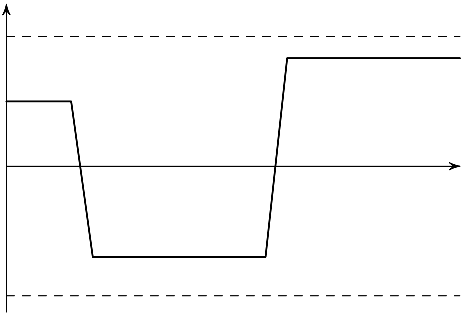


Рис. 1. График функции

любого x найдётся $r > 0$, для которого $u(x) = \fint_{S_x^r} f\,dx$. Сначала мы найдём r так, что среднее значение будет больше $f(\|x\|)$. Для этого возьмём радиус так, что область интегрирования почти целиком относится к следующему промежутку, в котором значение больше и положительно. Потом возьмём радиус ещё больше, чтобы попасть в область отрицательных значений. Тогда среднее значение будет меньше. Где-то между этими радиусами получится среднее значение $f(\|x\|)$.

Лебег около 1910 г. доказал, что такого примера не существует в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$. А именно, если u непрерывна вплоть до границы, $u \in C(\bar{G})$, для любой точки $x \in G$ существует $r > 0$, для которого $u(x) = \fint_{B_x^r} u\,dx$, и граница ∂G гладкая, то тогда функция u гармоническая.

Эту теорему легко доказать, пользуясь некоторыми фактами про задачу Дирихле. Найдём гармоническую функцию v в области G, для которой $v = u$ на ∂G. В предположении, что граница ∂G гладкая, такая задача Дирихле разрешима, и разрешима она именно в классе функций, непрерывных на границе. Гармоническая функция v обладает свойством среднего, поэтому функция $w = u - v$ обладает свойством среднего и обращается в нуль на границе. Дальше, казалось бы, можно просто взять максимум — и всё. Но это не совсем так просто. Например, мы взяли какой-то максимум, взяли соответствующий шар, и оказалось, что на всём этом шаре значение равно этому максимуму. Чтобы быть совсем аккуратными, давайте из всего множества максимумов возьмём ближайший к границе. Он будет отделён от границы. Поэтому у среднего по сфере и у среднего по шару какая-то часть пройдёт по области, где функция w строго меньше максимума. Доказательство закончено.

В частности, теорема Кёбе следует из этого факта. Поскольку там берутся шары любого радиуса, можно рассмотреть ограниченную область.

На этом введение заканчивается. Теперь я расскажу про более сложные вещи. Какое обобщение здесь прежде всего напрашивается? Оказывается, что предположение о гладкости границы излишне; достаточно предполагать, что область ограничена и $u \in C(\bar{G})$. Этот факт установлен Келлогом около 1920 г. Это уже тонкий результат теории краевых задач. В негладкой области тоже можно рассматривать обобщённые решения, но они не будут непрерывными на границе.

Самое досадное предположение Келлога — это то, что $u \in C(\bar{G})$. Особенно досадно это предположение потому, что гармоническая функция с непрерывным краевым условием не обязана быть непрерывной в замыкании области (а здесь это предполагается). Мы можем предписать некоторые непрерывные значения функции на границе и формально решить задачу Дирихле. Но получится формальное решение, которое не принимает этих значений. Почти всюду это решение принимает на границе нужные значения, но в некоторых точках оно разрывно. «Почти всюду» здесь понимается по отношению к естественной мере — так называемой *гармонической мере*, определённой на границе. Я далее ещё упомяну о ней. В каком-то смысле есть единственное осмысленное решение задачи Дирихле в любой области. Но оно фактически, даже если граничные условия непрерывные, будет иметь разрывы. Задача Дирихле минимизирует энергию. Если вы натянете решение на остриё, то оно порвётся. Рассмотрим область с каспом в $\mathbb{R}^3$ (рис. 2). Если вы в окрестности каспа положите граничное условие равное 1, а на остальной части границы строго меньшее 1, то в вершине решение оторвётся вниз. Решение будет стремиться к единице при подходе к границе не в вершине, и будет стремиться к чему-то меньшему единицы при подходе к вершине.

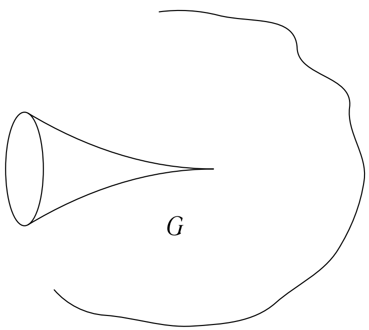
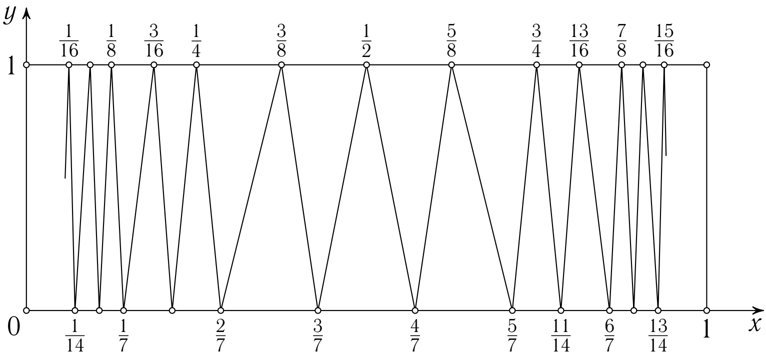


Рис. 2. Область с негладкой границей

Теперь я подхожу к двум гипотезам, сформулированным Литлвудом значительно позже работы Келлога. Они касаются освобождения от условия $u \in C(\bar{G})$. Заменить его просто ограниченностью нельзя. Представьте себе функцию на плоскости, которая на прямой равна $1/2$, по одну сторону от этой прямой равна 0, а по другую сторону от этой прямой равна 1. Если брать очень маленькие радиусы, то условие среднего будет выполняться. От такой патологической ситуации лучше сразу избавиться. Внутри области будем считать, что тестируемая функция



Р и с. 3. Пример Куранта и Гильберта

непрерывна: $u \in C(G)$. А вообще функция будет просто ограниченной, т. е. $u \in L_\infty(G) \cap C(G)$. Предположим также, что $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область. Литлвуд спрашивал, верно ли обращение теоремы о среднем в такой постановке. Его ожидания были такие: а) в случае среднего по кругу (т. е. для любой точки $x \in G$ найдётся шар B_x^r, среднее значение по которому функции u равно $u(x)$) функция u гармоническая, т. е. $\Delta u = 0$; б) в случае среднего по окружности S_x^r функция u не обязательно гармоническая.

До сих пор не было разницы, какие средние рассматривать. Мотивировка в таком разночтении была в том, что ещё до Литлвуда была получена пара результатов. А именно, был полностью исследован одномерный случай. В этом случае область — это отрезок, сфера — пара точек (симметричных относительно центра), шар — интервал, гармоническая функция — линейная. Переведя на этот язык, можно сформулировать нужные утверждения. В случае 0-мерной сферы контрпример был построен Курантом и Гильбертом в книге «Уравнения математической физики»; там есть соответствующая картинка (рис. 3). Функция кусочно линейная; она осциллирует (между 0 и $+1$) по типу функции $1/x$ при подходе к нулю и к единице. Курант и Гильберт предложили численный выбор максимумов и минимумов, который обладает таким замечательным свойством: если мы возьмём максимум, то либо соседние с ним максимумы расположены на одинаковом расстоянии, либо если мы пойдём от него на один максимум налево (направо) и на два максимума направо (соответственно, налево), то они окажутся на равном расстоянии. Оказывается, что этому условию можно удовлетворить и конкретно изобразить график. То же самое делается внизу.

Контрпример построен, но совершенно непонятно, как можно что-то такое сделать в двумерном случае. На двумерный случай эта конструкция не обобщается. Но, во всяком случае, при $n=1$ есть контрпример.

Независимо была работа Хаккермана (Huckermann), который доказал положительный результат при $n=1$ для шаров. То есть, в 1-мерном случае ситуация ровно та, как предположил Литлвуд в 2-мерном случае. В последние годы мы вместе с Хансеном (Hansen) доказали, что, как и ожидал Литлвуд, в случае средних по кругам функция гармоническая, а в случае средних по окружностям функция не обязательно гармоническая. Хотя интуитивно это кажется очень странным. До 2-мерного случая пример Куранта и Гильберта нельзя дотянуть; в 2-мерном случае нельзя так легко прыгать. В 1-мерном случае мы играли на том, что сферы не пересекаются. Воспроизвести что-то такое в 2-мерном случае невозможно. Тем не менее, факт остаётся в силе. Некий обзор доказательств я приведу.

Между Литлвудом и нашими работами были работы ряда авторов, в основном Бакстера (Baxter) и Виха (Veech), которые доказывали гармоничность при некоторых дополнительных ограничениях.

Основной технический приём — связь гармонических функций с броуновским движением. Я сделаю обзор этого в самых общих частях. Пусть есть броуновское движение $\xi_x(t)$ — так обычно обозначают броуновское движение, которое стартует из точки x, а в точке t есть какое-то вероятностное распределение этой броуновской частицы, которое обозначено ξ. Это распределение обладает замечательным свойством. В $\mathbb{R}^n$ можно написать конкретное гауссовское распределение. Я хочу подчеркнуть факт, который непосредственно связан с гармоническими функциями: если мы проинтегрируем любую гармоническую функцию против такого распределения, то получим значение в точке. Это — глубокая связь гармонических функций и броуновского движения.

На этом свойстве основано компьютерное решение задачи Дирихле методом Монте-Карло. Оно устроено таким образом. Допустим, мы хотим найти в области гармоническую функцию, и заданы граничные условия $\varphi(x)$. Тогда можно рассмотреть броуновское движение частицы из данной точки x. С вероятностью 1 она в какой-то момент покинет область. Зафиксируем первый момент, когда частица покинет область. Для каждого подмножества границы есть вероятность, с какой частица уйдёт из области в первый раз именно через это подмножество. То есть у нас есть некая мера на границе области — *гармоническая мера*, относящаяся к точке x, из которой мы стартуем. Обычно эта гармоническая мера обозначается $\omega(x)$. Чтобы решить задачу Дирихле, достаточно проинтегрировать граничную функцию φ против гармонической меры $\omega(x)$. Тогда получим решение задачи Дирихле в точке x:

$$u(x) = \oint\limits_{\partial G} \varphi \, d\omega(x).$$

Кстати, такое определение решения не зависит от того, гладкая граница или нет. Это — один из способов строить решения задачи Дирихле в нерегулярных областях.

Броуновское движение можно имитировать достаточно мелким случайным блужданием. Допустим, мы хотим решить задачу Дирихле с заданным граничным условием на стенах комнаты. Мы ставим пьяного в данную внутреннюю точку. Он с вероятностью 1 въезжает в стену. Мы хотим узнать гармоническую меру какой-то части стены. Для этого мы смотрим, с какой вероятностью он въезжает в эту часть стены. Это и будет гармоническая мера.

Теперь я скажу, какой объект мы будет рассматривать. Наша задача предполагает заданность функции $r(x)$ в области. Дальше мы рассматриваем либо шар, либо сферу радиуса $r(x)$ с центром x. Функция $r(x)$ предполагается заданной во всех задачах. Чтобы не нагромождать сложностей, я буду предполагать, что функция $r(x)$ непрерывная, чтобы те операции, которые я буду делать, не выводили из пределов анализа. Это предположение техническое, его можно избежать. При таком предположении можно построить дискретное случайное блуждание, при котором на каждом шаге точка равномерно распределяется либо на соответствующую сферу, либо на соответствующий шар. По аналогии с броуновским движением я обозначу это случайное блуждание $\Xi_x(n)$.

Про это случайное блуждание можно сказать, что его распределение, проинтегрированное против гармонической функции, даёт значение в точке x. Оно на каждом шаге даёт значение в точке x, поэтому проитерированное оно даёт тоже значение в точке x. Потом можно доказать, что с течением времени плотность вся сходится к границе, и в окрестности границы плотность будет пропорциональна гармонической мере. Это тоже простое утверждение.

Если бы функция была непрерывна вплоть до границы, то это решало бы вопрос. Распределение стянулось бы к границе, и примерно пропорционально гармонической мере мы проинтегрировали бы среднее; это дало бы гармоническую функцию. Но для больших n непонятно, как это распределение ведёт себя в окрестности границы. Может быть, в окрестности границы плотность сосредоточена пятнами. А функция никакой априорной непрерывности в окрестности границы не имеет, поэтому если мы будем интегрировать произведение функции и распределения, то непонятно, чему это соответствует.

Если где-то r стремится к нулю, то блуждающая точка не доберётся до границы. Но это я сейчас для простоты исключу. А в общем случае можно воспользоваться трансфинитной индукцией. Путём трансфинитной индукции можно всё-таки дойти до границы.

Вычтя из функции u подходящую гармоническую функцию, можно предположить, что в окрестности почти каждой точки $x \in \partial G$ есть множество ненулевой плотности, которое подходит к этой точке и на котором функция положительна, и другое множество, на котором функция отрицательна. Точнее говоря, для почти каждой точки $x \in \partial G$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся пара множеств E_1 и E_2, которые имеют ненулевую плотность в точке x, и $u|_{E_1} > -\varepsilon$, $u|_{E_2} < \varepsilon$. Ясно, что непрерывная функция u обладает этим свойством. Разрывная функция тоже обладает таким свойством, если вместо нуля выбрана какая-та другая планка. Если эту планку поднимать или опускать, то в какой-то момент мы дойдём до раздела значений так, что примерно половина значений будет выше этой планки, а половина ниже. Чтобы сделать эту планку нулём, мы решим задачу Дирихле и вычтем из функции u решение задачи Дирихле, которое почти всюду принимает данное граничное значение.

Если сделать этот трюк, то после можно пытаться доказать, что такая функция, обладающая свойством среднего, неотрицательна и одновременно неположительна, а значит, тождественно равна нулю. Чтобы доказывать неотрицательность, нужно рассмотреть множество, на котором функция положительна, и считать его границей. Это множество в силу наших предположений имеет ненулевую плотность при подходе к почти каждой точке границы. Рассмотрим функцию u на дополнении к этому множеству. Эта функция гармоническая. После этого нужно запустить случайное блуждание, которое будет останавливаться на новой границе, т. е. нужно построить решение в виде среднего, продолжив блуждание до тех пор, пока оно не влипнет в эту область. Если случайное блуждание влипнет в эту область (а плотность области ненулевая в каждой точке границы), то мы увидим, что функция неотрицательна. Мы всё проинтегрировали с положительным весом. Если часть просочится через эту границу и уйдёт, то мы будем иметь неполную информацию. Тем не менее, из-за того, что блуждание идёт с очень мелким шагом, доказательство у нас всё равно получится. Представьте себе, что в каждой окрестности радиуса r мы блуждаем, пока не перейдём в половинную окрестность. Мера нашего множества в этой окрестности ненулевая, поэтому с какой-то вероятностью мы попадаем в наше множество до того, как перейдём половинную окрестность. Блуждания очень мелкие, поэтому вероятность попасть даже в очень маленькое множество велика. Неудивительный, но очень трудно доказываемый факт: если мы блуждаем по шарам, то попадаем наверняка в это множество (прежде чем достигнем границы). Удивительный факт такой: если мы блуждаем по сферам, то существуют примеры, когда сферы как бы объезжают всё это множество и беспрепятственно проходят на границу. На одном шаге, конечно, сфера может обойти это множество. Но, когда проитерируешь много шагов, кажется, что никакой разницы нет. Поэтому, доказав теорему с шарами, мы были полностью уверены, что доказательство теоремы со сферами — просто технически более сложная вещь, но факт должен быть тем же самым.

Ситуация с шарами кажется более естественной. У нас есть случайное блуждание по шарам, как мы его определили; есть множество с ненулевой плотностью в окрестности каждой точки границы. Утверждение состоит в том, что мы в это множество попадём с вероятностью 1, прежде чем дойдём до границы. Ситуация сводится к тому, что, переходя из удвоенной окрестности точки границы в саму окрестность (вдвое меньшую), мы с какой-то ненулевой вероятностью попадём в множество, если в удвоенной окрестности вне самой окрестности сидит какая-то ненулевая мера множества. А дальше, повторяя процесс много раз, мы будем иметь вероятность 1. Итак, важная лемма такая. Если в пограничной области сидит множество ненулевой меры и мы двигаем точки по шарам (точка прыгает, равномерно распределяясь на шаре), то мы попадаем в это множество с ненулевой вероятностью.

Работать геометрически с шарами, которые въезжают в множество, очень трудно. Так оценку искомой вероятности получить нельзя. Чтобы получить оценку, нужно всё это с чем-нибудь сравнить. Сравнить это можно, например, с броуновским движением: с какой вероятностью броуновская точка въезжает в это множество? Но нетрудно доказать, что броуновское движение мажорирует движение по шарам; шары всегда дают меньшую вероятность попадания в множество. А нам нужна не оценка сверху, а оценка снизу. Чтобы получить оценку снизу, нужно сравнить с другим объектом. Этот объект порождается уравнением Шрёдингера. Пусть $\chi(E)$ — характеристическая функция множества E, которое мы рассматриваем, $\varepsilon > 0$ — малое число. Оператор $\Delta - \varepsilon\chi(E)$ можно интерпретировать таким образом: броуновская частица едет по всей области и проходит насквозь это множество, но в тот момент, когда она входит в E, она с ненулевой вероятностью, пропорциональной ε, погибает. Можно доказать, что при достаточно малом ε вероятность частицы погибнуть даёт оценку снизу для задачи с шарами. Это — основная лемма и основной инструмент. А для уравнения Шрёдингера есть уже более или менее стандартная техника.

Теперь я примерно объясню, почему можно объехать множество, двигаясь по сферам, почему сферы не размазываются таким образом. Тоже не доводя пример до конца, я объясню, как он устроен. У нас есть сферы (окружности) $S_x^{r(x)}$; семейство окружностей я буду выбирать. Я хочу построить множество D так, чтобы оно было инвариантно относительно этого сферического усреднения в том смысле, что если мы берём точку x из D, то и окружность $S_x^{r(x)}$ тоже лежит в D. Это первое. Второе, я хочу, чтобы множество D было достаточно худым. Оно будет иметь предельные точки на границе и будет столь худым на границе, сколь мне будет угодно. В-третьих, блуждание по множеству D (которое по первому условию целиком сосредоточено в этом множестве) обладает тем свойством, что блуждающая точка стремится к границе. Это будет тот агрегат, который фактически отрицает предыдущее доказательство и который является полуфабрикатом для примера.

Итак, строится некая паутина (в том смысле, что она очень малого объёма), которая инвариантна относительно сферического среднего и которая дотягивается до границы. Эта паутина заменяет перепрыгивание в примере Куранта и Гильберта. Более того, эта паутина работает только в двумерном случае. В трёхмерном случае вопрос остаётся открытым. Я сейчас объясню, где в построении паутины двумерность существенно используется.

Как такую паутину построить? Паутина состоит из совокупности колец разной толщины. Внутри кольца мы должны взять какую-то функцию $r(x)$. Мы выберем эту функцию очень маленькой. Если эту функцию устремить к нулю, то блуждание устремится к броуновскому движению. Строго внутри кольца получается фактически броуновское движение. Мы хотим выбрать систему шариков, которая полностью блокировала бы броуновскую частицу от проникновения на границу. У нас есть радиусы этих шаров r_i. Я хочу (и я утверждаю, что это возможно), чтобы суммарный радиус этой блокирующей системы был меньше произвольного положительного числа: $\sum r_i < \varepsilon$. Блокирование здесь в том смысле, что любая блуждающая броуновская частица (или частица с малой функцией $r(x)$) влипнет в один из шаров системы, прежде чем достигнет границы. Ситуация почти парадоксальная. Условие $\sum r_i < \varepsilon$ означает, что изгородь очень худая. Однако эта худая изгородь ловит все частицы, прежде чем они дойдут до границы.

Почему это возможно? Если мы поставим один столб, то с уменьшением радиуса вероятность влипнуть в него уменьшается, но она уменьшается не линейно. Для столба радиуса r вероятность пропорциональна $1/|\ln r|$.

Если второй столб стоит на большом расстоянии, то их взаимное влияние нулевое. Поэтому общая вероятность определяется суммой логарифмов. Сумму логарифмов можно сделать равной 1, или даже $\sum 1/|\ln r_i| \to \infty$, а при этом $\sum r_i \to 0$. Это простое свойство гармонической меры, которое позволяет построить такой забор.

В трёхмерном случае вместо $1/|\ln r|$ стоит примерно $r/|\ln r|$, т. е. нужно рассматривать сумму $\sum r_i/|\ln r_i|$. А с такой суммой уже нельзя проделать то же самое.

Пусть теперь блуждающая точка въехала в один из столбов изгороди. Какова её дальнейшая судьба? Дальше точку нужно отправить из этого столба в новое кольцо, которое состоит из окружностей большого радиуса с центрами на границе столба. Тогда новое кольцо будет площади порядка r_i. Полная площадь этих колец остаётся ограниченной числом ε. Дальше история повторяется. Мы устраиваем новый забор с суммарным радиусом $\varepsilon/2$, в который точка въезжает с вероятностью 1, и дальше всё повторяется. Суммарный объём можно делать контролируемо маленьким при подходе к границе. Всё это в совокупности даёт ту самую паутину, которая имеет сколь угодно малый объём и полностью держит в себе блуждающую частицу. Это и есть главный ингредиент примера. Построение самой функции u, которая почти тождественно равна 1 на этой паутине, близка к нулю на дополнении и непрерывна при подходе к границе, делается уже технически. Эти технически детали я опускаю.

Теперь — любопытный момент, относящийся к трёхмерному случаю. Всё бы работало в трёхмерном случае, если бы вероятность была порядка $1/|\ln r|$, но она порядка $r/|\ln r|$. Но всё же оценку порядка ε можно попытаться найти. Например, вместо шаров можно попытаться построить более хитрое множество. Возьмём отрезок; это чуть-чуть лучше, чем мы на самом деле имеем в $\mathbb{R}^3$. Представьте себе, что в каждой точке отрезка мы посадили сферу какого-то радиуса, скажем, большего какой-то величины. Естественно ожидать, что все эти сферы в совокупности покроют какой-то объём, который больше чего-то. Но не факт, что это верно. Это задача типа так называемой *задачи Какейя*. Берётся игла; её нужно повернуть на плоскости на 180°, заметя минимальную площадь. Спрашивается, какова минимальная площадь. Оказывается, что площадь может быть сколь угодно маленькой. Возможно, ε можно выиграть на каком-то таком эффекте. То есть можно пытаться компенсировать ε за счёт того, что более умным образом строить сферы так, чтобы они взаимно пересекались и заметаемый ими объём был мал.

В $\mathbb{R}^3$ есть ещё какая-то надежда, а дальше уже никакой надежды не видно.

Есть ещё один неясный вопрос. С шарами ответ положительный всегда — в любой размерности, в любой области. Кстати, область может быть неограниченной, может даже быть $\mathbb{R}^n$. Я начал с контрпримера в $\mathbb{R}^n$. Но если наложить ограничения на радиус в $\mathbb{R}^n$, а именно, предположить, что он не более чем линейный, то к $\mathbb{R}^n$ можно адаптировать всю эту технику. А в том примере, с которого я начал, если всё аккуратно посчитать и сделать его оптимальным образом, то радиус порядка $x(\ln x)^{n/3}$, т. е. этот пример даёт удивительно правильный порядок того, где эта теорема верна.

Есть ещё промежуточная ситуация между шарами, для которых ответ положителен всегда, и сферами, для которых ответ известен только для размерностей 1 и 2. Это — кольца. Теорема о среднем, как легко видеть, справедлива и для колец: можно рассматривать средние по кольцам. Для средних по кольцам естественно ожидать, что ситуация такая же, как с шарами. Если для колец отношение внешнего радиуса к внутреннему либо фиксировано, либо отделено от единицы, то ситуация кажется очень похожей на шары. Во всяком случае, если блуждать по таким кольцам, то естественно ожидать, что точка непременно попадёт во множество положительной меры. Нам удалось доказать этот факт только в предположении (в зависимости от размерности), что внутренний радиус очень мал, т. е. это отношение очень велико. Я не знаю, верно ли это в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$ для всех колец. Удивительный факт: в 1-мерном случае для колец есть контрпример. А именно, можно построить конкретную кусочно постоянную периодическую функцию с пиками разной толщины (она построена с помощью компьютера) и так подобрать кольца, что эта функция будет удовлетворять теореме о среднем по этим кольцам.

21 декабря 2000 г.

Ю. Г. Зархин

КЛАССЫ ВЕЙЛЯ И ХОДЖА НА АБЕЛЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

То, что я буду рассказывать, будет оформлено как некая забавная линейная и полилинейная алгебра. Линейная алгебра — это что-то над полем. Забавность будет состоять во взаимодействии между полями определения $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. В каком-то смысле вся нетривиальность (о которой я говорить не буду) состоит в том, что поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ не является полем Галуа над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Иначе говоря, есть много автоморфизмов поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, которые не оставляют поле $\mathbb{R}$ на месте. (Для людей, занимающихся анализом, это должно звучать дико.) Впрочем, прямо этот факт я использовать не буду. Хочу лишь подчеркнуть, что обычно ошибки в этой области связаны с именно этим фактом.

Комплексные торы и поляризации

Как и было обещано, я начну с линейной алгебры. В названии доклада есть словосочетание *абелево многообразие*. Везде это будет комплексное многообразие. Я дам определение с позиций линейной алгебры. Абелево многообразие — это прежде всего комплексный тор. Что это такое? Комплексный тор — это фактор $X = V/\Gamma$, где $V \approx \mathbb{C}^g$ — комплексное векторное пространство размерности g, а Γ — дискретная решётка (максимально возможного) ранга $2g$. Отметим, что если рассматривать V как векторное пространство над $\mathbb{R}$, то его вещественная размерность как раз равна $2g$, и решётка Γ допускает следующее описание. Найдётся базис $\{e_1, \ldots, e_{2g}\}$ *вещественного* пространства V, такой, что Γ совпадает с множеством всех линейных комбинаций элементов базиса с целыми коэффициентами. Вот ещё один взгляд на решётку Γ, использующий *матрицу периодов* Ω. Множество $\{e_1, \ldots, e_{2g}\}$ содержит g-элементный базис $\mathbb{C}$-пространства V; произведя, в случае необходимости, перенумерацию, мы можем считать, что множество $\{e_1, \ldots, e_g\}$ является базисом $\mathbb{C}$-пространства V. Тогда оставшиеся векторы e_{g+p} однозначно представляются в виде линейных комбинаций элементов множества $\{e_1, \ldots, e_g\}$

с комплексными коэффициентами. Из этих коэффициентов и составлена квадратная комплексная матрица Ω размера $g \times g$, элементы Ω_{pq} которой определяются равенствами

$$e_{g+p} = \sum_{q=1}^{g} \Omega_{pq} e_q; \quad p = 1, \ldots, g.$$

То, что Γ — дискретная решётка ранга $2g$, влечёт за собой невырожденность её мнимой части — вещественной квадратной матрицы $\mathrm{Im}(\Omega)$ размера $g \times g$, где

$$\mathrm{Im}(\Omega)_{pq} := \mathrm{Im}(\Omega_{pq}); \quad p, q = 1, \ldots, g.$$

С другой стороны, для любой комплексной матрицы Ω размера $g \times g$ с невырожденной мнимой частью группа

$$\Gamma_\Omega := \mathbb{Z}^g + \Omega(\mathbb{Z}^g)$$

— дискретная решётка ранга $2g$ в $\mathbb{C}^g$. Здесь $\mathbb{Z}^g$ — подгруппа всех векторов с целыми координатами, а матрица Ω понимается как соответствующее $\mathbb{C}$-линейное отображение $\mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^g$.

Два комплексных тора $X = V/\Gamma$ и $X' = V'/\Gamma'$ называются изоморфными, если существует $\mathbb{C}$-линейный изоморфизм $u\colon V \cong V'$, такой, что $u(\Gamma) = \Gamma'$. Ясно, что такой u индуцирует биекцию $X \cong X'$, обладающую всеми возможными хорошими свойствами. Ясно, что каждый комплексный тор изоморфен тору вида $\mathbb{C}^g/\Gamma_\Omega$, где (как и выше) Ω — комплексная матрица с невырожденной мнимой частью. С тех же позиций эллиптическая кривая это просто одномерный комплексный тор, и она изоморфна $\mathbb{C}/\Gamma_\tau$, где τ — невещественное комплексное число, а $\Gamma_\tau = \mathbb{Z} + \tau \cdot \mathbb{Z}$. Заменив, в случае необходимости, τ на $-\tau$, мы можем считать, что $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.

Для того чтобы комплексный тор V/Γ был абелевым многообразием, нужно ещё существование поляризации. *Поляризация* — это эрмитова положительно определённая форма $H\colon V \times V \to \mathbb{C}$, которая следующим образом связана с решёткой Γ. Рассмотрим мнимую часть $L_H = \mathrm{Im}(H)\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Это по-прежнему будет форма на V, но теперь она будет принимать значения в $\mathbb{R}$. Эта форма — мнимая часть эрмитовой формы, поэтому она кососимметрическая. Форма H положительно определена, а значит, невырождена. Поэтому её мнимая часть тоже невырождена. Мы получили невырожденную кососимметрическую $\mathbb{R}$-билинейную форму. Это не дополнительное условие, это вытекает автоматически. Ещё одно свойство, которое я хотел бы отметить, выглядит следующим образом. У нас V — комплексное векторное пространство, L_H — мнимая часть эрмитовой формы. Про эрмитову форму можно сказать, что $H(zx, zy) = H(x, y)$ для каждого $z \in \mathbb{C}$ такого, что $|z| = 1$. Это следует из того, что $z\bar{z} = 1$. Естественно, то же самое выполнено для L_H, т. е. $L_H(zx, zy) = L_H(x, y)$ для каждого $z \in \mathbb{C}$ такого, что $|z| = 1$. Эти свойства сразу вытекают из определения эрмитовой формы. Я хотел бы всё-таки вернуться к решётке Γ. Давайте ограничим форму L_H на решётку Γ. Априори $L_H(\Gamma, \Gamma) \subset \mathbb{R}$, т. е. при ограничении на решётку форма будет принимать вещественные значения. Чтобы форма H была поляризацией, нужно, чтобы выполнялось условие $L_H(\Gamma, \Gamma) \subset \mathbb{Z}$, т. е. чтобы при ограничении на решётку Γ значения были целочисленными. Окончательное определение такое: эрмитова форма H называется *поляризацией*, если её мнимая часть при ограничении на решётку Γ принимает целочисленные значения. Тор с поляризацией называется *абелевым многообразием*.

Теперь хорошо бы посмотреть на примеры. Первый пример достаточно хорошо известен. Несколько высокопарно соответствующее утверждение можно сформулировать так: «Каждая эллиптическая кривая является абелевым многообразием». Давайте это докажем. Эллиптическая кривая — это случай, когда $g = 1$, т. е. одномерный комплексный тор. В этом случае $V = \mathbb{C}$, а $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, причём $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ (иначе говоря, образующие решётки не лежат на одной вещественной прямой). Нам нужна положительно определённая форма. Ясно, как устроены эрмитовы формы в одномерном пространстве. Все положительно определённые эрмитовы формы в одномерном пространстве имеют вид $H(z, w) = \lambda z\bar{w}$, где $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Нам нужно подобрать λ так, чтобы мнимая часть формы H принимала целочисленные значения на решётке Γ. Естественно, условие целочисленности достаточно проверить на паре образующих ω_1 и ω_2. С другой стороны, форма кососимметрична, поэтому если оба аргумента совпадают, то значение равно нулю и, стало быть, целочисленно. Единственное, что нам нужно, это чтобы число $\operatorname{Im}(\lambda z\bar{w})$ было целым при $z = \omega_1$ и $w = \omega_2$. Ясно, что для вещественного λ выполняется равенство $\operatorname{Im}(\lambda z\bar{w}) = \lambda \operatorname{Im}(z\bar{w})$. Все поляризации описываются следующим образом:

$$H = n\frac{z\bar{w}}{|\operatorname{Im}(\omega_1\bar{\omega}_2)|}.$$

Мы должны взять абсолютную величину в знаменателе, чтобы соответствующее число λ было положительно. Например, если $\Gamma = \Gamma_\tau$ с $\operatorname{Im}(\tau) > 0$, то

$$H = n\frac{z\bar{w}}{\operatorname{Im}(\tau)}.$$

Первый же вывод (впрочем, это и так очевидно) — поляризация не единственна; есть тривиальный способ получить новую поляризацию, умножив исходную поляризацию на натуральное число. Для бóльших размерностей поляризаций может быть существенно больше; они не обязаны быть целыми кратными одной фиксированной поляризации.

В размерности 1 мы получаем все эллиптические кривые. Попытка обобщения на многомерный случай приводит к следующей конструкции, требующей «положительности» матрицы $\mathrm{Im}(\Omega)$. А именно, потребуем чтобы вещественная квадратная матрица $\mathrm{Im}(\Omega)$ была симметричной и положительной и обозначим через $\mathcal{H}=(h_{pq})$ матрицу, обратную к $\mathrm{Im}(\Omega)$. (Множество всех таких Ω при фиксированном g называется верхней полуплоскостью Зигеля.) Ясно, что $\mathcal{H}$ также является положительной симметричной вещественной матрицей размера $g \times g$. Можно проверить, что положительная эрмитова форма $\sum\limits_{p,q=1}^{g} h_{pq} z_p \bar{w}_q$ на $\mathbb{C}^g$ является поляризацией для комплексного тора $\mathbb{C}^g/\Gamma_\Omega$. Тем самым, $\mathbb{C}^g/\Gamma_\Omega$ — абелево многообразие. Нетрудно видеть, что если Δ — подгруппа конечного индекса в $\mathbb{Z}^g$, то $\Gamma' := \mathbb{Z}^g + \Omega(\Delta)$ — подгруппа конечного индекса в Γ_Ω, и $\mathbb{C}^g/\Gamma'$ также является абелевым многообразием. Можно показать, что каждое абелево многообразие изоморфно $\mathbb{C}^g/\Gamma'$ (для некоторых Ω и Δ).

Для произвольных комплексных торов ситуация более сложная. Грубо говоря, ответ выглядит таким образом. Если вы хотите посчитать число параметров, от которых зависят комплексные торы размерности g, то в каком-то смысле это число равно g^2. Если же вы смотрите на абелевы многообразия размерности g, то число параметров равно $g(g+1)/2$. Когда $g=1$, эти числа совпадают, но для $g>1$ бóльшая часть комплексных торов поляризации не имеет. Объяснение (выходящее за рамки линейной алгебры) того, чем хороши абелевы многообразия, состоит в том, что по поляризации H можно строить тэта-функции. Я не хочу явно выписывать все эти ряды. (О них можно прочитать в книгах А. Вейля [14], Д. Мамфорда [7], [8] и Кемпфа [3].) Грубо говоря, тэта-функции — это голоморфные функции на V, которые хорошо себя ведут относительно сдвигов на элементы решётки Γ. Эти тэта-функции позволяют построить вложение абелева многообразия в проективное пространство: $X = V/\Gamma \subset \mathbb{P}^N$. Если задана поляризация, то в каком-то смысле определено вложение в проективное пространство. На самом деле определено не одно вложение, а целый класс вложений. Но по крайней мере одно такое вложение всегда есть. Тут я немножко жульничаю. Если быть совсем формальным в том смысле, который я сейчас не хочу определять, то может возникнуть потребность заменить поляризацию H на какое-то её кратное nH, где $n \geqslant 3$, и рассматривать тэта-функции, связанные именно с формой nH, а не с формой H. Но если вы имеете дело с формой nH, где $n \geqslant 3$, то у вас всегда есть вложение в проективное пространство. Всё это допускает некоторую явную топологическую интерпретацию; я об этом скажу чуть позже. Пока я хотел бы оставаться в рамках линейной алгебры.

Эндоморфизмы абелевых многообразий

Важный инвариант абелева многообразия — его кольцо эндоморфизмов и соответствующая алгебра эндоморфизмов. Комплексный тор — это коммутативная связная комплексная группа Ли. Поэтому можно рассматривать его гомоморфизмы в себя. Но если у вас есть описание комплексного тора как фактора комплексного векторного пространства по решётке, то у вас есть следующее явное описание кольца эндоморфизмов:

$$\mathrm{End}(X) = \{u\colon V \to V \mid u(\Gamma) \subset \Gamma\};$$

здесь отображение u является $\mathbb{C}$-линейным. Иначе говоря, если у вас есть преобразование $u\colon X \to X$, то оно всегда однозначно поднимается до линейного отображения так, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ X \arrow[r, "u"] & X \end{tikzcd}$$

становится коммутативной. Кольцо $\mathrm{End}(X)$ обладает рядом приятных свойств. Оно конечно порождено, потому что по определению оно сидит в кольце матриц с целочисленными элементами. Это кольцо можно описывать несколько иначе, и эта точка зрения, по-видимому, более разумна и естественна. А именно, давайте попробуем понять, что значит, что Γ — решётка максимального ранга в комплексном векторном пространстве V. Пространство V является также и вещественным. Поэтому можно рассмотреть отображение $\Gamma \otimes \mathbb{R} \to V$, которое, конечно, будет изоморфизмом. Это довольно очевидно. Кольцо $\mathrm{End}(X)$ допускает следующее описание: это кольцо — множество гомоморфизмов $u\colon \Gamma \to \Gamma$, для которых соответствующее $\mathbb{R}$-линейное отображение $\Gamma \otimes \mathbb{R} \to V$ является $\mathbb{C}$-линейным. Мы начали с решётки. Мы рассматриваем преобразования решётки в себя, обладающие следующим свойством. Эта решётка расположена в вещественном векторном пространстве. Преобразование решётки мы продолжаем по $\mathbb{R}$-линейности на всё пространство V. После этого вспоминаем, что на V есть комплексная структура. Нас интересуют только те отображения, которые, будучи продолжены по $\mathbb{R}$-линейности на V, оказываются $\mathbb{C}$-линейными. Это, естественно, то же самое кольцо $\mathrm{End}(X)$.

На самом деле, гораздо более удобно работать не с этим кольцом, а с *алгеброй эндоморфизмов* $\mathrm{End}^\circ(X) = \mathrm{End}(X) \otimes \mathbb{Q}$. Это — конечномерная полупростая $\mathbb{Q}$-алгебра. Эндоморфизмы X сидят в алгебре матриц с элементами из $\mathbb{Z}$, а эта алгебра сидит в алгебре матриц с элементами из $\mathbb{Q}$. Тут ещё разумно ввести то, что называется $\mathbb{Q}$-*структурой*, а именно, $\mathbb{Q}$-решётку

$$\Gamma_{\mathbb{Q}} = \Gamma \otimes \mathbb{Q} = \{x \in V : mx \in \Gamma \text{ для некоторого } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

У нас есть $\mathbb{Z}$-решётка, а мы хотим иметь дело с векторным пространством над $\mathbb{Q}$. Ясно, что $\mathrm{End}^\circ(X) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{\mathbb{Q}})$. И, конечно же, алгебра $\mathrm{End}^\circ(X)$ допускает такое же описание, как $\mathrm{End}(X)$. Там мы использовали изоморфизм $\Gamma \otimes \mathbb{R} \cong V$, а здесь нужно использовать изоморфизм $\Gamma_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong V$. Тогда работает то же самое описание. У нас есть $\mathbb{Q}$-линейное отображение векторного пространства над $\mathbb{Q}$. Мы его продолжаем по $\mathbb{R}$-линейности на всё V, и интересуемся только теми отображениями, которые в результате этого продолжения оказываются $\mathbb{C}$-линейными. Это — определение алгебры эндоморфизмов.

Эта алгебра обладает многими замечательными свойствами. Прежде чем их описывать, напомним, что группа X коммутативна, поэтому умножения на целые числа всегда будут её эндоморфизмами.

Пусть теперь X — эллиптическая кривая. Тогда либо $\mathrm{End}^\circ(X) = \mathbb{Q}$ (и тогда $\mathrm{End}(X) = \mathbb{Z}$), либо X — эллиптическая кривая с комплексным умножением. Последнее означает, что $\mathrm{End}^\circ(X)$ — мнимое квадратичное поле, т. е. алгебра $\mathrm{End}^\circ(X)$ изоморфна $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, где D — натуральное число, свободное от квадратов.

Самый простой пример эллиптической кривой с комплексным умножением строится так. Посмотрим на поле $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ как на подполе в поле комплексных чисел: $k \subset \mathbb{C}$. В качестве решётки Γ возьмём $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-D}$. Ясно, что умножение на $\sqrt{-D}$ является $\mathbb{C}$-линейным и $\sqrt{-D} \cdot \Gamma \subset \Gamma$. Конечно же, это отображение не является умножением на целое число. Более интересна ситуация, когда вы смотрите не просто на этот порядок, а на кольцо всех целых в $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$.

Я упомянул о том, что эта алгебра полупростая. На самом деле, можно сказать несколько больше. И попытка понять, что это за алгебра, отвечает на вопрос, как выглядит поляризация. Дело в том, что поляризация — это билинейная форма. А всякая билинейная форма обычно определяет инволюцию. В этой науке такая инволюция называется *инволюцией Розати* и обозначается $u \mapsto u'$. Это — инволюция на алгебре эндоморфизмов. Для неё есть два эквивалентных определения. Одно с помощью формы H, другое с помощью её мнимой части. Первое определение такое: $H(ux, y) = H(x, u'y)$ для всех $x, y \in V$. Другое определение с помощью мнимой части: $L_H(ux, y) = L_H(x, u'y)$.

На алгебре эндоморфизмов всегда есть такая инволюция. Это означает, что алгебра эндоморфизмов — не просто произвольная конечномерная алгебра над полем $\mathbb{Q}$, а алгебра с инволюцией. Оказывается, что эта инволюция ещё и положительна. Мне не хочется давать общее определение, но здесь это означает следующее: «Существует функция следа $\operatorname{tr}\colon \operatorname{End}^\circ(X) \to \mathbb{Q}$, которая обладает следующими свойствами: $\operatorname{tr}(uv) = \operatorname{tr}(vu)$, $\operatorname{tr}(u') = \operatorname{tr}(u)$ и $\operatorname{tr}(u'u) > 0$ если $u \neq 0$.» Как определить этот след? Наша алгебра действует в векторном пространстве $\Gamma_{\mathbb{Q}}$. Продолжим это действие на $\Gamma_{\mathbb{R}} = \Gamma_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R} = V$. Отображение

$$\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{\mathbb{Q}}) \subset \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\Gamma_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\operatorname{tr}} \mathbb{R}$$

индуцирует отображение

$$\operatorname{End}^\circ(X) \subset \operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\operatorname{tr}} \mathbb{Q}.$$

Инволюция продолжается как на $\mathbb{Q}$-алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{\mathbb{Q}})$, так и на $\mathbb{R}$-алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\Gamma_{\mathbb{R}})$. Только сейчас я хотел бы воспользоваться вещественной частью $\operatorname{Re}(H)$ формы H:

$$\operatorname{Re}(H)(ux, y) = \operatorname{Re}(H(ux, y)) = \operatorname{Re}(H(x, u'y)) = \operatorname{Re}(H)(x, u'y).$$

Вещественная часть всё ещё невырожденная; вдобавок $\operatorname{Re}(H)$ на $\Gamma_{\mathbb{R}}$ — положительно определённая симметрическая форма. Условие положительности инволюции — это условие, что положительно определённый симметрический оператор имеет положительный след. У нас есть замечательная функция «след», которая принимает положительные значения на произведении каждого элемента на его сопряжённый.

Условие наличия положительной инволюции — это довольно жёсткое условие на алгебру. Конечно, поле $\mathbb{Q}$ удовлетворяет этому условию: можно взять тривиальную инволюцию. Рассмотрим теперь квадратичные поля. Пусть $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, где $D > 0$. Функция следа $\operatorname{tr}\colon k \to \mathbb{Q}$ должна быть обычным следом из поля k в поле $\mathbb{Q}$: $1 \mapsto 2$ и $\sqrt{-D} \mapsto 0$. Инволюция при этом устроена так: $1 \mapsto 1$ и $\sqrt{-D} \mapsto -\sqrt{-D}$. Тогда мы получаем условие положительности для квадрата модуля комплексного числа. Странным образом, чуть хитрее пример, когда $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (*вещественное квадратичное поле*). След tr тут тот же самый: $1 \mapsto 2$ и $\sqrt{D} \mapsto 0$, но инволюция тождественна: $u' = u$.

В каком-то смысле, эти примеры являются образцами общей ситуации, по крайней мере, в случае, когда речь идёт о формах. В связи с этим я хочу ввести два определения — вполне вещественное числовое поле и поле CM-типа. Поле CM-типа — это аналог мнимого квадратичного поля, а вполне вещественное поле — это аналог вполне вещественного квадратичного поля. Это определение можно вводить разными способами — через тензорные произведения, через порождающие элементы. Я начну с порождающих элементов. Алгебраическое число $\beta \in \mathbb{C}$ называют *вполне* (*тотально*) *вещественным*, если оно является корнем многочлена $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$, все корни которого вещественны. Аналогично определяется *тотально положительное* число: оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами, все корни которого положительны. Числовое поле K называют *вполне* (*тотально*) *вещественным*, если оно представимо как $\mathbb{Q}(\beta)$, где число β вполне вещественное. Например, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Числовое поле K называют *полем CM-типа*, если оно представимо в виде $K_0(\sqrt{-\beta})$, где K_0 — вполне вещественное поле, а $\beta \in K_0$ — тотально положительное число.

Альтернативное описание вполне вещественных числовых полей выглядит следующим образом. Поле K имеет конечную размерность над $\mathbb{Q}$, поэтому алгебра $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ является прямой суммой полей, каждое из которых является конечным расширением поля $\mathbb{R}$. Таких полей ровно два: $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Поэтому

$$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}.$$

Поле K вполне вещественно, если и только если в этой прямой сумме нет слагаемых $\mathbb{C}$. Для полей CM-типа в этой прямой сумме есть только слагаемые $\mathbb{C}$, но этого не достаточно, чтобы получить поле CM-типа; нужны ещё дополнительные условия. Сейчас я не хочу их обсуждать.

Существует утверждение о том, что если на числовом поле E имеется положительная инволюция (причём неважно, какова функция следа, она может быть какой угодно, но всегда оказывается, что в качестве функции следа можно взять стандартный след $\mathrm{tr}\colon E \to \mathbb{Q}$), то либо E вполне вещественно и инволюция тривиальна, либо $E = K_0(\sqrt{-\alpha})$ — поле CM-типа и инволюция — «комплексное сопряжение», т. е. на K_0 инволюция тождественна (потому что на вполне вещественном поле положительная инволюция должна быть тождественна), а $\sqrt{-\alpha}$ переходит в $-\sqrt{-\alpha}$. В качестве следа можно взять обычный след.

Есть классификация Альберта [7], описывающая все алгебры над $\mathbb{Q}$, на которых есть положительная инволюция. Там не очень много разных случаев. Скажем, всегда возникают кватернионные алгебры над $\mathbb{Q}$ со стандартной инволюцией. Конечно, возникают матричные алгебры над вполне вещественными числовыми полями и над полями CM-типа. Есть и более нетривиальные примеры, но все они вполне обозримы.

Поляризации и допустимые билинейные формы

Теперь займёмся вопросом о том, как описать поляризации. Я хочу даже сделать немножко больше. Для этого мне нужно понятие допустимой билинейной формы. *Допустимая билинейная форма* — это билинейная кососимметрическая форма $\varphi\colon \Gamma_{\mathbb{Q}} \times \Gamma_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$, которая обладает следующим свойством. Пусть $S = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$; мы уже знаем, что $S \subset \mathrm{Aut}(V)$ — группа S действует на пространство $V = \Gamma_{\mathbb{R}}$ просто умножением. Иногда я буду делать вид, что я не знаю о существовании комплексной структуры — просто есть окружность, которая действует на V. Продолжим форму φ по $\mathbb{R}$-линейности до формы $\varphi\colon \Gamma_{\mathbb{R}} \times \Gamma_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. Форма φ допустима, если это продолжение S-инвариантно. В частности, мнимая часть любой поляризации является допустимой билинейной формой. Но есть некоторый нюанс. Дело в том, что, когда мы строили мнимую часть поляризации, мы стартовали с эрмитовой формы. Оказывается, что здесь тоже можно получить эрмитову форму. А именно, если φ допустима, то эрмитову форму можно построить так: $H_{\varphi}(x, y) = \varphi(ix, y) + i\varphi(x, y)$. Это стандартная вещь. Если у вас есть мнимая часть эрмитовой формы, то по ней вы можете восстановить и саму эрмитову форму.

Теперь предлагается следующий рецепт построения допустимых билинейных форм. У нас есть начальная форма $L := L_H\colon \Gamma_{\mathbb{Q}} \times \Gamma_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ (эрмитова форма H фиксирована). Возьмём какой-нибудь эндоморфизм $u \in \mathrm{End}^{\circ}(X)$ и посмотрим на форму $(x, y) \mapsto L(ux, y)$. Это будет билинейная форма. Она хорошо себя ведёт относительно действия S, потому что u хорошо себя ведёт по отношению к умножению на комплексные числа. Единственное, что нас должно волновать, это чтобы эта форма была кососимметрична. Оказывается, что эта форма кососимметрична тогда и только тогда, когда элемент u симметричен. Более того, любая допустимая билинейная форма имеет вид $(x, y) \mapsto L(ux, y)$, где u — симметричный элемент. Это — лёгкое упражнение по алгебре, связанной с билинейными формами; тут нет никаких трудностей.

Возникает следующий вопрос. Допустим, что у нас есть какая-то дробная поляризация. Возьмём её мнимую часть. Ясно, что мы опять получим допустимую форму. Вопрос: «Каким симметричным u будут отвечать мнимые части поляризаций?» Ответ на него такой. Это поляризация (умноженная на положительное рациональное число), если элемент u «тотально положителен». Тотальная положительность здесь понимается в следующем смысле. Если алгебра $\mathrm{End}^{\circ}(X)$ — поле, то это, конечно, числовое поле. И тогда понятие тотальной положительности сводится к понятию тотальной положительности алгебраического числа. В общем случае u

можно рассмотреть как вещественный линейный оператор $u\colon \Gamma_{\mathbb{Q}} \to \Gamma_{\mathbb{Q}}$. Тогда этот оператор должен быть полупрост (т. е. диагонализуем — у него нет жордановых блоков) и все его собственные числа должны быть тотально положительны. Это вещь довольно естественная, потому что на u можно посмотреть и как на линейный оператор $\Gamma_{\mathbb{R}} \to \Gamma_{\mathbb{R}}$. Тогда это симметричный оператор, потому что у нас есть скалярное произведение, отвечающее вещественной части эрмитовой формы H. Из симметричности следует, что все его собственные значения вещественны; но они должны быть ещё и положительны. А поскольку оператор определён над $\mathbb{Q}$, у нас возникают тотально положительные алгебраические числа.

Я сформулировал условие не на то, какому оператору соответствует поляризация, а на то, какому оператору соответствует поляризация, умноженная на положительное рациональное число. (Это связано с тем, что u берётся не из $\mathrm{End}(X)$, а из $\mathrm{End}^{\circ}(X) = \mathrm{End}(X) \otimes \mathbb{Q}$.) Чуть более затруднительно сформулировать условие, которое высекает в точности поляризации. Это можно сделать, если форма $L_H\colon \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}$ унимодулярна. Тогда можно ограничиться операторами u, которые принадлежат самому кольцу эндоморфизмов, и тогда это условие будет работать. В общем случае это более запутанно.

С одной стороны, у нас есть допустимые формы. С другой стороны, у нас есть поляризации или, точнее, их мнимые части. Утверждение состоит в том, что каждая допустимая форма есть разность двух поляризаций (точнее, их мнимых частей). В самом деле, пусть φ — допустимая форма. Возьмём L_H. Тогда

$$\varphi = (L_H + \varphi) - L_H = \mathrm{Im}(H + H_{\varphi}) - \mathrm{Im}(H).$$

Форма $H + H_{\varphi}$, конечно, эрмитова. Если бы мы знали, что она положительно определённая, мы бы получили то, что хотели. Но априори это не обязательно так. Например, φ может быть равно $-L_H$. Рецепт такой. Форма H положительно определена. Поэтому для достаточно большого положительного числа n форма $nH + H_{\varphi}$ положительно определённая и $\varphi = \mathrm{Im}(nH + H_{\varphi}) - \mathrm{Im}(nH)$. Грубо говоря, все допустимые формы получаются как линейные комбинации мнимых частей поляризаций.

Допустимые формы: гипотеза Ходжа и вопрос Тэйта

Вопрос, который я собираюсь дальше обсуждать, связан со следующим вопросом, который был, по существу, задан 35 лет назад Тэйтом [13]. Мы определили допустимые билинейные формы. Давайте посмотрим на допустимые формы высших степеней. Пусть

$$\psi\colon\ \underbrace{\Gamma_{\mathbb{Q}}\times\ldots\times\Gamma_{\mathbb{Q}}}_{2d}\to\mathbb{Q}$$

— альтернированная форма, которая после продолжения по $\mathbb{R}$-линейности S-инвариантна. Если $d=1$, то мы знаем, что всё получается из поляризаций. Вопрос такой: можно ли представить любую допустимую форму как линейную комбинацию внешних произведений мнимых частей поляризаций (или, что то же самое, как линейную комбинацию внешних произведений билинейных допустимых форм)?

Почему этот вопрос интересен? Объяснение лежит в гомологической интерпретации решётки Γ, т. е., в равенствах $\Gamma=H_1(X,\mathbb{Z})$ и $\Gamma_{\mathbb{Q}}=H_1(X,\mathbb{Q})$. Если мы рассмотрим пространство альтернированных форм $\operatorname{Hom}(\Lambda^{2d}\Gamma_{\mathbb{Q}},\mathbb{Q})$, которое пока ещё не появлялось, то это будет соответствующее пространство когомологий $H^{2d}(X;\mathbb{Q})$. Если мы домножим $\Gamma_{\mathbb{Q}}=H_1(X,\mathbb{Q})$ тензорно на $\mathbb{R}$, то получим $\Gamma_{\mathbb{R}}=H_1(X,\mathbb{R})$. Мы продолжаем кососимметрические формы по $\mathbb{R}$-линейности на $\Gamma_{\mathbb{R}}$. Допустимые формы — это элементы из $H^{2d}(X,\mathbb{Q})$, которые ведут себя соответствующим образом после тензорного умножения на $\mathbb{R}$: они инвариантны относительно действия группы S, т. е. это элементы, являющиеся классами Ходжа.

Если вы начинаете с любого гладкого комплексного проективного связного многообразия Y, то для него существует так называемое *разложение Ходжа*

$$\begin{array}{ccc} H^m(Y,\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C} & = & \displaystyle\bigoplus_{\substack{p,q\geqslant 0\\ p+q=m}} H^{p,q}(Y) \\ \Vert & & \\ H^m(Y,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} & & \end{array}$$

Тем самым, на этом пространстве есть вещественная структура. При этом $H^{p,q}(Y)=\overline{H^{q,p}(Y)}$, т. е. эти два пространства комплексно сопряжены. В частности, из этого видно, что если m чётно, то средний член $H^{d,d}(Y)$ определён над $\mathbb{R}$.

С другой стороны, пусть $Z\subset Y$ — неприводимое комплексное подмногообразие комплексной коразмерности d. Тогда если мы берём его фундаментальный класс $[Z]\in H_{2\dim(Y)-2d}(Z,\mathbb{Q})$, то по двойственности Пуанкаре ему соответствует класс $d(Z)\in H^{2d}(Y,\mathbb{Q})$. Известно, что все эти рациональные классы сидят в $H^{d,d}(Y)$. С одной стороны, они рациональные, а с другой стороны, они сидят в куске, у которого оба индекса градуировки Ходжа совпадают. Знаменитая *гипотеза Ходжа* утверждает, что пересечение $H^{d,d}(Y)\cap H^{2d}(Y,\mathbb{Q})$, элементы которого называют *классами Ходжа*, порождено (как линейное пространство) этими алгебраическими классами.

Утверждение состоит в том, что в случае абелевых многообразий допустимые формы — это в точности классы Ходжа. В общем случае группа S тоже действует на этом пространстве. Грубо говоря, комплексное число $z\in S$ действует на подпространство $H^{p,q}$ как умножение на z^{p-q}. Поэтому инварианты отвечают в точности среднему члену, когда $p=q$.

Теорема 1 (теорема Лефшеца). *Гипотеза Ходжа справедлива в случае $d=1$.*

Между прочим, для абелевых многообразий в случае $d=1$ мы теорему Лефшеца, по существу, доказали. В самом деле, было доказано, что любая допустимая билинейная форма есть разность двух мнимых частей поляризаций. А мнимая часть поляризации — это билинейная форма на $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, т. е. элемент второй группы когомологий. Это, грубо говоря, класс гиперплоского сечения, который отвечает соответствующему вложению X в проективное пространство. Если мы задали вложение X в проективное пространство с помощью тэта-функций, которые отвечают эрмитовой форме H, то в проективном пространстве есть стандартная образующая второй группы когомологий; мы перетаскиваем её обратно на X и получаем билинейную форму. Эта форма и есть мнимая часть H. Тем самым, для абелевых многообразий теорему Лефшеца мы доказали.

Дальше рассуждения вполне наивные. Рассмотрим сначала гипотезу Ходжа для дивизоров (подмногообразий коразмерности 1). Вернёмся к абелевым многообразиям. Мы знаем, что все допустимые билинейные формы — это классы дивизоров. Предположим, что мы знаем, что любую допустимую форму любой степени на абелевом многообразии можно получить с помощью линейной алгебры из билинейных. Тогда мы сразу получаем гипотезу Ходжа. Такова программа. Тэйт [13] первым задал вопрос, бывают ли ситуации, когда столь наивный подход не срабатывает. Естественно, что нужно смотреть начиная с размерности 3. В размерности 1 смотреть нечего. В размерности 2 у нас нетривиальны только дивизоры. В размерности 3 возникает H^4, но поскольку старшая группа когомологий — это H^6, то всё сводится к дивизорам. (Можно использовать так называемую трудную теорему Лефшеца.) В размерности 3 всё получается хорошо, и не только для абелевых многообразий. Поэтому первый нетривиальный пример (если он существует) может возникнуть лишь начиная с размерности 4. Вопрос Тэйта можно сформулировать так, что он будет ясен понятливому первокурснику. Смысл первой части лекции и был в том, чтобы сформулировать этот вопрос в терминах, понятных первокурснику.

Контрпример Мамфорда и конструкция А. Вейля

В роли понятливого первокурсника выступил Мамфорд [9], который в середине 60-х годов построил пример 4-мерного абелева многообразия, на котором существуют допустимые формы, не представимые с помощью билинейных форм. Абелево многообразие, которое он построил, — довольно интересный экзотический объект. Это некое обобщение эллиптических кривых с комплексным умножением. В общих чертах пример Мамфорда выглядит так. Прежде всего, $\dim X=4$. Алгебра эндоморфизмов $\mathrm{End}^{\circ}(X)=K$ — поле CM-типа, причём его степень $[K:\mathbb{Q}]=8$. Поле K весьма специальное; оно содержит мнимое квадратичное подполе $k=\mathbb{Q}(\alpha)$, где $\alpha^2=-D$. Тем самым, поле K является композитом мнимого квадратичного поля и некоторого вполне вещественного поля степени 4. При этом Мамфорд построил не один пример, а целую серию, и соответствующие подполя можно было варьировать. Для каждого мнимого квадратичного поля k у Мамфорда был свой пример, но при этом было некоторое условие. Дело в том, что была ещё поляризация H и было некое условие, которое было связано с действием поля k, но не на $\mathbb{Q}$-пространстве $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, а на (комплексном) касательном пространстве абелева многообразия X в нуле. Напомним, что абелево многообразие X является группой Ли, поэтому касательное пространство в нуле — это алгебра Ли $\mathrm{Lie}(X)$. То, что группа Ли X коммутативна, означает, что алгебра Ли имеет тривиальную структуру, но тем не менее алгебра Ли у него есть, и она является векторным пространством над $\mathbb{C}$. У нас есть также элемент α, который действует на четырёхмерное пространство $\mathrm{Lie}(X)$. По условию $\alpha^2=-D$, поэтому собственными значениями α могут быть только числа $\sqrt{-D}$ и $-\sqrt{-D}$. Конечно, отличить одно такое собственное значение от другого довольно трудно, поэтому непонятно, как сформулировать какое бы то ни было условие. Самый простой способ — сказать, что кратности этих двух собственных значений совпадают. Это и есть то условие, о котором я говорил.

В терминах форм это условие можно сформулировать таким образом. Рассмотрим на пространстве V эрмитову форму $x, y\mapsto \dfrac{H(\alpha x, y)}{\sqrt{-D}}$ (эта форма эрмитова, потому что число α чисто мнимое). Как и всякая эрмитова форма, она имеет свою сигнатуру. Её сигнатура равна (2, 2). Это — то же самое условие.

Теорема 2 (Мамфорд). *Пусть $k=\mathbb{Q}(\alpha)$ — мнимое квадратичное поле. Существуют поле CM-типа K и четырёхмерное абелево многообразие CM-типа X, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) $[K:\mathbb{Q}]=8$ *и K содержит k;*

(ii) $\mathrm{End}^\circ(X) = K$. *Рассмотрим элемент* $\alpha \in k \subset K = \mathrm{End}^\circ(X)$ *как* $\mathbb{C}$*-линейный оператор в четырёхмерном касательном пространстве* $\mathrm{Lie}(X)$. *Тогда* α *имеет ровно два собственных числа, каждое из которых кратности* 2;

(iii) *На X существуют допустимые формы, не представимые билинейными допустимыми формами.*

Дальше возникла некая интрига. Речь идёт о последней чисто математической работе А. Вейля, которая, по существу, не была опубликована. Это был препринт, который появился только в его собрании сочинений [15]. Там был просто разобран пример Мамфорда, и разобран он был следующим образом. Вейль заметил, что очень важно, что в поле K лежит мнимое квадратичное поле. И он построил класс примеров диаметрально противоположного типа. Дело в том, что абелевы многообразия CM-типа — это очень специальные абелевы многообразия; в каком-то смысле очень жёсткие. Скажем, если вы реализуете его как алгебраическое многообразие, то его всегда можно реализовать над числовым полем. То есть это вещь достаточно специальная. В примере Вейля, наоборот, возникает абелево многообразие довольно общего вида.

Я сейчас попробую сформулировать результат Вейля так, как он его сформулировал, а потом попробую его передоказать. Это пример той ситуации, когда возникают исключительные допустимые формы. Сначала я сформулирую условия, в которых Вейль строил свой вариант конструкции Мамфорда, а потом опишу саму конструкцию Вейля. Она, конечно, неявно появлялась и у Мамфорда, но была уж очень сильно завязана на большое поле K, которое на самом деле не слишком нужно. Ситуация у Вейля следующая. У нас есть абелево многообразие X, которое имеет чётную размерность $2d \geqslant 4$. У нас есть мнимое квадратичное поле $k = \mathbb{Q}(\alpha)$, $\alpha^2 = -D$, где D — положительное целое число, (свободное от квадратов). Мы предполагаем, что $k = \mathrm{End}^\circ(X)$. И опять при действии на касательное пространство $\mathrm{Lie}(X)$ предполагается, что собственные (чисто мнимые) значения $\sqrt{-D}$ и $-\sqrt{-D}$ имеют одинаковую кратность. Последнее условие я могу сформулировать в более учёном виде. У нас есть касательное пространство, на которое, с одной стороны, действует поле k — эндоморфизмы. С другой стороны, это просто комплексное векторное пространство. Значит, на самом деле действует тензорное произведение $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Естественно, наша алгебра Ли является модулем над этой прямой суммой. Наше условие состоит в том, что эта прямая сумма должна быть свободным модулем. Свобода означает, что кратности совпадают. Дальше формулировка Вейля была такая. Если X «общее», то существуют исключительные допустимые формы (здесь используется понятие допустимой формы, которого не было у Вейля). При этом не было явно сформулировано, что значит «общее». Точнее говоря, было сформулировано следующее. Все поляризованные абелевы многообразия, у которых фиксированы размерность и детерминант формы $L_H\colon \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}$, могут быть параметризованы точками некоторого комплексного алгебраического многообразия. Давайте ещё фиксируем кольцо эндоморфизмов, которое является порядком в нашем поле. Если из этого образования выбросить счётное число подмногообразий положительной коразмерности, то любое оставшееся абелево многообразие допускает нетривиальную допустимую форму.

Теорема 3 (А. Вейль). *Пусть $k = \mathbb{Q}(\alpha)$ — мнимое квадратичное поле, $d \geqslant 2$ — целое число. Существует абелево многообразие X чётной размерности $2d \geqslant 4$, удовлетворяющее следующим условиям*:

(i) $\mathrm{End}^\circ(X) = k$;

(ii) *Рассмотрим элемент $\alpha \in k \subset K = \mathrm{End}^\circ(X)$ как $\mathbb{C}$-линейный оператор в $2d$-мерном касательном пространстве* $\mathrm{Lie}(X)$. *Тогда α имеет ровно два собственных числа, каждое из которых кратности d*;

(iii) *На X существуют допустимые формы, не представимые билинейными допустимыми формами.*

Вейль предложил смотреть на эти абелевы многообразия как на источник возможного контрпримера к гипотезе Ходжа. Ситуация с доказательством гипотезы Ходжа в этом случае невесёлая. Насколько мне известно, алгебраичность классов, построенных Вейлем в середине 70-х годов (я их вскоре опишу), доказана лишь в следующих случаях: $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ [10], [11], [2] и, кажется, $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ [12]. (Хотя примеры классов Вейля существуют для любого мнимого квадратичного поля.) И каждое из этих доказательств — довольно тонкая алгебро-геометрическая теорема. Линейная алгебра, которая за всем этим лежит, сравнительно проста, но доказывать алгебраичность трудно. Зато цикл предъявляется явно, но только в трёх случаях. А в остальных случаях просто ничего не известно.

Как объединить примеры Мамфорда и Вейля?

Теперь я хотел бы сформулировать один из своих результатов, полученных совместно с голландским математиком Беном Мооненом (Moonen). Применительно к конструкции Вейля утверждение состоит в том, что на самом деле для наличия исключительных допустимых форм (т. е. не представимых билинейными) достаточно выполнения условия $\mathrm{End}^\circ(X) = k$, т. е. алгебра эндоморфизмов является полем.

Единственное условие, которое нужно, это условие на эндоморфизмы. Конечно, это условие тоже подразумевает, что вы выкидываете счётное число подмногообразий положительной коразмерности, но по крайней мере ясно, какие именно.

Чуть позже я сформулирую утверждение, которое покрывает и примеры Мамфорда и примеры Вейля. На самом деле, Вейль не просто сформулировал утверждение о том, что бывают исключительные формы; он предложил некоторую конструкцию. Сейчас я хочу описать эту конструкцию. А результат, который я имел в виду, — это явный критерий, объясняющий, когда эта конструкция приводит к исключительным формам.

Для простоты я буду работать с мнимым квадратичным полем $k=\mathbb{Q}(\alpha)$, $\alpha^2=-D$, хотя на самом деле конструкция Вейля обобщалась и на случай произвольных полей. Будем считать, что $k\subset \mathrm{End}^\circ(X)$, т. е. алгебра эндоморфизмов содержит некоторое мнимое квадратичное поле. Это условие выполнено и в примере Вейля и в примере Мамфорда, хотя это можно обобщать и проводить соответствующую конструкцию в более общем случае. У нас есть пространство $2d$-полилинейных альтернированных форм $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\Lambda^{2d}\Gamma_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$. Оно состоит из альтернированных $\mathbb{Q}$-полилинейных форм

$$\psi\colon \underbrace{\Gamma_{\mathbb{Q}}\times\ldots\times\Gamma_{\mathbb{Q}}}_{2d}\to\mathbb{Q}.$$

Будем считать, что $\dim X=2d$. В этом пространстве можно определить двумерное $\mathbb{Q}$-подпространство W_k, которое (неканонически) изоморфно полю k. А именно, эндоморфизмы действуют на $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, значит, k тоже действует на $\Gamma_{\mathbb{Q}}$. При этом k-размерность пространства $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ как раз равна $2d$, т. е. $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ — d-мерное k-пространство.

Рассмотрим пространство $2d$-полилинейных альтернированных форм $\mathrm{Hom}_k(\Lambda^{2d}\Gamma_{\mathbb{Q}}, k)$, состоящее из альтернированных k-полилинейных форм

$$\psi\colon \underbrace{\Gamma_{\mathbb{Q}}\times\ldots\times\Gamma_{\mathbb{Q}}}_{2d}\to k$$

со значениями в k. Заметим, что на $\mathrm{Hom}_k(\Lambda^{2d}\Gamma_{\mathbb{Q}}, k)$ имеется естественная структура одномерного векторного пространства над k поскольку, по определению, оно является двойственным к максимальной (ненулевой) внешней степени k-пространства $\Gamma_{\mathbb{Q}}$. Пусть $\mathrm{tr}_{k/\mathbb{Q}}\colon k\to\mathbb{Q}$ — $\mathbb{Q}$-линейное отображение следа из поля k в $\mathbb{Q}$. (Напомню, что $\mathrm{tr}_{k/\mathbb{Q}}(1)=2$, $\mathrm{tr}_{k/\mathbb{Q}}(\alpha)=0$.) Тогда композиция

$$\mathrm{tr}_{k/\mathbb{Q}}\ \psi\colon \{x_1,\ \ldots,\ x_{2d}\}\mapsto \mathrm{tr}_{k/\mathbb{Q}}(\psi(x_1,\ \ldots,\ x_{2d}))\in\mathbb{Q};\qquad x_1,\ \ldots,\ x_{2d}\in\Gamma_{\mathbb{Q}}$$

является формой из $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\Lambda^{2d}\Gamma_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$, и отображение $\psi \mapsto \mathrm{tr}_{k/\mathbb{Q}}\, \psi$ задаёт вложение

$$\mathrm{Hom}_k(\Lambda^{2d}\Gamma_{\mathbb{Q}}, k) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\Lambda^{2d}\Gamma_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}),$$

образ которого обозначается через W_k и называется пространством классов Вейля (отвечающим k).

Когда подпространство W_k состоит из допустимых форм? Не очень сложно проверить, что W_k состоит из допустимых форм тогда и только тогда, когда кратности обоих собственных значений α при действии на касательное пространство совпадают. Соответственно, сигнатура равна нулю. Это и есть то подпространство, которое было у Мамфорда и у Вейля. Вопрос состоит в том, когда элементы пространства $W_k \setminus \{0\}$ являются исключительными формами. Пространство W_k одномерно над k и, тем самым, двумерно над $\mathbb{Q}$. Можно показать, что если хотя бы одна из этих форм исключительная, то все остальные тоже исключительные.

Теперь я хочу сформулировать теорему (я уже говорил, что это наш совместный результат с Мооненом), из которой вытекает усиленная теорема Вейля, а также результат Мамфорда. Ещё хочу сказать, что я привёл формулировку для мнимых квадратичных полей, но ясно, что вместо k можно ставить всё, что угодно. Правда, возникает вопрос о том, когда получаются допустимые формы, но соответствующее условие совпадения кратностей обобщается. Теорема, которую я сейчас сформулирую, имеет отношение не только к четырёхмерным многообразиям, но и к абелевым многообразиям любой чётной размерности.

Теорема 4. *Если k переходит в себя относительно всех инволюций Розати, то все ненулевые классы Вейля (т. е. элементы пространства W_k) исключительные.*

Чуть позже я докажу эту теорему. А пока давайте проверим, что эти условия выполнены в ситуации Мамфорда и в ситуации Вейля. В ситуации Вейля всё очень просто: алгебра эндоморфизмов $\mathrm{End}^\circ(X)$ — это мнимое квадратичное поле k, и единственная нетривиальная инволюция на k — комплексное сопряжение. Естественно, k переходит в себя под действием этой инволюции. Так обстоят дела в ситуации Вейля; тем самым, дополнительное условие о том, что нужно выбрасывать какие-то подмногообразия, отброшено. В ситуации Мамфорда $\mathrm{End}^\circ(X) = K$ — поле CM типа; единственная положительная инволюция — тоже комплексное сопряжение. Ясно, что любое мнимое квадратичное подполе $k \subset K$ переходит в себя при комплексном сопряжении. Так что в ситуации Мамфорда условие теоремы тоже выполнено. Следовательно в обоих случаях мы получаем исключительные допустимые формы.

Теперь я докажу эту теорему. Рецепт крайне простой. У нас есть допустимые формы и формы из подпространства W_k (классы Вейля). Найдём группу, которая действует на них и сохраняет все билинейные допустимые формы, но при этом действует нетривиально на классы Вейля. Если мы найдём такую группу, то все ненулевые классы Вейля исключительны.

Нужная нам группа будет состоять из автоморфизмов $\mathbb{Q}$-пространства $\Gamma_{\mathbb{Q}}$. Смотреть на произвольные автоморфизмы $u \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{\mathbb{Q}})$ не очень разумно, потому что нам нужно учитывать действие поля k. Поэтому ограничимся автоморфизмами $u \in \mathrm{Aut}_k(\Gamma_{\mathbb{Q}})$, коммутирующими с действием k. С другой стороны, что такое пространство классов Вейля W_k? Это, по существу, пространство, двойственное к максимальной внешней степени k-пространства $\Gamma_{\mathbb{Q}}$. То есть, грубо говоря, элемент u действует на эти формы делением на определитель $\det_k(u)$. Поэтому любой элемент группы $\mathrm{Aut}_k(\Gamma_{\mathbb{Q}})$ с определителем $\neq 1$ в k действует нетривиально на классы Вейля. Значит, задача состоит в том, чтобы найти автоморфизмы $u \in \mathrm{Aut}_k(\Gamma_{\mathbb{Q}})$, которые сохраняют все билинейные допустимые формы и при этом имеют определитель в k отличный от 1.

Рассмотрим группу

$$U_k = \{\beta \in k\colon \beta\bar{\beta} = 1\} \subset k^* \subset \mathrm{Aut}_k(\Gamma_{\mathbb{Q}}).$$

и убедимся в том, что она хороша. Ясно, что $\det_k(\beta) = \beta^{2d}$. Стало быть, у нас есть две задачи. Первая: убедиться в том, что в группе U_k есть элементы, которые не являются корнями из единицы; это не так уж сложно. Вторая: убедиться, что все эти элементы сохраняют все билинейные допустимые формы. Я начну со второй задачи; она более содержательная. Каждая допустимая билинейная форма является разностью мнимых частей двух поляризаций. Поэтому достаточно убедиться в том, что элементы группы U_k сохраняют мнимые части всех поляризаций. Мы знаем, что любая инволюция Розати $u \mapsto u'$ переводит поле k в себя, и вдобавок положительна. Это периодический автоморфизм порядка 2 (или 1), и он может быть только комплексным сопряжением. Действительно, если автоморфизм будет тождественным, то положительность инволюции сразу же нарушится: у нас возникнет отрицательный элемент $u'u = -D$. Поэтому для любой поляризации H её мнимая часть $L = \mathrm{Im}(H)$ удовлетворяет условию $L(ux, y) = L(x, u'y)$. Если $u \in U_k$, то $u' = u^{-1}$, поэтому $L(ux, uy) = L(x, y)$, т. е. мнимая часть любой поляризации инвариантна относительно действия u. Стало быть, если у нас есть форма, которая представима в виде линейной комбинации внешних произведений таких билинейных форм, то она тоже инвариантна относительно действия всех $u \in U_k$.

Значит, осталось убедиться в том, что группа U_k содержит не только корни из единицы. А это утверждение вытекает из следующих двух элементарных замечаний, доказательство которых я оставлю в качестве упражнения.

Группа U_k *бесконечна.*

Число корней из единицы в мнимом квадратичном поле k не превосходит 6. (Если $k \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то множество всех корней из единицы в k совпадает с $\{\pm 1\}$.)

Благодарности

Я глубоко признателен Г. Л. Литвинову, прочитавшему черновой вариант текста доклада и сделавшему ряд полезных замечаний. Во время своей поездки в Москву в декабре 2000 г. (когда был прочитан этот доклад) и при подготовке окончательного варианта текста (зимой 2001/2002 гг.) автор пользовался поддержкой Национального Научного Фонда (The National Science Foundation) США.

Список литературы

[1] Deligne P. Hodge cycles on Abelian varieties (notes by J. S. Milne). — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1982. — P. 9—100. — (Lecture Notes in Math, v. 900). (Имеется перевод: Делинь П. Ходжевы циклы на абелевых многообразиях // Ходжевы циклы и мотивы. — М.: Мир, 1985. — (Математика. Новое в зарубежной науке, Т. 37).)

[2] van Geemen B. Theta functions and cycles on some abelian fourfolds // Math. Z. — 1996. — V. 221, № 4. — P. 617—631.

[3] Kempf G. R. Complex abelian varieties and theta functions. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[4] Moonen B. J. J., Zarhin Yu. G. Hodge and Tate classes on simple abelian fourfolds // Duke Math. J. — 1995. — V. 77. — P. 553—581.

[5] Moonen B. J. J., Zarhin Yu. G. Weil classes on abelian varieties // J. Reine Angew. Math. — 1998. — V. 496. — P. 83—92.

[6] Moonen B. J. J., Zarhin Yu. G. Hodge classes on abelian varieties of low dimension // Math. Annalen. — 1999. — V. 315. — P. 711—733.

[7] Mumford D. Abelian varieties. Second edition. — London: Oxford University Press, 1974. (Имеется перевод первого издания: Мамфорд Д. Абелевы многообразия. — М.: Мир, 1971.)

[8] Mumford D. Tata lectures on Theta functions I, II, III — Boston: Birkhäuser, 1983, 1984, 1991. — (Progress in Math., v. 28, 43, 97). (Имеется перевод первого и второго томов: Мамфорд Д. Лекции о тэта функциях. — М.: Мир, 1988.)

[9] Pohlman H. Algebraic cycles on abelian varieties of complex multiplication type // Ann. of Math. — 1968. — V. 88. — P. 161—180.

[10] Schoen C. Hodge classes on self-products of a variety with an automorphism // Compositio Math. — 1988. — V. 65. — P. 3—32.

[11] Schoen C. Addendum to: Hodge classes on self-products of a variety with an automorphism // Compositio Math. — 1998. — V. 114. — P. 329—336.

[12] Shioda T. Algebraic cycles on abelian varieties of Fermat type // Math. Ann. — 1981. — V. 258. — P. 65—80.

[13] Tate J. Algebraic cycles and poles of zeta functions // Arithmetical Algebraic Geometry. — New York: Harper and Row, 1965. — P. 93—110. (Имеется перевод: Тэйт Дж. Алгебраические классы когомологий // Успехи матем. наук. — 1965. — № 20, вып. 6 (126). — С. 27—40.)

[14] Weil A. Introduction á l'étude des variétés kählériennes. — Paris: Hermann, 1958. (Имеется перевод: Вейль А. Введение в теорию кэлеровых многообразий. — М.: ИЛ, 1961.)

[15] Weil A. Abelian varieties and the Hodge ring // Collected papers. Vol. III. [1977c]. — New York etc.: Springer-Verlag, 1979. — P. 421—429.

[16] Zarhin Yu. G., Moonen B. Weil classes and Rosati involutions on complex abelian varieties // Recent progress in algebra (Taejon/Seoul, 1997). — Providence, RI: AMS, 1999. — (Contemporary Math., v. 224). — P. 229—236.

28 декабря 2000 г.

В. В. Никулин

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛОРЕНЦЕВЫХ АЛГЕБР КАЦА—МУДИ РАНГА 3

Мы хотим построить некий список лоренцевых алгебр Каца—Муди, и хотим, чтобы они были важны, чтобы мы могли их применять — так же, как конечномерные полупростые, аффинные и т. д. То, что я буду рассказывать — будет некий пример такой классификации. Я хочу рассмотреть пример, когда ранг матрицы Картана равен 3. Я приведу пример такой классификации. По-видимому, это первый пример, когда классифицирован большой класс лоренцевых алгебр Каца—Муди. Подробно этот пример описан в препринте math.AG/0010329.

Итак, в примере, который я хочу рассмотреть, ранг равен 3. Первое условие заключается в том, что решётка корней этой алгебры Каца—Муди равняется решётке $S_t^* = \mathrm{Hom}(S_t, \mathbb{Z}) \subset S_t \otimes \mathbb{Q}$, где $S_t = U \oplus \langle 2t \rangle$, $t \in \mathbb{N}$, и U — гиперболическая плоскость. Эта решётка имеет ранг 3. Гиперболическая плоскость U задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. А общая матрица равна $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2t & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что это — гиперболическая решётка с сигнатурой (2, 1), т. е. два положительных квадрата и один отрицательный. Это — целочисленная симметрическая билинейная форма, которая задаётся такой матрицей. Решётка по матрице строится так: мы берём свободный $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3$ и полагаем $(e_i, e_j) = a_{ij}$. Вот первое условие: мы хотим, чтобы решётка корней была такова.

Второе условие состоит в том, что мы хотим, чтобы группа симметрий алгебры $\mathfrak{g}$ содержала группу $\widehat{\mathcal{O}}^+(L_t)$, где $L_t = U \oplus S_t$ — решётка, которая получается добавлением ещё одной унимодулярной (гиперболической) плоскости; сигнатура этой решётки равна (3, 2). Это уже не гиперболическая решётка. Группа $\mathcal{O}^+(L_t)$ — это группа её автоморфизмов, а

$$\widehat{\mathcal{O}}^+(L_t) = \{\varphi \in \mathcal{O}^+(L_t) : \varphi|_{L_t^*/L_t} \text{ тождествен}\},$$

т. е. это те автоморфизмы, которые тривиально действуют на так называемую *дискриминантную* форму. Группа $\widehat{\mathcal{O}}^+(L_t)$ — это подгруппа конечного индекса в группе автоморфизмов решётки L_t.

Лоренцева алгебра Каца—Муди задаётся голоморфной автоморфной формой

$$\Phi(z)=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\Bigl[\exp(-2\pi i(w(\rho),z))-\\ -\sum_{a\in S_t^*\cap\mathbb{R}_{++}\mathcal{M}} m(a)\exp(-2\pi i(w(\rho+a),z))\Bigr],$$

где $m(a)\in\mathbb{Z}$. Здесь W — группа Вейля; она является подгруппой группы автоморфизмов $\mathcal{O}^+(S_t)$, порождённой отражениями. Кроме того, $S_t^*=$ $=\operatorname{Hom}(S_t,\mathbb{Z})$ — двойственная решётка; $\rho\in S_t\otimes\mathbb{Q}$ — это так называемый *вектор Вейля*; $\varepsilon\colon W\to\{\pm1\}$ — характер; $\mathcal{M}\subset\mathcal{L}(S_t)=V^+(S_t)/\mathbb{R}_{++}$ — фундаментальная камера Вейля. От самого вектора ρ форма не зависит; она зависит только от орбиты ρ под действием группы Вейля. Дополнительно мы требуем, чтобы голоморфная автоморфная форма Φ была так называемой *рефлективной* формой; это означает, что дивизор нулей $(\Phi)_0$ этой формы является объединением квадратичных дивизоров, которые ортогональны корням решётки L_t.

По этой формуле строится некоторая алгебра Каца—Муди. Автоматически верно (это следует из теории алгебр), что

$$\Phi(z)=\exp(-2\pi i(\rho,z))\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-2\pi i(\alpha,z)))^{\operatorname{mult}\alpha},$$

где $\operatorname{mult}\alpha$ — кратности корней алгебры $\mathfrak{g}$. В результате у нас получается тождество: бесконечная сумма равна бесконечному произведению. Это тождество называется *тождеством знаменателей* для алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Идеология здесь следующая. Конечно, такое же тождество существует и для конечномерных полупростых алгебр Ли. Тогда это будут просто многочлены от экспоненты. Для аффинных алгебр получается так называемая автоморфная форма Якоби. Когда мы рассматриваем лоренцевы алгебры Каца—Муди, мы насильно требуем, чтобы тождество знаменателей тоже определяло некую автоморфную форму, но более глубокого типа — автоморфную форму на области типа IV в классификации Картана; она гораздо более сложная, чем форма Якоби для аффинных алгебр Ли.

Теперь я поясню формулу более подробно. Эту алгебру можно задавать суммой, можно задавать произведением. Сумма определяет алгебру Ли $\mathfrak{g}$ образующими и соотношениями. А именно, мы рассматриваем множество простых корней, которое состоит из простых вещественных корней и простых мнимых корней. Введём следующее обозначение: $P(\mathcal{M})\subset S_t^*$ — множество простых вещественных корней. Геометрически это множество означает следующее. У нас есть камера Вейля — многогранник $\mathcal{M}$. Для этой камеры Вейля можно определить множество корней, перпендикулярных стенкам. $P(\mathcal{M})$ — это некоторый набор корней, ортогональных стенкам камеры. С точки зрения алгебры он называется множеством простых вещественных корней.

Алгебра определяется образующими e_a, f_a, h_a, где $a \in P(\mathcal{M}) \cup \cup \Bigl(\bigcup\limits_{a \in S_t^* \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}} m(a)' a\Bigr)$; к простым вещественным корням мы добавили так называемые простые мнимые корни. Соотношения между ними — это обычные соотношения, которые известны в теории алгебр, — соотношения Шевалле и Серра. Они тоже непосредственно строятся по решётке и по этой формуле. Я не хочу это выписывать, потому что это довольно стандартная вещь. Здесь $m(a)' = m(a)$, если $a^2 < 0$. Если $a^2 = 0$, то формула для $m(a)'$ более сложная.

Образующие нумеруются элементами решётки S_t^*. Из этого вытекает, что наша алгебра Ли градуирована элементами этой решётки:

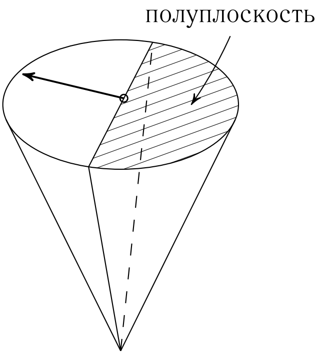
$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in S_t^*} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \Bigl(\bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}\Bigr)$$

На самом деле это будет не просто алгебра Ли, а так называемая обобщённая супералгебра Каца—Муди, или алгебра Борчердса. Он первым построил теорию таких алгебр и построил их примеры. То, что получается супералгебра, вытекает из того, что, когда $m(a)'$ отрицательно, то тогда мы должны считать образующие не обычными, а супер. Мы допускаем целые $m(a)'$. Если бы они были положительными, то тогда получилась бы алгебра Ли. Числа mult α (кратности) связаны с этой алгеброй следующим образом: они являются суперразмерностями соответствующего корневого пространства $\mathfrak{g}_\alpha$, а именно, $\operatorname{mult} \alpha = \operatorname{sdim} \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{0}} - \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{1}}$.

Я повторю ещё раз, что по этой формуле непосредственно строятся образующие и соотношения. Они определяют алгебру. А смысл бесконечного произведения в том, что кратности, которые там появляются, связаны с размерностями корневых пространств этой алгебры Ли.

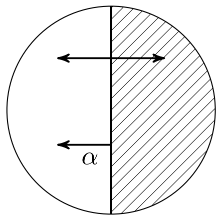
Теперь я объясню более точно, что такое группа Вейля, вектор Вейля, камера Вейля и т. п. Начиная с этого места про алгебру можно просто забыть. Реально мы будем работать с такими формулами. Мы знаем, что каждая из таких формул определяет некоторую алгебру.

Что такое группа Вейля? Позвольте мне напомнить, что элемент α решётки K называют корнем, если $\alpha^2 > 0$ и α^2 делит $2(K, \alpha)$. Известно, что каждый такой элемент определяет отражение s_α в этой решётке, которое переводит α в $-\alpha$ и тождественно на ортогональном дополнении. Группа Вейля W является подгруппой в группе $W(S_t^*)$, порождённой отражениями (для решётки S_t и для двойственной решётки S_t^* группа одна и та же). Группа Вейля — это группа, порождённая отражениями в некоторых корнях решётки S_t. Эта решётка гиперболична. Она определяет световой конус $V^+(S_t)$. Он состоит из элементов x, для которых $x^2<0$ (рис. 1). На самом деле есть ещё и другая пола конуса, но мы её не рассматриваем. Если у нас есть корень α, то $\alpha^2>0$. Можно рассмотреть ортогональное дополнение к этому корню. Отражение s_α действует как отражение в этой гиперплоскости. Если мы рассмотрим проективизацию этого конуса $\mathcal{L}(S_t)/\mathbb{R}_{++}$, то геометрически это можно изобразить так, как показано на рис. 2. Отражение переставляет две полуплоскости.



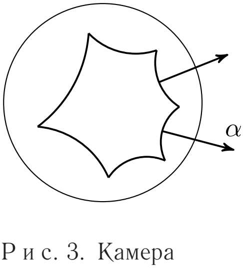
Р и с. 1. Световой конус

Если мы возьмём всю группу отражений, то возникнет камера Вейля (рис. 3). Нужно выкинуть все гиперплоскости отражений и взять компоненту связности. Это и будет камера Вейля. Корни, ортогональные стенкам камеры Вейля, это как раз и будут элементы $P(\mathcal{M})$ — простые вещественные корни. Конечно, здесь возможен разный вид простых вещественных корней.



Р и с. 2. Проективизация конуса

Теперь я могу определить, что такое вектор Вейля ρ. Он определяется тождеством $(\rho,\alpha)=-\frac{\alpha^2}{2}$ для любого $\alpha\in P(\mathcal{M})$. Из того, что группа Вейля произошла из автоморфной формы, следует, что многогранник $\mathcal{M}$ и векторы Вейля здесь очень специальные. Верно следующее: если $\rho^2<0$, то фундаментальный многогранник $\mathcal{M}$ имеет конечный объём. Смысл вектора Вейля ρ заключается в том, что ρ — центр сферы, которая вписывается в многогранник $\mathcal{M}$. В частности, этот многогранник специален ещё и тем, что он описан вокруг сферы. На самом деле сфер несколько; радиус сферы зависит от α^2. Это очень ограничительное условие на многогранник. Есть результаты о том, что число таких многогранников конечно, причём во всех размерностях $\geqslant 2$ в совокупности.



Р и с. 3. Камера Вейля

Если $\rho^2=0$, то многогранник $\mathcal{M}$ уже не будет конечного объёма, но он будет почти конечного объёма в следующем смысле. Точка ρ в этом случае лежит на границе. Условие конечности объёма такое: пересечение $\mathcal{M}$ с любым углом с вершиной ρ имеет конечный объём. Это тоже очень специальное свойство; мы его будем использовать.

Я объяснил, что такое группа Вейля, что такое вектор Вейля, что такое многогранник $\mathcal{M}$, пространство Лобачевского, фундаментальная камера. Мне осталось объяснить, что такое автоморфная форма. Во-первых,

$$z \in \Omega(V^+(S_t)) = S_t \otimes \mathbb{R} + iV^+(S_t).$$

Эта область — аналог верхней полуплоскости. Эта же область отождествляется с другой областью, которая непосредственно связана не с решёткой S_t, а с решёткой $L_t = U \oplus S_t$. То есть она отождествляется с так называемой областью четвёртого типа

$$\Omega(L_t) = \{\mathbb{C}\omega \subset L_t \otimes \mathbb{C}\colon \omega^2 = 0,\ (\omega,\ \bar{\omega}) < 0\}_0.$$

Здесь нижний индекс 0 означает, что мы берём компоненту связности. Ясно, что группа автоморфизмов решётки L_t действует в этой области. Если мы возьмём подгруппу $\mathcal{O}^+(L_t)$ индекса 2, то она будет сохранять эту компоненту связности. На пространство $\Omega(L_t)$ можно смотреть как на комплексный аналог пространства Лобачевского.

Эти области канонически отождествляются следующим образом. У нас $L_t = U \oplus S_t$. Введём координаты: $U = \mathbb{Z}f_1 \oplus \mathbb{Z}f_{-1}$, где матрица равна $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; первая строка — это f_1, вторая строка — это f_{-1}. Отображение первой области на вторую задаётся формулой $z \mapsto \mathbb{C}\omega_z$, $\omega_z = ((z,\ z)/2)f_1 + f_{-1} \oplus z$.

Что означает, что $\Phi(z)$ — автоморфная форма? Это означает следующее. По функции $\Phi(z)$ мы можем построить функцию $\tilde{\Phi}(\lambda\omega_z) = \lambda^{-k}\Phi(z)$, где $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $z \in \Omega(V^+(S_t))$ и $k \in \mathbb{Z}/2$. Это будет функция на конусе $\tilde{\Omega}(L_t)$ над $\Omega(L_t)$. Говорят, что $\Phi(z)$ — *автоморфная форма* веса k относительно подгруппы $G \subset \mathcal{O}^+(L_t)$, если функция $\tilde{\Phi}$ инвариантна относительно G (может быть, с каким-то характером или мультипликативной системой). На самом деле, здесь у нас возникает функция с характером, потому что из написанной формулы следует, что $\Phi(z)$ антиинвариантна. Стандартный случай, когда в качестве характера берётся определитель.

Наконец, мне осталось объяснить, что значит *рефлективная* автоморфная форма. Без этого условия невозможно ничего классифицировать. Φ рефлективна, если её дивизор нулей $(\Phi)_0$ содержится в $\bigcup\limits_{\alpha\text{ — корень } L_t} \Omega(L_t)_\alpha$, где $\Omega(L_t)_\alpha = \{\mathbb{C}\omega\colon (\omega,\ \alpha) = 0\}$, т. е. дивизор нулей содержится в объединении квадратичных дивизоров, ортогональных корням L_t.

Теперь все определения я закончил. Мы хотим классифицировать все такие формы. Решётка S_t у нас фиксированная. Ещё я говорил, что группой симметрий должна быть парамодулярная группа $\widehat{\mathcal{O}}^+(L_t)$ (автоморфизмы, тождественные на L_t^*/L_t). Мы рассматриваем только автоморфные формы, для которых $G \supset \widehat{\mathcal{O}}^+(L_t)$.

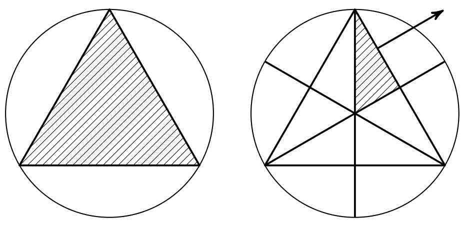
Основной результат следующий.

Теорема 1. *Существует ровно* 29 *таких автоморфных форм. Они существуют для* $t=1$ (3 *формы*), 2 (7 *форм*), 3 (7 *форм*), 4 (7 *форм*), 8 (1 *форма*), 9 (1 *форма*), 12 (1 *форма*), 16 (1 *форма*), 36 (1 *форма*). *Но разных форм только* 25, *потому что некоторые из них получаются друг из друга заменой переменных.*

Все эти формы уже были построены в нашей предыдущей работе с Гриценко *). Но теперь мы можем доказать, что других форм нет. Этому доказательству будет посвящена вторая половина моего доклада.

Я начну с того, что приведу примеры форм, которые возникают в этой теореме. Я забыл упомянуть, что $\Phi(z)$ называется автоморфной формой *веса* k, если при поднятии этой функции на конус получается однородная функция степени $-k$. Вес — это то же самое, что степень многочлена. Это важнейший инвариант автоморфной формы. Его нужно всегда указывать. Второй инвариант, который возникает в этой алгебре — это многогранник. Для алгебр ранга 3 это будет просто многоугольник на плоскости Лобачевского.

Всего существует 29 форм. В случае $t=1$ все формы возникают из треугольника с нулевыми углами. Для треугольника на плоскости Лобачевского, изображённого на рис. 4(а), формой будет так называемая форма Δ_5. Это классическая форма. Она является произведением десяти чётных тэта-констант. А ещё эта форма является дискриминантом кривых рода 2. Если рассмотреть многообразие модулей кривых рода 2 (в соответствующей области), то эта форма обращается в нуль в точности на дискриминанте. Это аналог j-инварианта, который является дискриминантом для кривых рода 1. То есть это аналог η-функции Дедекинда.

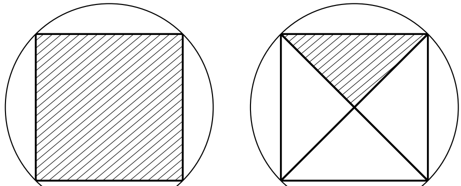


(а) (б)

Рис. 4. Случай $t=1$

*) Gritsenko V. A., Nikulin V. V. Automorphic forms and Lorentzian Kac—Moody algebras. I, II // Internat. J. Math. — 1998. — V. 9, № 2. — P. 153—199; 200—275.

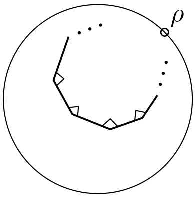
Рассмотрим высоты этого треугольника. Возникнет треугольник, изображённый на рис. 4(б). Этому треугольнику отвечают две формы: Δ_{35} (веса 35) и $\Delta_{30} = \Delta_{35}/\Delta_5$ (веса 30). Алгебры в этом случае отличаются тем, что для одной алгебры в качестве перпендикулярного вектора нужно взять примитивный вектор, а для другой алгебры нужно взять удвоенный примитивный вектор. Это примерно то же самое, что для алгебр Ли B_l и C_l группа Вейля одна и та же, а эти векторы разные.



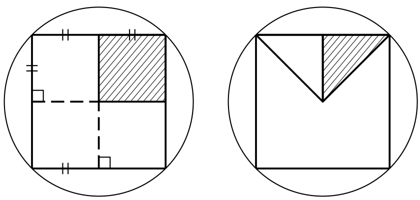
(а) (б)

Р и с. 5. Случай $t = 2$: начало

В случае $t = 2$ вместо правильного треугольника нужно взять квадрат с вершинами на абсолюте (рис. 5(а)). Этому случаю отвечает форма Δ_2. Затем этот квадрат нужно разбить диагоналями на треугольники (рис. 5(б)). Этому случаю тоже отвечают две формы: Δ_9 и $\Delta_{11} = \Delta_2\Delta_9$. Всё здесь совершенно аналогично; тоже есть три формы. Но в этом случае дополнительно возникает ещё одна форма, которая отвечает бесконечному многоугольнику с углами $\pi/2$ (рис. 6). В этом случае вектор Вейля ρ будет на бесконечности. Форма, которая отвечает этому случаю, обозначается $\psi_{12}^{(2)}$; она имеет вес 12. На эту форму можно умножить остальные формы: $\Delta_2\psi_{12}^{(2)}$, $\Delta_9\psi_{12}^{(2)}$, $\Delta_{11}\psi_{12}^{(2)}$. Эти формы отвечают многогранникам, изображённым на рис. 7 (треугольнику соответствуют две последние формы).



Р и с. 6. Случай $t = 2$: бесконечный многоугольник



(а) (б)

Р и с. 7. Случай $t = 2$: окончание

Для $t = 3$ вместо правильного четырёхугольника нужно рассмотреть правильный шестиугольник (рис. 8). Всё остальное то же самое. Для $t = 4$ вместо правильного шестиугольника нужно взять бесконечный правильный многоугольник (рис. 9). Он получается из треугольника с вершинами на бесконечности (такой треугольник всегда правильный) отражениями относительно сторон.

Дальше для каждого конкретного случая возникает по одной форме. Это можно посмотреть в препринте. Например, для $t=9$ возникает форма D_2; многоугольник — пятиугольник с двумя прямыми углами (рис. 10).

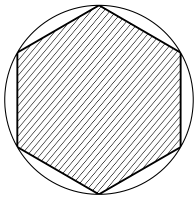


Рис. 8. Случай $t=3$

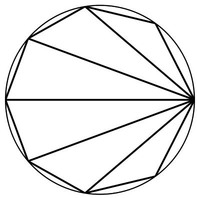


Рис. 9. Случай $t=4$

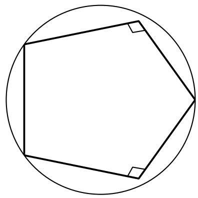


Рис. 10. Случай $t=9$

Интересно, что формы Δ_{30} и Δ_{35} называются *формами Игузы*. Если перейти к зигелеву языку, зигелевой области, то Δ_{35} — первая автоморфная форма относительно $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$, которая имеет нечётный вес. Эта форма была построена Игузой 35 лет назад. А все остальные формы можно рассматривать как аналоги, но они были неизвестны. Мы их построили специально.

Ещё я должен сказать, что для $t=4$ одна форма тоже была известна. Она обозначается $\Delta_{1/2}$; это просто будет чётная тэта-константа рода два.

Важное свойство форм, которые здесь возникают, состоит в том, что если рассмотреть дивизор нулей $(\Phi)_0$, то он является суммой $\sum D_\alpha$ дивизоров, ортогональных корням, и все кратности дивизоров равны 1. Это более или менее отвечает тому, что вещественные корни алгебры Каца—Муди всегда имеют кратность 1; они не могут иметь кратность больше, чем 1.

Теперь я перехожу к доказательству теоремы. Идея доказательства простая. Во-первых, нужно построить все 29 форм. Во-вторых, нужно доказать, что других форм нет. Что касается построения форм, то я уже говорил, что тождество знаменателей порождает бесконечное произведение. Эти формы можно строить как при помощи бесконечной суммы, так и бесконечного произведения. Для всех этих 29 форм мы нашли и сумму, и произведение. Для доказательства теоремы удобнее использовать произведение. Мы придумали общую конструкцию, как строить такие бесконечные произведения. Эта конструкция восходит к Борчердсу; её можно назвать вариантом подъёма Борчердса. Рассмотрим модулярную форму Якоби

$$\Phi_{0,t}(\tau, z)=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} f(k, l)q^k r^l \in J_{0,t}^{\mathrm{nh}},$$

где $q = e^{2\pi i\tau}$, $\tau \in \mathbb{H}$ (верхняя полуплоскость), $r = e^{2\pi i z}$, $z \in \mathbb{C}$, $J^{\mathrm{nh}}_{0,t}$ — почти голоморфные формы Якоби (0 — вес, t — индекс). Форма Якоби — это смесь модулярной формы и эллиптической функции. Более точно — это сечение расслоения на универсальной эллиптической кривой. Есть параметр τ у модулей эллиптических кривых, и есть параметр у эллиптической кривой. В качестве дискретной группы здесь возникает полупрямое произведение групп $H(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, где $H(\mathbb{Z})$ — так называемая *группа Якоби*; она является центральным расширением

$$0 \to \mathbb{Z} \to H(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to 0.$$

Важное свойство этих форм заключается в том, что коэффициент $f(k, l)$ зависит только от $4tk - l^2$ (это число называется *нормой*) и от $\pm l \pmod{2t}$. *Почти голоморфная* означает, что эта форма может иметь полюс только в бесконечности, т. е. когда $\tau \to +\infty i$.

Такие формы образуют кольцо. Их можно перемножать; тогда индексы будут складываться. Известны образующие этого кольца форм Якоби. Для каждого t имеется конечномерное пространство форм Якоби. Поэтому можно пользоваться стандартными образующими: перемножать их, складывать и т. д.

Итак, предположим, что у нас есть такая форма Якоби Φ. Тогда по ней можно построить бесконечное произведение

$$B_\Phi(z) = q^A r^B s^C \prod (1 - q^n r^l s^m)^{f(nm, l)},$$

которое берётся по тройкам целых чисел (n, l, m), для которых либо $m > 0$, либо $m = 0$, $n > 0$, либо $m = n = 0$, $l < 0$. Здесь

$$A = \frac{1}{24} \sum_l f(0, l), \quad B = \frac{1}{2} \sum_{l>0} l f(0, l), \quad C = \frac{1}{4} \sum_l l^2 f(0, l).$$

Выбор неравенств для (n, l, m) аналогичен выбору фундаментальной области. Другое дело, что эти произведения очень общие и не всегда связаны с группой отражений, поэтому о фундаментальной области говорить нужно осторожно.

Суммы A, B, C конечны, потому что норма $4tk - l^2$ ограничена снизу некоторым отрицательным числом. Поэтому l, которое здесь возникает, пробегает конечное число значений.

Утверждение заключается в том, что это будет автоморфная форма относительно парамодулярной группы $\widehat{\mathcal{O}}^+(L_t)$; её вес равен $f(0, 0)/2$. Отличие от Борчердса заключается в том, что Борчердс строил такой подъём для модулярных форм, а мы построили такой подъём для форм Якоби. Борчердс строил сразу многомерные формы, а мы строим только трёхмерные. Хотя в принципе эту теорему можно доказывать и в общем случае, но на этом этапе мы сконцентрировали внимание на ранге 3. Ранг 3 наиболее богат. По-видимому, больше всего случаев возникает именно в ранге 3. Если мы классифицируем все лоренцевы алгебры Каца—Муди ранга 3, то для большего ранга их будет, вероятно, не больше.

Как это отождествить с переменной на решётке S_t? Для A, B, C есть явные формулы. Решётка S_t задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2t & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Обозначим координаты, соответствующие строкам этой матрицы, f_2, f_3, f_{-2}. Тогда $z \in S_t^* \otimes \mathbb{C}$ можно записать как $z = z_3 f_2 + z_2 f_3 + z_1 f_{-2} \in \Omega\big(V^+(S_t)\big)$. Для двойственной решётки вместо f_3 нужно взять $\widehat{f}_3 = f_3/2t$. Для $\alpha = (n, m, l)$ выражение следующее: $\alpha = (n, m, l) = n f_2 - l \widehat{f}_3 + m f_{-2}$. Тогда $\exp\big(-2\pi i(\alpha, z)\big) = q^n r^l s^m$, где $q = \exp(2\pi i z_1)$, $r = \exp(2\pi i z_2)$, $s = \exp(2\pi i z_3)$. Это — отождествление формулы с переменными в этой решётке.

Ещё важно, что известен дивизор этой формы. В общем случае форма может быть не голоморфной, а мероморфной, т. е. она может иметь полюса. Дивизор $B_{\Phi_{0,t}}$ является рациональным квадратичным дивизором, ортогональным примитивному $\alpha = (a, b, c) > 0$ (я только что выписывал выражение для α) с кратностью $m_{ac,b} = \sum\limits_{n>0} f(n^2 ac, nb)$.

Все эти формулы, конечно, запомнить невозможно. Важно лишь понять, что если мы стартовали с какой-то формы Якоби, построили это произведение, то потом по коэффициентам этой формы можно всё найти. Найти вес, найти дивизор и т. д.

Эта теорема даёт огромное количество автоморфных форм с известным дивизором. Но нам для доказательства нашей теоремы нужны очень специальные формы. Прежде всего нам нужны рефлективные формы. Это означает, что если кратность дивизора D_α не равна нулю, то тогда α является корнем. Пользуясь критерием для кратности, это легко переформулировать. Условие получается такое. Форма B_Φ рефлективна тогда и только тогда, когда из (1) вытекает (2): (1) $f(k, l) \neq 0$ и норма $4tk - l^2$ отрицательна и (2) $4tk - l^2 \mid (4t, 2l)$. Второе условие эквивалентно тому, что $\alpha^2 \mid 2(\alpha, S_t^*)$.

Мы хотим построить эти 29 форм. Все они будут задаваться такой формулой. Теорема, о доказательстве которой я говорил, это только вершина айсберга. Реально в нашей работе мы классифицируем гораздо больше форм. Мы классифицируем все рефлективные формы. А рефлективность, как вы видите, это более или менее то же самое, что коэффициенты формы Якоби с отрицательной нормой почти все нулевые, кроме тех, которые удовлетворяют указанным соотношениям. Это соотношение выполнено в очень редких случаях. Нужно понимать, что рефлективные формы — это более или менее тот случай, когда форма Якоби имеет очень много нулевых коэффициентов.

Назовём форму Якоби рефлективной, если соответствующее бесконечное произведение является рефлективной формой, т. е. её нули ортогональны корням решётки L_t. Пусть RJ_t — пространство всех рефлективных форм. Это пространство является $\mathbb{Z}$-модулем. Мы находим все t, для которых это пространство не равно нулю. А кроме того, мы находим ранг этого пространства — сколько там независимых форм. Например, для $t=1$ независимых форм 2, для $t=2$ независимых форм 3. Возникает такой список. Те формы, которые возникают в нашей теореме, должны иметь кратность 1. У нас есть формула для кратности дивизора. Если отобрать из всего огромного списка рефлективных форм те, у которых дивизоры имеют кратность 1, то получится в точности наш список.

Я думаю, что на самом деле все рефлективные формы тоже очень интересны для теории алгебр Каца—Муди. Разница лишь в том, что кратность не будет равна 1. Другая разница в том, что возникнут мероморфные функции. Но есть примеры, для которых возникают алгебры Ли и формулы знаменателей, где кратность не обязательно равна 1. Мы с Гриценко думаем, что все эти формы тоже важны. Основной результат нашей работы заключается в том, что мы описали все рефлективные формы.

Как это доказывается? Хорошо известно, что когда мы классифицируем конечномерные алгебры Ли или аффинные алгебры Ли, то нет другого способа их классифицировать, кроме как классифицировать соответствующие системы корней. (Возможно, есть другие методы, но я их не знаю.) Надо углубляться в геометрию конечных систем векторов. То же самое возникает и в этой задаче. В этой задаче аналог систем корней — это системы корней в так называемых *рефлективных* гиперболических решётках. Что такое рефлективная гиперболическая решётка? Рассмотрим гиперболическую решётку S; гиперболичность означает, что её сигнатура равна $(n, 1)$, т. е. n положительных квадратов и один отрицательный. Возьмём группу отражений этой решётки $W(S)$, возьмём фундаментальную камеру $\mathcal{M}$ и рассмотрим группу симметрий фундаментальной камеры

$$\mathrm{Symm}(\mathcal{M}) = \{\varphi \in \mathcal{O}(S) : \varphi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}\}.$$

Решётка S_t рефлективна, если существует вектор $\rho \in S_t$, $\rho \neq 0$, у которого орбита $\mathrm{Symm}(\mathcal{M})(\rho)$ конечна. Если взять стационарную подгруппу этого вектора, то она будет иметь конечный индекс. Этот вектор ρ называется *обобщённым вектором Вейля*.

У этого определения есть три возможности:

1. $\rho^2 < 0$. Это эквивалентно тому, что фундаментальный многогранник $\mathcal{M}$ имеет конечный объём. Этот случай называется эллиптическим.

2. $\rho^2 = 0$. Это эквивалентно тому, что $\mathcal{M}$ конечен в каждом угле с вершиной ρ. Этот случай называется параболическим.

3. $\rho^2 > 0$. В этом случае вектор ρ задаёт гиперплоскость в пространстве Лобачевского, ортогональную этому вектору. В этом случае $\mathcal{M}$ конечен в любом цилиндре над компактной базой.

Утверждение заключается в том, что если $RJ_t \neq 0$, то решётка S_t рефлективна. Для доказательства нашей теоремы приходится классифицировать все рефлективные решётки S_t. Этот список довольно большой; максимальное $t = 105$. Недавно я опубликовал в Трудах МИАН работу, где я классифицировал все рефлективные решётки ранга 3. В общем случае для ранга 3 возникает 122 главных эллиптических решётки и 66 главных гиперболических. Из них только 23 эллиптических и 11 гиперболических дают решение S_t. Я упоминаю об этом, потому что это даёт надежду, что в конце концов мы классифицируем не только лоренцевы алгебры Каца—Муди с такой специальной решёткой, но и с решёткой, которая не представляет нуль. В этом случае проблема заключается в том, что мы не знаем аналога подъёма Борчердса для решёток, которые не представляют нуль.

Дальнейшее доказательство основной теоремы заключается в том, что в силу этой теоремы мы видим, что t принимает конечное число значений. Берём эти t, запускаем компьютер и считаем. Вообще я должен сказать, что вычисления здесь огромные. Чтобы это сделать, нужен очень быстрый компьютер.

Наконец, как доказывается эта теорема? Основная теорема классифицирует 29 форм, но внутри конструкции подъёма Борчердса, т. е. мы доказываем, что из подъёма Борчердса нельзя получить ничего другого, кроме этих 29 форм. Но всё-таки мы хотим доказать то же самое независимо от конструкции. Здесь надо более детально анализировать рефлективные решётки, которые возникают во всех этих случаях. Во-первых, сразу ясно, что только для этих t мы можем получить одну из искомых форм. Идея дальнейшего вычисления заключается в том, что мы берём одну из этих решёток S_t, берём группу $W(S_t)$, порождённую отражениями этой решётки, вычисляем фундаментальный многогранник $\mathcal{M}_0$. Фундаментальный многогранник надо вычислить. Например, если $t = 1$, то получается фундаментальный многогранник, который изображён на рис. 4(б). Наша группа Вейля W является подгруппой группы отражений $W(S_t)$, и у неё свой многогранник $\mathcal{M}$. Но этот многогранник сложен из многогранников $\mathcal{M}_0$

при помощи отражений. Кроме того, мы знаем, что многогранник $\mathcal{M}$ тоже имеет конечный (или почти конечный) объём. Ещё мы знаем, что он имеет вектор Вейля ρ, т. е. многоугольник описан вокруг окружности с центром ρ. Мы знаем $\mathcal{M}_0$ и изучаем все способы, как из $\mathcal{M}_0$ сложить $\mathcal{M}$ с таким вектором Вейля. Ещё нужно принять во внимание, что мы требуем, чтобы была большая группа автоморфизмов $\widehat{\mathcal{O}}^+(S_t)$.

Если мы построили $\mathcal{M}$, то по $\mathcal{M}$ мы можем предсказать дивизор нулей формы Φ. Более или менее, все нули формы возникнут из векторов отражений при помощи действия большей группы. Когда мы предскажем дивизор и посмотрим на те формы, которые получились в этой теореме, то увидим, что на самом деле такая же точно форма возникает и здесь. Существует принцип Кёхера, который говорит, что автоморфная форма в размерности $\geqslant 3$ определяется дивизором нулей с точностью до умножения на константу. И в конце концов мы убеждаемся, что та форма Φ, которую мы предсказывали из группы отражений, в этом списке уже есть. Этот метод можно развить дальше и доказать, что основная теорема не зависит от подъёма Борчердса, а верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Все мероморфные рефлективные формы Φ с бесконечным произведением содержатся в этой классификации, т. е. основная теорема даёт классификацию не только тех мероморфных рефлективных бесконечных произведений, которые строятся из подъёма Борчердса, но и всех рефлективных мероморфных бесконечных произведений.*

Препринт, который мы написали, содержит только формулировки основных результатов, а вычисления здесь огромные. К сожалению, хотя список короткий, но доказательства очень сложные.

11 января 2001 г.

Э. Б. Винберг

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

1

Собственно преобразование Радона было определено Радоном (Radon) в статье 1917 г. Оно состояло в том, что каждой функции на евклидовой плоскости сопоставлялась функция на множестве прямых, значение которой на прямой равно интегралу исходной функции по этой прямой. Конечно, функции надо рассматривать достаточно быстро убывающие, чтобы интегралы существовали. Но я о таких вещах в своём докладе говорить не собираюсь, поскольку меня будет интересовать совсем другое. В частности, давайте в этом классическом примере обратим внимание на то, где определены рассматриваемые функции. Исходные функции определены на евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2 \leftthreetimes \mathrm{SO}_2)/\mathrm{SO}_2$ (евклидова плоскость — однородное пространство своей группы движений сохраняющих ориентацию, которая есть полупрямое произведение $\mathbb{R}^2$ и SO_2, по стабилизатору SO_2). А преобразования Радона функции определены на множестве прямых. Множество $\mathcal{R}(\mathbb{E}^2)$ прямых евклидовой плоскости также является однородным пространством. Его можно называть *преобразованием Радона* евклидовой плоскости. Это однородное пространство той же группы, но по другой подгруппе, а именно, по стабилизатору прямой, который есть полупрямое произведение $\mathbb{R}^1$ и циклической группы второго порядка (поворот на 180° вокруг точки этой прямой): $\mathcal{R}(\mathbb{E}^2) = (\mathbb{R}^2 \leftthreetimes \mathrm{SO}_2)/(\mathbb{R}^1 \leftthreetimes C_2)$. Это пространство является проективной плоскостью с выколотой точкой, на которой определённым образом действует группа движений евклидовой плоскости.

Основной результат Радона состоял в том, что он нашёл формулу обращения, т. е. как по интегралам функции по прямым восстановить саму функцию. После этого было много разных работ, в которых рассматривались различные обобщения, различные версии этого преобразования Радона. Можно рассматривать вместо евклидовой плоскости какое-нибудь другое пространство, и вместо прямых можно интегрировать по

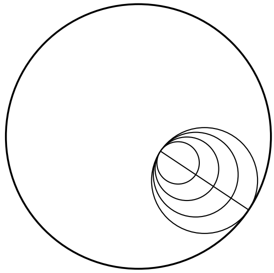


Рис. 1. Орисфера

каким-нибудь другим подмногообразиям. Здесь есть очень много различных возможностей. Основная задача, которая в связи с этим рассматривается, — обращение преобразования Радона. Это является предметом науки, которая называется *интегральная геометрия*. В частности, Гельфанд и Граев в 1959 г. предложили вариант преобразования Радона, когда в качестве основного пространства берётся симметрическое пространство отрицательной кривизны, а в качестве подмногообразий, по которым интегрируются функции, берутся так называемые орисферы. Немножко позже я напомню определение симметрического пространства и дам точное определение орисфер. А пока давайте рассмотрим простейший пример.

Пример. Пусть $X = L^n$ — пространство Лобачевского. В конформной модели пространство Лобачевского можно представлять себе как внутренность шара. При этом сферами будут обычные евклидовы сферы, целиком лежащие внутри граничной сферы. Орисфера определяется как предельное положение сферы, проходящей через заданную точку, когда её радиус уходит в бесконечность по некоторой заданной прямой (рис. 1).

Если так сделать в евклидовом пространстве, то получится гиперплоскость. В частности, на евклидовой плоскости мы получим прямую, и это будет как раз классическое преобразование Радона. А в пространстве Лобачевского мы получим орисферу, которая в конформной модели изображается сферой, касающейся граничной сферы. Точка касания называется *центром* орисферы. Все орисферы с данным центром образуют однопараметрическое семейство, которое можно параметризовать некоторым действительным числом (при желании, взяв экспоненту, его можно сделать положительным), называемым *радиусом* орисферы. Все орисферы с данным центром заполняют всё пространство Лобачевского (рис. 2).

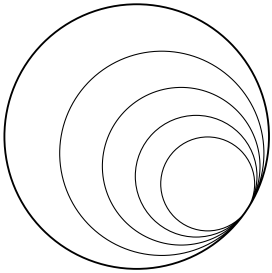


Рис. 2. Орисферы с данным центром

Заметьте, что размерность многообразия орисфер равна n, где n — размерность основного пространства. Это, конечно, существенный момент. Иначе мы не могли бы надеяться на то, что преобразование Радона функции будет обратимо. Размерность многообразия орисфер можно вычислить так. Орисфера задаётся своим центром, который может быть любой точкой граничной $(n-1)$-мерной сферы, и радиусом. Всего получается n параметров.

Для нас будет более удобна векторная модель пространства Лобачевского. В векторной модели пространство Лобачевского представляется как гиперболоид, точнее, одна связная компонента двуполостного гиперболоида в пространстве Минковского: $L^n = \mathrm{SO}'_{n,1}/\mathrm{SO}_n$. В векторном пространстве $E^{n,1}$ со скалярным произведением $(x, x) = -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$ мы можем рассмотреть гиперболоид, задаваемый условием $(x, x) = -1$. Он будет состоять из двух связных компонент. Мы возьмём одну из них, которая лежит, условно говоря, в конусе будущего:

$$L^n = \{x \in E^{n,1} : (x, x) = -1,\ x_0 > 0\}.$$

Это пространство является однородным пространством группы Лоренца $\mathrm{SO}_{n,1}$, точнее говоря, её подгруппы $\mathrm{SO}'_{n,1}$ индекса 2. Дело в том, что группа Лоренца может переставлять конус будущего и конус прошлого. Мы должны взять подгруппу индекса 2, которая оставляет их на месте. Стабилизатором точки, например точки $(1, 0, \ldots, 0)$, будет SO_n.

Абсолют пространства Лобачевского, т. е. то, что изображается граничной сферой в конформной модели, в этой модели представляет собой множество образующих светового конуса. Каждой образующей светового конуса соответствует целое однопараметрическое семейство концентрических орисфер. Можно установить каноническим образом взаимно однозначное соответствие между векторами светового конуса будущего и орисферами. А именно, каждому вектору u, лежащему на световом конусе будущего, можно сопоставить орисферу

$$\mathcal{H}_u = \{x \in L^n : (x, u) = -1\}.$$

Это будет параболоид — сечение гиперболоида гиперплоскостью, параллельной образующей u. При проективизации из него получится эллипсоид, касающийся граничной сферы.

Таким образом, пространство орисфер в этом случае — квадратичный конус. Его я буду называть *преобразованием Радона* пространства Лобачевского. В большей части доклада я буду говорить о пространстве орисфер.

Общая идеология состоит в том, что преобразование Радона проще, чем исходное пространство. В частности, это можно наблюдать с точки зрения теории представлений. Давайте посмотрим, как разлагается представление группы движений пространства Лобачевского (группы Лоренца) в пространстве многочленов. Можно, конечно, рассматривать пространство функций с интегрируемым квадратом, но я, как алгебраист, буду рассматривать пространство многочленов. Многочленами на пространстве Лобачевского мы будем называть функции, которые являются ограничениями на гиперболоид обычных многочленов в пространстве Минковского. Там естественным образом действует группа Лоренца, и это бесконечномерное представление следующим образом разлагается в сумму конечномерных неприводимых представлений. Рассмотрим многочлены с вещественными коэффициентами (можно брать и многочлены с комплексными коэффициентами; существенной разницы нет). Эта алгебра многочленов (как векторное пространство) является тензорным произведением подалгебры многочленов от скалярного квадрата и пространства гармонических многочленов:

$$\mathbb{R}[x_0, \ldots, x_n] = \mathbb{R}[-x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2] \otimes H,$$

где H — пространство всех многочленов, которые аннулируются оператором Лапласа:

$$H = \left\{ f \in \mathbb{R}[x_0, \ldots, x_n] \colon -\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0 \right\}.$$

(Может быть, лучше говорить *псевдогармонические* многочлены, потому что в нашем операторе Лапласа есть один минус, а в обычном операторе Лапласа только плюсы.) Иными словами, каждый многочлен можно однозначно представить в виде многочлена от скалярного квадрата с коэффициентами, являющимися гармоническими многочленами. Пространство гармонических многочленов инвариантно относительно действия группы Лоренца. Оно разлагается в прямую сумму $H = \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} H_k$, где H_k — пространство однородных гармонических многочленов степени k. Представление группы Лоренца $\mathrm{SO}_{n,1}$ (или её подгруппы индекса 2, это неважно) в пространстве H_k неприводимо.

Если будем ограничивать многочлены на пространство Лобачевского L^n (т. е. на гиперболоид), то поскольку на нём скалярный квадрат равен -1, достаточно рассматривать только гармонические многочлены. Мы получим разложение пространства многочленов на пространстве Лобачевского: $\mathbb{R}[L^n] = \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} V_k$, где V_k — ограничение H_k на гиперболоид. Представление группы $\mathrm{SO}_{n,1}$ на V_k неприводимо. Гармонические многочлены не образуют подалгебры; произведение двух гармонических многочленов не обязательно будет гармоническим многочленом. Но, как и всякий многочлен, произведение двух гармонических многочленов степеней k и l можно представить в виде суммы гармонического многочлена степени $k+l$, скалярного квадрата, умноженного на гармонический многочлен степени $k+l-2$, скалярного квадрата в квадрате, умноженного на гармонический многочлен степени $k+l-4$, и т. д. Отсюда следует, что $V_k V_l \subset \bigoplus\limits_{m\leqslant k+l} V_m$.

Если же мы будем ограничивать многочлены на пространство орисфер (световой конус) $\mathrm{Hor}\, L^n$, то мы получим аналогичное разложение $\mathbb{R}[\mathrm{Hor}\, L^n] = \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} U_k$. Представление группы $\mathrm{SO}_{n,1}$ на U_k снова неприводимо. Но теперь $U_k U_l \subset U_{k+l}$, потому что если мы будем рассуждать так же, как и раньше, то мы получим сумму гармонического многочлена степени $k+l$ и произведений гармонических многочленов меньших степеней на степени скалярного квадрата, но при ограничении на световой конус скалярный квадрат обращается в нуль. Поэтому это разложение — градуировка, т. е. $\mathbb{R}[\mathrm{Hor}\, L^n]$ — градуированная алгебра. Это понятно с самого начала, потому что само многообразие является конусом. Там действует мультипликативная группа поля, которая и определяет градуировку этих функций по степени однородности. Это можно сказать ещё и следующим образом: алгебра функций на пространстве Лобачевского имеет фильтрацию (разложение $\mathbb{R}[L^n] = \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} V_k$ не есть градуировка, но оно определяет фильтрацию: в качестве k-го члена фильтрации нужно взять сумму слагаемых от нулевого до k-го). Тогда $\mathbb{R}[L^n]$ — градуированная алгебра, ассоциированная с этой фильтрованной алгеброй: $\mathbb{R}[\mathrm{Hor}\, L^n] = \mathrm{gr}\, \mathbb{R}[L^n]$.

Имеется более или менее однозначно определённый изоморфизм $\mathcal{R}\colon \mathbb{R}[L^n] \to \mathbb{R}[\mathrm{Hor}\, L^n]$, перестановочный с действием группы Лоренца (но не являющийся изоморфизмом алгебр). Например, его можно определить, поставив в соответствие ограничению любого однородного многочлена f на L^n ограничение того же многочлена на $\mathrm{Hor}\, L^n$. Можно ещё ввести множитель, зависящий от степени многочлена f, но этим всё и исчерпывается, так как представления группы Лоренца в пространствах гармонических многочленов разных степеней абсолютно неприводимы и попарно не изоморфны.

Преобразование Радона, определяемое при помощи интегрирования по орисферам, также является эквивариантным изоморфизмом подходящих пространств функций. Но оно не определено для многочленов, потому что их интегралы по орисферам, вообще говоря, расходятся. Определённое выше преобразование $\mathcal{R}$ можно в первом приближении рассматривать как алгебраическую версию преобразования Радона *).

*) См. точные результаты на эту тему в [HPV].

2

Симметрическое пространство отрицательной кривизны — это однородное пространство $X = G/K$, где G — полупростая группа Ли без центра (если мы хотим, чтобы группа G эффективно действовала на X) или с конечным центром (мы будем рассматривать и такие примеры; это просто означает, что группа действует не эффективно) и без компактных множителей (любая полупростая группа есть почти прямое произведение простых; эти простые группы могут быть компактными или некомпактными; мы требуем, чтобы они все были некомпактными), K — максимальная компактная подгруппа. В качестве K можно взять любую максимальную компактную подгруппу; есть теорема, что все максимальные компактные подгруппы сопряжены. Кстати сказать, самое понятное доказательство этой теоремы как раз основывается на геометрии симметрических пространств.

Имеет место *разложение Ивасавы* $G = UAK$, где U — максимальная унипотентная *) подгруппа (все максимальные унипотентные подгруппы сопряжены; можно взять любую из них), A — максимальная связная диагонализуемая **) подгруппа, причём $A \subset N(U)$, т. е. A содержится в нормализаторе U, так что их произведение UA тоже является подгруппой. Все максимальные диагонализуемые подгруппы тоже сопряжены. Произведение UA является полупрямым произведением $U \rtimes A$, и это есть максимальная триангулируемая ***) подгруппа.

Орисферой называется орбита максимальной унипотентной подгруппы. Все максимальные унипотентные подгруппы сопряжены, поэтому достаточно взять орбиты какой-нибудь одной из них и потом подействовать на них всевозможными преобразованиями $g \in G$, т. е. всякая орисфера имеет вид gUx. Орисферы называются *концентрическими*, если они являются орбитами одной и той же максимальной унипотентной подгруппы. Из разложения Ивасавы следует, что концентрические орисферы параметризуются элементами группы $A \cong \mathbb{R}^r$, где $r = \operatorname{rk} X$ — ранг симметрического пространства X (это, если угодно, — определение ранга симметрического пространства). Таким образом, концентрические орисферы характеризуются набором из r чисел, где r — ранг симметрического пространства X. Этот набор можно называть *сложным радиусом* орисферы. В общем

---

*) Мы можем считать, что у нас все группы линейные. Линейная группа Ли называется *унипотентной*, если в некотором базисе она записывается треугольными матрицами с единицами на диагонали.

**) Линейная группа Ли называется *диагонализуемой*, если в некотором базисе все её элементы записываются диагональными матрицами.

***) Группа Ли называется *триангулируемой*, если в некотором базисе все её элементы записываются треугольными матрицами.

случае орисфера — не гиперповерхность, а подмногообразие коразмерности r.

Ясно, что орбиты одной максимальной унипотентной подгруппы переводятся друг в друга действием группы A. Значит, любые две орисферы могут быть переведены друг в друга преобразованием из группы G. Поэтому пространство всех орисфер $\operatorname{Hor} X$ — однородное пространство группы G по стабилизатору S какой-то орбиты группы U. Очевидно, что $S \supset U$. Кроме того, если какой-то элемент из K перестановочен со всеми элементами из A, то он все орбиты группы U переводит в себя. Можно доказать, что $S = U \rtimes K_0$, где $K_0 = Z_K(A)$ — централизатор группы A в группе K.

Можно доказать, что пространство $\operatorname{Hor} X$ имеет такую же размерность, как и пространство X. Это сводится к доказательству того, что группа $U \rtimes K_0$ имеет такую же размерность, как и группа K.

Пример. $X = L^n$ — пространство Лобачевского.

Здесь $K = G_x$ — стабилизатор какой-то точки $x \in X$. Стабилизатор G_p бесконечно удалённой точки p переводит каждую орисферу с центром в этой точке снова в орисферу. Он содержит однопараметрическую подгруппу, которая эти орисферы транзитивно переставляет, а именно, группу сдвигов вдоль геодезической, проходящей через точки p и x. Это будет группа A. С другой стороны, в G_p имеется подгруппа коразмерности 1, которая каждую из орисфер с центром в точке p оставляет на месте. Это и будет подгруппа S. На каждой орисфере с центром p она индуцирует группу движений евклидова пространства. (Один из самых замечательных фактов геометрии Лобачевского состоит в том, что орисфера относительно индуцированной римановой метрики является $(n-1)$-мерным евклидовым пространством; впрочем, на плоскости Лобачевского это утверждение бессодержательно.) При этом группе $\mathbb{R}^{n-1}$ параллельных переносов орисферы соответствует группа U, а ортогональной группе SO_{n-1} — группа K_0. Таким образом, $G_p = U \rtimes (K_0 \times A)$, причём $S = U \rtimes K_0$.

Разложение Ивасавы означает в данном случае в точности то, что группа $U \rtimes A$ действует просто транзитивно на пространстве Лобачевского. Это действительно верно, потому что U просто транзитивно действует на каждой орисфере, а A просто транзитивно переставляет орисферы.

Пример. $X = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n = \mathbb{P}_n$ — пространство положительно определённых квадратичных форм от n переменных с дискриминантом 1.

Любую квадратичную форму с помощью линейного преобразования можно привести к сумме квадратов. Если мы ограничимся квадратичными формами с дискриминантом 1, то такую форму можно привести к сумме квадратов с помощью унимодулярного преобразования. Стабилизатором суммы квадратов является по определению группа SO_n (если мы рассматриваем только преобразования с определителем 1).

При $n=2$ это в точности совпадает с векторной моделью плоскости Лобачевского. В общем случае картинка здесь похожая. Здесь тоже есть выпуклый конус положительно определённых квадратичных форм в пространстве всех квадратичных форм, а наше пространство есть гиперповерхность в этом конусе.

Разложение Ивасавы здесь выглядит следующим образом. Группа K — это SO_n. В качестве U можно взять группу унитреугольных матриц (треугольных матриц с единицами на диагонали); очевидно, эта группа является максимальной унипотентной. Группа A — это группа диагональных матриц с определителем 1 и с положительными элементами на диагонали.

В данном случае разложение Ивасавы $G=UAK$ есть не что иное, как процесс ортогонализации Грама—Шмидта. Всякую положительно определённую квадратичную форму с помощью унитреугольного преобразования можно привести к сумме квадратов с какими-то однозначно определёнными положительными коэффициентами. Если потом ещё подействовать диагональной матрицей, то эти коэффициенты можно сделать равными 1. Орисферы, т. е. орбиты группы U, будут характеризоваться тем, что после проведения процесса ортогонализации мы из данного базиса получим векторы с данными квадратами длин. Как известно, эти квадраты длин определяются угловыми минорами матрицы. При унитреугольных преобразованиях сохраняются угловые миноры матрицы, поэтому орбиты группы U параметризуются угловыми минорами. Набор этих угловых миноров — это и есть тот сложный радиус орисферы, о котором я говорил выше.

В этом случае $K_0=Z_K(A)=\{\mathrm{diag}(\pm1, \ldots, \pm1)\}$. Действительно, группа A — это подгруппа в группе диагональных матриц. Её централизатор в группе всех матриц — это группа всех диагональных матриц. А если нас интересуют диагональные матрицы, которые лежат в SO_n, то это будут просто диагональные матрицы с элементами ±1 на диагонали, причём определитель должен быть равен 1. Таким образом, K_0 — конечная группа.

Пространство орисфер $\mathrm{Hor}\,\mathbb{P}_n$ — это группа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, профакторизованная по подгруппе треугольных матриц с элементами ±1 на диагонали (и с определителем 1). Ясно, что

$$\dim(U \rtimes K_0)=\dim U=\frac{n(n-1)}{2}=\dim \mathrm{SO}_n.$$

Отсюда следует, что и в этом случае $\dim \mathrm{Hor}\, X=\dim X$. Это совпадение не случайно.

3

В общем случае для любого симметрического пространства отрицательной кривизны $X=G/K$ связь между алгеброй функций на этом пространстве и алгеброй функций на пространстве орисфер с точки зрения теории представлений такая же, как и в случае пространства Лобачевского. Пространство орисфер всегда является однородным пространством: $\operatorname{Hor} X=G/S$, причём стабилизатор $S=U\leftthreetimes K_0$ — полупрямое произведение максимальной унипотентной подгруппы и группы $K_0=Z_K(A)$. Размерности этих пространств одинаковы: $\dim X=\dim \operatorname{Hor} X$. Более того, можно доказать, что подгруппа S является пределом подгрупп, сопряжённых K. А именно, можно взять однопараметрическую подгруппу $a(t)=\exp th$, порождённую элементом $h\in\mathfrak{a}$ из алгебры Ли группы A. Если этот элемент выбрать подходящим образом, так чтобы все простые корни были на нём положительны, то тогда $S=\lim\limits_{t\to\infty} a(t)Ka(t)^{-1}$. То есть пространство орисфер можно представлять себе как результат некоего стягивания исходного пространства. Можно даже подходящим образом вложить пространство X в некоторое пространство линейного представления группы G в виде некой инвариантной поверхности таким образом, что пространство орисфер $\operatorname{Hor} X$ будет асимптотическим конусом этой поверхности. Это не будет гиперповерхность, как в случае пространства Лобачевского. Однако понятно, что асимптотический конус любой поверхности имеет такую же размерность, как она сама.

Тот факт, что пространство орисфер является конусом, можно понимать даже без вложения. А именно, конус *) — это некое многообразие с действием тора (т. е. с действием прямого произведения нескольких экземпляров группы $\mathbb{R}_+^*$ положительных чисел). Это действие должно быть перестановочно с действием группы G. Оно определяется группой A. Группа A действует на $\operatorname{Hor} X$ правыми сдвигами: $a'\circ(gUao)=gUaa'o$, где $o=eK$ — точка, стабилизатором которой является K (тогда любая U-орбита является орбитой некоторой точки ao, а любая орисфера есть результат применения элемента группы G к такой орбите). Это действие определено корректно, благодаря тому что a лежит в нормализаторе S. Вообще, если есть любое однородное пространство группы (не обязательно группы Ли) G по H, то нормализатор группы H действует на нём правыми сдвигами, и это действие перестановочно с действием группы G. В данном случае, поскольку $A\subset N(S)$ (группа A коммутирует с K_0 и нормализует U), то определено действие A правыми сдвигами.

*) Мультиконус, вообще говоря.

Здесь A — векторная группа; в мультипликативной интерпретации — прямое произведение нескольких экземпляров группы $\mathbb{R}_+^*$. Она действует на многообразии орисфер, и в этом смысле мы можем рассматривать многообразие орисфер как мультиконус, размерность образующих которого равна размерности A, т. е. рангу симметрического пространства. В случае пространства Лобачевского ранг равен 1, а в случае пространства квадратичных форм он равен $n-1$.

Имеется связь между представлениями группы G в пространстве функций на X и в пространстве функций на $\mathrm{Hor}\,X$ — точно такая же, как в случае пространства Лобачевского. Рассмотрим комплекснозначные полиномиальные функции на X. Это пространство разлагается на неприводимые подпространства относительно группы G: $\mathbb{C}[X]=\bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda$, которые нумеруются старшими весами $\lambda=(n_1, \ldots, n_r)$, где $n_i \in \mathbb{Z}_+$ — целые неотрицательные числа. На самом деле это характеры группы A, но они могут быть заданы набором из r целых неотрицательных чисел. Это разложение не является градуировкой алгебры $\mathbb{C}[X]$. Верно лишь, что $V_\lambda V_\mu \subset \bigoplus\limits_{\nu\leqslant\lambda+\mu} V_\nu$ (я не буду уточнять смысл неравенства $\nu\leqslant\lambda+\mu$). Если для каждого λ мы рассмотрим сумму всех слагаемых, индексы которых не превосходят данного λ, то это определит некоторую фильтрацию. Таким образом, $\mathbb{C}[X]$ — фильтрованная алгебра.

Алгебра функций на пространстве орисфер может быть разложена в прямую сумму тех же самых неприводимых представлений: $\mathbb{C}[\mathrm{Hor}\,X]=\bigoplus\limits_{\lambda} U_\lambda$. Каждый модуль устроен так же, как в алгебре функций на X. Но теперь $U_\lambda U_\mu = U_{\lambda+\mu}$, так что это будет градуировка, точнее, мультиградуировка. Можно сказать, что $\mathbb{C}[\mathrm{Hor}\,X]=\mathrm{gr}\,\mathbb{C}[X]$, т. е. $\mathbb{C}[\mathrm{Hor}\,X]$ — градуированная алгебра, ассоциированная с фильтрованной алгеброй $\mathbb{C}[X]$. В этом смысле можно сказать, что пространство орисфер получается из X в результате стягивания. Стягивание состоит в том, что в произведениях полиномов мы отбрасываем все меньшие степени. Это можно сделать непрерывным образом: ввести некий параметр, который все эти члены будет уменьшать и в пределе аннулировать.

Существует общая теория таких стягиваний, которая применима не только к симметрическим пространствам, но и вообще к любым многообразиям, на которых действует полупростая (или редуктивная) группа Ли. Такие примеры, конечно, появлялись и раньше, но систематически теория стягиваний такого рода была развита в работе В. Л. Попова. Так что стягивание симметрического пространства к его пространству орисфер — частный случай стягивания G-пространств в смысле Попова.

Такова связь между пространством X и его пространством орисфер с точки зрения теории представлений. Это всё было давно известно. Кстати сказать, действие группы A, о котором я говорил, состоит в том, что на каждом из пространств U_λ элемент a действует как скаляр $\lambda(a)$.

4

Теперь я хочу рассказать о другой связи между этими пространствами, которая, как мне кажется, не была раньше известна, а именно, о связи между симплектическими геометриями их кокасательных расслоений. Как известно, кокасательное расслоение любого многообразия имеет каноническую симплектическую структуру.

Теорема 1 (основная). *Как симплектические G-многообразия кокасательные расслоения пространств X и* $\mathrm{Hor}\,X$ *почти изоморфны в следующем смысле: существует G-эквивариантное симплектическое рациональное накрытие $T^*\mathrm{Hor}\,X \to T^*X$.*

Рациональное в смысле алгебраической геометрии: X и $\mathrm{Hor}\,X$ являются алгебраическими многообразиями, и отображение задаётся рациональными функциями. Стало быть, это отображение, вообще говоря, не всюду определено. *Рациональное накрытие* в том смысле, что поле рациональных функций на одном многообразии есть конечное расширение поля рациональных функций на другом многообразии. С топологической точки зрения можно сказать, что это есть обычное накрытие над некоторым открытым по Зарискому подмножеством, т. е. в $T^*\mathrm{Hor}\,X$ и в T^*X можно выделить открытые по Зарискому подмножества, для которых это будет обычное накрытие.

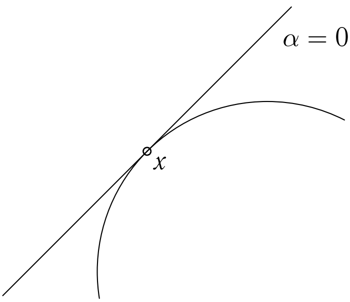


Рис. 3. Поляризованная форма

Для доказательства этой теоремы вначале строится некое вспомогательное многообразие, а именно, некоторое накрытие кокасательного расслоения пространства X. Давайте введём понятие *поляризованной линейной формы* $(\alpha, \mathcal{H})$, где $\alpha \in T_x^*X$ — некоторая линейная форма, $\mathcal{H}$ — орисфера, для которой $\alpha|_{T_x^*\mathcal{H}} = 0$, т. е. форма α обращается в нуль на касательном пространстве орисферы $\mathcal{H}$. Чтобы это было более понятно, обратимся к рис. 3. Линейную форму в точке x геометрически можно изобразить гиперплоскостью её нулей. Через точку x мы должны провести орисферу, касающуюся этой гиперплоскости.

Теорема 2. *Всякая линейная форма допускает поляризацию. В общем случае поляризаций конечное число.*

Здесь есть два утверждения, которые связаны между собой, как утверждения об инъективности и сюръективности отображений конечных множеств. Если эти множества равномощны, то инъективность равносильна сюръективности. В данном случае многообразия имеют одинаковую размерность, поэтому если отображение сюръективно, то автоматически слои общего положения конечны. Так что это, собственно говоря, одно утверждение. У меня нет времени доказывать эту теорему, хотя она и несложная. Я только продемонстрирую это на примерах.

Если $X = L^n$ — пространство Лобачевского, то у каждой линейной формы есть ровно две поляризации. Рассмотрим конформную модель. Линейной форме соответствует гиперплоскость, проходящая через точку x. Орисфера — это обычная евклидова сфера, касающаяся граничной евклидовой сферы. Понятно, что здесь существует поляризация, и их имеется ровно две (рис. 4).

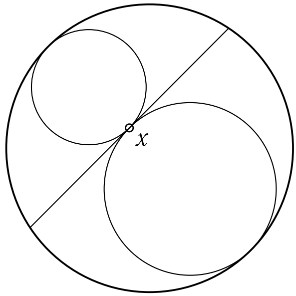


Рис. 4. Две поляризации одной линейной формы в пространстве Лобачевского

Пусть теперь $X = \mathbb{P}_n$ — пространство квадратичных форм. Ввиду соображений однородности достаточно рассмотреть какую-нибудь одну точку. Будем считать, что $x = E$ — единичная матрица. Линейная форма задаётся некоторой матрицей: $\alpha(\xi) = \mathrm{tr}(a\xi)$. (Касательное пространство — это пространство симметрических матриц; в нём можно ввести скалярное произведение как след произведения матриц, и задавать линейные формы с помощью матриц.) Итак, задана некоторая симметрическая матрица a. Мы должны найти такую максимальную унипотентную подгруппу, что касательное пространство её орбиты ортогонально матрице a. Давайте сначала рассмотрим орбиту группы унитреугольных матриц U. В матричных терминах эта группа действует так: она умножает данную симметрическую матрицу слева на какую-то матрицу, а справа — на транспонированную матрицу. Если это продифференцировать, то для алгебры Ли получится действие по правилу: произведение данной матрицы слева на матрицу из алгебры Ли плюс произведение данной матрицы слева на транспонированную матрицу. Значит, касательное пространство $T_E(UE)$ — это пространство матриц, которые представимы в виде суммы треугольной матрицы T с нулями на диагонали и транспонированной матрицы $T^{\perp}$, т. е. это — пространство симметрических матриц с нулями на диагонали. Так что если матрица a

диагональная, то она будет ортогональна орбите группы U. А если она произвольная (симметрическая), то мы приведём её к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования. В качестве искомой максимальной унипотентной подгруппы нужно взять подгруппу, сопряжённую U при помощи обратного преобразования.

Какой здесь получается произвол? В общем случае ортонормированный базис, в котором данный симметрический оператор записывается диагональной матрицей, определён с точностью до перестановки базисных векторов (и до умножения на ± 1, но это неважно). Унитреугольная группа определяется не базисом, а флагом. Этот флаг зависит от порядка базисных векторов, поэтому каждая линейная форма общего положения может быть поляризована $n!$ способами. Мы берём эту форму, представляем её как симметрическую матрицу (симметрический оператор), берём собственный базис, каким-то образом его упорядочиваем, берём соответствующий флаг, и рассматриваем операторы, которые сохраняют этот флаг, т. е. записываются в данном упорядоченном базисе унитреугольными матрицами.

Эта теорема верна и в общем случае. Посмотрим, что же мы получаем. Рассмотрим пространство поляризованных форм HT^*X; я его буду называть *орисферическим кокасательным расслоением*. Имеют место следующие отображения:

$$\begin{tikzcd}
 & HT^*X \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & & T^*\mathrm{Hor}\,X \arrow[dl] \\
T^*X & & \mathrm{Hor}\,X &
\end{tikzcd}$$

Если мы забываем про поляризацию, то получаем рациональное накрытие $HT^*X \xrightarrow{p} T^*X$ (т. е. не настоящее накрытие, а накрытие над открытым подмножеством). С помощью этого накрытия симплектическая структура поднимается на некоторое открытое по Зарискому подмножество. Поэтому HT^*X тоже симплектическое многообразие (если выбросить подмногообразие меньшей размерности). С другой стороны, есть проекция на пространство орисфер $HT^*X \xrightarrow{q} \mathrm{Hor}\,X$. Она получается, если мы, наоборот, рассматриваем только поляризации. Слои отображения q — все линейные формы, которые живут в точках данной орисферы и аннулируются на её касательном пространстве. Это — то, что называют *конормальным* расслоением орисферы. Известно, что конормальное расслоение любого подмногообразия симплектического многообразия является лагранжевым подмногообразием. Поэтому q — лагранжево расслоение. В этом смысле оно похоже на кокасательное расслоение. Кокасательное расслоение любого подмногообразия тоже является лагранжевым расслоением.

Т е о р е м а 3. *Существует канонический G-эквивариантный симплектический бирациональный изоморфизм $f\colon HT^*X \to T^*\mathrm{Hor}\,X$, для которого изображённая выше диаграмма коммутативна.*

Из теоремы 3 следует основная теорема, так как f — бирациональный изоморфизм, а q — бирациональное накрытие. Сейчас я объясню, как устроено отображение f; оно определяется очень естественно. Итак, мы хотим определить отображение $f\colon HT^*X \to T^*\mathrm{Hor}\,X$. Пусть у нас есть поляризованная 1-форма $\alpha \in T^*_x X$, где $x \in \mathcal{H} \in \mathrm{Hor}\,X$. Мы должны определить $f(\alpha) \in T^*_{\mathcal{H}}\mathrm{Hor}\,X$. Пусть у нас имеется касательный вектор $\xi \in T^*_{\mathcal{H}}\mathrm{Hor}\,X$. Мы должны определить значение $f(\alpha)$ на ξ. Касательный вектор к многообразию орисфер можно представлять себе как инфинитезимальную деформацию орисфер: орисфера $\mathcal{H}$ как-то деформируется. Давайте посмотрим, как при этом двигается точка x. Конечно, точно сказать нельзя, потому что орисфера деформируется как целое, и никакая точка на ней не отмечается. Тем не менее, можно гладким образом выбрать какие-то точки на этих орисферах так, чтобы получить некую кривую, проходящую через точку x. Возьмём касательный вектор этой кривой; обозначим его $\tilde{\xi}$. Этот вектор зависит от выбора точек на орисферах, но при другом выборе этих точек к вектору $\tilde{\xi}$ может добавиться только касательный вектор самой орисферы $\mathcal{H}$. А форма α как раз равна нулю на касательном пространстве орисферы $\mathcal{H}$. Поэтому $\alpha(\tilde{\xi})$ определено корректно. Положим $f(\alpha)(\xi) = \alpha(\tilde{\xi})$. Таким образом строится отображение f. Из того, что оно строится каноническим образом, сразу же вытекает, что оно G-эквивариантно.

Теперь нужно доказать два факта. Первый факт: отображение f бирационально. Я объясню только идею доказательства. Поскольку диаграмма коммутативна, то f переводит слои отображения q в кокасательные пространства многообразия $\mathrm{Hor}\,X$, т. е. конормальное расслоение каждой орисферы $\mathcal{H}$ — в кокасательное пространство многообразия $\mathrm{Hor}\,X$ в точке $\mathcal{H}$. Поэтому достаточно доказать бирациональность соответствующего отображения слоёв

$$f_0\colon N^*\mathcal{H} = U \times \mathfrak{a} \to T^*_{\mathcal{H}}\mathrm{Hor}\,X = (\mathfrak{g}/\mathfrak{s})^* = \mathfrak{s}^{\perp} = \mathfrak{u} + \mathfrak{a}.$$

Равенства здесь возникают следующим образом. Конормальное пространство орисферы в силу разложения Ивасавы естественно отождествляется с касательным пространством группы A, т. е. с алгеброй Ли $\mathfrak{a}$. Далее, $\mathrm{Hor}\,X = G/S$, поэтому его касательное пространство отождествляется с $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$, а кокасательное пространство — с сопряжённым пространством.

Сопряжённое пространство — это ортогональное дополнение $\mathfrak{s}^\perp$ к $\mathfrak{s}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. А ортогональное дополнение $\mathfrak{s}^\perp$ — это не что иное, как прямая сумма алгебры Ли $\mathfrak{u}$ группы U и $\mathfrak{a}$. Так определяется отображение из $U \times \mathfrak{a}$ в $\mathfrak{u}+\mathfrak{a}$. Это отображение U-эквивариантно и его ограничение на $\mathfrak{a}$ — тождественное отображение. Из этого и из того, что элемент общего положения алгебры $\mathfrak{a}$ имеет только ненулевые собственные значения на $\mathfrak{u}$, легко вывести (воспользовавшись алгебраичностью) бирациональность отображения f_0.

Факт второй, о котором я хочу поговорить более подробно, состоит в том, что отображение f симплектично. Если разобраться, то это тавтология. Дело в том, что симплектическая структура на кокасательном расслоении любого многообразия определяется замкнутой 2-формой ω, которая по определению есть дифференциал 1-формы γ (так называемой *формы действия*). Форма γ определяется следующим образом. Любая 1-форма определяется значениями на векторах. Мы должны рассмотреть касательный вектор кокасательного расслоения. Чтобы подчеркнуть, что это объект высшего порядка, я обозначу его Ξ. Итак, Ξ — касательный вектор кокасательного расслоения в некоторой точке α, где α — 1-форма на X в точке x. По определению $\gamma(\Xi)=\alpha(p\Xi)$, где $p\Xi$ — проекция вектора Ξ на базу. У нас есть каноническая проекция кокасательного расслоения на само многообразие; соответствующим образом проектируются касательные векторы. К счастью, про касательный вектор Ξ нам нужно знать только его проекцию на базу.

Мы хотим доказать, что отображение $f\colon HT^*X \to T^*\mathrm{Hor}\, X$ является симплектическим. Мы докажем даже больше: f сохраняет не только симплектическую структуру, но и 1-форму действия, точнее говоря, переводит форму действия на HT^*X в форму действия на $T^*\mathrm{Hor}\, X$. Рассмотрим любую точку $\alpha \in T^*X$ из кокасательного расслоения многообразия X. Пусть $\mathcal{H} \in \mathrm{Hor}\, X$ — её поляризация (рис. 5). Теперь рассмотрим некоторый касательный вектор $\Xi \in T_{(\alpha,\mathcal{H})}HT^*X$. Этот касательный вектор описывает некоторую инфинитезимальную деформацию поляризованной формы. При этом деформируется и сама форма, и та точка многообразия X, где она живёт. Проекция этой деформации на X — это некоторый вектор ξ. По определению значение формы действия на векторе Ξ равно $\alpha(\xi)$. А когда мы на этот вектор подействуем отображением f, мы получим некоторый касательный

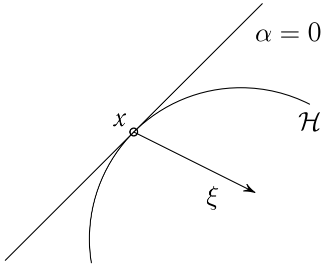


Рис. 5. Форма и её поляризация

вектор кокасательного расслоения многообразия орисфер. Нам нужно знать только его проекцию на само многообразие орисфер, т. е. нам нужно знать, как двигается орисфера $\mathcal{H}$. Понятно, что её движение согласовано с движением точки x, поскольку точка x должна на ней лежать. Поэтому это движение может быть представлено вектором ξ. По определению значение $f(\alpha)$ на таком векторе равно $p_{\mathrm{Hor}\,X}(\Xi)$. Таким образом, $f(\alpha) = (\mathrm{pr}_{\mathrm{Hor}\,X}\ df(\Xi)) = \alpha(\mathrm{pr}_X\ \Xi)$, а это и означает, что отображение f сохраняет форму действия. Если угодно, это просто определение отображения f. Оно так и определялось, чтобы сохранять форму действия.

Существует обобщение теоремы 1 на произвольное аффинное алгебраическое многообразие X, на котором действует редуктивная алгебраическая группа G. См. об этом мою статью [V].

Список литературы

[HPV] Hilgert J., Pasquale A., Vinberg E. B. The dual horospherical Radon transform for polynomials // Moscow Math. J. — 2002. — V. 2, № 1. — P. 113—126.

[V] Vinberg E. B. Equivariant symplectic geometry of cotangent bundle // Moscow Math. J. — 2001. — V. 1, № 2. — P. 287—299.

1 февраля 2001 г.

Ю. А. Неретин

ДРОБНЫЕ ДИФФУЗИИ, ГРУППА ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ И ГРУППЫ ПЕТЕЛЬ

Введение

Будет построен некоторый набор мер, квазиинвариантных относительно группы Diff диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию. Диффеоморфизмы приятнее считать бесконечно гладкими (мы так и будем делать). То, что рассматривается окружность, а не прямая или не луч, не очень существенно, но по общей традиции и своей привычке я буду говорить про окружность.

Предварительно — два замечания.

1. Пусть есть группа G, действующая на пространстве X с мерой μ, причём это действие оставляет меру квазиинвариантной.

Напомню, что *квазиинвариантность* означает, что любой элемент $g \in G$ переводит любое множество A меры нуль в множество gA меры нуль. Более конструктивное определение: для преобразования g существует такая измеримая функция $g'(x)$, что для любого измеримого множества A имеет место равенство $\mu(gA) = \int_A g'(x)\,d\mu(x)$. Напомню, что эта функция $g'(x)$ называется *производной Радона—Никодима*. В реальных примерах, о которых пойдёт речь, X будет бесконечномерное пространство функций. В этом случае производная Радона—Никодима является аналогом якобиана, который в данной ситуации, формально говоря, отсутствует (а на самом деле присутствует — в виде производной Радона—Никодима).

Итак, пусть есть квазиинвариантное действие группы G на пространстве X. По этому действию строится каноническое представление $T(g)$ этой же группы в пространстве функций на X:

$$T(g)f(x) = f(g(x))\,g'(x)^{1/2}. \tag{1}$$

На производную Радона—Никодима в степени $1/2$ умножают для того, чтобы операторы были унитарными в пространстве $L^2(X)$. Действительно, посмотрим на скалярное произведение

$$\langle T(g)f_1,\, T(g)f_2\rangle = \int f_1(g(x))\,g'(x)^{1/2}\,\overline{f_2(g(x))}\,g'(x)^{1/2} d\mu(x),$$

далее берём $y = g(x)$ в качестве новой переменной и получаем

$$\int f_1(y)\overline{f_2(y)}\,d\mu(y) = \langle f_1,\, f_2\rangle$$

Отсюда видно, что наш оператор $T(q)$ унитарен.

Таким образом, если мы имеем квазиинвариантное действие, то мы автоматически имеем унитарное представление, которое задаётся формулой (1).

Это замечание общеизвестно. Второе (которое будет сейчас сказано) — кажется, нет.

2. Пусть ρ — унитарное представление бесконечномерной группы G (далее группа G будет группой диффеоморфизмов окружности.) Возьмём множество всех операторов вида $\rho(g)$, где $g \in G$. Обозначим это множество через $\rho(G)$. Рассмотрим слабое замыкание множества $\rho(G)$, т. е. замыкание в слабой операторной топологии.

Напомню, что последовательность операторов A_j сходится к оператору A в *слабой операторной топологии*, если

— последовательность норм $\|A_j\|$ ограничена и

— для любых двух векторов v, w последовательность $\langle A_j v, w\rangle$ сходится к $\langle Av, w\rangle$.

Вообще-то первое условие следует из второго, но обычно бывает приятнее первое условие оставить, а второе заменить на условие сходимости всех матричных элементов в некотором фиксированном базисе.

Множество всех операторов с нормой меньшей 1 *компактно в слабой операторной топологии* (это доказывается так же, как слабая компактность шара).

Поэтому (вернёмся к нашим рассуждениям) какую бы группу G мы ни замкнули, из неё обязательно получится компактное множество. Несложное прослеживание показывает, что это множество — полугруппа.

Соответственно, если мы замкнём группу диффеоморфизмов, то и из неё автоматически получится компактное множество. А так как группа диффеоморфизмов не производит впечатления компактного множества, то тем самым то, что из неё получится, будет сильно на неё не похоже.

Лет 20 назад вопрос о таких замыканиях был задан Г. И. Ольшанским. Довольно долго было бы объяснять, почему он был задан. Надеюсь, что дальше будет ясно, что это вопрос по делу.

Также замечу, что есть конечномерная версия того же самого вопроса для обычных групп Ли. Пусть есть конечномерное представление ρ

какой-нибудь группы, например, группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Если мы просто замкнём $\rho(\mathrm{GL}_n)$ в пространстве всех операторов, то ничего интересного не получится, потому что само множество (почти что) замкнуто. Но если мы предварительно умножим наши операторы на ненулевые комплексные числа, т. е. рассмотрим множество $\mathbb{C}^* \cdot \rho(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$, а потом замкнём, то получается вполне нетривиальная операция. На всякий случай, если кто слышал соответствующие слова: будут «complete collineations» Сэмпля (Semple), они же — компактификация де Кончини—Прочези (De Concini, Procesi), они же, с точностью до неточностей в филологии, — компактификация Сатаке (Satake).

На этом кончаю затянувшееся введение и начинаю готовиться к конструкции дробных диффузий.

Подготовка: инвариантная мера на гильбертовом пространстве

Расширение гильбертова пространства. Пусть есть вещественное гильбертово пространство H. Возьмём в нём ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots$ Как известно, пространство H состоит из линейных комбинаций вида $\sum x_j e_j$, где $\sum |x_j|^2 < \infty$.

Рассмотрим новое пространство $\widehat{H}$, которое состоит из всевозможных линейных комбинаций вида $\sum x_j e_j$, где $x_j \in \mathbb{R}$ — произвольны.

Я сейчас начал описывать некую конструкцию, и всё время будет казаться, что она зависит от выбора базиса e_j. Но в конце концов получится, что она от выбора базиса не зависит, вопреки всякому здравому смыслу.

Итак, мы рассматриваем множество произвольных формальных линейных комбинаций $\sum x_j e_j$. Дальше о векторах e_j можно забыть и просто рассматривать пространство всех вещественных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$.

Рассмотрим прямую $\mathbb{R}$ с координатой x и рассмотрим стандартную гауссову меру $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ на прямой $\mathbb{R}$. Пространство последовательностей есть не что иное, как $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ На каждом экземпляре $\mathbb{R}$ мы вводим гауссову меру. Тем самым мы получаем гауссову меру на произведении бесконечного числа прямых $\mathbb{R}$, т. е. на пространстве последовательностей. Полученное пространство с мерой мы и обозначим $\widehat{H}$.

Итак, мы рассматриваем не просто пространство формальных линейных комбинаций, а пространство формальных линейных комбинаций с введённой на нём гауссовой мерой.

Как легко сообразить, само *пространство H имеет в $\widehat{H}$ меру нуль*. Действительно, если мы возьмём все последовательности, которые удовлетворяют, например, неравенствам $|x_1| < 77$, $|x_2| < 77$, $\ldots$, то мера множества всех таких последовательностей равна нулю. В самом деле, вероятность того, что $|x_1| < 77$ — это какое-то число $1-\delta$. Неважно, какое; важно лишь, что оно меньше 1. Дальше нужно воспользоваться тем, что $(1-\delta)^\infty = 0$. Если заменить 77 на 78, то ничего не изменится. По этой причине множество всех ограниченных последовательностей имеет меру нуль, а значит, пространство H имеет меру нуль и подавно.

Действие ортогональной группы. Теперь рассмотрим произвольную ортогональную матрицу $A \in \mathrm{O}(\infty)$. Ортогональная матрица — это вещественная матрица, для которой $AA^t = 1$ и $A^t A = 1$. Можно ещё сказать, что матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$ ортогональна, если сумма квадратов элементов каждой строки равна 1 и строки попарно ортогональны; то же самое выполняется для столбцов. Итак, рассмотрим ортогональную матрицу без каких бы то ни было условий финитности. Конечно, она имеет полное право быть финитной, но, вообще говоря, таковой не является. Применим эту матрицу к произвольному вектору из пространства $\widehat{H}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

В результате мы получаем в правой части столбец из произвольных рядов. Произвольный ряд имеет полное право не сходиться и, как правило, не сходится. Тем не менее, верен следующий факт:

Теорема 1. *При фиксированной матрице A ряды $\sum a_{ij}x_j$ сходятся почти всегда по той мере в $\widehat{H}$, которую мы ввели.*

Это высказывание является частным случаем теоремы Колмогорова—Хинчина о том, что *ряд $\sum \xi_j$ независимых случайных величин, имеющих нулевые математические ожидания, сходится почти всюду тогда и только тогда, когда сходится ряд дисперсий.*

У нас ряд дисперсий — это в точности ряд $\sum\limits_j a_{ij}^2$, т. е. сумма квадратов по строкам. Сумма квадратов по строкам равна 1, значит, ряд из дисперсий сходится, поэтому ряд $\sum a_{ij}x_j$ сходится почти всюду. Теорема Колмогорова—Хинчина действительно является теоремой, т. е. она неочевидна (если не знать доказательства). Но из неё уже очевидным образом следует нужный факт.

Тем самым, матрицу A можно применить к произвольному элементу пространства $\widehat{H}$.

Конечно, для разных матриц A подмножества, на которых ряды сходятся, будут разными, и если пересечь эти подмножества по всем A, то получится l_2 (которое как мы видели имеет меру 0).

Теперь второе высказывание, которое уже не удивительно: *преобразование* $x \mapsto Ax$ *сохраняет гауссову меру.*

Третье высказывание: *для любых операторов* A *и* B *равенство* $(AB)x = A(Bx)$ *верно почти всюду.*

В итоге у нас получается действие бесконечномерной ортогональной группы $\mathrm{O}(\infty)$ на пространстве $\widehat{H}$.

Некоторое время назад я сказал, что конструкция не зависит от базиса. Наличие действия ортогональной группы как раз и означает, что конструкция не зависит от базиса.

В общем, есть такая конструкция, то ли аналитическая, то ли теоретико-вероятностная. Не знаю точно, кто её первый придумал. Думаю, что Ирвинг Сигал (Segal) в 1953 г. Он хотел построить функциональную модель для бозонного пространства Фока. И пространство $L^2(\widehat{H})$ как раз и является одной из функциональных моделей бозонного пространства Фока. Потом придумали модели, которые в каких-то отношениях удобнее. Но для нас сейчас будет нужна именно эта модель.

Ещё одно замечание. Мы получили действие полной ортогональной группы на пространстве с мерой. Но оно не является действием группы на множестве! Потому что преобразования определены лишь почти всюду. Можно пытаться подправлять наши преобразования на множествах меры нуль. Но есть теорема о том, что наше действие всё равно неисправимо («не индивидуально», «non-specific»).

И замечание к замечанию. Во всех ситуациях, рассмотренных ниже, действие всё-таки будет действием группы на множестве.

Действие группы GL. Естествен вопрос, для каких ещё матриц, кроме ортогональных, мера остаётся квазиинвариантной. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2 (Фельдман—Гаек). *Пусть* C *— бесконечная обратимая матрица (точнее, оператор в гильбертовом пространстве), представимая в виде* $C = A(1+T)$, *где* $A \in \mathrm{O}(\infty)$ *и* T *— оператор Гильберта—Шмидта, Тогда преобразование* $C\colon x \mapsto Cx$ *оставляет гауссову меру квазиинвариантной. Верно и обратное: если преобразование оставляет гауссову меру квазиинвариантной, то матрица* C *представима в таком виде.*

Я напомню, что *оператор Гильберта—Шмидта* — это такой оператор, что сумма квадратов его матричных элементов сходится, т. е. $\sum\limits_{ij} |t_{ij}|^2 < \infty$. Можно давать и другие определения, но это самое короткое.

Операторы Гильберта—Шмидта компактны, но они составляют лишь часть множества компактных операторов.

Производная Радона—Никодима преобразования $C = A(1+T)$ вычисляется следующим образом. Изначально мера имела, грубо говоря, вид $e^{-\langle x,x\rangle/2}dx$. Здесь несуществующая мера Лебега dx умножается на несуществующую функцию $e^{-\langle x,x\rangle/2}$ (скалярное произведение $\langle Cx, Cx\rangle$ понимается в смысле l_2). Если быть совсем формальным, эта функция существует, но почти всюду равна нулю. Но этот нуль нами умножается на нечто, похожее на бесконечность.

Чтобы получить производную Радона—Никодима, нужно поделить образ этой меры на её саму:

$$\frac{e^{-\langle Cx,Cx\rangle/2}dCx}{e^{-\langle x,x\rangle/2}dx} = \exp\{-\langle x, Tx\rangle - \langle Tx, Tx\rangle/2\}\det(1+T)$$

В левой части и числитель и знаменатель смысла не имеют, но если сократить всё то, что сокращается, то получается осмысленное (сиречь, сходящееся) выражение, которое и является производной Радона—Никодима. Кстати, сходимость выражения в правой части тоже не совсем очевидна: там стоят два сомножителя, и может случиться, что они оба расходятся. Но само произведение сходится.

Урезание пространства. Теперь ещё одно замечание по поводу этой конструкции. Мы определяли пространство $\widehat{H}$ сначала как множество, а потом как пространство с мерой. Но это множество довольно большое. Его легко урезать так, что оно станет более ручным, а при этом изменится лишь на множество меры нуль.

В самом деле, рассмотрим на пространстве $\widehat{H}$ ряд $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}x_n^2$. Он сходится почти всюду (это следует из теоремы Беппо Леви и теоремы о мажорируемой сходимости). Поэтому мы можем изначально определять меру на пространстве таких последовательностей; здесь ε может быть любым положительным числом.

Основная конструкция

Конструкция Сигала в приложении к соболевским пространствам. Теперь скажу, к каким пространствам эта конструкция будет применяться.

Рассмотрим пространство вещественных функций на окружности. Напишем разложение функции на окружности в ряд Фурье: $f(\varphi) = \sum a_k e^{ik\varphi}$. Для каждого фиксированного $s \in \mathbb{R}$ обозначим через H_s пространство функций f, для которых ряд

$$\|f\|^2 := a_0^2 + \sum |k|^{2s} |a_k|^2 < \infty$$

сходится.

Это — соболевское пространство с каким-то номером. Если $s = 0$, то это просто L^2 на окружности. Если s растёт, то функции $f \in \widehat{H}_s$ становятся всё более дифференцируемыми. А если s уменьшается, то эти функции становятся всё более обобщёнными.

Можно ли понять, что такое пространство $\widehat{H}_s$? Согласно первому формальному определению придётся рассматривать всевозможные формальные ряды вида $\sum a_k e^{ik\varphi}$, где $a_k \in \mathbb{C}$. Но как было замечено, это пространство можно урезать. Если эту операцию урезания применить к пространству $\widehat{H}_s$, то получится, что в качестве пространства $\widehat{H}_s$ можно рассматривать пространство $H_{s-1/2-\varepsilon}$. Таким образом, сигаловское расширение соболевского пространства может рассматриваться как соболевское пространство с другим номером.

При двух значениях $s = 0$ и $s = 1$ наша конструкция даёт вполне стандартные объекты.

А именно, пространство $\widehat{L}^2$ может рассматриваться как соболевское пространство $H_{-1/2-\varepsilon}$, т. е. как некоторое пространство обобщённых функций. Пространство $\widehat{L}^2$ принято называть *белым шумом*.

А если мы возьмём пространство H_1, т. е. пространство функций, у которых производная лежит в L^2, то тогда то, что получится, называется *броуновским движением*. Какое это имеет отношение к броуновскому движению? Мы строим меру на пространстве функций, а броуновским движением называется некоторая мера на пространстве непрерывных функций. То что у нас получается, совпадает с так называемым «винеровским мостом» (т. е. периодическим броуновским движением, последнее с физической точки зрения несколько противоестественно).

Здесь стоит на минуту остановиться. Я ввёл соболевские пространства, так, чтобы определение было покороче, и чтобы оно работало сразу при всех s. Но это не всегда удобно.

Например при $-1/2 < s < 1/2$ скалярное произведение в H_s лучше подправить и заменить на баргманновское выражение (1947)

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin[(\varphi_1 - \varphi_2)/2]|^{-1-2s} f_1(\varphi_1) f_2(\varphi_2)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \qquad (2)$$

Тогда оно станет $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$-инвариантным (кто чуть-чуть знаком с теорией представлений, знает и эту формулу; положительная определённость такого скалярного произведения не очевидна, а при $|s| > 1/2$ и не верна). Соответственно, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ действует на $\widehat{H}_s$, сохраняя меру. Конечно, новая мера на $\widehat{H}_s$ будет отлична от старой, но отличаться они будут на функциональный множитель, что с нашей точки зрения не существенно.

Да, чтобы избежать двусмысленности: группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ действует на окружности мёбиусовскими преобразованиями,

$$e^{i\varphi} \mapsto \frac{ae^{i\varphi} + b}{\overline{b}e^{i\varphi} + \overline{a}}, \qquad |a|^2 - |b|^2 = 1$$

Действие Diff. А теперь добавим группу диффеоморфизмов окружности.

Пусть $q \in \mathrm{Diff}$ — диффеоморфизм окружности. Рассмотрим в пространстве H_s оператор

$$T_s(q)f(\varphi) = f(q(\varphi))q'(\varphi)^{1/2-s}.$$

Теорема 3. *Оператор $T_s(q)$ удовлетворяет условию Фельдмана—Гаека в соболевском пространстве H_s.*

А раз оператор $T_s(q)$ удовлетворяет условию Фельдмана—Гаека в пространстве H_s, то автоматически получается квазиинвариантное действие группы Diff на пространстве $\widehat{H}_s$. Теперь я расскажу то немногое, что известно об этом действии.

Перестройки

Начало. Рассмотрим сначала случай, когда $0 < s < 1/2$ (не хочу останавливаться на $s = 0$, там скучно).

Утверждение 1. *Пусть $0 < s < 1/2$. Тогда*:

а) *Действие группы* Diff *на* $\widehat{H}_s$ *эргодично*, *т. е. нет инвариантных множеств*, *мера которых отлична от* 0 *и* ∞.

б) *Более того*, *действие группы* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Diff}$ *на* $\widehat{H}_s$ *эргодично*.

в) *Более того*, *гиперболический элемент* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ *действует эргодично. Параболический элемент* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *тоже действует эргодично. А эллиптический элемент* $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *действует не эргодично*.

Это утверждение очень простое. Подгруппа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ сохраняет меру, определённую баргманновским скалярным произведением (2). Поэтому эргодичность эквивалентна отсутствию единицы в спектре оператора в L^2, а отсутствие единицы в спектре оператора в L^2 в нашем случае легко проследить.

Гипотеза. *Представление группы* Diff *в* $L^2(\widehat{H})$ *разлагается в прямую сумму двух неприводимых представлений, одно реализуется в чётных функциях, другое в нечётных.*

В точке первого перелома. Мы дошли до точки 1/2. В этой точке происходит много разных событий.

По-видимому, самое главное из этих событий, — это то, что так называемые представления со старшим весом связаны с этой точкой. О самих представлениях со старшим весом я не хочу много говорить и ограничусь отговорками.

В точке $s = 1/2$ можно рассматривать $L^2(\widehat{H})$, а ещё можно рассматривать голоморфные функции на $\widehat{H}$ (если правильно сказать, что это такое) и рассматривать действие группы диффеоморфизмов там. Тогда получается стандартная конструкция представления со старшим весом. А само $L^2(\widehat{H})$ — это некоторое представление со старшим весом, умноженное на некоторое представление с младшим весом. На всякий случай я скажу, о каких представлениях идёт речь (в стандартных обозначениях, которые я не буду пояснять). Одно представление — сумма модулей $\bigoplus\limits_n L(n^2, 1)$, а второе — контргредиентное.

Полугруппа трубок. Теперь вернусь к вопросу Ольшанского о том, как устроено слабое замыкание бесконечномерной группы в представлении. Возьмём пространство $L^2(\widehat{H})$, возьмём унитарное представление группы Diff в нём, и слабо замкнём множество операторов, как было раньше описано.

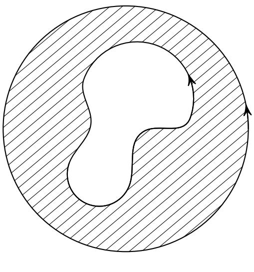


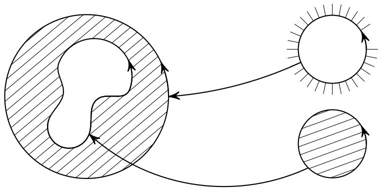
Рис. 1. Ориентации краёв кольца

Тогда получится следующий известный объект (введённый докладчиком в 1986 г). Элемент *полугруппы трубок* есть риманова поверхность, конформно эквивалентная кольцу, при этом фиксирована параметризация одного края, и фиксирована параметризация другого края. Стрелочки стоят так, как на рис. 1.

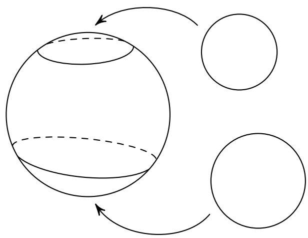
Две такие римановы поверхности эквивалентны, если они конформно отображаются одна на другую, так, что параметризации краёв переходят в параметризации краёв.

Умножение осуществляется склейкой: у нас есть параметризация, поэтому два края можно склеить. Получается полугруппа.

Теперь я сформулирую утверждение, которое не вполне доказано. Оно доказано на матфизическом уровне, но с формальной точки зрения в рассуждениях есть лакуна, которая, наверное, убирается, но попыток её убрать не было. Утверждение упирается в некоторую экзотическую оценку коэффициентов однолистных функций.

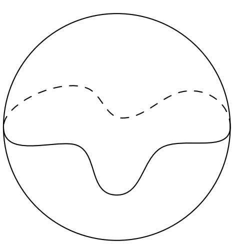


Р и с. 2. Подклейка дисков



Р и с. 3. После склейки

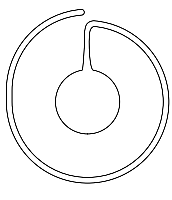
У т в е р ж д е н и е 2. *Замыкание группы диффеоморфизмов окружности в обсуждаемом представлении содержит полугруппу трубок, т. е. элементы полугруппы трубок можно аппроксимировать добропорядочными диффеоморфизмами окружности.*



Р и с. 4. Диффеоморфизм

Это сразу не очевидно и даже довольно странно. Поэтому я должен объяснить, как такое может получиться.

У нас есть два отображения параметризованных окружностей. Мы считаем эти окружности границами дисков, и подклеиваем диски к сфере, используя параметризации, см. рис. 2. После склейки по этим отображениям получается риманова поверхность — сфера Римана (с двумя шапочками), см. рис. 3. Итак, элементы полугруппы можно рассматривать как сферы Римана с двумя шапочками. Диффеоморфизму соответствует бесконечно узкое кольцо, т. е. это отвечает случаю, когда шапочки покрывают всю сферу (рис. 4).



Р и с. 5. Сфера с экватором

Теперь осталось построить пример, когда последовательность картинок 3 может сходиться к картинке 4 в каком-нибудь естественном смысле слова «сходимость».

Шапочки параметризованы, поэтому есть пара голоморфных отображений. Рассмотрим последовательность сходящихся сфер Римана с экватором, изображённых на рис. 5, у которых перемычка уменьшается и полоска утончается (сама сфера изображена как плоскость; точка ∞ находится на бесконечности). Каждая шапка определяется голоморфной функцией в круге. Сходимость картинок мы понимаем, как сходимость голоморфных функций в открытом круге, равномерную на компактах.

В пределе получится сфера с двумя шапочками.

В итоге мы получаем элемент полугруппы трубок как предел последовательности элементов Diff.

После первой перестройки и до $s=3/2$. Как я говорил, при проходе точки $1/2$ происходит много разных событий.

В частности, ломается эргодичность. Если до точки $1/2$ были одинокие элементы, действующие эргодично, то после этой точки уже вся группа действует неэргодично.

Это происходит по следующей причине.

Утверждение 3. *Почти любая функция $f\in\widehat{H}_s$, где $1/2<s<3/2$, удовлетворяет следующему гёльдеровскому условию*:

$$|f(\varphi_1)-f(\varphi_2)|<|\varphi_1-\varphi_2|^{s-1/2}(|\ln|\varphi_1-\varphi_2||^{1/2}+\varepsilon+C).$$

При $s=1$ это — классическая теорема Леви о том, что броуновская траектория удовлетворяет гёльдеровскому условию с логарифмом. Остальные случаи к ней можно свести. В частности, получается, что пространство $\widehat{H}_s$ при $s>1/2$ состоит из непрерывных функций.

Выше выписывался оператор

$$T_s(q)f(\varphi)=f(q(\varphi))q'(\varphi)^{1/2-s}.$$

Из этой формулы видно, что положительные функции под действием $T(q)$ переходят в положительные.

Пусть Ω_+ — множество положительных функций, Ω_- — множество отрицательных функций, Ω_0 — множество функций, имеющих нуль.

Можно проверить, что все эти три множества действительно существуют в том смысле, что все они имеют ненулевую меру. Тем самым мы получаем три инвариантных подмножества, и эргодичности уже нет.

Легко заметить, что на Ω_+ действие имеет первый интеграл

$$I_s(f)=\int\frac{d\varphi}{f(\varphi)^{\frac{1}{s-1/2}}}.$$

Такая величина является константой при действии операторов $T_s(q)$. Поэтому множество Ω_+ расслаивается на поверхности уровня. Дальше возникает естественное подозрение, что на каждой поверхности уровня есть своя собственная мера.

Есть известная теорема Рохлина об условных мерах, которая гласит, что на почти каждой поверхности уровня есть условная мера. Теперь спрашивается, есть ли она на всех поверхностях. Шавгулидзе говорил, что в случае броуновского движения ($s=1$), на каждой поверхности уровня эта мера есть и что на каждой поверхности уровня мера эргодична. Но, по-моему, это доказательство нигде не опубликовано.

Написать похожий интеграл для Ω_0 нельзя, потому что он разойдётся.

Написать такой интеграл для Ω_- можно, но он не даст ничего нового.

Лирическое отступление. Теперь ещё одно замечание, хотя и не очень содержательное. Рассмотрим поверхность уровня интеграла I_s в пространстве непрерывных функций. Эта поверхность легко идентифицируется с однородным пространством $\mathrm{Diff}^{(1)}/\mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ — группа вращений. Соответственно, на таких пространствах мы получаем меры, квазиинвариантные относительно действия группы диффеоморфизмов окружности.

Понятно, что группа вращений — это совсем маленькая вещь по сравнению с самой группой Diff. Поэтому чуть-чуть пошевелив конструкцию, $\mathbb{T}$ можно убрать и получить меры на группе диффеоморфизмов окружности, инвариантные с одной стороны относительно диффеоморфизмов окружности. В том виде, как я это сказал, это утверждение производит впечатление самопротиворечивого, потому что есть теорема, которая это запрещает.

Но дело в том, что мера строится на группе $C^{(1)}$-диффеоморфизмов, а действуют на них бесконечно дифференцируемые диффеоморфизмы $\mathrm{Diff}^{(\infty)}$. Во всяком случае, на группе диффеоморфизмов окружности есть что-то вроде меры Хаара, только этих мер Хаара много, и они односторонне инварианты.

Вопрос о неприводимости. Здесь начинается полу-теорема полу-фольклор с довольно странной историей. Берётся точка $s=1$; ей соответствует просто броуновское движение. Здесь всё много проще, чем в общей ситуации.

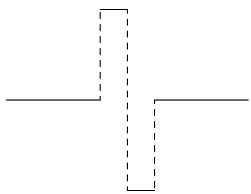


Рис. 6. Ступенька

Есть работа Косяка, опубликованная в Journal of Functional Analysis, в которой доказано, что представление в L^2 неприводимо. Косяк берёт диффеоморфизмы, близкие к тождественному, и рассматривает их малое возмущение. Малое возмущение устроено примерно так. Рассматривается маленькая ступенька (рис. 6), у которой подходящим образом выбраны высота и ширина. Берётся диффеоморфизм с такой производной. Затем берётся соответствующая последовательность операторов $T_1(q)$ и вычисляется слабый предел этих операторов. Оказывается, что эта последовательность операторов с заменой переменной слабо сходится к оператору умножения на $f(a)$

$$SF(f)=F(f)\cdot f(a).$$

Итак предъявляется много операторов умножения, которые коммутируют с любым оператором, коммутирующим с представлением. После этого доказательство неприводимости становится делом техники.

Всё было бы хорошо, но Шавгулидзе говорит, что в доказательстве есть дырка. Он предложил новое доказательство в том же духе, усложнив конструкцию функций q_j. Пирогов выслушал это доказательство, и сходу указал ошибку. Я ещё более усложнил начальную функцию и соответственно получил очередное доказательство. Но оно не опубликовано.

В общем, ситуация такая: утверждение как будто верно, способ доказательства как будто ясен, доказательство нигде не написано.

Опять слабое замыкание. В этом месте снова всплывает наш вопрос о слабом замыкании. Как я уже говорил, в точке $s=1/2$ это слабое замыкание, по-видимому, содержит полугруппу трубок. Соответственно, встаёт вопрос о том, как устроено слабое замыкание в других точках. Достоверно, что оно устроено иначе.

Вроде бы, естественно думать, что при сдвиге с $s=1/2$ понятие римановой поверхности во что-то деформируются. Получается что-то похожее на риманову поверхность, но не риманова поверхность. Но что там происходит на самом деле, не известно. Первое, что приходит в голову — желание угадать дополнительную геометрическую структуру на римановой поверхности. Но у меня не получилось.

Доказательство (или квазидоказательство) неприводимости, которое сейчас обсуждалось основано на предъявлении некоторых операторов в этом слабом замыкании. Но от этого ещё бесконечно далеко до полного описания замыкания.

Меры на пространстве канторовских множеств

Пока $1/2<s<3/2$.

Множества нулей. Мы обсудили поверхности уровня. Обратимся теперь к Ω_0, т. е. к пространству траекторий, пересекающих горизонтальную ось. Рассмотрим функцию из множества Ω_0. Есть такой несложный факт: если у этой функции есть нуль, то в любой окрестности этого нуля тоже есть нуль. То есть для функции общего положения множество нулей есть канторовское множество. Это классический факт в случае броуновского движения и относительно несложный факт в случае общих пространств $\widehat{H}_s$.

Сопоставим функции f множество её нулей. Получим отображение из множества Ω_0 в множество канторовских множеств окружности. На Ω_0 есть какая-то мера. Можно рассмотреть прямой образ этой меры.

Надо напомнить, что такое *образ меры*. Пусть A — пространство с мерой α, а φ — отображение из A в множество B. Тогда мера подмножества $C\subset B$ по определению равна $\alpha(\varphi^{-1}(C))$.

Итак, мы получим какую-то меру на множестве канторовских множеств (как образ меры на Ω_0). Исходная мера была квазиинвариантна. Из этого легко выводится, что полученная мера тоже квазиинвариантна.

Итак получена квазиинвариантная мера на множестве канторовских подмножеств окружности.

Когда-то давно, когда эта конструкция пришла мне в голову, я испытал удивление и сомнение в разумности такого рода построений. Но потом оказалось, что в случае броуновского движения, такие меры — это вполне классический теоретико-вероятностный сюжет, восходящий к Полю Леви. Они допускают явное конструктивное описание, и есть много явных формул с ними связанных.

Я понимаю, что многим покажется странным рассматривать меры на множестве канторовских множеств. Но сейчас я хочу построить некое семейство мер на множестве канторовских множеств. При этом в точке $s=1$ (т. е. в случае броуновского движения) это будет та же самая конструкция, и есть недоказанная гипотеза, что это вообще та же самая конструкция для всех значений s.

Розыгрыш канторовских множеств. Введём параметр α, $0<\alpha<1$. Для простоты сменим окружность на полупрямую. Наша цель — построить меру на множестве канторовских подмножеств полупрямой.

Первый вопрос: как на множестве канторовских подмножеств ввести хоть какие-нибудь координаты? Множество канторовских подмножеств кажется чем-то скользким; нужно как-то за него взяться.

Координаты вводятся так. Возьмём некоторую точку $a>0$. Пусть есть канторовское множество. Тогда точка a почти наверняка в нём не содержится. Соответственно, есть дополнительный к канторовскому множеству интервал (u, v), который покрывает точку a. Тем самым, есть два числа u и v. Итак, каждой точке a полупрямой мы можем поставить в соответствие два числа u и v, а именно, концы интервала, дополнительного к канторовскому множеству, который покрывает эту точку.

Начинаю определять меру. Первое её свойство такое: u и v распределены по закону

$$\left(\frac{\sin \pi\alpha}{\alpha}\right)\frac{du\,dv}{u^{1-\alpha}(v-u)^{1+\alpha}}. \tag{3}$$

Следующий шаг в построении меры состоит в том, что берётся произвольный конечный набор точек $a_1<a_2<\ldots$ полупрямой. Возьмём точку a_1 и возьмём интервал (u, v), который её покрывает. Мы требуем, чтобы u и v были распределены по закону (3).

Может случиться, что этот интервал не задевает никаких других точек a_i, а может случиться, что задевает. В обоих случаях возьмём первую из точек набора, которая не покрыта интервалом (u, v). Например, если точка a_2 покрыта, а точка a_3 не покрыта, то берём точку a_3. Затем берём интервал (u_1, v_1), дополнительный к канторовскому множеству и покрывающий точку a_3. Концы этого интервала должны быть распределены по тому же самому закону, только за начало отсчёта вместо нуля берётся точка v.

Теперь снова берём первую непокрытую точку и рассматриваем интервал, её покрывающий, и т. д. В результате получается корректно определённая вероятностная мера на множестве канторовских подмножеств (это — неочевидная теорема).

Устойчивые процессы. Может быть, Вы помните из курса теории вероятностей, есть такие устойчивые случайные процессы. Сейчас я говорю для тех, кто помнит.

Иногда эти устойчивые случайные процессы бывают возрастающими (так называемые subordinator'ы). Формула (3) — это распределение прыжка устойчивого subordinator'а, покрывающего данную точку. Формула для прыжка была написана Дынкиным в 1953 году. А вся конструкция вместе может быть получена так. Мы берём траекторию устойчивого случайного процесса, проектируем на вертикальную ось. В проекции получается некоторое множество на вертикальной оси. Это и есть множество концов дополнительных интервалов канторовского множества.

Квазиинвариантность.

Теорема 4. *Построенная мера квазиинвариантна относительно группы диффеоморфизмов полупрямой с некоторыми условиями на асимптотику на бесконечности. Производная Радона—Никодима задаётся явной формулой*

$$\mathfrak{R}_p(L) = C \prod \frac{p(v_j) - p(u_j)}{(v_j - u_j)\, p'(u_j)}, \tag{4}$$

где (u_j, v_j) — дополнительные интервалы к канторовскому множеству L, а p — диффеоморфизм; $C = C(p)$ — явно выписываемая постоянная.

Следующая перестройка

Теперь продолжим движение вправо по вещественной оси (см. рис. 7). Была точка 0; была точка 1/2 — переломная точка, где сидит представление со старшим весом. Была точка 1, соответствующая классической диффузии.

Теперь точка 3/2. После этой точки функции пространства $\widehat{H}_s$ становятся гладкими. И чем больше s, тем более гладкими они становятся.

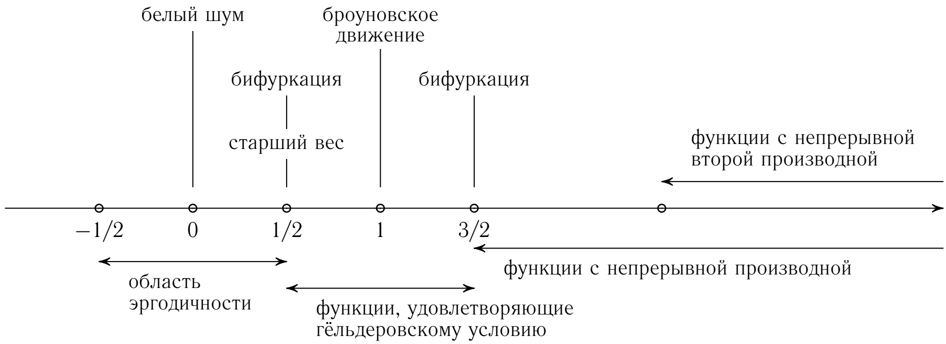


Рис. 7.

Дальше можно рассмотреть множества Ω_0, Ω_+ и Ω_-. С множеством Ω_+ всё будет примерно так же.

Для функции из Ω_0 множество нулей почти наверняка конечное, соответственно нули будут изолированными, потому что добропорядочной функции не положено иметь канторовского множества нулей.

На множестве Ω_0 тоже есть интегралы (они пишутся той же формулой, только надо отследить их сходимость п. в.), и дальше всё более или менее одинаково (в том смысле, что больше перестроек не известно), только гладкость функций $f \in \widehat{H}_s$ будет расти.

Можно идти и влево от точки $s=0$. Я почти ничего не знаю про свойства полученного действия. Но можно показать, что на уровне представлений есть симметрия $s \leftrightarrow -s$, поэтому новых представлений мы не получим.

Нерешённые вопросы

Отмечу, что точно такие же конструкции есть для групп петель, только там картинка немножко поскучнее. Но в общем всё примерно то же самое.

В своё время люди много занимались изобретением представлений групп диффеоморфизмов окружности и групп петель. Наиболее модна и на данный момент наиболее развита теория представлений со старшим весом. Есть ещё несколько теорий разной степени содержательности. Картинка, которую я описал, все эти теории представлений в каких-то точках цепляет.

Естественен вопрос о существующих нерешённых задачах.

Неприводимость построенных представлений. Думаю, что эта задача дожимается, например тем способом, который сказан выше. Правда ни в одном случае она не дожата.

Но решение этого вопроса не достаточно для получения собственно теории представлений.

Вопрос о вычислениях. Грубо говоря, если есть действие группы, то должны быть явные вычисления. Поэтому есть неформальный вопрос о явных вычислениях. Группа симметрий уж больно велика, поэтому можно надеяться на положительное решение.

Относительно оптимистичной кажется мне ситуация с канторовскими множествами. Устойчивые процессы производят впечатление фундаментального предмета, который однако оказывается неожиданно тяжёлым. Проблемы начинаются с плотностей устойчивых распределений, они задаются формулами типа

$$\varphi(t)=\int\limits_0^\infty \exp(-x^\alpha - tx)\,dx$$

известными со времён Коши. Этот незамысловатый на вид интеграл однако оказывается тяжёлой спецфункцией, имеющей устойчивую дурную репутацию.

Тем не менее набор нетривиальных явных формул, связанный с устойчивыми процессами науке известен (кстати две таких формулы приведены выше).

Один из возможных вопросов — попытаться вычислить сферическую функцию $\langle T(q)1,\,1\rangle$ для нашего представления в L^2 на пространстве канторовских множеств, т. е., интеграл

$$\int \mathfrak{R}_q(L)^{1/2}\,dL$$

где функция $\mathfrak{R}_p$ задана формулой (4), а интегрирование ведётся по пространству канторовских множеств.

Замыкание. Кроме того, есть вопрос о слабом замыкании. Для произвольного значения параметра s мы берём группу диффеоморфизмов окружности и слабо замыкаем в этом представлении. Что получится? В одной точке получается очень красиво; что получается в других точках — неизвестно.

Можно надеяться получить в ответе то, что в матфизике называется геометрическими теориями поля.

Возможная точка обзора. Пародия на группу диффеоморфизмов. Для понимания любого математического объекта бывает полезно найти его родственников. Обсуждаемую теорию представлений не удаётся продвинуть с размерности 1 в размерность 2 (т. е. не удаётся заменить окружность на какой-либо объект вещественной размерности >1).

Теория однако имеет p-адически-комбинаторный аналог. Соответствующая p-адическая группа — группа всех локально аналитических диффеоморфизмов p-адической прямой.

Попытаюсь описать очень похожий комбинаторный объект — «группу шароморфизмов», она же «группа иерархоморфизмов» Hier_2 — не употребляя p-адических чисел. Рассмотрим диадическое канторовское множество C такое, как описывается во вводных учебниках анализа, см. рис. 8. Назовём *шаром* подмножество в C, состоящее из точек лежащих в каком-либо *чёрном* интервале. Каждый шар канонически распадается в объединение двух чуть меньших шаров (см. рис. 8), назовём их нижними соседями.

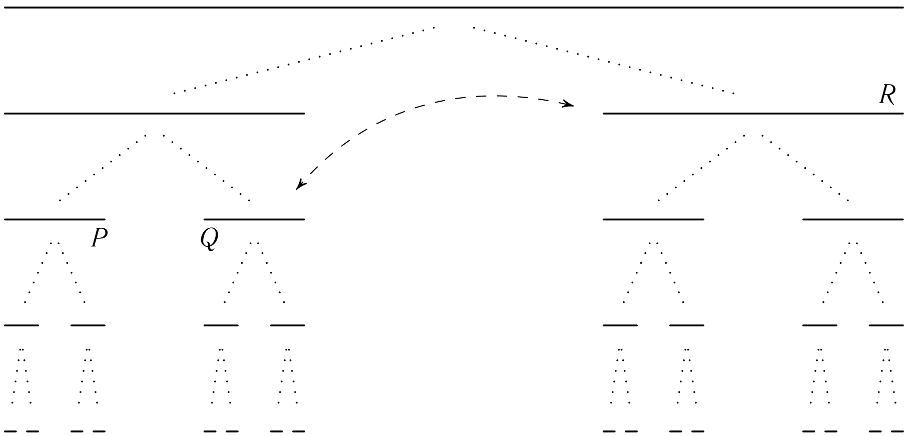


Рис. 8. Канторовское множество. Иерархия шаров.

Пусть q — гомоморфизм $C \to C$. Мы говорим, что q — иерархоморфизм, если у любой точки $x \in C$ есть окрестность, в которой наше отображение переводит любой шар в шар, и при этом отношение соседства сохраняется.

На рис. 8 присутствует дерево с выделенной вершиной (соответствующей самому большому шару). Любому автоморфизму этого дерева соответствует иерархоморфизм множества C.

Другой пример иерархоморфизма (см. рис. 8): мы оставляем на месте шар P, см. рисунок, и переставляем шары Q и R.

Бо́льшая часть сказанного выше о группе Diff без помех переносится на группу иерархоморфизмов Hier, при том что последняя явно проще. Но простым объектом и она не является.

Ссылки. На тему лекции у меня есть обзор в Трудах МИРАН, Т. 217, другие ссылки есть по адресу `http//www.itep.ru/~neretin/qdiff.htm`.

22 февраля 2001 г.

Д. А. Лейтес

ПРИМЕНЕНИЕ КОГОМОЛОГИЙ АЛГЕБР ЛИ В НАРОДНОМ ХОЗЯЙСТВЕ

Грубо говоря, я заинтересован в подсчёте разного рода когомологий. Для алгебраиста в такой постановке дела, возможно, нет ничего грубого, но вот нормальный инженер или экономист вряд ли станет слушать или читать дальше: для него (или неё) уже понятие «алгебра Ли» неизвестно, а слово «когомология» звучит слегка непристойно. Вот я и хочу рассказать, почему это интересно.

Некоторые когомологии допускают довольно красивую интерпретацию в терминах, понятных человеку с улицы. О части такого рода интерпретаций я и расскажу. Для меня самое поразительное в этих интерпретациях — то, что они возникают в очень разных науках. Впрочем, читавшего «Сумму технологий» С. Лема этим не удивишь.

Меня в основном будут интересовать когомологии $H^i(\mathfrak{g}; V)$, где $\mathfrak{g}$ — нильпотентные подалгебры в некоторых специальных алгебрах Ли, близких к простым (я их опишу, когда мы дойдём до точных определений), с коэффициентами в некоторых специфических модулях V. Математику интересно сосчитать всевозможные когомологии для «любых» $\mathfrak{g}$, V и i. Однако, как и интерпретации производных, интерпретации когомологий относятся в основном к $i=0$, 1 и 2.

С моей точки зрения, тематика современных «применений» этих когомологий резко делится на три части: на супергравитацию, на неголономные структуры в остальной жизни и голономные случаи.

Я, конечно, объясню немножко, что такое (по-моему), если не супергравитация, то хоть уравнения супегравитации, и что такое (по всеобщему мнению) неголономные структуры (а заодно — и голономные).

В записи моего доклада, замечательно выполненной В. Прасоловым, длинные периоды превратились в сжатую прозу, и текст стал много понятнее. В частности, в глаз бросились пропуски, повторы и неточности. Редактируя, я старался исправить все недочёты, добавил точные определения и доступные ссылки. Препринты, ещё не положенные в `arXiv`, я вышлю в ответ на запрос.

Я благодарен В. В. Прасолову за помощь, а MPIMiS—Leipzig — за финансовую поддержку в процессе редактирования.

Супергравитация

Как вы, вероятно, помните, слово «суперсимметрия» появилось летом 1974 г. после доклада Весса (Wess) и Зумино (Zumino) [WB]. Некоторые ростки суперсимметрий появлялись и раньше и в топологии и в физике. Однако все математики (кроме Ф. А. Березина [B]) проглядели лежавшую под носом естественнейшую точку зрения на всё, связанное (иногда — далеко не очевидным образом) с любой внешней алгеброй. А те физики, которые теперь числятся пионерами и которые писали первые работы по суперсимметриям, и сами даже не очень понимали, что делают.

Зато Весс и Зумино не только сами поняли, но и другим объяснили малую толику возможных приложений суперсимметрий, видную сразу. Тут-то и произошёл бум. Повсюду в то время — в «New York Times», в «Известиях», даже, кажется, в рабочей газете «Правда», — писали, что наконец-то появился язык, на котором можно будет сформулировать мечту Эйнштейна — единую теорию поля.

Лет через 5—10 эти фанфары поутихли. Давайте я сперва напомню, в чём суть идеи Весса—Зумино, а потом — почему поиссяк энтузиазм. Напомню, что по Эйнштейну наш мир локально устроен как пространство Минковского. Другими словами, он не просто многообразие, а многообразие с метрикой, причём не римановой, как думали до Эйнштейна, а лоренцевой.

Идея Весса и Зумино вкратце:

$$\boxed{\text{мы живём на супермногообразии.}}$$

А вот «технические подробности» — на *каком именно* супермногообразии — не ясны и сегодня. Почти сразу стало ясно, что интересные физикам модели суперпространства Минковского индексированы размерностью «внутреннего пространства» (отвечающего за «цвет» кварков, разницу между протоном и нейтроном и подобные параметры).

Как показали Роджер Пенроуз и Юрий Иванович Манин [Ma], проще работать не с пространством Минковского $M^{3,1}$, а с его компактифицированной комплексификацией, которая есть не что иное, как грассманиан Gr_2^4 двумерных плоскостей в четырёхмерном пространстве (всё над $\mathbb{C}$). Одно из очевидных преимуществ перехода от $M^{3,1}$ к Gr_2^4: группой симметрий пространства $M^{3,1}$ является группа Пуанкаре, которая не проста, а Gr_2^4 — фактор простой группы $\mathrm{SL}(4, \mathbb{C})$ (с простыми группами обычно удобнее работать). Кроме того, уравнения математической физики легче решать над $\mathbb{C}$, а потом выделять вещественные формы. Дальнейшие подробности и суперизацию (один из множества подходов) можно найти в книге [Ma], но начать советую со статьи о Пенроузе в замечательной книге [Gi].

Итак, локально, на уровне алгебр Ли, касательное пространство T к Gr_2^4 в какой-нибудь точке натянуто на сдвиги (трансляции). Что такое суперпространство Минковского, как уже сказано, точно не известно (и в этом докладе я расскажу, как это можно выяснить при некоторых предположениях), но вот в том, как выглядит касательное пространство в точке m к суперпространству Минковского $\mathrm{SM}(N)$, физики долго были уверены и считали, что кроме сдвигов, есть ещё и нечётные векторы, пространство которых разбито на два подпространства: Q и $\bar{Q}$,

$$\mathrm{Gr}_2^4 = \mathrm{SL}(4)/P, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, \quad T_m(\mathrm{Gr}_2^4) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix} \right\}, \tag{1}$$

$$\mathrm{SM}(N) = \mathrm{SL}(2|N|2)/P, \quad T_m\big(\mathrm{SM}(N)\big) = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline Q & & \\ \hline T & \bar{Q} & \end{array} \right). \tag{2}$$

Физики рассматривают вещественные матрицы и у них $\bar{Q} = \overline{Q^t}$, где черта слева — для красоты, а черта справа — комплексное сопряжение. Нам вещественная структура пока не важна, поэтому мы всё окомплексим, и у нас $\bar{Q}$ — просто другие векторы, ничего общего с Q не имеющие.

Итак, от Gr_2^4 мы перешли к флаговому супермногообразию — фактору $\mathrm{SL}(2|N|2; \mathbb{C})$ по параболической подгруппе, чьи образующие занимают в супералгебре Ли $\mathfrak{sl}(2|N|2)$ места нулей на картинке (2).

Я несколько забежал вперёд; давайте теперь вернёмся и определим всё по порядку (подробности — в [SoS]).

Линейная алгебра в суперпространствах

Суперпространством называется $\mathbb{Z}/2$-градуированное векторное пространство, т. е. пространство, представленное в виде прямой суммы подпространств: $V^{p|q} = V_{\bar{0}}^p \oplus V_{\bar{1}}^q$, причём $V_{\bar{0}}$ называется *чётным*, а $V_{\bar{1}}$ — *нечётным*. Размерность, как обычно, указана сверху; $\bar{0}$ и $\bar{1}$ — элементы из $\mathbb{Z}/2$, и мы пишем $p(v) = i$ тогда и только тогда, когда $v \in V_i$, $v \neq 0$.

Многие формулы линейной алгебры «суперизуются» с помощью следующего Правила Знаков: «*если что-то чётности p проносится мимо чего-то чётности q, то возникает знак* $(-1)^{pq}$». Например, определение коммутатора (скажем, двух операторов) превращается в

$$[a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba.$$

Формулы, заданные на однородных элементах (т. е. либо чётных, либо нечётных), продолжаются на произвольные элементы по линейности.

Аналогом алгебры многочленов является является суперкоммутативная супералгебра от чётных образующих $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и нечётных образующих $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_m)$. Супералгебра $\mathbb{C}[\theta]$ называется *внешней алгеброй* или *алгеброй Грассмана*.

Все понятия линейной алгебры, дифференциальной, аналитической и алгебраической геометрии, несомненно, имеют супераналоги и далеко не все они суть тривиальные обобщения, полученные по Правилу Знаков. Некоторые теоремы, вообще-то, не имеют пока аналогов на супермногообразиях, а причиной тому — наше незнание правильных суперизаций входящих в формулировки понятий. Подробнее об этом — в учебнике [SoS] *).

Суперпространство Минковского — супермногообразие с дополнительной структурой. Я напомню определение супермногообразия. *Супермногообразие* — это пара $\mathcal{M}=(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$, где M — многообразие (скажем, гладкое), а сечения пучка $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ составляют $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}|_U=\mathcal{O}_M(U)\otimes\Lambda[V]$ для достаточно малой открытой окрестности U любой точки. Другими словами, $\mathcal{M}$ строится так. Берём локально тривиальное векторное расслоение E на M со слоем, изоморфным пространству V и определяем $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ как пучок $\mathcal{L}_{\Lambda^\bullet E}$ сечений внешней алгебры $\Lambda^\bullet(E)$ расслоения E.

Все объекты, участвующие в определении супермногообразия, хорошо известны. Зачем вводить новый термин? Оказывается, *морфизмов* супермногообразий много больше, чем морфизмов расслоений $\Lambda^\bullet(E)$. То, что берётся внешняя (грассманова) алгебра — тоже не случайно, а связано с природой вещей: частицы бывают либо бозоны (описываются худо-бедно многообразиями), либо фермионы (не хуже бозонов описываются супермногообразиями). Но это я опять отвлёкся.

Посмотрим на многообразие M. На нём есть координаты x. Пусть $\theta_1, \ldots$ $\ldots, \theta_n$ — базис пространства V. Пару (x, θ) назовём *координатами* на $\mathcal{M}$.

Пусть y — другие координаты на M, а $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — другой базис пространства V. Тогда (если $\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\neq 0$)

$$y_i=f_i(x), \qquad 1\leqslant i\leqslant n,$$

— замена координат на M,

$$\begin{cases} y_i=f_i(x), & 1\leqslant i\leqslant n,\\ \eta_j=\sum a_j^i(x)\theta_i, & 1\leqslant j\leqslant m,\end{cases}$$

— диффеоморфизм (если дополнительно $\det(a_j^i)\neq 0$) расслоения E (ниже

*) Учебник толстый, зато — понятно написанный.

по повторяющимся индексам подразумевается суммирование; по-прежнему $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$), а

$$\begin{cases} y_i = f_i(x), \\ \eta_j = \sum a_j^i(x)\theta_i + \sum\limits_k a_j^{i_1\ldots i_{2k-1}}(x)\theta_{i_1}\ldots\theta_{i_{2k-1}} \end{cases}$$

— диффеоморфизм расслоения $\Lambda^\bullet(E)$.

А теперь опишем автоморфизм супералгебры функций на $\mathcal{M}$ (локально, или пусть $\mathcal{M}$ — суперобласть). Образующие должны перейти в образующие, а соотношения — сохраниться. Получается, что автоморфизм должен иметь вид

$$\begin{cases} y_i = f_i(x) + \boxed{\sum\limits_k f_i^{i_1\ldots i_{2k}}(x)\theta_{i_1}\ldots\theta_{i_{2k}}}, \\ \eta_j = \sum a_j^i(x)\theta_i + \sum\limits_k a_j^{i_1\ldots i_{2k-1}}(x)\theta_{i_1}\ldots\theta_{i_{2k-1}}, \end{cases}$$

где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Члены в рамочке — дополнительные по сравнению с симметриями самого $\Lambda^\bullet(E)$ симметрии супермногообразия $\mathcal{M} = (M, \mathcal{L}_{\Lambda^\bullet(E)})$, где $\mathcal{L}_{\Lambda^\bullet(E)}$ — пучок сечений расслоения $\Lambda^\bullet(E)$. Но и это не всё. Параметры f_i, $f_i^{i_1\ldots i_{2k}}$, a_j^i, $a_j^{i_1\ldots i_{2k-1}}$ — чётные. Но ведь ясно, что инфинитезимальные симметрии образуют супералгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 1}$, которая в нашем случае есть супералгебра Ли $\mathrm{vect}(n|m) = \mathrm{der}\ \mathbb{C}[x, \theta]$ векторных полей или супердифференцирований. Автоморфизмы, порождённые нечётными полями, мы где-то потеряли.

Чтобы их найти, надо представить супермногообразие как функтор. Точные определения даны в [SoS]; они требуют некоторой подготовки. Физики меня часто восхищали тем, что способны, *не ошибаясь*, пользоваться не определёнными в точности понятиями. Более того, то, до чего с трудом доходят лучшие математики (например, нужный нам функтор был введён А. Вейлем [We]), физики независимо придумывают между делом (понятие суперполя).

Короче говоря, пусть C — какая-то (произвольная) суперкоммутативная супералгебра с «большим» числом нечётных образующих. Пусть все объекты (функции и т. д.) рассматриваются над C. *Автоморфизмом* алгебры $\mathbb{C}[x, \theta]$ (т. е. гладкой заменой координат на $\mathcal{M}$) назовём автоморфизм *над* C супералгебры $\mathbb{C}[x, \theta]$, т. е. выражение вида

$$\begin{cases} y_i = f_i(x) + \sum\limits_k f_i^{j_1\ldots j_k}(x)\theta_{j_1}\ldots\theta_{j_k}, \\ \eta_j = a_j^i(x) + \sum\limits_k a_j^{i_1\ldots i_k}(x)\theta_{i_1}\ldots\theta_{i_{2k-1}}, \end{cases}$$

где $a_j(x) \in C_{\bar 1}$, $p(f_i^{j_1\ldots j_k}) = p(k)$, $p(a_j^{i_1\ldots i_k}) = p(k) + 1$, и, конечно, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Пример

Заметим, что пространство V — совершенно постороннее, никакого отношения к M не имеющее. Но мы можем взять и так называемое «естественное» расслоение — тензорную степень касательного или кокасательного расслоения. Рассмотрим, например, $\mathcal{M} = (M, \Omega(M))$, где Ω — пучок внешних (дифференциальных) форм.

Так вот, преобразование координат на M

$$x_i \mapsto x_i + dx_1 \wedge dx_2 \quad \text{для всех } i,$$

не имеющее никакого смысла в классической дифференциальной геометрии, является диффеоморфизмом супермногообразия $\mathcal{M} = (M, \Omega(M))$.

Пафос теории супермногообразий заключается в том, что у нас при том же числе объектов резко увеличивается группа морфизмов. А есть ещё морфизмы, которые описываются нечётными параметрами. Это во-первых. А во-вторых, и объектов становится больше. Если рассматривается категория гладких многообразий, то объектов столько же, сколько локально тривиальных векторных расслоений. А если рассматривается категория аналитических или алгебраических расслоений, то объектов становится больше, потому что там есть ещё деформации.

Примеры супергрупп

Задавать супергруппы как супермногообразия нескладно, а в терминах функтора точек (суперполей) — очень просто. Пусть V — суперпространство (над полем $k = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, ...), а C — суперкоммутативная супералгебра над k. Тогда $\mathrm{GL}_C(V)$ — группа чётных обратимых операторов на $V \otimes C$. Выбрав упорядоченный базис $v_1, \ldots, v_{p+q}$ суперпространства $V^{p|q}$, мы можем сопоставить оператору в V суперматрицу, чётность i-й строки и j-го столбца которой равна $p(v_i)$ и $p(v_j)$, соответственно. Наиболее простой формат суперматриц получается, если сперва идут все чётные базисные векторы, а потом — все нечётные. Но вот физики изображают суперпространство Минковского, взяв не $\mathrm{SL}(4|N)$, а $\mathrm{SL}(2|N|2)$ (здесь SL — подгруппа в GL с супердетерминантом 1), как в (2): стандартное деление суперматриц на 4 блока не всегда удобно. В частности, в самых первых физических моделях появлялось вовсе не оно, а то деление на 9 блоков, которое описано выше, см. (2).

То, что нарисовано выше (см. (2)), при $N = 1$ появилось в работе Весса и Зумино. Тогда же появилось и ограничение $N \leqslant 8$. Если $N = 0$, то это обычный случай. Ограничение $N \leqslant 8$ не имеет математического смысла. Оно появляется из физики. Компетентный физик (он заведует в ФИАНе лабораторией, в которой когда-то работал А. Сахаров) М. Васильев последние 10 лет публикует статьи, в которых пытается объяснить, почему это ограничение физического смысла тоже не имеет. Я не буду в это углубляться. Я даже не буду обсуждать подробно, почему сама эта модель не единственная возможная. Скажем, в книге Манина [Ма] написано, что есть стандартная модель (такого типа), а ещё есть некоторые исключительные модели. Манин про это пишет, но, к сожалению, никто (ни он сам, ни его ученики) эти модели никак не разбирали.

Всё это, включая картинку (2), мне рассказывал Виктор Исаакович Огиевецкий, который вместе с Гальпериным, Ивановым, Колициным и Сокачевым пытался понять, как написать левую часть в суперуравнениях Эйнштейна. (Через некоторое время я напомню, что такое уравнения Эйнштейна, в терминах, которые нужны для того, чтобы их суперизовывать.) То, что он мне объяснял, было мне совершенно непонятно, например, когда он говорил о том, что $N=1$ супергравитация не сводится к уравнениям Эйнштейна; что при $N=2$ уравнения Эйнштейна тоже не получаются и требуется добавить какое-то гармоническое суперпространство. Куда добавить? Непонятно.

Огиевецкий объяснял мне их картину мира. Параллельно я пытался выяснить у него, почему нельзя сделать так. Есть, скажем, книга Шломо Штернберга [St]. Давайте посмотрим, как там он определяет структурные функции G-структур, т. е. тензор Римана, и вообще аналог тензора Римана для произвольной G-структуры. Напишем тензор. Есть какая-то группа (при $N=1$ группа $\mathrm{SL}(2)\oplus\mathrm{SL}(2)$). В чём проблема? Возьмём и напишем соответствующий тензор. Оказывается, что такого рода попытки делались. Но уравнения, которые при этом получаются, это совсем не то, что нужно.

А что нужно? Некоторую часть проблемы можно увидеть сразу. Дело в том, что $[Q,\,\bar{Q}]_+=T$, т. е. (анти)коммутаторы нечётных образующих дают T. Значит, на касательном пространстве *) к суперпространству Минковского естественно задана структура нильпотентной (супер)алгебры Ли, в то время как в книгах по дифференциальной геометрии, где описывается, как вычислять тензор Римана, предполагается, что касательное пространство натянуто на частные производные, которые коммутируют, а вовсе не образуют нильпотентную алгебру. В этом и заключается проблема.

Неголономные структуры

Ситуации, когда на касательном пространстве есть структура нильпотентной алгебры Ли, в науке встречаются. Насколько мне известно,

*) Точнее, на ассоциированном с ним градуированном пространстве $\mathrm{gr}\,T_mM$, см. ниже.

первым, кто обратил внимание на важность такого рода структур и выделил их под названием *неголономные структуры*, был Герц. Его книга [H] написана не очень понятно. Некоторые разъяснения есть в трёхтомнике Пуанкаре [Poi]; там есть специальная статья, посвящённая Герцу. И есть книга Полака [Pol], в которой он пишет о механике Герца.

Неголономные структуры встречаются, по-видимому, даже чаще, чем голономные. Пожалуй, пришла пора сказать, что же это такое. Пусть в касательном расслоении TM задано подрасслоение $D\subset TM$. Другими словами, в каждом касательном пространстве T_mM, $m\in M$, задано некоторое подпространство $D_m\subset T_mM$. Я предполагаю, что размерности этих подпространств не скачут. И вообще, всё, что только может быть гладким, гладкое. Предположим, что это подрасслоение неинтегрируемое. Многообразие с неинтегрируемым подрасслоением в касательном расслоении называется *неголономным*.

Есть теорема Фробениуса, которая даёт критерий интегрируемости подрасслоения в точке. А именно, рассмотрим сечения $\Gamma(D(U))\subset \mathrm{Vect}(U)$ в какой-то окрестности $U\subset M$. Эти сечения — подпространство в алгебре Ли векторных полей $\mathrm{Vect}(U)$. Если это подпространство — подалгебра Ли, то подрасслоение D интегрируемо. Если же $\Gamma(D)$ не подалгебра, то можно взять $D_1=D$, $D_2=D_1+[D_1, D_1]$ и т. д. (здесь имеется в виду не само расслоение, а его сечения). Естественно предположить, что, взяв достаточное число коммутаторов, мы получим всё касательное расслоение. Если мы получим не всё касательное расслоение, а какую-то его часть, то сечения этой части уже будут образовывать алгебру Ли. Соответственно, это будет интегрируемое подрасслоение. Мы возьмём соответствующее ему интегральное подмногообразие и ограничим всё на него. Поэтому я предполагаю, что $\mathrm{gr}\ T_mM=\bigoplus \mathrm{gr}_i$ наделено структурой нильпотентной алгебры.

Такого рода неинтегрируемые распределения возникают довольно часто. Простейший пример такой. Рассмотрим форму $\alpha=dt-\sum(p_i\,dq_i-q_i\,dp_i)$, которая (в эквивалентном виде $\alpha=dt-\sum\ p_idq_i$) часто встречается в классической механике, и рассмотрим уравнение Пфаффа $\alpha=0$. Это уравнение выделяет распределение коразмерности 1; это распределение неинтегрируемо. Как это выяснить? Есть другой критерий неинтегрируемости распределений. Распределение D — это решение системы пфаффовых уравнений $\alpha_1=0,\ \ldots,\ \alpha_k=0$. Рассмотрим идеал $I\subset\Omega^*$ в пространстве дифференциальных форм, порождённый $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k$. Если этот идеал замкнут относительно внешнего дифференцирования, т. е. $dI\subset I$, то распределение D интегрируемое. А если не замкнут, то неинтегрируемое. В нашем случае $d\alpha=\sum dp_i\wedge dq_i$ не лежит в идеале, порождённом α. Значит, это распределение неинтегрируемое.

У Вершика и Гершковича есть обзор [VG1], где довольно много написано об истории этого вопроса. Но, на мой взгляд, в этом обзоре рассматриваются только некие частные вопросы теории неголономных распределений. А общая постановка задачи, на мой взгляд, великолепно изложена в малодоступных трудах Воронежского университета. У Вершика был доклад на Зимней школе в Воронеже. Текст этого доклада был опубликован в воронежском сборнике [V]. Чуть более доступен перевод этого текста на английский язык в Lecture Notes. К сожалению, на сети этого текста пока нет. И к ещё большему сожалению, этот замечательный текст Вершик никогда больше не переписывал и не переизлагал.

В обзоре Вершика и Гершковича перечисляются люди, внёсшие вклад в описание неголономных структур, от Герца до Вершика и Л. Д. Фаддеева. По пути упоминаются Карно, Каратеодори, Веблен, Гриффитс и многие другие. В России этим до войны довольно много занимался Вагнер. В трудах семинара Рашевского есть его работы на эту тему. Но никто из этих людей не пытался описать аналог тензора Римана в когомологических терминах. Отчасти это понятно, потому что сильно задолго до войны этих терминов, в общем, не было. А потом, скажем, в книге Шломо Штернберга [St], описание появилось, но не совсем такое. Там употребляется понятие *когомологий Спенсера*.

Как бы то ни было, *общего* рецепта описания аналога тензора Римана в неголономном случае никогда не было. Это не значит, что его никогда никто не вычислял. В частности, он был вычислен для супергравитации при $1 \leqslant N \leqslant 3$. Но непонятно, как его вычислять в произвольном случае, для произвольного многообразия или супермногообразия. Физики-теоретики, которые занимаются элементарными частицами и калибровочными полями, долгое время считали, что трудности, которые здесь возникают, связаны с тем, что мы работаем с супермногообразием. Это не так. Если мы поймём, как быть в случае многообразий, то для супермногообразий будет примерно то же самое, нужно лишь поставить (-1) в нужной степени.

Чего хотелось бы? Хотелось бы, чтобы когда мы этот аналог тензора Римана в каком-то виде напишем и получим чётные и нечётные параметры, то в разложении в ряд по нечётным параметрам присутствовал бы обычный тензор Римана и, возможно, ещё какие-то добавки. Оказывается, что если мы возьмём нашу картинку, то при любом $N \geqslant 1$ обычного тензора Римана не будет вовсе. Как же быть?

При $N = 1$ народ молча переходит от нестандартного формата $\mathrm{SL}(2|1|2)$ к стандартному формату $\mathrm{SL}(4|1)$, в котором разложение супертензора по компонентам содержит тензор Римана. Но это, видимо, не вполне честно и хотелось бы остаться в картине мира (2).

При $N = 2$ Огиевецкий и Сокачев в таком разложении того «супертензора», с которым все согласны, уменьшили параболическую подгруппу и тем самым увеличили само пространство. Если $N = 2$, то рассматриваются матрицы вида $\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline Q & X & \\ \hline T & \bar{Q} & \end{array}\right)$, где $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$. Если для этого суперпространства SM мы будем считать тензор Римана в неизвестном пока смысле, то после разложения в ряд на M будет обычный тензор Римана.

Про суперпространства и супералгебры я не собирался долго говорить. Я хотел рассказать о том, как устроен тензор, которого не было, и который нужно было определить для нужд супергравитации и неголономных систем. Что такое неголономные системы, я сказал. Теперь я скажу, где они появляются. Примеров неголономных систем невообразимое число. Вершик с Гершковичем в своём обзоре пишут, что математики мало обращают внимания на неголономные системы. Это не совсем верно. Смотря какие математики. Если тех, кто занимается аналитической механикой, считать математиками, то они обращали внимание на неголономные системы. А если даже не считать, то существует огромное количество статей и книг, написанных про неголономные системы. Количество этих книг и статей растёт ежегодно. Один из простейших примеров очень внятно описан в третьем томе избранных сочинений Пуанкаре [Poi]. Шар катится по шершавой плоскости. Раз плоскость шершавая, точка соприкосновения шара с плоскостью имеет скорость 0. Вообще, если что-то катится по чему-то, то это приводит к неголономным связям. Как мне рассказал один механик, это не совсем правильная неголономная связь. Она, конечно, не голономная, но она есть предельный случай самых разных голономных систем. А идеальная неголономная связь, которая точно имеет применения в народном хозяйстве, — это ракета, преследующая цель. Такая динамическая система неголономна, и она не является пределом голономных систем. (Я, правда, не помню, как это доказать.) Как бы то ни было, велосипеды и машины — примеры неголономных систем. Здесь всё время связи линейные. Если же вы возьмёте напрокат машину в Калифорнии, то она почти наверняка будет снабжена системой контроля скорости. Вы включаете её, скажем, на 50 миль/час, и едете. Вектор скорости бегает по сфере. Поэтому связь нелинейная. Теперь расслоение будет не каким-то линейным подрасслоением в касательном расслоении, а подрасслоением сфер. Как сформулировать понятие неинтегрируемости для такого расслоения, даже и вообразить невозможно. Тем не менее, это сделать можно, потому что если рассматривать инфинитезимальные окрестности, то слои можно рассматривать не как точки грассманианов *), а как бесконечномерные кривые грассманианы — подмногообразия, вложенные в многообразие. То есть всё равно можно перейти к похожему описанию, только нужно рассматривать не касательное расслоение, а, скажем, бесконечные струи этого касательного расслоения.

Ещё один пример придумал один аспирант из Королевского технологического института в Стокгольме [N]. Видимо, это самый простой пример, объясняющий некоторые поразительные свойства неголономных систем. Более замысловатые примеры, хотя тоже достаточно простые, можно найти в великолепной книге Козлова [Koz] и в [BF]. А этот пример вот такой. Представьте себе, что у вас есть детская железная дорога. Но она не овальная, как это обычно бывает, а просто круглая, чтобы проще было считать. Паровозик может двигаться по этой окружности. К нему на жёсткой сцепке прикреплена ось, а к этой оси прикреплена маленькая детская машинка. Если этот паровозик толкнуть пальцем, то он поедет, если трение не слишком сильное. И так он будет ездить некоторое время (трение не очень большое, но оно всё-таки есть). Предположим, что жёсткая сцепка устроена так, что если ось отклонилась на угол φ, то возникает сила, пропорциональная отклонению. Тогда если паровозик толкнуть в противоположном направлении, то машинка начнёт сопротивляться, ось отклонится и начнёт накапливаться энергия. Паровозик немного пройдёт в ту строну, куда его толкнули, а потом начнёт двигаться в том направлении, в котором ему приятнее двигаться. (Эта система имеет участки, где она гамильтонова, и участки, где она негамильтонова. Я сейчас не буду об этом подробно говорить, хоть это тоже интересно.)

Цель моего доклада — рассказать о некой программе (см. [Gr], [G1]), которая считает когомологии (и не только их), и поделиться своими трудностями, в расчёте на то, что кто-нибудь чем-нибудь поможет. А кроме того, рассказать про всякие удивительные феномены, связанные с неголономными системами. Например, в примере с паровозиком мы видим (а в других случаях это тоже иногда удаётся показать), что неголономная система имеет предпочтительное направление движения. Я это трактую так: поскольку мы живём на супермногообразии, а супермногообразие не простое, а, как мы видим, неголономное, то это объясняет, почему нельзя построить машину времени.

Ещё один пример неголономных структур описан в книге В. Н. Сергеева «Пределы рациональности» [S]. На мой взгляд, это совершенно

*) Грассманиан Gr_k^n — это множество линейных k-мерных подпространств в линейном пространстве размерности n.

поразительная книга. Я даже хотел зачитать на своей лекции страницы из этой книги. Он в ней рассказывает про экономику. Он напоминает о том, что ещё Каратеодори описывал статистическую термодинамику в терминах неголономных структур. На самом деле, не надо никакого Каратеодори. Если вы учили в школе физику, то там есть соотношение между давлением P, объёмом V и температурой T. Это соотношение записывается в терминах дифференциалов этих переменных. А это и есть пфаффово уравнение, однако — голономное. Каратеодори, в частности, сказал, что это идеальный газ — это неголономная система (для этого, как я уже сказал, достаточно читать учебник Пёрышкина для 7—8 класса, где, как и в более серьёзных учебниках типа книг Ландау и Лифшица, статистическую физику рассматривают при постоянной энергии или постоянном числе частиц, когда идеальный газ образует голономную систему). Однако сам факт, что статистическую термодинамику можно переформулировать (по крайней мере, в какой-то степени) в терминах неголономных связей, прошёл, насколько я понимаю, более или менее незамеченным. На мой взгляд, более или менее понятно, почему. Ну хорошо, можно переформулировать. Ну и что? Известно ([AKN]), что многие важные математические вопросы неголономных систем не разработаны, и их исследование проводится либо численно, либо сведением к голономному случаю. Однако такое сведение не всегда возможно. Например, при вычислении аналога тензора Римана. А зачем вообще считать тензор Римана? Если супергравитация, то понятно. (Его компоненты стоят в левой части уравнения супергравитации.) А вообще — зачем?

Дело в том, что аналог тензора кривизны ответствен за устойчивость. Если кривизна положительна (как на сфере), то близкие геодезические сходятся. А если кривизна отрицательна, то они расходятся. Тем самым, аналог тензора Римана важно вычислить для исследования устойчивости неголономных динамических систем (среди прочего: у него есть много разных других приложений). Это одна вещь. Вторая: как интерпретировать систему, которая задаётся пфаффовыми уравнениями? Что такое равновесие в такой системе? В обычной механике положение равновесия — это какая-то экстремальная точка. Как быть в неголономном случае? Здесь опять-таки одним из первых был Каратеодори. Из описания динамики в этом случае изгоняется время. Равновесие описывается как перемещение по допустимой поверхности уровня. Сергеев в своей книге [S] пытается изложить некоторые экономические понятия в терминах статистической термодинамики. Он, например, объясняет, почему «шоковая терапия» не обязана работать и, как мы видим, не сработала. Почему, скажем, экономика Китая и Вьетнама переживает подъём, в то время как в экономике многих стран бывшего Советского Союза — спад. У Сергеева [S] есть ещё некоторое количество любопытных примеров, которые все получаются как лёгкие следствия неголономности соответствующих систем.

Я рассказал про самые захватывающие, на мой взгляд, неголономные структуры — супергравитацию и рынки. Теперь я начну рассказывать про линейную алгебру. С чего всё это началось для меня? В середине 70-х годов Виктор Исаакович Огиевецкий рассказывал мне про супергравитацию, надеясь, что я что-нибудь отвечу по поводу того, почему там что-то не получается. А параллельно мы обсуждали с Сашей Гончаровым его диссертацию, которая называлась «Обобщённые конформные структуры». Дело было вот в чём. Рассмотрим метрику $g=(g_{\mu\nu})$ и рассмотрим преобразование, которое эту метрику умножает на число: $Xg=\lambda g$. Мы рассматриваем точку $m\in M^n$. Тогда метрика g задаётся матрицей билинейной формы, а X — линейное преобразование в касательном пространстве. Спрашивается, какие преобразования так себя ведут. Инфинитезимально их совокупность можно представить так:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{o}(n+2)=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1,$$

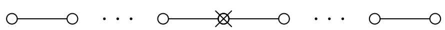
где $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{co}(n)$, т. е. пространство линейных преобразований, сохраняющих метрику и центр (умножения на константу), $\mathfrak{g}_{-1}$ состоит из частных производных, а $\mathfrak{g}_1$ — из так называемых конформных бустов.

Что такое обобщённые конформные структуры?

Давайте посмотрим на эрмитовы симметрические пространства. Они все устроены следующим образом: если мы рассмотрим эрмитово симметрическое пространство M как фактор комплексной группы G по параболической подгруппе P, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G как раз имеет вид

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1,$$

т. е. она градуирована, проста и градуировка идёт от -1 до 1. Можно выписать картинки, когда такое бывает. Такое бывает, когда мы берём обычный грассманиан. Параболическая подгруппа выбирается следующим образом. Нарисуем диаграмму Дынкина для SL_n и отметим один корень (рис. 1).



Р и с. 1. Диаграмма Дынкина для Gr_k^n

Параболическая подгруппа порождена всеми неотмеченными корневыми векторами, как положительными, так и отрицательными, и одним отмеченным, скажем, положительным.

Ещё есть два случая, связанных с ортогональной группой; они соответствуют квадрике Q_n. Можно также рассмотреть ортогональный грассманиан OGr; можно рассмотреть симплектический грассманиан LGr. Соответствующие диаграммы Дынкина с отмеченными корнями изображены на рис. 2. Есть ещё два исключительных случая, и всё.

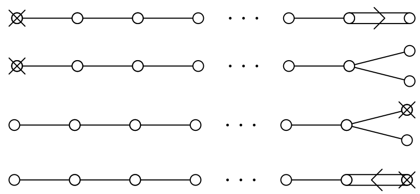


Рис. 2. Диаграммы Дынкина для Q_n (первые две), OGr и LGr

Когда я Гончарова слушал, мне было ужасно любопытно, а что будет, если мы отметим какую-нибудь другую точку на этих диаграммах? Что будет, в общем-то, понятно. Отметив другую точку, мы получим градуировку не от -1 до 1, а, например, от -2 до 2 или от $-d$ до d. Что означает такая структура, когда градуировка у нас большей глубины? Когда я задал этот вопрос Гончарову, он мне ответил, что его интересуют только компактные эрмитовы симметрические пространства, а для них градуировка только такая; градуировка большей глубины относится к чему-то другому. Мне было очень интересно понять, к чему именно.

Замечание. Теперь я знаю, к чему. Она относится к каким-то неголономным системам. Чрезвычайно любопытно было бы выяснить, какая геометрия связана с такими системами. Потому что в суперслучае мы делаем именно так: мы рассматриваем какие-то другие градуировки. (Даже, в частности, в стандартной модели при $N=1$ градуировка идёт от -2 до 2; на касательном пространстве *) задана структура нильпотентной алгебры типа гейзенберговской, состоящей из частей -1 и -2. При $N>1$ структура алгебры $\mathfrak{g}=\bigoplus\limits_{i<0}\mathfrak{g}_i$ сложнее.)

На рис. 1 и 2 — многообразия, которые рассматривал Гончаров. И он рассматривал только полные группы их автоморфизмов. Такие группы, на самом деле, не самые интересные. А с точки зрения уравнений Эйнштейна это просто полуфабрикат некой конструкции, которая нам нужна. Что я имею в виду? Давайте посмотрим, что такое структурные функции G-структур (т. е. аналоги тензора Римана). Эти структурные функции строятся таким образом. Мы строим алгебру Ли, сохраняющую

*) Точнее, на gr от него.

ту же структуру, что и $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, но порождённую не только линейными операторами: по определению

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{-1} &:= T_m M,\\
\mathfrak{g}_0 &:= \mathrm{Lie}(G),\\
\mathfrak{g}_1 &:= \{D \in \mathrm{Vect}(n)_1 : [\mathfrak{g}_{-1}, D] \subset \mathfrak{g}_0\},\\
\mathfrak{g}_2 &:= \{D \in \mathrm{Vect}(n)_2 : [\mathfrak{g}_{-1}, D] \subset \mathfrak{g}_1\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

То, что X лежит в $\mathrm{Vect}(n)_1$, означает, что мы рассматриваем векторные поля степени 1, т. е. $X = \sum a^{ijk} x_i x_j \partial_k$. Легко показать, что $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_* = \bigoplus\limits_{i \geqslant -1} \mathfrak{g}_i$ — подалгебра в алгебре Ли векторных полей. Эта подалгебра нужна нам вот зачем. Что такое аналог тензора Римана? Допустим, что $\mathfrak{g}_0$ — ортогональная алгебра Ли. В точке метрику (симметрическую матрицу) всегда можно привести к каноническому виду. Можно ли её привести к каноническому виду не в точке, а в некоторой инфинитезимальной окрестности? Разложим $g_{\mu\nu}(x)$ по степеням x:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \square x_i + \square x_i x_j + \ldots$$

Оказывается (это одно из следствий теоремы Леви—Чивита) что коэффициент при x_i всегда можно убить. Вообще говоря, он может оказаться ненулевым, но это просто связано с неграмотным выбором координат. Если их выбрать грамотно, то этих коэффициентов не будет. А коэффициент при $x_i x_j$ не всегда можно уничтожить, и тензор Римана как раз есть препятствие к этому. А коэффициенты при старших степенях x, оказывается, зависят только от тензора Римана. Поэтому если тензора Римана нет, то и там препятствий нет.

Так обстоит дело, когда $\mathfrak{g}_0$ — ортогональная алгебра Ли. В прочих случаях, когда $\mathfrak{g}_0$ это что-то ещё, алгебра $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*$ есть алгебра автоморфизмов той структуры, которую сохраняет линейная алгебра $\mathfrak{g}_0$. Препятствия, которые суть аналоги тензора Римана и которые мешают привести эту структуру к какому-то каноническому виду, описываются, как правило, с помощью так называемых когомологий Спенсера; когомологии Спенсера биградуированные. Одна из методических находок, на которые я хочу обратить внимание, это то, что вычислять когомологии Спенсера не следует. Это не очень правильный объект. Правильно считать лиевские когомологии. А именно, нужно считать когомологии

$$H^2(\mathfrak{g}_{-1}; (\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*). \tag{3}$$

Поскольку модуль коэффициентов — градуированная алгебра Ли, эти когомологии тоже градуированные. Когомологии (3) представляют собой кососимметрические функции на $\mathfrak{g}_{-1}$ с коэффициентами в $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*$. Линейная функция на $\mathfrak{g}_{-1}$ — это нечто, чему естественно приписать степень 1. Поэтому мы получаем в когомологиях градуировку $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} H^{k,2}$. Число k называется *порядком* структурной функции. Структурные функции порядка k определены тогда и только тогда, когда все структурные функции меньших порядков равны нулю. В супергравитации соответствующие условия (а именно, насильственное зануление структурных функций меньших порядков) называется связями Весса—Зумино. Пространство $H^{k,2}$ — это в точности пространство спенсеровских когомологий с номером $(k, 2)$. Поэтому если нас по какой-то причине интересуют именно спенсеровские когомологии (структурные функции порядка k), то мы их отсюда всегда можем извлечь. И, конечно, наоборот, посчитав $H^{k,2}$ для всех k, мы сможем написать $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; (\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*)$. Но спенсеровские когомологии можно считать только по определению (см. [St]), а для лиевских когомологий кроме определения есть пара теорем, облегчающих жизнь и позволяющих иногда получать ответы из некоторых общих соображений. Например, имеется теорема Бореля—Вейля—Ботта, которая говорит следующее. Пусть есть простая алгебра $\mathfrak{g}$ с такой $\mathbb{Z}$-градуировкой:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1.$$

Тогда число $\dim H^2(\mathfrak{g}_{-1}, V)$ одно и то же для любого конечномерного неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля V; это число равно количеству элементов группы Вейля, удовлетворяющих определённым условиям. В качестве V можно взять наиболее простой неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, а именно, тривиальный. Тогда получается, что поскольку $\mathfrak{g}_{-1}$ — коммутативная подалгебра, то $H^2(\mathfrak{g}_{-1})$ — просто вторая внешняя степень от $\mathfrak{g}_{-1}$. На самом деле, на пространстве $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; V)$ есть ещё дополнительные структуры: разбиение на веса. Но и их тоже можно вычислить. Поэтому случаи, когда картановское продолжение $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*$ пары $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$ есть простая алгебра, наиболее замечательные. И тут ответ можно дать сразу. Но это не есть тензор Римана; это какой-то конформный случай. А где тензор Римана? Тензор Римана будет, когда мы $\mathfrak{c}$ выкинем: заменим $\mathfrak{co}$ на $\mathfrak{o}$. Тогда оказывается, что картановское продолжение пары $(\mathfrak{g}_{-1}, \hat{\mathfrak{g}}_0)$, где $\hat{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{o}$, очень короткое. Отсутствует $\mathfrak{g}_1$; оно равно нулю. Стало быть, дальше тоже всё равно нулю. А когомологии соответствующего $\mathfrak{g}_{-1}$ с коэффициентами в $(\mathfrak{g}_{-1}, \hat{\mathfrak{g}}_0)_*$ вычисляются по когомологиям с коэффициентами в простой алгебре очень простым способом. А именно:

$$H^2(\mathfrak{g}_{-1}; (\mathfrak{g}_{-1}, \hat{\mathfrak{g}}_0)) = H^2(\mathfrak{g}_{-1}; (\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*) \oplus S_0^2(\mathfrak{g}_{-1}) \oplus \mathrm{Scal}.$$

Тензор Римана состоит из конформного тензора (лежит в $H^2(\mathfrak{g}_{-1}; (\mathfrak{g}_{-1}, \hat{\mathfrak{g}}_0)_*)$) и ещё чего-то. Это что-то (бесследовый тензор Риччи и скалярная кривизна) как раз нужны для того, чтобы написать аналог уравнений Эйнштейна, которые заключаются в том, что обе компоненты должны быть равны нулю (на самом деле, не совсем нулю, см. [LPS]).

Всё это Гончаров написал. Он описал конформно инвариантные компоненты, но не выписал явно их веса. Это несложно. Если их выписать, то мы увидим поразительную картину. Уравнение Эйнштейна обычно выписывается на грассманиане Gr_2^4. А на грассманиане Gr_{2n}^{4n} можно написать некий аналог уравнений Эйнштейна, который будет включать производные порядка $2n$. В уравнение Эйнштейна входят производные порядка 2, а здесь будут производные порядка $2n$. С одной стороны, это плохо (порядок высокий), а с другой стороны, это очень забавно: на грассманианах Gr_{2n}^{4n} аналоги уравнений Эйнштейна есть, а ни на каких других нет. И по виду уравнения очень похожи, см. [LPS].

Таким же образом можно посчитать супераналоги тензора Римана, но эти аналоги не имеют ничего общего с тем, что у физиков называется супергравитацией. А как же быть с супергравитацией, т. е. что делать в неголономном случае? Ответ очень простой. У нас есть структура нильпотентной алгебры на $\mathrm{gr}\, T_m M$. Назовём её $\mathfrak{g}_-$; это алгебра Ли, градуированная отрицательными числами. Добавим ещё $\mathfrak{g}_0$ — подалгебру в алгебре дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{g}$, состоящую из дифференцирований, сохраняющих градуировку. Можно определить конструкцию картановского продолжения пары $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)$. Это впервые было написано по другому поводу в работе Ирины Михайловны Щепочкиной в Докладах Болгарской Академии Наук в 1983 г. (см. [LSh], [Sh]). Если такое обобщённое картановское продолжение $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)_*$ подставить в (3), заменив -1 на $-$, то, по крайней мере в том случае, когда $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_-$ это то, что рассматривают физики в случае супергравитации при $N=1$, мы получим какие-то условия, которые, по моему мнению, должны были бы совпасть с тем, что получается у физиков. «Мы» — это Павел Грозман, который написал программу для вычисления этого дела, и я, который придумал это обобщение. Прежде чем просить Грозмана написать программу, я попросил Лену Полетаеву, которая умеет считать, посчитать для $N=1$, и у неё результат в точности совпал с тем, что получается у физиков. Потом Грозман написал программу, чтобы посчитать какие-то случаи при $N>1$. Уже при $N=1$ считать руками очень тяжело. Сначала мы эту программу решили протестировать при $N=1$. И у Грозмана ответ не совпал. Грозман спросил, в чём разница: «у всех» больше или у нас больше. Я ответил, что «у всех» больше. Он посмотрел на разницу и сказал, что это действительно коцикл, но этот коцикл — кограница. То есть даже Полетаева по случайности тоже сделала ту же ошибку, что и все: когомологический класс одного условия тривиален. Это так же, как кручение в римановом случае. Можно написать форму кручения, но когомологический класс этой формы нулевой; заменой координат его можно убить. Точно так же при $N=1$ все переписывают из статьи в статью условия Весса и Зумино полностью, а одно из них лишнее. Для меня это было чрезвычайно приятно. Это было примерно в 1991 или 1992 г. После этого мы посмотрели, что будет при большом N, например, при $N=4$. Как я уже говорил, стандартная картина $\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline Q & & \\ \hline T & \bar{Q} & \end{array}\right)$ не даёт возможности написать уравнения Эйнштейна на T, если выбросить всё, что зависит от Q и $\bar{Q}$. Надо что-то добавлять в центральный квадрат. Первым это заметил Огиевецкий; при $N=2$ это было исследовано. А при $N=4$ естественно написать $\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline Q & X & \\ \hline T & \bar{Q} & \end{array}\right)$, где $X=\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline T' & \end{array}\right)$, а T' — копия T. Мы так сделали и убедились, что тогда среди компонент тензора неголономной кривизны есть обычный тензор Римана. А при $N=8$ получается совсем забавная картинка, если взять

$$X=\left(\begin{array}{c|c} X' & \\ \hline Gr_4^8 & X'' \end{array}\right) \qquad \text{где } X'=\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline T' & \end{array}\right),\ \ X''=\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline T'' & \end{array}\right).$$

А именно: есть основное пространство Минковского M (с касательным пространством T) и, чтобы на нём получить уравнения Эйнштейна, после зануления всего, что зависит от Q и $\bar{Q}$, нужно добавить к M то, касательное пространство чего натянуто на матрицы X. Итак: есть основное пространство Минковского T и два его теневых варианта T' и T'', которые совершенно взаимозаменяемы (скажем, «ад» и «рай») и таинственный грассманиан Gr_4^8.

Заключение

Всё это замечательно, если не считать того, что если хотеть каких-то реальных применений в народном хозяйстве, то надо эти (да и любые) когомологии считать довольно бодро. А даже в довольно простом случае $N=8$ машина это всё считает примерно день. Это одна из основных проблем, с которой я хотел обратиться к слушателям за помощью. Как ускорить счёт когомологий?

Программа Грозмана [Gr] предназначена не только для того, чтобы считать когомологии. Она более универсальная. Она предназначена для разных (не то, чтобы любых, но очень многих) вычислений, в которых участвуют алгебры Ли, модули над ними и т. д. С её помощью мы считали, например, особые векторы в модулях Верма, инвариантные дифференциальные операторы (к чему сводится рассмотрение особых векторов в тензорных произведениях модулей Верма), соотношения между образующими, центральные расширения, реализации с помощью операторов рождения и уничтожения и др., см. [G1]. К сожалению, в настоящее время программа SUPERLIE [Gr] без Грозмана, в общем-то, не работает, и даже с Грозманом она считает довольно медленно. Ясно, что мы что-то делаем не так. Например, совершенно случайно я узнал, что выражение для дифференциала в когомологиях, во всех книгах, в том числе и в книге Д. Б. Фукса «Когомологии бесконечномерных алгебра Ли», для прикладных целей совершенно неправильно. Это определение можно написать с меньшим числом знаков и перетаскиваний чего-то мимо чего-то. С математической точки зрения это пустяк, а для машины — очень существенная разница. Кроме того, дифференциал задаётся очень разреженной матрицей. Мы совершенно не используем это обстоятельство. Кроме того, в когомологиях, которые получаются, есть естественная структура супералгебры Ли, но её никто не использует. Работу по её использованию мы только начали ([LLS]).

Список литературы

[AKN] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Динамические системы—3. — М.: ВИНИТИ, 1985. — (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 3). — С. 5—303.

[B] Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. — М.: МГУ, 1983.

[BF] Бутенин Н. В., Фуфаев Н. А. Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1991.

[GIOS] Galperin A. S., Ivanov E. F., Ogievetsky V. I., Sokatchev E. S. Harmonic superspace. — Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[Gi] Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. — М.: МЦНМО, 2001.

[Go] Гончаров А. Б. Инфинитезимальные структуры, связанные с эрмитовыми симметрическими пространствами // Функц. анализ и его прил. — 1981. — Т. 15, вып. 3. — С. 23—24. [Detailed version: Goncharov A. Generalized conformal structures on manifolds // Selecta Math. Soviet. — 1987. — V. 6, № 4. — P. 307—340.]

[Gr] Grozman P. SuperLie. — `http://www.equaonline.com/math/SuperLie`.

[G1] Grozman P., Leites D. SuperLie and problems (to be) solved with it. Preprint MPIM-2003-39. — `http://www.mpim-bonn.mpg.de`.

[G2] Grozman P., Leites D., Shchepochkina I. The analogs of the Riemann tensor for exceptional structures on supermanifolds. Preprint MPIM-2003-18. — `http://www.mpim-bonn.mpg.de`. [См. также: Grozman P., Leites D., Shchepochkina I. The analogs of the Riemann tensor for exceptional structures on supermanifolds // Фундаментальная математика сегодня. К десятилетию НМУ — М.: НМУ: МЦНМО, 2003. — С. 89—109.]

[G3] Grozman P., Leites D., Shchepochkina I. Defining relations for the exceptional Lie superalgebras of vector fields // The orbit method in geometry and physics (Marseille, 2000) — Boston: Birkhäuser, 2003. — (Progr. in Math., v. 213). — P. 101—146. — arXiv: math-ph/0202025.

[G4] Grozman P., Leites D., Shchepochkina I. Invariant operators on supermanifolds and standard models // Multiple facets of quantization and supersymmetry: Michael Marinov Memorial Volume / M. Olshanetsky, A. Vainstein, Eds. — River Edge, NJ: World Sci. Publishing, 2002. — P. 508—555. — arXiv: math.RT/0202193; ESI preprint 1111 (2001). — http://www.esi.ac.at.

[G5] Grozman P., Leites D., Poletaeva E. Defining relations for classical Lie superalgebras without Cartan matrices // Homology Homotopy Appl. — 2002. — V. 4, № 2, part 2. — P. 259—275 (electronic). — arXiv: math.RT/0202152.

[G6] Grozman P., Leites D. Defining relations for Lie superalgebras with Cartan matrix // Czechoslovak J. Phys. — 2001. — V. 51, № 1. — P. 1—21. — arXiv: hep-th/9702073.

[G7] Grozman P., Leites D., Shchepochkina I. Lie superalgebras of string theories // Acta Math. Vietnam. — 2001.— V. 26, № 1. — P. 27—63. — arXiv: hep-th/9702120.

[G8] Grozman P., Leites D. Lie superalgebras of supermatrices of complex size. Their generalizations and related integrable systems // Complex analysis and related topics (Cuernavaca, 1996). — Basel: Birkhäuser, 2000. — (Oper. Theory Adv. Appl., v. 114). — P. 73—105. — arXiv: math.RT/0202177.

[G9] Grozman P., Leites D. Lie superalgebra structures in $H^\bullet(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ // Czech. J. Phys. — 2004. — № 12. — P. 1—6.

[G10] Grozman P., Leites D. The nonholonomic Riemann and Weyl tensors for flag manifolds. Preprint.

[H] Hertz H. The principles of mechanics in new relation. — NY: Dover, 1956.

[Koz] Козлов В. В. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. — Москва—Ижевск: ИКИ, 2002.

[LLS] Lebedev A., Leites D., Shereshevskii I. Lie superalgebra structures in $C^*(\mathfrak{n};\mathfrak{n})$ and $H^*(\mathfrak{n};\mathfrak{n})$ // Lie groups and invariant theory: A. L. Onishchik Festschrift / E. Vinberg, Ed. — Providence, RI: AMS, 2005. — (AMS Translations—Series 2). — arXiv: math.KT/0404139.

[L] Leites D. On computer-aided solving differential equations and stability studies or markets // Теория представлений, динамические системы. XI. Спец. выпуск: [Докл. Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения Л. В. Канторовича, сост. в Санкт-Петербурге, 8—13 янв. 2004] / Под ред. А. М. Вершика. — 2004. — (Записки научных семинаров ПОМИ, т. 312). — С. 165—187.

[LPS] Leites D., Poletaeva E., Serganova V. On Einstein equations on manifolds and supermanifolds // J. Nonlinear Math. Phys. — 2002. — V. 9, № 4. — P. 394—425. — arXiv: math.DG/0306209.

[LSh] Leites D., Shchepochkina I. Classification of simple vectorial Lie superalgebras. Preprint MPIM-Bonn-2003-28. — www.mpim-bonn.mpg.de.

[SoS] Seminar on Supersymmetries (SoS) / D. Leites, Ed. — 1977—1990. Preprint.

[Ma] Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. — М.: Наука, 1984.

[N] Nordmark A., Essén H. Systems with a preferred spin direction // R. Soc. Lond. Proc. Ser. A. — 1999. — V. 455, № 1983. — P. 933—941.

[Poi] Poincaré H. Les ideés de Hertz sur la Mécanique // Rev. gén. sci. pures et appl. — 1897. — V. 8. — P. 734—743.

[Pol] Вариационные принципы механики / Под ред. Л. С. Полак. — М.: Физматгиз, 1959.

[P] Poletaeva E. Analogs of the Riemannian tensor on supermanifolds. Preprint MPIM-2003-19. — `http://www.mpim-bonn.mpg.de`.

[S] Сергеев В. М. Пределы рациональности. — М.: Фазис, 1999.

[S1] Sergeev V. The thermodynamical approach to market economy. With Appendices by D. Leites, G. Skorobogatov and A. Konyaeva, A. Vershik. Preprint.

[Sh] Shchepochkina I. The five exceptional simple Lie superalgebras of vector fields and their fourteen regradings // Represent. Theory. — 1999. — V. 3. — P. 373—415. [A short version: `hep-th/9702120`.]

[St] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.

[V] Вершик А. М. Классическая и неклассическая динамика со связями // Новое в глобальном анализе. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1984. — С. 23—48.

[VG] Gershkovich V., Vershik A. Nonholonomic manifolds and nilpotent analysis // J. Geom. Phys. — 1988. — V. 5, № 3. — P. 407—452. [См. также: Вершик А. М., Гершкович В. Я. Расслоение нильпотентных алгебр Ли над неголономным многообразием (нильпотенизация) // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. 10. — СПб.: Наука, 1989. — (Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 172). — С. 21—40.]

[VG1] Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Динамические системы—7. — М.: ВИНИТИ, 1987. — (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 16). — С. 5—85.

[We] Weil A. Théorie des points proches sur les variétés différentiables // Géométrie différentielle: Colloques Internationaux du CNRS (Strasbourg, 1953). — Paris: CNRS, 1953. — P. 111—117.

[WB] Wess J., Bagger J. Supersymmetry and supergravity. Second edition. — Princeton: Princeton University Press, 1992. — (Princeton Series in Physics). [Имеется перевод первого издания: Весс Ю., Бегер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. — М.: Мир, 1986.]

22 марта 2001 г.

А. М. Вершик

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ ТИПИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Я долго выбирал тему сегодняшнего доклада и решил, что здесь лучше рассказывать о чём-то очень конкретном, а не об общих теориях, какими бы красивыми они ни были. Я расскажу о нескольких конкретных задачах, которыми хотел бы заинтересовать молодёжь. Эти задачи не очень древние. Такой тип задач появился лет 30 с небольшим назад. Сейчас эта тематика расцвела, что можно было предвидеть заранее, поскольку подобные вопросы очень часто встречаются в самых разных областях. Я буду говорить, скорее, на геометрическом и комбинаторном уровне и совершенно не буду говорить подробно о связях, скажем, с теорией представлений, анализом, статистической физикой и т. д. Я просто хочу дать несколько примеров (три или больше), чтобы вы почувствовали вкус этих задач. Здесь даже русская терминология ещё не очень устоялась, термин «предельная форма» (буквальный перевод limit shape) употребляемый на Западе — это не очень хороший перевод на русский язык. Слово «форма» — очень перегруженный термин: есть дифференциальные формы, квадратичные формы и т. д. Поэтому можно подумать о чём-то другом. В этой лекции речь идёт фактически о визуальной форме в самом буквальном смысле — о предельном рисунке некоторой развивающейся конфигурации. Я даже когда-то предлагал говорить не «форма», а «рисунок» или предельная конфигурация.

Мы говорим о некоторой визуальной динамике. В начальный момент ничего не было. Потом появляется некий объект — конфигурация — который можно нарисовать или как-то изобразить. Есть какие-то правила, по которым развивается эта конфигурация (вероятностные или детерминистические). Нас интересует асимптотическое поведение: что будет в пределе с этой конфигурацией, с этой геометрической конструкцией, когда время идёт к бесконечности.

В такую общую постановку укладывается, конечно, всё на свете. Чтобы изучать содержательную математическую задачу, нужно как-то ограничить класс. Это и будет сделано. Как всегда, математики, беря большую проблему, возникшую из физики, механики, биологии и т. д., всё упрощают до карикатуры, а потом выделяют удобный и эстетичный частный случай, как правило, самый простой, и долго-долго его изучают, не слишком обращая внимание на то, насколько он сам по себе нужен и связан с исходными проблемами. Но и от этого на самом деле польза тоже есть, хотя и не та, на которую была надежда. Я, может быть, об этом упомяну дальше. Задачи, о которых будет речь, возникали из эстетических соображений и соображений естественности. Давно известно, что такой принцип отбора совсем неплохо работает в математике и действительно приводит к полезным приложениям.

Приведу сначала в очень общей форме схему постановки наших задач. Представьте себе, что на плоскости (или в многомерном пространстве, на многообразии и т. п.) задан класс фигур, иногда говорят, «зверей» — например, выпуклых многоугольников, конечных подмножеств целочисленной решётки, или каких-нибудь картинок, и эти звери эволюционируют во времени и пространстве по определённым правилам — растут, изменяются, увеличиваются в размерах. Параметром может быть время или какая-нибудь характеристика — протяжённость, площадь и прочее. Правила эволюции могут быть локальными (рост чернильного пятна — изменение в данной точке определяется её окрестностью) или глобальными — фигура подвергается нелокальному преобразованию. Они могут быть детерминированными — однозначная эволюция, или стохастическими, то есть шаг эволюции приводит с той или иной вероятностью к той или иной новой фигуре. Затем мы масштабируем весь процесс, нормируя фигуры в зависимости от нашего параметра (например, времени) и смотрим, какой же получился в пределе бесконечного времени результат — какая-то одна фигура (предельная форма, limit shape) или случайная форма, или вообще нет никакого осмысленного предела. Пример из биологии — эволюция колоний клеток или распространение инфекции; пример из занимательной математики — игра «жизнь» Конвея; пример из теории представлений — эволюция диаграмм Юнга, и многое, многое другое. Вы и сами можете предложить задачи такого типа. Перейдём к точно поставленным задачам.

Я начну с той задачи, которая объявлена в аннотации моего доклада.

1.

Предельная форма выпуклых целочисленных многоугольников

Исторически это не первая задача. Но, может быть, с неё следует начать, потому что она красива, очень просто формулируется, нетривиально решается, и решена была сравнительно недавно.

Рассмотрим решётку $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ и рассмотрим выпуклые целочисленные (в том смысле, что вершины лежат на решётке) многогранники в $\mathbb{R}^d$. Реально меня будет интересовать случай $d=2$, но пока будем рассматривать общий случай. Пусть $\mathrm{CLP}^d(n)$ — множество всех выпуклых целочисленных многогранников в $\mathbb{R}^d$, объём которых равен n. Лучше с самого начала считать, что многогранник задан с точностью до группы трансляций (сдвигов) и линейных преобразований, сохраняющих объём $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$, чтобы избавиться от лишних параметров. Мы не будем различать многогранники, которые могут быть переведены друг в друга с помощью этих аффинных преобразований решётки. Более того (я пропущу этот переход), можно считать, что мы рассматриваем многогранники в целочисленном кубе $I^m = \{0, 1, \ldots, m-1\}^d$. Ясно, что это не совсем одно и то же (множество классов многогранников с точностью до указанной группы — это не то же самое, что множество многогранников в кубе, но для дальнейших рассуждений различие между этими двумя вещами не существенно). Я буду рассматривать именно этот случай, т. е. рассматривать все выпуклые целочисленные многогранники в таком кубе, — для наших целей этого достаточно. Проверьте, что фиксируя центр тяжести многогранника и применяя линейное преобразование с определителем единица можно «загнать» многогранник в куб фиксированного размера, который зависит лишь от объёма многогранника.

Теперь я ставлю следующий вопрос. Пусть есть равномерное распределение на множестве всех таких выпуклых многогранников, т. е. все они равновероятны. Чтобы поставить предельную задачу, удобно всё загнать в настоящий единичный куб $[0, 1]^d$. Поэтому теперь рассматривается, вместо целочисленной, решётка с шагом $1/n$. Тогда куб I^n переходит в единичный куб, а многогранники рассматриваются на рациональной решётке. Это и есть то масштабирование, о котором я говорил раньше; это, конечно, удобно. Решётки при разных n никак не согласованы (понятно, что они в общем положении), тем не менее, предельная задача поставлена аккуратно, потому что теперь мы можем, ни о чём не думая, устремить n к бесконечности и задать главный вопрос: «Существует ли предельная форма?» Заметим, что никакой прямой эволюции здесь нет, хотя её и можно определить. Иначе говоря, мы не определяем, как из многогранника объёма n получить детерминированный или случайный многогранник объёма $n+1$. Мы просто задаём, как говорят, статистику на множестве многогранников (в данном случае — равномерную при каждом n) и ставим вопрос о её пределе. Заметим, что параметр задачи уже не объём многогранника, а размер (объём) куба, в котором все они содержатся.

Что значит существование предельной формы? Вопрос уже предполагает гипотетический ответ. А именно, будем говорить, что такая предельная форма существует, если можно указать такое выпуклое множество $\Omega \subset [0,\ 1]^d$, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер N так, что если $n > N$, то

$$\#\{A \in \mathrm{CLP}^d(n)\colon r(A,\ \Omega) < \varepsilon\} \geqslant (1-\varepsilon)\#\mathrm{CLP}^d(n).$$

Теперь $\mathrm{CLP}^d(n)$ — то же самое, что было раньше, но только для решёток с шагом $1/n$ (вместо объёма n). Иными словами, если рассмотреть все многогранники A из множества $\mathrm{CLP}^d(n)$, для которых расстояние по Хаусдорфу между множествами A и Ω меньше ε, то это будут почти все многогранники из $\mathrm{CLP}^d(n)$. Поскольку мы говорили о равномерной мере, то существование предельной формы означает, что по равномерной мере вероятность для выпуклого многогранника попасть в ε-окрестность множества Ω будет почти 1.

Если это так и есть, то тогда Ω и называется *предельной формой*. Но никто не сказал, что это так. Более того, мы до сих пор не знаем, так ли это для всех размерностей d и даже для размерности 3. Мы знаем, только, что получается при $d=2$, и я сейчас об этом расскажу.

В принципе, могло бы быть и так, что никакой предельной формы не существует, и в пределе выпуклое множество в пределе будет, так сказать, «дышать». То есть какая-то часть многогранников стремится приблизиться к одной форме, а другая часть пойдёт к другой. И никто не знает, не будет ли так при $d>3$. Есть другие задачи, где дело обстоит именно так. Если же ситуация такая, как сказано выше, т. е. предельная форма существует, то с точки зрения общей теории такой случай можно назвать «эргодическим», а сам факт стремления в том или ином смысле к предельной форме — законом больших чисел. Только этот закон совсем не похож на те, которые обычно изучают в традиционной теории вероятностей. А если же предельной формы нет, то возникает вопрос о существовании «предельной меры», т. е. о случае, «дышащей» предельной формы. Случай существования предельной формы соответствует тому, что предельная мера на формах сосредоточена в одной «точке», а именно, в предельной форме. Но может быть ещё и так, что даже и предельной меры не существует. К счастью такие патологии пока не встречаются в хороших задачах.

Ближайшие 10 минут я посвящу формулировке ответа для $d=2$ и двум методам, которые приводят к решению этой задачи. Моя цель, пожалуй, — проиллюстрировать разные методы. Ответ здесь несколько удивительный. Повторю, пока мы умеем решать только задачу для $d=2$. Для $d>3$

единственное, что мы нашли — это асимптотику числа многогранников в $\mathrm{CLP}^d(n)$, что тоже является нетривиальной задачей. Такая оценка сначала была дана В. И. Арнольдом в 80-м году *). Он, правда, не знал, что до этого были работы на эту тему (Р. Эндрюс (Andrews)). Потом эта оценка была уточнена. Точная по порядку оценка для произвольного d была получена в нашей работе с Имре Барань **) и это оценка только в логарифмическом порядке, и к тому же без точной константы. А для $d=2$ можно дать точную оценку логарифма с константой. В 1980 году я поставил задачу о предельной форме в том виде, как это было сформулировано выше. Было ясно, что оценка числа многогранников здесь пригодится. Именно она и позволила довести до конца решение задачи о предельной форме для $d=2$.

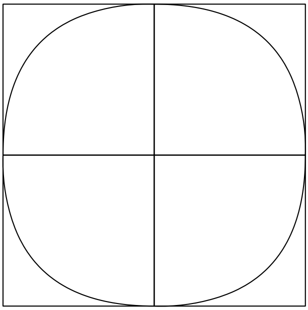


Рис. 1. Предельная форма при $d=2$

Оказывается, логарифм числа выпуклых целочисленных многогранников объёма n^d с точностью до аффинных преобразований (или, что тоже самое, число выпуклых многогранников в единичном кубе с вершинами на решётке с шагом $1/n$) растёт как

$$n^{d(d-1)/(d+1)}$$

— это двусторонняя оценка (без констант). Для $d=2$ известна даже константа, она равна $3\zeta(3)^{1/3}$, где $\zeta(\cdot)$ — дзета функция Римана. А отсутствие точной константы (если она есть) для $d>2$ как раз и не даёт возможности решить задачу для старших размерностей.

При $d=2$ полный ответ состоит в следующем: предельная форма ограничена кривой $\sqrt{1-|x|}+\sqrt{1-|y|}=1$ (рис. 1). Проще можно сказать так. Возьмём «вогнутую параболу» $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ и перекинем её, т. е. отразим от хорды и сделаем выпуклой; четыре её дуги в единичном квадрате составляют нужную кривую.

Что здесь удивительного? Повторяю, совсем неясно, почему такая форма должна существовать. Ведь мы начали с того, что взяли просто равномерное распределение на всех выпуклых многоугольниках. И совершенно непонятно, почему все они концентрируются около одной кривой.

*) Арнольд В. И. Статистика целочисленных выпуклых многоугольников // Функц. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14, вып. 2. — С. 1—3.

**) Bárány I., Vershik A. M. On the number of convex lattice polytopes // Geom. Funct. Anal. — 1992. — V. 2, № 4. — P. 381—393.

Сейчас я открою некую причину, почему получается такой удивительный ответ. Но хочу заранее сказать, что этот ответ связан с тем, что мы с самого начала поставили задачу в квадрате, и вид ответа определяется ролью граничных условий. Если ставить свободную задачу, т. е. фиксировать только площадь, то там ответ другой (случайный эллипс единичной площади; я ещё вернусь к этому). Решение задачи в квадрате является шагом к получению решения свободной задачи.

Я хочу показать, как решается эта задача, и даже двумя способами. Первый способ был предложен мной и Имре Барань. Он связан с аналитикой, которая полезна сама по себе, а именно с теорией векторных разбиений. Позднее Синай взглянул на это с точки зрения статистической физики и, применяя идеи большого канонического ансамбля, дал другую схему решения. Об этом ещё пойдёт речь дальше; метод большого канонического ансамбля, изобретён физиками давно и очень полезен во всех таких вопросах. Но давайте сначала поговорим про наш метод, в каком-то смысле элементарный. Элементарный не в том смысле, что он не использует серьёзные, например, комплексные аналитические методы и формулу Коши; но я думаю, что его вполне можно назвать элементарным. Давайте немного изменим задачу. Прежде всего, вместо многоугольника, т. е. замкнутой выпуклой ломаной, я буду рассматривать только одну дугу. Я поставлю задачу так. Давайте рассмотрим выпуклые ломаные, которые соединяют точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$ и вершины которых лежат на решётке с шагом $1/n$. В чём здесь роль размерности? Размерность играет ту роль, что на плоскости множество таких ломаных очень хорошо параметризуется, в отличие от многомерного случая.

Эта параметризация строится следующим образом. Вернёмся на время к целочисленным решёткам, т. е. рассмотрим выпуклые ломаные, которые соединяют точки $(0, 0)$ и (n, n), и вершины которых имеют целочисленные координаты. Каждой ломаной можно сопоставить разложение вектора (n, n) вида $(n, n) = \sum (m_i, k_i)$, где (m_i, k_i) — целочисленные векторы. (Сумма означает сумму по координатам, т. е. $n = \sum m_i$ и $n = \sum k_i$.) Это разложение неупорядоченное; за порядком я не слежу. Дело в том, что если я возьму неупорядоченное разложение, а потом упорядочу по возрастанию угла, то тем самым из всех возможных разложений я выберу одно. Поэтому между классами эквивалентности разложений по всевозможным перестановкам слагаемых и выпуклыми кривыми есть взаимно однозначное соответствие; исключение — тот случай, о котором я сейчас скажу. Фактически у нас есть то, что называется *разбиением*, только не для одного натурального числа, а для двух чисел, т. е. то, что называется *векторным разбиением*. Может случиться, что на рёбрах есть целые точки. Тогда упорядочение по углу не вполне определено — как упорядочить коллинеарные стороны? Так что биекции нет: если на ребре несколько целых точек, то непонятно, какие точки считать раньше. Это нужно исключить. Давайте с самого начала считать, что $(m_i, k_i)=1$, т. е. числа m_i и k_i взаимно просты. Если эти числа взаимно просты, то проблема исчезает — целых точек нет, каждому слагаемому отвечает в точности одна сторона. Такие векторные разбиения, в которых нет пропорциональных слагаемых, я буду называть *строгими*. Мы получаем биекцию между выпуклыми кривыми и строгими (неупорядоченными) разбиениями вектора (n, n) в сумму целочисленных векторов.

Это первый шаг. С него всё и началось. Дальше вступает в игру комбинаторная теория разбиений, которая сейчас становится популярной; тогда она была не очень известной. Я о ней скажу два слова.

Что нам нужно? Нам нужно знать число таких кривых, т. е. число этих разбиений. Пусть $p_2^{\text{стр}}(n, q)$ — число строгих разбиений вектора (n, q). Для $p_2^{\text{стр}}(n, q)$ есть производящая функция. Но сначала я напомню, что такое обычные разбиения натурального числа, и напомню формулу Эйлера. Мы рассматриваем неупорядоченные разбиения числа n в сумму натуральных слагаемых: $n=n_1+\ldots+n_k$. Для функции $p_1(n)=p(n)$ есть знаменитая производящая функция $\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-x^k}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$. Это — стандартная тема и одна из основных формул комбинаторной теории чисел. Доказательство этой формулы — несложное упражнение для школьников.

Какая же формула будет здесь? Оказывается, что здесь она не намного сложнее. Сама формула очень похожа на предыдущую:

$$\prod \frac{1}{1-x^k y^s}=\sum_{n,q=0}^{\infty} p_2(n, q)x^n y^q.$$

Это формула для всех двумерных векторных разбиений, а нам нужны только строгие. Разница будет в том, что произведение берётся не по всем, а только по взаимно простым k и s:

$$\prod_{(k,s)=1} \frac{1}{1-x^k y^s}=\sum_{n,q=0}^{\infty} p_2^{\text{стр}}(n, q)x^n y^q.$$

Такова нужная нам производящая функция.

Тем самым мы перешли в область теории асимптотических формул, метода Лапласа, метода перевала и т. д. Как найти асимптотику коэффициентов Тейлора, по известной производящей функции? Для одного переменного это классическая тема, которую начали Харди и Рамануджан.

Известно, что для функции $p(n)$ получается асимптотика

$$\ln\, p(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}(1 + o(1)).$$

На самом деле, Харди и Рамануджан, а позже Радемахер, нашли весь асимптотический ряд. Это знаменитая тематика. О ней, наверное, многие читали в воспоминаниях Харди и Литлвуда о Рамануджане (о том, как он угадал 1/24-ю). Почитайте эти воспоминания, это замечательный эпизод истории математики 20-века, иллюстрирующий, как в нашей науке могут проявляться и появляться самые оригинальные таланты.

Для двух и более переменных дело обстоит гораздо сложнее. Сложность в том, что асимптотика уже существенно зависит от соотношения между n и q. Если одной из этих переменных нет, то мы находимся в рамках случая одной переменной, а если $n = q$ (как у нас), то асимптотика будет совсем другая. В этом причина сложности и неразработанности метода перевала для многих переменных. Я скажу только ответ. Он может быть получен сравнительно простым обобщением одномерного случая, поскольку нас интересует диагональная асимптотика. Более точно, этот ответ верен для области, когда $\sqrt{q} \leqslant n \leqslant q^2$. К счастью, нам больше ничего не нужно. Асимптотика такая:

$$\ln\, p_2^{\text{стр}}(n, q) = 3\sqrt[3]{\zeta(3)}(nq)^{1/3}(1 + o(1)).$$

Вот что даёт обычная техника. Если $n = q$, то получается $Cn^{2/3}$, где C — константа. Так получается очень важный показатель 2/3, который многое объясняет.

Мы решили аналитическую часть. Теперь мы знаем, сколько выпуклых кривых соединяют точки (0, 0) и (n, n). После этого мы можем решать разные задачи. Задача, которую я сейчас буду решать, даже чуть более общая, чем то, что нам нужно. А именно, будет дан некий вариационный принцип, вытекающий из этой оценки. Я буду искать кривую как решение вариационной задачи. А потом буду оправдывать, почему это именно то, что нужно.

Вариационная задача такая (давайте ещё несколько изменим её постановку). Я просто рассмотрю какую-нибудь произвольную выпуклую кривую $y = f(x)$, окружу её ε-полоской, и задам вопрос: «Сколько выпуклых ломаных содержится в ε-полоске данной кривой?» Я как бы глобализую задачу. Первоначально мы ничего не фиксировали, кроме начальной и конечной точек, т. е. в каком-то смысле решали локальную задачу, поэтому, если мы взяли не две далёкие точки, а какой-то маленький квадратик и спросили, сколько выпуклых кривых в этом маленьком квадратике, то ответ уже дан. А теперь я глобализую задачу: я считаю, что у меня есть какая-то кривая, и я хочу выяснить, сколько есть выпуклых ломаных в окрестности этой кривой. Оказывается, что выписанная выше оценка немедленно даёт ответ, который на первый взгляд выглядит совершенно удивительным. Во всяком случае, когда я провёл вычисления и нашёл эту формулу, я был очень удивлён, может быть и потому что по неграмотности не знал, что нечто подобное встречалось уже довольно давно. Впрочем, если бы и знал, — всё равно это удивительно. Ответ состоит в следующем. Пусть есть кривая γ (параметр я не указываю, потому что я дам ответ в инвариантной форме, не зависящей от параметризации кривой). Пусть $\mathrm{CLP}_n(\gamma, \varepsilon)$ — количество выпуклых решёточных (с шагом $1/n$) ломаных в ε-окрестности кривой γ. Оказывается, что если $\varepsilon \ll 1$, то

$$\ln \mathrm{CLP}_n(\gamma, \varepsilon) = 3\sqrt[3]{\zeta(3)}n^{2/3} \int\limits_{\gamma} \varkappa(s)^{1/3} ds.$$

Здесь $\varkappa(s)$ — кривизна кривой как функция точки на кривой, s — натуральный параметр.

Что такое $\int\limits_{\gamma} \varkappa(s)^{1/3} ds$? Если записывать в обычной форме, то это будет просто $\int\limits_0^1 f''(x)^{1/3} dx$. Это выражение в дифференциальной геометрии давно встречалось, насколько я понимаю, с 20-х годов. Например, оно приведено во втором томе книги В. Бляшке «Дифференциальная геометрия», который почему-то не переводился на русский язык. Это выражение называется *аффинной длиной* кривой. Не знаю, преподаётся ли в Москве аффинная дифференциальная геометрия, а у нас в Питере её как будто никто, по-моему, даже и не знал. Но об этом есть, кстати, в многотомном американском учебнике Спивака по дифференциальной геометрии. Там аффинной дифференциальной геометрии посвящено примерно страниц 20. Это совершенно особая геометрия: аффинная длина кривой выражается через вторую производную, кривизна — через четвёртую производную, и всякие другие ужасы. На русском языке есть только книга Широковых отца и сына, которую очень трудно читать; она написана в координатных традициях. Лучше читать книгу Бляшке, почитайте. Там есть замечательная интерпретация аффинной длины в терминах площадей и огибающих.

И всё же всё это удивительно. Начали мы с целочисленной задачи, задачи о решётках, а получили выражение, которое появлялось в дифференциальной геометрии, где никаких решёток не предполагается, а аффинная длина возникает в связи с совершенно другим.

Я сейчас приведу элементарную задачу, которая показывает, почему выскакивает кубический корень из второй производной. Мы должны глобальную задачу свести к локальной. Нужно взять кривую, взять производную, и посчитать количество выпуклых кривых в некотором параллелограмме. Я скажу подробнее, как здесь появляется вторая производная. Забегая вперёд, я хочу сказать, что $\int\varkappa(s)^{1/3}ds$ — это и есть аффинная длина, а кривая $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, которую я рисовал в начале лекции, — это парабола, которая в аффинной геометрии является геодезической. Поэтому мы решили задачу о геодезических. Кстати, обычная кривизна в точке — это евклидов, но не аффинный инвариант, а если взять интеграл от какой-то степени кривизны, то аффинным инвариантом будет только $\varkappa(s)^{1/3}$; это — единственный аффинный инвариант в том смысле, что показатель отличный от $1/3$ не даёт аффинного инварианта. Поэтому можно было предвидеть, что если ответ на эту задачу в дифференциальных терминах есть, то он должен быть именно таким; никакого другого аффинно инвариантного функционала второго порядка нет.

Дальше можно было бы сказать так: «Мы вычислили асимптотику числа ломаных в окрестности любой дважды дифференцируемой кривой, а теперь давайте просто решим вариационную задачу, найдём максимум функционала — числа кривых, по всем кривым.» Это легко сделать, — функционал очень простой — и получится указанная кривая. Но этого, конечно, не достаточно для доказательства, потому что мы с самого начала предположили, что искомая кривая — гладкая (C^2), т. е. у неё есть вторая производная. Почему не может быть так, что какое-то количество многогранников концентрируется около какой-то негладкой кривой? Этот вопрос требует отдельного рассмотрения, и можно показать, что негладких кривых, около которых происходит накопление, нет, но я не буду на этом останавливаться. Последний вопрос тем более актуален, что ввиду теоремы Ярника (о ней сейчас скажу подробнее) как раз не очень гладкие выпуклые кривые содержат много целых точек, во всяком случае, больше, чем гладкие, однако предельная форма оказывается гладкой и даже алгебраической.

Между прочим, тут я должен упомянуть, что вся эта тематика связана со старыми задачами о числе целых точек на выпуклой кривой. Самая сильная теорема, которая на этот счёт известна, — это теорема 20-х годов Ярника, ученика Ландау (Эдмунда — теоретика чисел, а не Льва — физика). Согласно этой теореме существует кривая (почти C^2 — у неё вторая производная может быть бесконечной на нигде не плотном множестве), на которой для бесконечного числа знаменателей шага решётки n число целых точек будет как раз равно $n^{2/3}$. Метод, которым решалась наша задача, позволяет чуть-чуть усилить результат Ярника. А именно, доказать, что существует кривая ровно класса C^2. Но эта оценка точная: по Ярнику показатель $2/3$ нельзя увеличить в классе гладких кривых. Наоборот, есть целая серия работ (Бомбьери, Шмид и др.), в которых показано, что если увеличивать гладкость (например, взять C^3), то число целых точек будет всё меньше и меньше для C^3 — не больше, чем $n^{3/5}$. А для аналитических кривых их не более $n^{1/2+\varepsilon}$. Можно ли убрать ε — до сих пор не известно. Легко видеть, что та самая парабола, как у нас, имеет для бесконечного числа знаменателей n как раз $\sqrt{n}$ точек. На то она и парабола. Но лучшей кривой пока не известно, скорее всего, парабола и здесь самая оптимальная.

После того как мы решили эту по существу локальную задачу, уже нетрудно решить глобальную задачу. Здесь всё получается так, как я уже говорил, и я продемонстрировал вам решение.

Что же дальше? Здесь очень много интересных задач. Например, можно налагать дополнительные естественные ограничения на класс многоугольников — фиксировать рост числа вершин или евклидову длину (периметр и др.) и искать предельную форму в этих случаях. Видимо, изложенные методы позволяют сделать всё это, но пока этим никто не занимался. Можно (и нужно) изучать поведение флюктуаций, т. е. отклонений случайного многоугольника от предельной кривой — это сделано в последующих работах, равно как и исследование больших отклонений, о чём я ещё скажу.

К сожалению, этот метод совершенно не годится для многомерного случая. Проблема в том, что в многомерном случае нет соответствующей геометрической параметризации. У нас была использована хорошая параметризация выпуклых ломаных с помощью векторных разбиений; было использовано также наличие хорошего выражения для производящей функции. А дальше изучалась сама производящая функция. Никакого способа параметризовать выпуклые многогранные поверхности (скажем, трёхмерные) я не знаю. Это серьёзный геометрический вопрос.

Есть гипотеза, что в многомерном случае в ответе стоит аффинный инвариант поверхности:

$$\int_{\gamma} (\text{гауссова кривизна})^{\frac{d-1}{d+1}}\, ds.$$

Здесь $\dfrac{d-1}{d+1}$ — единственный показатель, для которого получается аффинный инвариант. Постановка задачи та же самая: мы берём выпуклый многогранник и смотрим, сколько выпуклых многогранников с вершинами на решётке лежит в его ε-окрестности. Это — открытый вопрос. Но даже если предположить, что ответ такой, никто не знает решения соответствующей вариационной задачи.

Я обещал элементарную задачу. Именно эта задача была для нас с Барань первоначальным способом найти эту кривую. Задача такая. Возьмём квадрат со стороной 1, проведём произвольную прямую, пересекающую квадрат, отсекающую его юго-западный угол и возьмём на ней точку x. Затем построим два параллелограмма (рис. 2). Требуется найти геометрическое место пар (прямая, точка x на ней), для которых $\Pi_1^{1/3}+\Pi_2^{1/3}=1$ (Π_1 и Π_2 — площади параллелограммов). Ответ в этой задаче такой: оказывается, прямые на которых такие точки существуют, имеют параметры (отрезки, которые отсекает прямая на осях) удовлетворяющие условию $a_1+a_2=1$, и на каждой такой прямой существует только одна точка, удовлетворяющая нужному условию, а именно $x_1=a_1^2$ и $x_2=a_2^2$. А геометрическое место всех таких точек и есть та самая кривая; так она и возникает. Два параллелограмма разлагают глобальную задачу на локальные. Я говорил о том, что мы решили локальную (линейную) задачу, а теперь всё нужно склеить из малых параллелограммов. Склейка как раз и состоит в построении этой кривой.

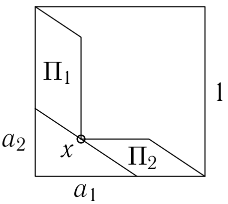


Рис. 2. Два параллелограмма

Для задачи без краевых условий (когда мы фиксируем площадь многоугольника, но не настаиваем на том, что он лежит в квадрате) ответ несколько удивит своей обыденностью, если сравнивать с предыдущей задачей. Как говорилось, можно фиксировать центр тяжести, закрепив его в начале координат. Оказывается, буквально одной предельной формы нет. Ответ будет такой: это будет распределение на всех эллипсах данной площади. Но если вспомнить о группе $SL_2(Z)$, которая действует на множестве эллипсов, сохраняя их площадь, то мы получим одну орбиту этого действия и её представителем можно считать круг единичной площади. Поэтому роль граничных условий здесь очень существенна. Барань занялся задачей, которая из этого естественно вытекает. Давайте вместо квадрата возьмём любой многоугольник и поставим для него ту же самую задачу о типичной форме вписанного целочисленного многоугольника. Оказывается, что в ответе получится фигура, ограниченная выпуклой кривой, склеенной из дуг той же самой параболы и ещё, возможно, каких-то прямолинейных кусочков (рис. 3). Эта парабола всегда будет строительным материалом для общего решения.

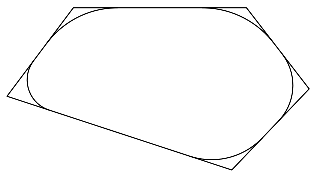


Рис. 3. Задача в многоугольнике

2.

Предельная форма разбиений натуральных чисел (и диаграмм Юнга)

Эта тематика, в общем, более ранняя (70-е годы). Она возникает и в связи с разбиениями натуральных числа, и в связи с представлениями симметрической группы. Кроме того, она имеет прямое отношение к статистической физике идеального газа. О чём идёт речь? Теперь я вместо выпуклых многоугольников или многогранников рассматриваю диаграммы Юнга. Диаграмма Юнга — это тоже некая решёточная конфигурация, которая устроена как подграфик монотонной кусочно постоянной функции. В разных странах разные традиции изображать диаграммы Юнга (рис. 4). По этому поводу в своей известной книге о симметрических функциях Иан Макдональд, делая различие между английской и французской интерпретацией, пишет, что француз, для того чтобы читать его книгу, должен перевернуться на 180 градусов (вверх ногами) и смотреть на книгу в зеркале. Мы чаще всего используем диаграммы, повёрнутые на 45°; иногда это самый правильный способ.

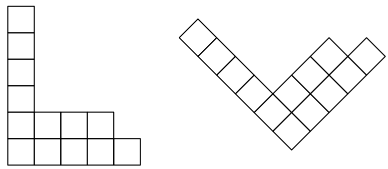


Рис. 4. Диаграммы Юнга

Число диаграмм Юнга с n клетками равно $p(n)$, потому что если интерпретировать строки диаграммы как слагаемые в разбиении, то мы получим неупорядоченное разбиение $n = n_1 + n_2 + \ldots$

Множество всех диаграмм Юнга с n клетками обычно записывают так:

$$\mathcal{P}_n = \{\lambda,\ \lambda \vdash n\}.$$

Имеется много различных естественных статистик на этом множестве. Первая естественная статистика — это, конечно, равномерная статистика. И именно с неё я начал занятия этими вопросами. Но ещё раньше, правда, немножко в другом контексте, этим занималась школа Эрдёша. Ими получены очень глубокие и интересные асимптотики. Различие заключается в том, что они, как правило, изучали какой-нибудь один функционал. Например, самая замечательная теорема Эрдёша (Эрдёш, Ленер, 1940 г.) состояла в следующем. Раз разбиения неупорядоченные, то давайте их упорядочим, и рассмотрим такой вопрос: «Какова асимптотика максимального слагаемого?» Если считать, что распределение равномерное на всех разбиениях длины n, то можно взять в качестве функционала размер максимального слагаемого. Ответ, который нам вскоре понадобится, таков: размер *) максимального слагаемого растёт как $C\sqrt{n}\ln n$; константу C Эрдёш с соавтором тоже вычислил. Тут эргодический случай: если отбросить $\varepsilon p(n)$ разбиений, то на всех остальных максимальное слагаемое, делённое на $C\sqrt{n}\ln n$, будет отличаться от единицы меньше, чем на ε.Логарифм здесь очень существен. Сейчас мы увидим, как это связано с задачей о предельной форме.

Задача о предельной форме была, видимо, впервые поставлена мной, примерно лет 20 назад. Вопрос такой: какая после нормировки **) будет предельная форма у случайного разбиения?

Решение этой задачи можно вывести из некоторых оценок венгерских математиков, но можно вывести проще и более убедительно. Ответ состоит в следующем: предельная форма задаётся уравнением

$$e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}x}+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}y}=1. \tag{1}$$

Это лишь один из многочисленных примеров. На самом деле моими учениками было решено большое количество задач с разными статистиками и, в частности, рассмотрен класс так называемых *мультипликативных статистик*. Я о нём скажу несколько слов, потому что он связан со статистической физикой идеального квантового газа.

Что здесь происходит? Возьмём равномерное распределение на $\mathcal{P}_n$. Как ввести координаты на пространстве разбиений, тут очень много вариантов. Давайте, например, возьмём разбиение λ и рассмотрим его характеристики, называемые *числами заполнения*. Пусть $r_k(\lambda)$ — количество слагаемых, равных k. Это просто кратности равных слагаемых, Разбиение теперь будем параметризовать этими числами; ясно, что $\sum\limits_k kr_k=n$. Затем, следуя традициям статистической физики, перейдём от малого ансамбля к большому, т. е. вместо того, чтобы рассматривать диаграммы с n клетками при фиксированном n, мы сразу рассмотрим диаграммы с произвольным (случайным) количеством клеток. И при этом будем смешивать диаграммы с параметром x, где $0<x<1$. Иначе говоря, мы возьмём смесь всех диаграмм; на каждой диаграмме возьмём равномерное распределение (при данном n), а их всех смешаем, например, с геометрической вероятностью, пропорциональной x^n. *Большим каноническим ансамблем* я буду называть пространство $\mathcal{P}=\bigcup\limits_n \mathcal{P}_n$, с той или иной мерой на нём, которая индуцирует на малом ансамбле равномерную меру. С точки зрения ста-

*) Равно как и число слагаемых, потому что равномерная статистика симметрична относительно диагонали, а у диаграммы Юнга одна сторона — размер максимального слагаемого, а другая сторона — число слагаемых.

**) Понятно, какую нормировку нужно взять: нужно всё поделить на $\sqrt{n}$.

тистической физики число n — аналог энергии, поэтому на разбиение n нужно смотреть как на разложение энергии конфигурации по энергиям отдельных частиц. Слово *мультипликативная* относится к следующему определению. Будем называть статистику *мультипликативной*, если числа заполнения $r_1(\lambda)$, $r_2(\lambda)$, …, как функции на большом ансамбле независимы в вероятностном смысле относительно этой статистики, т. е. как случайные величины на большом ансамбле с этой мерой μ. Заметим по ходу дела, что асимптотически кратности типичных слагаемых типичного разбиения близки к единице в любой из мультипликативных статистик. Это утверждение можно сделать точным.

Теперь мы можем спросить, какие же распределения у каждого из этих чисел в отдельности (какова вероятность по этой мере того, что $r_i(\lambda)=k$). Запишем

$$\mathrm{Prob}\{r_i(\lambda)=k\} = cx^{ik},$$

где x, $0<x<1$, — некоторый параметр. Этот ряд — производящая функция для распределения r_i. А если мы хотим взять вероятность распределения по λ, то поскольку мы потребовали, чтобы числа заполнения были независимыми, мы можем сказать, что производящая функция будет просто произведением:

$$\mathcal{P}(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^k)^{b_k}}.$$

Нетрудное упражнение состоит в том, что все мультипликативные распределения сводятся, по существу, к выбору последовательности b_k. Равномерная статистика — это $b_k \equiv 1$.

Этот класс статистик, конечно, далеко не исчерпывает всех интересных случаев. Я должен сразу сказать, что это фактически то, что в физике называют Бозе-распределением (точнее, статистикой Бозе—Эйнштейна). Но можно рассматривать разбиения с различными слагаемыми — вообще без кратностей; равномерная мера на них называется статистикой Ферми—Дирака. И тогда производящие функции будут такие же, но $1-x^k$ в знаменателе нужно заменить на $1+x^k$ в числителе. Эти два варианта исчерпывают распределения, изучаемые в статистической физике квантового идеального газа при разных размерностях. Для идеального газа размерности d коэффициент b_k — это знаменитая функция Якоби $j_d(k)$, равная количеству представлений числа k в виде суммы d квадратов. Таким образом, если взять в качестве b_k функцию Якоби, то получится статистика идеального Бозе- или Ферми-газа в размерности d.

Я приведу только ответ. Он содержится в моей статье, опубликованной несколько лет назад *). Оказывается предельные формы здесь можно вычислить и даже в некоторых случаях всё можно проинтегрировать до конца, а в других случаях можно написать ответ в виде интеграла. О последовательности b_k нужна лишь очень скромная информация, а именно, один единственный параметр. Параметр этот такой. Напишем ряд Дирихле

$$\sum \frac{b_k}{k^s}$$

и возьмём первый вещественный полюс этой функции от s; пусть это будет число $\alpha > 0$. Только этот полюс и нужен: предельная форма настолько грубая вещь, что она зависит только от этого параметра α. Этот факт есть следствие теоремы Мейнардуса **). Прежде чем говорить об ответе, нужно ещё понять, как масштабировать диаграмму, т. е. какое брать сжатие. Оказывается, что по оси y нужно взять масштаб $n^{-\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}$, а по другой оси нужно взять дополнительный масштаб $n^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}$, чтобы площадь подграфика была равна 1. Для нормированной диаграммы рассмотрим функцию

$$n^{-\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} \sum_{k \geqslant tn^{\frac{1}{2+\alpha}}} r_k(\lambda) = \varphi_\lambda(t).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое n, что график этой функции будет близок к графику функции

$$C_\alpha(t) = \int_t^\infty u^\alpha \frac{e^{-cu}}{1 - e^{-cu}}\, du$$

для почти всех диаграмм размера n с этой статистикой; константа c определяется тем условием, что интеграл от этой функции равен 1. Это и есть выражение для предельной формы. Для $\beta = 0$ получается кривая (1), о которой я говорил.

Это всё опубликовано в 1996 г. И вот совсем недавно мы с моим учеником Ю. В. Якубовичем занялись более реальной (в смысле статистической физики) задачей. А именно, стали рассматривать задачу с фиксированным числом слагаемых. Собственно, в статистической физике фиксируют не только энергию, но и число частиц. Это означает, что мы рассматриваем не просто разбиения данного числа, но и говорим, сколько в разбиении слагаемых. Тут возникают удивительные вещи. Я не знаю, задумывались ли над ними раньше. В принципе, мы можем брать разные m и n. (Я беру

*) Вершик А. М. Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации // Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30, вып. 2. — С. 19—39.

**) См.: Эндрюс Г. Теория разбиений. — М.: Наука, 1982.

равномерное распределение на всех разбиениях числа n с m слагаемыми.) Можно считать, что m есть функция от n, и спрашивать, какова предельная форма для

$$\mathcal{P}_{n,m} = \{\lambda\colon \lambda \vdash n,\ \#\lambda = m\}.$$

Оказывается, что содержательные ответы будут, если m растёт как $\sqrt{n}$. Более точно: если $m = o(\sqrt{n})$, то предельная форма одинакова для всех разбиений, независимо от параметров. Это, по-видимому, малосодержательная часть. А если $m = \sqrt{n}$, то результат зависит от коэффициента c, и это очень важное обстоятельство, поскольку именно такое соотношение рассматривают в статфизике в теории идеального газа. Этот же случай неявно рассматривал Эрдёш, а позже его школа, ещё пятьдесят и более лет назад, абсолютно без всякой связи со статфизикой, и, заметьте, почти в то же самое время, когда теория квантового идеального газа создавалась физиками и вставала на ноги. Это — ещё один удивительный пример почти одновременности и независимости появления фактически одинаковых концепций в математике и физике, и ещё того, как поздно эта общность становится понятной — через много лет. Более значительные примеры — квантовая механика — теория операторов, расслоения — калибровочные поля и др.

Итак, интересен случай, когда $m = a\sqrt{n}$, где a — константа. Для этого случая формулы более сложные, но они найдены. Получается некое семейство распределений. Сейчас доказана следующая теорема непрерывности: если $a \to \infty$, то эти предельные формы сходятся к той предельной форме, которая у нас получена, когда никакого ограничения на число слагаемых нет.

Я забыл сказать, что теорема Эрдёша (без константы), в существенном, вытекает из этой формулы. Именно из того, что в этой формуле стоит экспоненциально возрастающая функция, получается логарифм в формуле Эрдёша. Например, для Ферми- и для Бозе-газа в случае размерности большей двух эта кривая ограничена в нуле. Это означает, что рост числа слагаемых с точностью до множителя $\sqrt{n}$. А поскольку у нас именно такой рост, то это как раз и есть логарифм, который встретился у Эрдёша. Очень интересно, что с такой точки зрения можно объяснить явление конденсации Бозе—Эйнштейна. Если вы зафиксируете число слагаемых большим, чем тот предел, который определён в задаче с произвольным числом слагаемых, то окажется, что единственный способ набрать нужное число слагаемых — это взять дополнительно нулевые слагаемые, а это и есть БЭ-конденсация, так как нулевые слагаемые — это частицы с нулевой энергией (более подробно об этом — в моей статье в «Успехах мат. наук» *)). Иначе говоря, если вы заказали некоторое количество слагаемых, а их неоткуда получить, то эти слагаемые должны быть нулевыми. Это теоретико-числовое объяснение того, что такое конденсация Бозе—Эйнштейна. Она как раз и состоит в том, что при некотором значении параметра есть частица с нулевым импульсом. Это означает, что вы не можете взять нужное число слагаемых по соображениям вероятностного характера. Но для того, чтобы всё-таки получить данное число, вы должны добавить нулевые слагаемые.

По этому поводу можно было бы сказать ещё очень многое. Я хочу только заметить, что самый популярный сейчас случай, связанный с разбиениями, — это как раз не мультипликативные статистики, а распределение, которое мы с покойным С. В. Керовым (1946—2000) начали изучать в 1975 г., (независимо его изучали Стенли, а также Шепп и Логан) — это распределение Планшереля. Это распределение на диаграммах приходит из теории представлений симметрических функций и из многих других задач. Это распределение уже не такого характера; неверно, что для него числа заполнения независимы. Поэтому и координаты разбиений надо брать другие. Я не буду об этом говорить, потому что эта тема очень популярна и модна, и о ней говорить надо долго. Оказывается, что распределение Планшереля имеет прямое отношение к распределению спектра случайных матриц и т. д., и это тема отдельного доклада.

Вспомним теперь ту самую кривую $e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}x} + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}y} = 1$, которую я уже рисовал, и зададим тот же вопрос, который я уже задавал для выпуклых многоугольников: «Если взять какую-то кривую и рассмотреть её ε-окрестность, взять логарифм, поделить на нужную степень n, то какой функционал получится для этой кривой?». В теории вероятностей это называется rate-function, в физике это называется *действие*, *энтропия*, *поверхностное натяжение*, и так далее. А сам метод в теории вероятности называется методом больших уклонений (LDP — large deviation principle). Это функционал, который отвечает за многое. В этой задаче, которую мы уже решили, этот функционал очень интересен. Рассмотрим вероятностное распределение на двух точках, зависящее от значения производной некоторой функции:

$$p_f(x) = \frac{|f'(x)|}{1+|f'(x)|}, \qquad q_f(x) = \frac{1}{1+|f'(x)|},$$

*) Вершик А. М. Предельное распределение энергии квантового идеального газа с точки зрения разбиения натуральных чисел // Успехи матем. наук. — 1997. — Т. 52, вып. 2. — С. 139—146.

и возьмём интеграл по кривой от энтропии этого распределения:

$$\int_0^\infty \bigl(p(x)\log p(x) + q(x)\log q(x)\bigr)dx.$$

Это и есть то, что является в данном случае rate-function. Если её умножить на $\sqrt{n}$ и взять экспоненту, то получится асимптотика числа диаграмм в окрестности данной кривой.

3.
Трёхмерные задачи

Я перехожу к трёхмерным задачам; трёхмерным в том смысле, что теперь будут рассматриваться трёхмерные диаграммы Юнга. Это самый интересный и новый пример. Эта область совершенно не изучена. На мой взгляд, по этой теме есть только две работы, и ещё одна совсем недавняя; первая из двух будет скоро опубликована *), а вторая (моя), хотя и сделана давно — несколько лет назад — ещё тоже не опубликована. И вот совсем недавно А. Окуньков и Н. Решетихин сделали замечательный вклад в эту тематику. Для трёхмерных диаграмм Юнга есть два термина: *мавзолей* и *небоскрёб*. На Западе более популярен термин «небоскрёб», а у нас «мавзолей». Что такое трёхмерная диаграмма Юнга? Это снова образование на решётке, которое есть подграфик финитной ступенчатой функции. Концы ступенек находятся в целых точках, и эта функция убывает в положительном направлении осей x и y. Есть и другой, более популярный, способ объяснить, что такое трёхмерные диаграммы Юнга. Он называется *плоские разбиения*. Вы снова фиксируете натуральное число n и разлагаете его в сумму слагаемых, занумерованных двумя индексами: $n = \sum n_{ij}$. Эти индексы (i, j) бегают по клеткам обычного разбиения на двумерной (нижней) плоскости. Слагаемые и будут высотами крыши мавзолея в точках (i, j). Таким образом плоское разбиение, в свою очередь, занумеровано обычными разбиениями. Но я предпочитаю говорить не о плоских разбиениях, а о трёхмерных диаграммах. Трёхмерная диаграмма Юнга и плоское разбиение — это одно и то же.

Проблемы здесь те же. Можно взять все плоские разбиения числа n, рассмотреть равномерную статистику на них, и поставить вопрос о предельной форме. Этот вопрос решён. Ответ я могу написать. Его получил Ричард Кеньон из Франции с соавтором Рафаэлем Сэрфом, совсем недавно. Но этому предшествовала целая серия усилий. До этого я получил

*) Cerf R., Kenyon R. The low-temperature expansion of the Wulff crystal in the 3D Ising model // Commun. Math. Phys. — 2001. — V. 222, № 1. — P. 147—179.

некие характеристики этой поверхности. Эта информация, может быть, менее интересна, чем сам метод, которым я её получил. Об этом методе я и хочу немного рассказать. Он совсем не такой, как то, о чём мы говорили раньше.

Я снова хочу сказать, что на этих диаграммах есть много разных статистик. Может быть, равномерная статистика не самая интересная. Есть, например, так называемые центральные меры, про которые вообще ничего не известно и которые важны для приложений. Но давайте говорить только о равномерной статистике.

Проблема, как всегда, в том, как параметризовать такие объекты. Если есть хорошая параметризация, то можно будет ставить вопрос о предельной форме и вообще изучать эти объекты.

Есть два подхода к решению этой задачи. Один — вариационный. Этот подход использовал Ричард Кеньон. Это — просто обобщение того, о чём я говорил раньше. В этом случае уравнение Эйлера столь сложное, что непосредственно его решить не удаётся. Кроме того, эта задача условная: нужно ещё добавить условие того, что функция убывает и объём подграфика равен 1. Решение этой задачи получено Кеньоном совсем по-другому. Есть так называемый метод Вулфа — физика начала века, — этот метод был изучен нашими специалистами во главе с покойным Р. Л. Добрушиным. Этот способ позволяет решать следующую задачу. У вас есть функция на единичной сфере. Её значение в данной точке сферы будем рассматривать как функцию от нормали к выпуклой поверхности (поверхностное натяжение). Поставим вариационную задачу о минимуме интеграла от этой функции от нормали к поверхности. в классе всех гладких выпуклых поверхностей. Метод Вулфа позволяет избежать решения вариационной задачи, а подойти к вопросу с чисто геометрической точки зрения (см. недавнюю статью С. Шлосмана *)). И в нашем случае решение тоже можно получить усовершенствованным методом Вулфа. Замечательно, что задача связалась с некоторым деликатным вопросом о классической трёхмерной модели Изинга. Кеньон и Серф проделали всё это для трёхмерной задачи. И оказалось, что в трёхмерном случае (именно в трёхмерном; про четырёхмерный случай мы ничего не знаем) функционал похож на то, что было в двумерном случае; разница лишь в том, что теперь нужно взять нормаль к поверхности. Получается поверхность, вид которой я предсказал, исходя из соображений, которые я сейчас изложу. Эта поверхность тесно связана с кривыми, которые появлялись при решении задачи о пре-

*) Шлосман С. Б. Конструкция Вульфа в статистической механике и комбинаторике // Успехи матем. наук. — 2001. — Т. 56, вып. 4. — С. 97—128.

дельных формах диаграмм Юнга с равномерной статистикой. В каком-то смысле, она составлена из таких кривых.

Я подходил к этой задаче с чисто комбинаторной точки зрения. На мой взгляд, она даёт более глубокую информацию. Но и получить её и довести своё решение до явных формул трудней.

Я использовал соответствие RSK (Робинсон—Шенстед—Кнут), которое считаю одним из наиболее важных достижений современной комбинаторики; его нужно популяризировать среди студентов. Робинсон — это классик теории представлений симметрической группы, работавший в 30—50-х гг., Шенстед — это американский комбинаторик, который известен своей теоремой 60-го года, а Дональда Кнута знают все на свете. Это автор TEX'а, книг «Искусство программирования» и массы других вещей. Он отличный органист (дома у него орган), а также инициатор и редактор книги «3:16» — коллективного комментария к стихам с этими номерами в различных книгах Библии.

Метод RSK даёт процедуру получения таблиц Юнга с помощью подстановок, т. е. опять связан с вопросом о параметризации. Кнут и Бендер обобщили частично RSK на трёхмерный случай и дали сложный, но эффективный способ, как получать мавзолеи из двух таблиц Юнга или из целочисленной матрицы. Затем опять появляется большой канонический ансамбль и т. д. Это обобщение того, что делает метод RSK, для трёхмерного случая очень специфично и годится только для трёхмерного случая. А вообще обычный метод RSK, о котором тоже хочется сказать несколько слов, — это соответствие между подстановками $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ и парами таблиц Юнга одинаковой формы. Таблица Юнга — это диаграмма Юнга с n клетками, заполненная натуральными числами от 1 до n, которые возрастают в том и в другом направлении. Есть такое замечательное соответствие, о котором я не буду сейчас говорить подробно. Оно очень непростое, и у него вовсе нет очевидного алгебраического смысла, но оно очень глубокое и позволяет многое понять. Например, если взять равномерное распределения на подстановках, то на диаграммах получится распределение Планшереля.

Согласно формуле Бернсайда, $n! = \sum(\dim \lambda)^2$, где суммирование ведётся по всем неприводимым представлениям λ. Метод RSK — это явная биекция, материализующая тождество Бернсайда; она, конечно, связана с базисом Гельфанда—Цейтлина. А именно, у вас есть две диаграммы одинаковой формы, а число таблиц — это размерность. Поэтому, если вы берёте две одинаковые диаграммы с разными таблицами, то, взяв общее число таких пар таблиц и просуммировав его по всем диаграммам, вы получите порядок группы.

Нечто подобное можно сделать с трёхмерными диаграммами. Для этого нужно воспользоваться тем, что сделали Кнут и Бендер. Они расширили это соответствие на случай, когда в таблице стоят не обязательно различные числа, т. е. таблицы уже не стандартные, а полустандартные. Это означает, что числа не обязательно строго возрастают по строкам, но строго возрастают по столбцам. Фактически это соответствие между натуральными матрицами (a_{ij}), $a_{ij} \in \mathbb{N}$, и мавзолеями. Результат состоит вот в чём. Рассмотрим все натуральные матрицы с нормировкой $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(i+j-1)=n$. Имеется биекция между матрицами с такими условиями и мавзолеями с n клетками.

Старый метод RSK сюда входит так: это — матрицы подстановок, у которых в каждой строке и в каждом столбце по одной единичке, поэтому условие можно отбросить. Таким образом, между прочим, эта статистика даёт новую статистику и на самих разбиениях.

Соответствие, о котором я сказал, даёт самое простое доказательство замечательной формулы Мак-Магона — выдающегося английского комбинаторика, — дающей число мавзолеев с n клетками. Я ведь ещё не сказал, сколько есть мавзолеев с n клетками. Это интересная история. Впервые эту формулу доказал Мак-Магон сто лет назад. Формула такая:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^k)^k} = \sum_{n=1}^{\infty} q(n)x^n,$$

где $q(n)$ — число мавзолеев с n клетками. Доказательство Мак-Магона было малопонятным. Потом в 20-е и 30-е годы появлялись всё более и более простые доказательства. Об этом можно прочесть в книге Эндрюса. В комбинаторике принят такой принцип, что полное понимание той или иной комбинаторной формулы наступает тогда, когда вы имеете биективное доказательство. У двух разных множеств одинаковое число элементов, если между этими множествами есть биективное соответствие. Иногда это соответствие найти трудно. Это как раз такой случай. Оказывается, что самое простое доказательство формулы Мак-Магона получается из вышеприведённого соответствия (это заметил Ричард Стенли). Для этого надо воспользоваться тем, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^k)^k} = \prod_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{i+j-1}}.$$

Но эта простота, разумеется, по модулю совершенно нетривиальной биекции RSK. Из всего этого сразу можно вывести, что высота мавзолея растёт как $c\sqrt[3]{n}\ln n$, а также и другие замечательные свойства предельной формы трёхмерных диаграмм Юнга с равномерной статистикой. И вот совсем недавно Окуньков и Решетихин по-новому решили ту же задачу, используя мощные методы современной матфизики (бозон-фермионное соответствия, меры Шура и многое другое). В этом пункте наша тема соприкасается ещё с дюжиной других.

Нет ни малейшего понимания, что будет в других размерностях. Мак-Магон предположил, что для четырёхмерных мавзолеев производящая функция имеет вид

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^k)^{\binom{k}{2}}}.$$

Но это оказалось неверным, что обнаружилось только в 60-х гг. До сих пор нет верной и удобной формулы для четырёхмерных диаграмм, а может быть её нет и в природе. Но есть близкие объекты, которые, возможно, более правильно считать многомерными обобщениями диаграмм Юнга, и которые теснее связаны с простыми алгебрами Ли. Их тоже следует изучать и искать для них соответствующие производящие функции, предельные формы и всё такое. Но об этом — в другой раз.

29 марта 2001 г.

В. М. Бухштабер

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ МНОГИХ ВЕКТОРНЫХ АРГУМЕНТОВ. КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И СОВРЕМЕННЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Позвольте мне начать немного издалека. Сравнение развития математики с построением вавилонской башни — это очень сильный образ, понятный по-своему и начинающему, и профессиональному математику. Есть ряд причин, как внешних (социальных, экономических), так и внутренних, общематематических, почему эта башня не развалилась в течение тысячелетий, и почему у нас есть надежда, что эта башня и дальше будет расти ввысь и вширь. Если говорить о внутриматематических причинах, то есть такие направления исследований, которые пронизывают её с самого начала и способствуют взаимному обогащению глубокими идеями, казалось бы, совсем разных разделов математики.

Я буду рассказывать про теорию симметрических полиномов. Как вы знаете, истоки её в самом низу этой башни, и постоянно самые современные, самые актуальные, и в то же время классические области математики, сталкиваются с проблемами, которые очень хорошо формулируются (и, к счастью, иногда даже решаются) в терминах этой науки.

Пусть m и n — натуральные числа; (m, n)-полисимметрический полином P определяется следующим образом. Прежде всего, его аргументами являются n векторов $v \in \mathbb{C}^m$. Такой полином называется *полисимметрическим*, если

$$P(v_1, \ldots, v_n) = P(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$$

для любой перестановки $\sigma \in S_n$. Вот наш замечательный объект.

В качестве примера я сейчас построю замечательные (m, n)-полисимметрические полиномы под названием *элементарные*. Рассмотрим сначала произведение

$$\prod_{k=1}^{n}(z + \alpha_k) = z^n + \sigma_1 z^{n-1} + \ldots + \sigma_n.$$

Здесь σ_k — элементарный симметрический полином от символов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Я не случайно сказал *символов*. Представьте себе, что мы взяли набор векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^m$ и положили $\alpha_k = \langle v_k, w\rangle$, где $w \in \mathbb{C}^m$ — фиксированный вектор. (Чтобы не путаться с комплексным сопряжением, я полагаю $\langle v_k, w\rangle = \sum_{i=1}^{m} v_{ik}w_i$.) В результате мы получим, что $\sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — функция от n линейных форм. Если мы разложим эту функцию по координатам вектора w, то получим

$$\sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{\omega} \sigma_{k,\omega} w^{\omega},$$

где $\omega = (i_1, \ldots, i_m)$ — мультииндекс с условием $|\omega| = \sum i_q = k$ и $w^{\omega} = w_1^{i_1} \ldots w_m^{i_m}$. Функции $\sigma_{k,\omega}$ — это и есть элементарные симметрические полиномы; от координат векторов $v_1, \ldots, v_n$ они зависят полиномиально и выдерживают все возможные перестановки этих векторов.

В первом нетривиальном случае (2, 2)-полиномов имеем:

$$\begin{aligned}(z + v_{11}w_1 + v_{21}w_2)(z + v_{12}w_1 + v_{22}w_2) = \\ = z^2 + [(v_{11} + v_{12})w_1 + (v_{21} + v_{22})w_2]z + v_{11}v_{12}w_1^2 + \\ + (v_{11}v_{21} + v_{12}v_{22})w_1w_2 + v_{21}v_{22}w_2^2.\end{aligned}$$

Получаем 5 элементарных симметрических полиномов

$$\sigma_{1,(1,0)};\ \sigma_{1,(0,1)};\ \sigma_{2,(2,0)};\ \sigma_{2,(1,1)};\ \sigma_{2,(0,2)},$$

связанных алгебраическим соотношением

$$(\sigma_{1,(1,0)}^2 - 4\sigma_{2,(2,0)})(\sigma_{1,(0,1)}^2 - 4\sigma_{2,(0,2)}) - (\sigma_{1,(1,0)}\sigma_{1,(0,1)} - 2\sigma_{2,(1,1)}) = 0.$$

Возьмём теперь пространство $\underbrace{\mathbb{C}^m \times \ldots \times \mathbb{C}^m}_{n}$. Его можно рассматривать как конфигурационное пространство упорядоченных наборов векторов $v_1, \ldots, v_n$; это удобно. Имея элементарные симметрические полиномы, мы можем построить отображение

$$\hat{s}\colon\ \underbrace{\mathbb{C}^m \times \ldots \times \mathbb{C}^m}_{n} \to \mathbb{C}^N,$$

сопоставляя набору $v_1, \ldots, v_n$ вектор с координатами $\{\sigma_{k,\omega}\}$, где $k = 1, \ldots, n$ и $|\omega| = k$. Я взял набор точек и сопоставил ему набор элементарных симметрических полиномов от их координат.

Задача 1. Доказать, что $N = \binom{n+m}{n} - 1$.

Итак, при помощи элементарных симметрических функций мы построили отображение $\hat{s}$. Давайте теперь сравним размерности. То, что набору векторов мы сопоставили набор симметрических функций, означает, что мы фактически построили отображение

$$s\colon\ \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^N,$$

где
$$\mathrm{Sym}^n(X) = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n} / S_n.$$
Пространство $\mathrm{Sym}^n(X)$ определено для любого топологического пространства X.

Задача 2. Доказать, что s — вложение.

Вторая задача красивая; решается она несложно. Её можно решать геометрически, используя то, что фактически мы сопоставляем набору точек новые координаты α_k при фиксированном w, а потом уже выбираем координаты из разложения по координатам w.

Очевидно, что $\dim \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^m) = mn$, так как факторизация производится по действию дискретной группы. Итак, пространство размерности mn вложено в пространство размерности $\binom{n+m}{n} - 1$. Размерности этих пространств равны тогда и только тогда, когда $m = 1$ или $n = 1$. А в общем случае коразмерность довольно большая. Если $m = n = 2$, то коразмерность равна 1, т. е. получается гиперповерхность, заданная одним уравнением (см. выше). А если $m > 2$ и $n > 1$, то получается алгебраическое многообразие большой коразмерности. Оказывается, что существует очень много классических задач, до сих пор не решённых, и постоянно возникают новые задачи, например, в теории инстантонов и теории солитонов, где требуется понять, какова структура этого алгебраического подмногообразия в $\mathbb{C}^N$. Моя цель — обсудить с вами, как возникают алгебраические уравнения, задающие это подмногообразие.

Питер Олвер недавно выпустил книгу [9]. Там на с. 79 есть сноска, в которой говорится, что когда они с Чери Шакибан столкнулись с проблемой соотношений между полисимметрическими полиномами, то, используя специализированный пакет программ вычислительной алгебры MACAULAY и мощный компьютер, они смогли получить эти соотношения только в случае $m, n \leqslant 3$, в то время, как в диссертации Ф. Юнкера, написанной под руководством Д. Гильберта *), разобран случай $m = 2$, $n = 7$ и случай $m = 3$, $n = 4$.

Я скажу больше. Этой наукой я стал заниматься примерно 10 лет назад, под влиянием своих работ по теории многозначных групп. Находясь в Эдинбурге, я стал работать вместе с известным топологом Элмером Рисом. В наших исследованиях была некая параллель. С одной стороны, мы развивали науку (о которой я буду говорить). А с другой стороны, мы всегда помнили, что у нас имеется доступ к самому быстрому компьютеру в Европе и самому лучшему программному обеспечению. И был поставлен

*) См. [10], [11].

вычислительный эксперимент: как на самом быстром компьютере с самым хорошим программным обеспечением для базисов Грёбнера получить эти соотношения. Через некоторое время я вам покажу уравнение, которое мы получили теоретически, а машина безуспешно искала 62 часа, и мы вынуждены были остановить её. Так что это удивительная область.

Если подходить с точки зрения теории инвариантов, то необходимо подчеркнуть, что здесь мы имеем дело с очень частной задачей теории инвариантов. Алгоритм решения таких задач в общем виде описан, например, в книге Кокса, Литтла и О'Ши [8], гл. 7, § 4. Коротко он звучит так: есть идеал, нужно найти его базис Грёбнера — вот и всё. Но оказалось, что эта задача не зря возникает в разных областях науки. Она довольно глубокая, и общие алгоритмы решения её, как показывают упомянутые опыты, не приводят к содержательным результатам. Необходимы новые теоретические результаты!

Как это можно озвучить на классическом языке? Когда у нас $m=1$, мы имеем симметрическую степень пространства комплексных чисел $\mathbb{C}$. Размерности mn и $\binom{n+m}{n}-1$ в этом случае совпадают, и это есть классический гомеоморфизм, который говорит о том, что любой симметрический полином однозначно выражается через элементарные симметрические полиномы.

Теперь я сделаю шаг в сторону, потому что в начале лекции я сказал, что эта наука хороша тем, что способствует взаимопроникновению глубоких идей из, казалось бы, совсем далёких областей. Обратимся к классической теории Фробениуса. Известно, что в двух своих работах, опубликованных в 1896 г., Фробениус, говоря современным языком, построил теорию представлений конечных групп. Причём, что самое удивительное, затравочным был результат Дедекинда, который касался группы S_3. Дедекинд сделал нечто для группы S_3 (что именно, я сейчас скажу), и этого было достаточно Фробениусу, чтобы для *всех* конечных групп построить теорию представлений. С этим тоже связан некий курьёз. Недавно в Ратгерсе я беседовал с Кеном Джонсоном, одним из ведущих специалистов в этой науке, с результатами которого мы встретимся немного позже. Он сказал, что был поставлен вычислительный эксперимент: «Можно ли сейчас, имея современные компьютеры, повторить эти результаты Фробениуса?». И опять компьютер не смог сделать то, что сделал Фробениус.

Что же сделал Фробениус? Пусть $G=\{g_1=e, \ldots, g_m\}$ — некоторая конечная группа. Сопоставим этой группе матрицу с коэффициентами в кольце $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_m]$ полиномов от m переменных. Элементам $g_1, \ldots, g_m$

сопоставим коммутирующие переменные $t_1, \ldots, t_m$ в порядке возрастания их номеров и введём матрицу $M_G = (m_{ij} = t_k)$, где $g_i g_j^{-1} = g_k$. Например,

$$M_{\mathbb{Z}_3} = \begin{pmatrix} t_1 & t_3 & t_2 \\ t_2 & t_1 & t_3 \\ t_3 & t_2 & t_1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Выпишите матрицу M_{S_3}.

Матрица M_{S_3} — это как раз та матрица, которой занимался Дедекинд.

Теперь возникает *групповой детерминант* $D_G = \det M_G$. Это — фундаментальное понятие. Мы работаем в коммутативном кольце; здесь никаких изысков нет. Например, легко вычислить, что

$$D_{\mathbb{Z}_3} = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 - 3t_1 t_2 t_3.$$

Классики решали такую задачу. Рассмотрим D_G как форму степени m от однородных переменных $t_1, \ldots, t_m$. Можно ли её разложить на неприводимые множители? Задача, которую Дедекинд решил до Фробениуса, это — полное разложение формы D_{S_3}.

Задача 4. Разложите форму $D_{\mathbb{Z}_n}$ на линейные множители. (Форма $D_{\mathbb{Z}_n}$ называется циркулянтом.)

Вот ответ Дедекинда: Пусть $e = g_1$, $(123) = g_2$, $(132) = g_3$, $(12) = g_4$, $(13) = g_5$, $(23) = g_6$. Тогда

$$D_{S_3} = \left(\sum_{i=1}^{6} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}(t_i - t_{i+3})\right) \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^{3}(t_i^2 - t_{i+3}^2) - t_1 t_2 - t_1 t_3 - t_2 t_3 + t_4 t_5 + t_4 t_6 + t_5 t_6\right)^2$$

Это вычисление доступно современным компьютерам, работающим с базисом Грёбнера.

Я привёл этот ответ, чтобы вы увидели, что угадать его не очень просто. Но когда вы услышите полученный Фробениусом результат, вы поймёте, как можно получить его для любой конечной группы, если известны её представления.

Я хочу обратить ваше внимание, что каждый раз, когда мы будем брать какую-нибудь конечную группу G и считать детерминант D_G, мы будем получать целочисленные формы, т. е. формы с целыми коэффициентами. Ставится задача о разложении их на неприводимые множители.

Фробениус начал вот с чего. Возьмём группу G, рассмотрим некоторое её представление $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ и построим характер

$$\chi(\rho)\colon G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathbb{C},$$

Введём теперь понятие *k-характера Фробениуса* $\chi^k(\rho)$. Он строится по данному представлению ρ индуктивно. А именно, k-характер $\chi^k(\rho)$ — это отображение

$$\chi^k(\rho)\colon\ \underbrace{G\times\ldots\times G}_{k}\to\mathbb{C}.$$

По определению,

$$\begin{aligned}
\chi^1(\rho)&=\chi(\rho)\\
\chi^2(\rho)(g_1,\ g_2)&=\chi^1(g_1)\chi^1(g_2)-\chi^1(g_1g_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\chi^k(\rho)(g_1,\ \ldots,\ g_k)&=\chi^1(g_1)\chi^{k-1}(g_2,\ \ldots,\ g_k)-\chi^{k-1}(g_1g_2,\ \ldots,\ g_k)-\ldots\\
&\qquad\ldots-\chi^{k-1}(g_2,\ g_3,\ \ldots,\ g_1g_k).
\end{aligned}$$

Обратите внимание, что эта рекурсия абсолютно нетипична для современной математики. Сейчас, когда встречают такого рода формулы, все ожидают увидеть выполнение так называемых условий коцикла. Здесь же заранее фиксируется привилегированная роль g_1, без всякой симметрии.

З а д а ч а 5. Внимательно рассмотрите третий характер χ^3.

На третий характер я хочу обратить особое внимание. Когда я делал несколько лет назад доклад на Московском Математическом Обществе, Сергей Ландо увидел в третьем характере формулу, которая встречалась у него в хордовых диаграммах.

Формула для третьего характера удивительным образом встречается в разных задачах. Когда я рассказывал об этой науке, мне часто говорили, что что-то похожее встречали. Но никто не смог найти интерпретации характеров Фробениуса, начиная с четвёртого.

Третий характер выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\chi^3(g_1,\ g_2,\ g_3)=\chi(g_1)\chi(g_2)\chi(g_3)-\chi(g_1)\chi(g_2g_3)-\chi(g_2)\chi(g_1g_3)-\\
-\chi(g_3)\chi(g_1g_2)+\chi(g_1g_2g_3)+\chi(g_1g_3g_2).
\end{aligned}$$

Из этой формулы видно, что нового вносят характеры Фробениуса. Когда мы работаем с обычным характером, то он обладает свойством $\chi(g_1g_2)=\chi(g_2g_1)$. Следовательно, $\chi(g_1)=\chi(g_2)$, если $g_2=gg_1g^{-1}$ для некоторого g. Поэтому при помощи обычного характера, как функции на группе, мы не можем различить сопряжённые элементы группы. А в третьем характере появляются два слагаемых $\chi(g_1g_2g_3)$ и $\chi(g_1g_3g_2)$, которые являются значениями функции $\chi(g_1\,\cdot)$, различающей сопряжённые элементы g_2g_3 и g_3g_2.

Теперь я сформулирую теорему, которую доказал Фробениус для любой конечной группы.

Теорема 1 (Фробениус). *Для любой конечной группы G форма D_G (детерминант) раскладывается на неприводимые множители следующим образом: $D_G = \prod\limits_{\chi} d_\chi^{|\chi|}$. Здесь χ пробегает список неприводимых представлений группы G, $|\chi| = n$ — размерность представления и*

$$d_\chi = \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \ldots, i_n} \chi^{(n)}(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}) t_{i_1} \ldots t_{i_n}.$$

Это — полный ответ. Конечно, по модулю того, что нужно знать полный список неприводимых представлений. Но это уже другая задача.

Кстати сказать, здесь прекрасно виден классический результат: Порядок группы G равен сумме квадратов размерностей её неприводимых представлений. Вспомните, что для циклической группы в разложении циркулянта встречаются только линейные множители, потому что все представления одномерны. А когда мы берём симметрическую группу S_3, в разложении её детерминанта возникает квадратичная форма в квадрате.

А теперь — ещё один курьёз. В современных учебниках я не нашёл доказательства теоремы Фробениуса, следуя Фробениусу. Теперь эту теорему можно доказать буквально в несколько строк, используя преобразование Фурье на конечных группах. Доказательство основывается на следующем результате:

Теорема 2. *Рассмотрим для представления $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ его преобразование Фурье $\Phi(\rho) = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(g_k) t_k$. Тогда $d_{\chi(\rho)} = \det \Phi(\rho)$.*

Есть такое современное наблюдение: оказывается, что те формы, которые писал Фробениус, — это детерминанты преобразований Фурье. После этого каждый из вас докажет теорему Фробениуса в два слова. Нужно взять регулярное представление группы G, разложить его на неприводимые, сделать преобразование Фурье и взять детерминант. Вот и всё — я дал вам полное доказательство. Те, кто слышит это впервые, могут считать мои слова задачей: взять регулярное представление, разложить его на неприводимые, сделать преобразование Фурье и посчитать детерминант.

Но в чём заключается курьёз? Из-за того, что появилось такое красивое и элегантное доказательство через преобразование Фурье, рекурсия Фробениуса была забыта, и очень долго не была востребована. Тем более удивительно, что последние 15 лет рекурсия Фробениуса стала неоднократно появляться и даже переоткрываться в различных независимых контекстах как инструмент решения ряда важных задач.

О том, почему мы её востребовали, я буду говорить во второй половине лекции. А сейчас расскажу о другой красивой проблеме, решение которой обеспечили высшие характеры через сто лет после того, как они были введены Фробениусом. В книге Брауэра [1] сформулирован вопрос: «Какая информация, дополнительная к обычной таблице характеров конечной группы, достаточна, чтобы отличить одну конечную группу от другой». Давайте будем восстанавливать группу (а именно, умножение на множестве элементов группы) по её k-характерам. Очевидно, что обычных характеров не достаточно. Максимум, что мы восстановим, — это группу с точностью до сопряжения. Поэтому давайте добавим 2-характеры, 3-характеры и т. д. При этом будем помнить, что если представление имеет размерность n, то $\chi^{n+1}(\rho)=0$ (это видно просто из формул). На этом пути и был получен ответ на вопрос Брауэра. В 1991 году Х. Хёнке (Hoehnke) и К. Джонсон (Johnson) опубликовали в трудах Барнаульской конференции по теории колец следующий результат: знание 1-, 2-, и 3-характеров всех неприводимых представлений группы позволяет отличить одну конечную группу от другой.

Как научиться восстанавливать группу G по таблице k-характеров? Эта проблема была решена 10 лет назад. Незадолго до этого К. Джонсон поставил вопрос: «Позволяет ли групповой детерминант конечной группы ответить на вопрос Брауэра?» В решении этого вопроса приняло участие несколько математиков.

Первое доказательство, как всегда, было трудное. Последнее доказательство излагается на двух страничках, и звучит оно, по существу, так: «Возьмите книгу Бурбаки, упражнение такое-то, такое-то и такое-то. Сопоставьте, и получите ответ на вопрос Джонсона, а затем и результат Хёнке и Джонсона.» А что именно получите? Оказывается, что для любой группы G достаточно знать обычные характеры χ и характеры χ^2 и χ^3. Для любой группы, независимо от её порядка, таблица умножения восстанавливается по первым трём характерам!

Сразу после того как это было доказано, естественно возник следующий вопрос: «Что представляют собой группы, которые полностью описываются двумя характерами χ и χ^2?» Ответ поразительный: взятая наугад группа восстанавливается по первым двум характерам. Группы, для восстановления умножения в которых требуется третий характер, — это какие-то специальные группы. Первая их отличительная особенность заключается в том, что они имеют большой порядок. В работе К. Джонсона и С. Сегала (Sehgal) в 1993 г. дано явное построение пары неизоморфных групп порядка $624 \cdot 625$, имеющих одинаковые таблицы 2-характеров.

Не решена такая задача: найти минимальный (или хотя бы не слишком большой) порядок группы, для восстановления умножения в которой не достаточно 2-характеров, а нужен 3-характер.

Теперь я перехожу от классической науки Фробениуса к не менее классической науке Израиля Моисеевича Гельфанда. Для этого мне понадобится понятие, которое ввели мы с Элмером Рисом. Рассмотрим кольца A и B, коммутативные и с единицей. Пусть они будут модулями над некоторым полем K, $\operatorname{char} K = 0$ (никаких проблем с делимостью на целые числа быть не должно). Будем изучать K-линейные отображения $f\colon A \to B$. Изучаются именно K-линейные отображения, а не кольцевые гомоморфизмы. Это делается для того, чтобы построить *n-гомоморфизмы*. При этом 1-гомоморфизм превращается в кольцевой гомоморфизм.

Будем действовать по следующей схеме. Пусть $f\colon A \to B$ — некоторое K-линейное отображение. Построим рекурсию. Определим отображение $\Phi_n(f)$, где

$$\Phi_n(f)\colon \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{n} \to B,$$

следующим образом:

$$\Phi_1(f) = f,$$

$$\Phi_2(f)(a_1,\, a_2) = f(a_1)f(a_2) - f(a_1a_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Phi_n(f)(a_1,\, \ldots,\, a_n) = f(a_1)\Phi_{n-1}(a_2,\, \ldots,\, a_n) - \Phi_{n-1}(f)(a_1a_2,\, \ldots,\, a_n) - \ldots$$
$$\ldots - \Phi_{n-1}(f)(a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_1a_n).$$

Видно, что если f — кольцевой гомоморфизм, то $\Phi_2(f) = 0$.

Смысл этого таков. Давайте сразу для простоты договоримся, что кольцо B без делителей нуля. Тогда оказывается, что если $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$, но $\Phi_n(f) \not\equiv 0$, то из этого сразу же следует, что $f(1) = n$. Отсюда вытекает фундаментальное следствие: если $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$, то $f(1) \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, n\}$.

Определение 1 (Бухштабер, Рис, [3]). При всех наших предположениях будем говорить, что линейное отображение f является *n-гомоморфизмом*, если $f(1) = n$ и $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$.

Сначала мы дали

Определение 2 (Бухштабер, Рис, [2]). K-линейное отображение $f\colon A \to B$ коммутативных K-алгебр называется:

1) *алгебраическим степени n* в $a \in A$, если существует полином

$$p(a;\, t) = t^n - \beta_1(a)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n\beta_n(a) \in B[t]$$

такой, что

$$\sum_{q \geqslant 0} \frac{f(a^q)}{t^{q+1}} = \frac{1}{n}\frac{d}{dt}\,\ln\, p(a,\, t).$$

2) *n-алгебраическим*, если оно алгебраическое степени n для всех $a \in A$.

Это определение позволило нам описать мультипликативные свойства диагонального отображения в групповой алгебре многозначной группы и построить теорию n-алгебр Хопфа. Но когда мы начали рассказывать об этих результатах, известный английский алгебраист Джон Маккай спросил у Риса: «Как это связано с n-гомоморфизмами Фробениуса?» Когда Элмер рассказал мне об этом, моя первая реакция была следующей: если группа коммутативна, то все неприводимые представления одномерные, и поэтому рекурсия обрывается. То есть гомоморфизмы Фробениуса существенно связаны с некоммутативностью. Тем не менее, вопрос Маккая не оставил нас в покое, и в статье 1997 года мы рассмотрели примеры колец, где определения 1 и 2 приводят к одному и тому же результату. Потом, через год, нам удалось доказать общую теорему, что наше определение n-алгебраического гомоморфизма эквивалентно определению n-гомоморфизма на основе условия обрыва рекурсии Фробениуса. Я ещё раз повторю, что этот факт нетривиальный. С точки зрения нашей науки, Фробениус брал группу, брал её групповое кольцо, и строил рекурсию для следа неприводимого представления. И получалось, что его рекурсия для такого линейного отображения обрывается на $(n+1)$-м шаге, где n — размерность представления. Поэтому если кольцо коммутативное, то рекурсия обрывается сразу. Но при одном ограничении, что представление неприводимо. Фробениусу для его целей и не надо было рассматривать приводимые представления, поэтому создавалось впечатление, что его теория в коммутативном случае не интересна. Я хочу подчеркнуть, что идея использовать рекурсию Фробениуса в случае коммутативных колец не является тривиальной, и вряд ли мы пришли бы к ней, не имея нашего определения n-алгебраического гомоморфизма.

Прежде чем сформулировать главный результат об n-гомоморфизмах, я хочу сформулировать одну нетривиальную теорему. Её доказательство потребовало примерно год работы. Это доказательство опирается на наши оба определения. Для набора $a_1, \ldots, a_n \in A$ рассмотрим определитель

$$D_f(a_1, \ldots, a_n) = \det \begin{pmatrix} f(a_1) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ f(a_1a_2) & f(a_2) & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & n-1 \\ f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) & f(a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) & \ldots & \ldots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

Теорема 3.

$$\Phi_n(f)(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} D_f(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}).$$

Из этой теоремы моментально вытекает такое замечательное свойство:

Следствие. $\Phi_n(f)$ — *симметрическая однородная мультилинейная форма.*

Этот факт важен для всей нашей науки. Я был бы рад, если бы кто-нибудь смог получить его непосредственно из рекурсии Фробениуса. Повторяю, наше доказательство таково. У нас есть два разных определения одного и того же, как выяснилось, объекта: n-алгебраического гомоморфизма и n-гомоморфизма на основе условия обрыва. Сопоставляя их, мы получаем теорему 3, которая даёт явное решение рекурсии Фробениуса в этом случае. Как следствие, получается, что $\Phi_n(f)$ — симметрическая однородная мультилинейная форма.

Мы обсудили, что такое n-гомоморфизмы, как они связаны с рекурсией Фробениуса, и в явном виде решили эту рекурсию. Теперь давайте рассмотрим очень полезный пример. Перейдём от алгебры к топологии. Пусть X — топологическое пространство. Тогда можно изучать симметрические степени $\mathrm{Sym}^n(X)$. Очень многие задачи топологии и алгебраической геометрии приводят к этому фундаментальному объекту. Скажем, когда X — алгебраическая кривая рода n, тогда $\mathrm{Sym}^n(X)$ при помощи отображения Абеля отождествляется с якобианом этой кривой.

Пусть $A = C(X)$ — кольцо комплекснозначных непрерывных функций на X. Затем, следуя идеологии вторичного квантования, перейдём к пространству

$$C(X)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C(X), \mathbb{C}).$$

Я не зря сказал про вторичное квантование, потому что если в классической механике и в классической алгебраической геометрии пространство X описывается в терминах кольца функций на нём, то с точки зрения квантовой механики более естественно рассматривать двойственный объект $C(X)^*$. В случае, когда X — группа, $C(X)^*$ является алгеброй Хопфа, двойственной алгебре Хопфа $C(X)$. На этом пути появляются квантовые группы. В общем случае $C(X)^*$ — это линейное пространство, для которого есть замечательное отображение

$$X \xrightarrow{\mathrm{ev}} C(X)^*,$$

именуемое «вычисляющим» (evaluation). Это отображение сопоставляет точке x функционал $\mathrm{ev}(x) = f$ вычисления значения функции φ в точке x: $f(\varphi) = \varphi(x)$. Если пространство X хаусдорфово, то это отображение — вложение. Мы погружаем пространство X в $C(X)^*$ и изучаем его свойства в громадной, но линейной, оболочке. Эта оболочка замечательная, потому что, как вы видите, она функториальная: если X отображается в Y, то

$C(X)^*$ отображается в $C(Y)^*$, т. е. отображение идёт в ту же сторону. Сейчас наша с вами задача заключается в том, чтобы увидеть, какие ещё пространства естественно канонически содержатся в $C(X)^*$ кроме X. Подсказка такая: когда мы берём отображение ev, то мы, следуя Гельфанду, фактически отождествляем X с кольцевыми гомоморфизмами $C(X) \to \mathbb{C}$.

Рассмотрим каноническое отображение

$$\mathrm{Sym}^n(X) \xrightarrow{\mathrm{ev}_n} C(X)^*,$$

заданное формулой

$$\mathrm{ev}_n(x_1, \ldots, x_n)(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k),$$

т. е. мы усредняем по конфигурации точек.

З а д а ч а 6. Показать, что если пространство X хаусдорфово, то для любого n отображение ev_n — вложение.

Следующая теорема доказана прошлой осенью.

Т е о р е м а 4 (Бухштабер, Рис, [4]). *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство; топология в $C(X)$ — супремум топология; $C(X)^*$ — линейное пространство непрерывных функционалов. Тогда ev_n — гомеоморфизм на $\Phi^n(X) \subset C(X)^*$, если в пространстве функционалов берётся слабая топология. Здесь $\Phi^n(X)$ — подпространство, состоящее из тех функционалов, которые являются n-гомоморфизмами в смысле нашего определения.*

Если $n=1$, то n-гомоморфизм — это просто кольцевой гомоморфизм; в этом случае теорема 4 превращается в теорему Гельфанда. Хочу сразу сказать, что когда мы собирались доказывать нашу теорему для любого n, мы перерыли литературу, где доказывалась классическая теорема Гельфанда. Но ни один из методов, которые мы там нашли, не помог нам. Поэтому теорема 4 — это не надстройка над теоремой Гельфанда. Оказывается, что для n-гомоморфизмов можно построить некую специальную теорию обобщённых функций; затем доказать, что отображение ev_n — гомеоморфизм на n-гомоморфизмы; и как следствие получить теорему Гельфанда *).

Итак, при указанных условиях пространства n-гомоморфизмов — это в точности образы отображений ev_n от симметрических степеней. Это возвращает нас к Фробениусу, потому что у Фробениуса получалось, что если у вас есть коммутативная группа, то все её неприводимые представления одномерны; здесь это опять сработало. Возникает очень интересная область исследований. Мы эту науку рассказываем уже довольно давно, поэтому нашу теорию развивают в разных направлениях. Одно из

*) См. [6].

них — как избавиться от требования компактности? Есть самый простой способ — так называемый *метод бикомпактного расширения*. Нужно рассмотреть функции на некомпактном пространстве, которые, скажем, имеют определённые пределы. Тогда у нашей теоремы появляется много разных вариантов.

Теперь, опираясь на понятие n-гомоморфизма, мы с вами вернёмся назад и займёмся полисимметрическими полиномами. Для этого в качестве A рассмотрим кольцо $\mathbb{C}[u_1, \ldots, u_m]$; это кольцо я буду рассматривать как кольцо $C(\mathbb{C}^m)$, т. е. как кольцо функций на $\mathbb{C}^m$. Я рассматриваю n-мерное линейное пространство как алгебраическое многообразие с таким кольцом функций. Ясно, что если вы возьмёте кольцевые гомоморфизмы, вы вернётесь назад к $\mathbb{C}^m$, т. е. Φ^1 возвращает нас назад. Мы пойдём дальше и введём пространство $\Phi^n(m)$, состоящее из всех n-гомоморфизмов. Тогда мы получим отображение

$$\operatorname{Sym}^n(\mathbb{C}^m) \xrightarrow{\mathrm{ev}} \Phi^n(m) \subset \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_m]^*.$$

Теорема 5. *) *Пусть $f\colon \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_m] \to \mathbb{C}$ некоторый n-гомоморфизм. Тогда существует набор точек $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^m$, такой, что для любого полинома $\varphi \in \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_m]$ имеет место формула*

$$f(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(v_k).$$

Следствие. *Отображение*

$$\mathrm{ev}\colon\ \operatorname{Sym}^n(\mathbb{C}^m) \to \Phi^n(m)$$

является гомеоморфизмом.

Следствие. *Пусть A — некоторая конечно порождённая коммутативная алгебра и V — алгебраическое многообразие $\Phi_1(A)$, описываемое кольцевыми гомоморфизмами $A \to C$. Тогда отображение $\mathrm{ev}\colon\ \operatorname{Sym}^n(V) \to \Phi^n(A)$ является гомеоморфизмом аффинных алгебраических многообразий.*

Теперь я хочу построить явное отображение в $\mathbb{C}^N$, где $N = \binom{n+m}{n} - 1$. Как подсказывает теорема 5, для этих целей удобно использовать так называемые полиномы Ньютона. Для каждого мультииндекса $\omega = (i_1, \ldots, i_m)$ определён (m, n)-полином Ньютона p_ω — это (m, n)-полисимметрический

*) Следующие наши результаты с Э. Рисом опубликованы в работе [4].

полином

$$p_\omega\colon\ \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^m)\to\mathbb{C}\colon\ p_\omega(v_1,\,\ldots,\,v_n)=\sum_{k=1}^{n} v_k^\omega.$$

Напомним, что $v_k^\omega=v_{1k}^{i_1}\ldots v_{mk}^{i_m}$.

Возьмём линейное отображение $f\in\Phi^n(m)$. Следуя опыту алгебраической топологии, введём градуировку, считая, что каждый элемент u_i имеет градуировку 2. Тогда в качестве линейного базиса градуированного линейного пространства $\mathbb{C}[u_1,\,\ldots,\,u_m]$ достаточно рассмотреть мономы $u_{j_1}\ldots u_{j_k}$. Когда индексы будут пробегать все наборы $(j_1,\,\ldots,\,j_k)$, мы переберём топологический градуированный базис в этом пространстве. Поэтому, для того чтобы описать линейное отображение f, достаточно описать его значения на мономах. Для краткости положим $f(u_{j_1}\ldots u_{j_k})=f_{j_1\ldots j_k}$.

Я не зря упомянул про вторичное квантование. Дело в том, что когда вы работаете с пространством $C(X)^*$, то это не просто линейное пространство. Это пространство, в котором есть канонические координаты. Функции φ на пространстве X становятся каноническими координатами: $C(X)^*\xrightarrow{\varphi}\mathbb{C}$; $\varphi(f)=f(\varphi)$. Это всё время подчёркивает С. П. Новиков в методе интегралов Фейнмана. Что значит построить отображение при помощи набора функций $\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_N$? Нужно просто взять проекцию на задаваемое ими координатное пространство.

Теперь, следуя общей науке, воспользуемся градуировкой и введём тензор $F_k(f)=(f_{j_1\ldots j_k})$. Так как все u_i имеют одинаковую градуировку, то мы просто берём набор значений функции f на мономах одинаковой длины k. Это будет наш тензор. Легко проверить, что он симметричен относительно всех перестановок индексов.

Итак, мы сопоставляем линейному отображению $f\colon\mathbb{C}[u_1,\,\ldots,\,u_m]\to\mathbb{C}$ набор тензоров $F_k(f)$. Вспомним теперь, что мы работаем с n-гомоморфизмами. Поэтому с шага $n+1$ наступает обрыв рекурсии. Согласно теореме 3 условие $\Phi_{n+1}(f)=0$ сразу даёт, что $f_{j_1\ldots j_{n+q}}$ для всех $q\geqslant 1$ является полиномом от компонент тензоров $F_k(f)$, где $1\leqslant k\leqslant n$. В классической теории инвариантов это называется первой фундаментальной теоремой; здесь она сразу получается через рекурсию Фробениуса. Поэтому имеет место вложение многообразия $\Phi^n(m)$ в $\mathbb{C}^N$, где $N=\binom{n+m}{n}-1$.

Задача 7. Вычислить образ композиции отображений $J\circ\mathrm{ev}$, где $J\colon\mathbb{C}[u_1,\,\ldots,\,u_m]^*\to\mathbb{C}^N$ — проекция, задаваемая набором мономов $u_{j_1}\ldots u_{j_k}$, $k\leqslant n$.

Имеем: $J\circ\mathrm{ev}(v_1,\,\ldots,\,v_n)=(p_\xi(v_1,\,\ldots,\,v_n),\ |\xi|\leqslant n)$, где $|\xi|=\sum\limits_{q=1}^{k} j_q$, $\xi=(j_1,\,\ldots,\,j_k)$.

Итак, мы имеем два вложения многообразия $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^m)$ в $\mathbb{C}^N$, одно при помощи (n, m)-полиномов Ньютона p_ω, а второе при помощи элементарных (n, m)-симметрических функций $\sigma_{k,\omega}$ (см. начало лекции).

Задача 8. Найти обратимое алгебраическое преобразование пространства $\mathbb{C}^N$, переводящее одно вложение в другое.

Итак, у нас есть вложение $\Phi^n(m) \subset \mathbb{C}^N$. Это вложение мы будем описывать в полном соответствии с теорией тензоров, или, эквивалентно, с теорией представлений симметрической группы. Пространство $\mathbb{C}^N$ можно представить в виде прямой суммы симметрических степеней пространства $\mathbb{C}^m$:

$$\Phi^n(m) \subset \mathbb{C}^N = \bigoplus_{k=1}^{n} S^k(\mathbb{C}^m).$$

Мы сопоставили линейному функционалу f набор $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$. В нашей теореме отображение ev коммутирует с действием на $\mathbb{C}^m$ любой алгебраической группы. Начнём с действия аффинной группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^m)$. Очевидно, что симметрическая степень инвариантна относительно аффинной группы. Разложение, которое мы написали, согласовано также с каноническим разложением представления группы $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ на линейном пространстве $\mathbb{C}[u_1, \ldots, u_m]^*$. У нас реализуются стандартное представление группы $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ в $\mathbb{C}^m$, его симметрический квадрат и любая симметрическая степень.

Каков дальнейший план? Я не зря говорил о группе линейной и группе аффинной. Дело в том, что точка $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^m)$ — это конфигурация точек в $\mathbb{C}^m$. Но у конфигурации есть канонический центр: $(v_1, \ldots, v_n) \to \sum_{k=1}^{n} v_k$. Это соответствует каноническому гомеоморфизму

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^m) \approx \mathbb{C}^m \times \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^m)_0.$$

Здесь $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^m)_0$ — конфигурационное пространство наборов, центр которых есть нуль. Непосредственно из определения нетрудно проверить, что отображение ev полностью уважает это разложение. Поэтому получается канонический гомеоморфизм

$$\Phi^n(\mathbb{C}^m) \approx \mathbb{C}^m \times \Phi^n(\mathbb{C}^m)_0,$$

где $\Phi^n(\mathbb{C}^m)_0$ — те линейные гомоморфизмы, для которых $F_1 = 0$. Таким образом, задача описания искомого алгебраического многообразия сводится к задаче описания алгебраического многообразия $\Phi^n(\mathbb{C}^m)_0 \subset \mathbb{C}^{N_0}$, где $N_0 = N - m$. Мы отщепили декартову часть. А для чего это нужно? Это нужно для того, чтобы мы теперь могли спокойно работать с представлениями только группы $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. Напоминаю, что вложение нашего многообразия — это не просто вложение, это эквивариантное вложение.

Теперь я перейду от общих слов к конкретным ответам. Пусть сначала m любое, а $n=2$. Что собой представляет алгебраическое многообразие $\Phi^2(\mathbb{C}^m)_0$? Здесь $F_1=0$ и $F_3=0$. Всё определяет тензор F_2. При $m=2$ он имеет координаты: $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$. Для произвольного m надо набирать пары $\begin{pmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{pmatrix}$, $i<j$. Ответ такой: многообразие $\Phi^2(\mathbb{C}^m)_0$ имеет размерность $\binom{m+2}{2}-1-m$; легко подсчитать, что все условия, выделяющие нужное алгебраическое многообразие, сводятся к одному условию: симметрическая матрица F_2 имеет ранг не более 1. Общий ответ такой: нужно рассмотреть матрицу (f_{ij}), элементы которой — координаты тензора F_2. Это будет большая матрица размера $(m\times m)$. Искомое многообразие выделяется условием, что ранг этой матрицы не превосходит 1. Этот ответ отличается от ответа, который содержится в книге Гельфанда, Зелевинского и Капранова [7], гл. 4, § 2. Там используются более сложные соотношения Брилля. Наше доказательство из анализа соотношений Фробениуса занимает несколько строчек.

В случае $m=2$, $n=3$ имеем:

$$\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2)_0 \simeq \Phi^3(2)_0 \subset \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^4.$$

Координаты этого многообразия связаны соотношениями:

$$\begin{gathered}
f_{11}f_{122}+f_{22}f_{111}=2f_{12}f_{112},\\
f_{11}f_{222}+f_{22}f_{112}=2f_{12}f_{122},\\
6(f_{111}f_{122}-f_{112}^2)=f_{11}f_{12}^2-f_{11}^2f_{22},\\
6(f_{112}f_{222}-f_{122}^2)=f_{22}f_{12}^2-f_{11}f_{22}^2,\\
3(f_{112}f_{122}-f_{111}f_{222})=f_{12}^2-f_{11}f_{12}f_{22}.
\end{gathered}$$

В случае, когда m — любое, $n=3$ имеем:

$$\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^m)_0 \simeq \Phi^3(m)_0 \subset \mathbb{C}^{\binom{m+1}{2}} \oplus \mathbb{C}^{\binom{m+2}{3}}.$$

Координаты связаны соотношениями:

$$\begin{pmatrix} f_{iii} & f_{ijj} \\ f_{iij} & f_{jjj} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{jj} \\ f_{ii} \end{pmatrix}=2f_{ij}\begin{pmatrix} f_{iij} \\ f_{ijj} \end{pmatrix},$$

$$3\begin{vmatrix} f_{iii} & f_{ijj} \\ f_{iij} & f_{jjj} \end{vmatrix}=-f_{ij}\begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{vmatrix}, \qquad 6\begin{vmatrix} f_{ijk} & f_{kii} \\ f_{iji} & f_{iii} \end{vmatrix}=-f_{ii}\begin{vmatrix} f_{kj} & f_{ki} \\ f_{ij} & f_{ii} \end{vmatrix},$$

$$6\begin{vmatrix} f_{ijk} & f_{iik} \\ f_{ijj} & f_{iij} \end{vmatrix}=-f_{ii}\begin{vmatrix} f_{jk} & f_{ik} \\ f_{jj} & f_{ij} \end{vmatrix}, \qquad 6\begin{vmatrix} f_{ijk} & f_{ijj} \\ f_{ikk} & f_{ijk} \end{vmatrix}=-f_{ii}\begin{vmatrix} f_{jk} & f_{jj} \\ f_{kk} & f_{jk} \end{vmatrix}.$$

Эти детерминантные соотношения специалистам по интегрируемым системам напоминают фробениусовы многообразия, введённые Б. А. Дубровиным.

Теперь я хочу выполнить данное выше обещание и описать способ построения всех соотношений между (m, n)-полисимметрическими полиномами.

Обозначим через $SP(m, n)$ кольцо всех (m, n)-полисимметрических полиномов. Пусть e_ω, $\omega=(i_1, \ldots, i_m)$, $|\omega|\leqslant n$, — алгебраически независимые коммутирующие переменные и $e_\varnothing=1$, $|\varnothing|=1$. Рассмотрим производящую функцию

$$E(t, w)=\sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{|\omega|=k} e_\omega w^\omega, \qquad w\in\mathbb{C}^m.$$

Введём функцию

$$A(-t, w)=\frac{d}{dt}\ln E(t, w)$$

и разложим её в ряд по t

$$A(t, w)=\sum_{q\geqslant 1} t^{q-1}\sum_{|\xi|=q}\binom{q}{\xi} a_\xi w^\xi,$$

где $\xi=(i_1, \ldots, i_m)$, $\binom{q}{\xi}=\frac{q!}{i_1!\ldots i_m!}$. Ясно, что коэффициенты a_ξ в этом разложении являются полиномами от e_ω, $|\omega|\leqslant|\xi|$. Рассмотрим кольцевой гомоморфизм

$$g\colon \mathbb{C}[e_\omega]\to SP(m, n),$$

переводящий e_ω в элементарный (m, n)-симметрический полином $\sigma_{k,\omega}$, $|\omega|=k$. Тогда, по построению, полиномы a_ξ перейдут в полиномы Ньютона p_ξ.

Отображение g всегда является эпиморфизмом, но мономорфизмом — только когда $m=1$ или $n=1$. Таким образом, наша цель — описать ядро этого гомоморфизма при $m>1$.

Рассмотрим линейное отображение

$$F\colon C(\mathbb{C}^m)=\mathbb{C}[u_1, \ldots, u_m]\to\mathbb{C}[e_\omega],$$
$$F(1)=n \quad \text{и} \quad f(u^\xi)=a_\xi.$$

Отображению F соответствует гомоморфизм

$$\Phi_n(F)\colon C(\mathbb{C}^m)\otimes\ldots\otimes C(\mathbb{C}^m)\to\mathbb{C}[e_\omega].$$

Используя каноническую проекцию

$$\mathbb{C}^m\times\ldots\times\mathbb{C}^m\to\operatorname{Sym}^n(\mathbb{C}^m),$$

отождествим кольцо $SP(m, n)$ с подкольцом в $C(\mathbb{C}^m)\otimes\ldots\otimes C(\mathbb{C}^m)$. Таким образом, мы построили линейное отображение

$$\Phi_n(F)\colon SP(m, n)\to\mathbb{C}[e_\omega].$$

Т е о р е м а 6. *Ядро гомоморфизма* $g\colon \mathbb{C}[e_\omega]\to SP(m, n)$ *порождено элементами вида*

$$\Phi_n(F)(p_1)\Phi_n(F)(p_2)-n!\Phi_n(F)(p_1\cdot p_2).$$

З а д а ч а 9. Рассмотреть случай $m=n=2$. Получить при помощи теоремы 6 соотношение между 5-элементарными (2, 2)-симметрическими функциями (см. начало лекции).

Теперь я хочу описать связь с теоремами типа Винера—Пэли. Я довольно много занимался томографией. Эта тематика, казалось бы, совсем далека от обсуждаемой. Тем более замечательно, что между ними есть связь. Математический аппарат рентгеновской вычислительной томографии опирается на теорию замечательного преобразования Радона. Для томографии особенно важен случай $m=2$. В общем случае m-мерного пространства оно заключается в следующем. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^m$ задана некоторая функция f, быстро убывающая на бесконечности. Выбирается начало координат; прямая ξ проходит через начало координат; на прямой ξ выбирается точка p. Затем через точку p проводится гиперплоскость, ортогональная ξ, и функция f интегрируется по этой гиперплоскости. Так у нас получается преобразование Радона $f(x)\to\check{f}(\xi, p)$. Задача заключается в том, чтобы восстановить функцию $f(x)$ по функции $\check{f}(\xi, p)$. При этом необходимо ответить на вопрос: при каком условии функция $g(\xi, p)$ имеет вид $\check{f}(\xi, p)$ для некоторой функции $f(x)$? И. М. Гельфанд назвал это условие условием Винера—Пэли. Оно формулируется так. Фиксируем направление ξ и считаем k-й момент по p функции $f(x)$. В результате должна получится функция, которая для любого k полиномиально зависит от ξ. Это — классическое необходимое и достаточное условие; его ещё называют k-м условием Кавальери (где k — порядок момента). При $k=0$ это в точности классическое условие Кавальери.

Давайте теперь посмотрим, чем мы занимались с точки зрения преобразования Радона, когда описывали наше алгебраическое многообразие $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^m)$. У нас есть пространство $\mathbb{C}^m$, и в нём есть конфигурация $v_1, \ldots, v_n$ из n точек. Мы выбираем некое направление $\xi\in\mathbb{C}^m$ и рассматриваем проекцию $\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}$, сопоставляя точке v_k число $\langle v_k, \xi\rangle$. Перейдём теперь к многообразиям n-гомоморфизмов. Они ковариантны, т. е. отображение $\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}$ индуцирует отображение $\Phi^n(m)\to\Phi^n(1)$, потому что n точек в $\mathbb{C}$ задают как раз n-гомоморфизм на прямой.

Но при $m=1$ любой симметрический полином однозначно задаётся в виде полинома от элементарных симметрических полиномов, и поэтому $\Phi^n(1)\approx\mathbb{C}^n$. Из нашего гомеоморфизма $\Phi^n(m)\approx\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^m)$ вытекает, что если мы по всем направлениям возьмём проекции n точек, то мы сможем восстановить исходные n точек в пространстве $\mathbb{C}^m$ при некоторых условиях. Здесь оказалось, что теоремы Винера—Пэли не достаточно. Пусть $\xi_*\colon \Phi^n(m)\to\Phi^n(1)=\mathbb{C}^n$ — отображение, которое я только что описал. Тогда у нас получается аналог преобразования Радона $\Phi^n(m)\times\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^n$, а именно, $(f,\xi)\to\xi_*(f)$. Получается, что любому n-гомоморфизму f соответствует отображение $\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^n$. Мы имеем не одно отображение, а семейство отображений, параметризованное многообразием n-гомоморфизмов. Теперь задача свелась к задаче о разложении универсального полинома (в терминологии В. И. Арнольда) на линейные множители. Другими словами. Когда универсальный полином определяется наборами $v_1,\ldots,v_n\in\mathbb{C}^m$? Это — комплексный вариант теоремы обращения преобразования Радона в случае дискретной меры. Я обсуждал эту задачу со специалистами. Казалось, что достаточно классических результатов из теории Пэли—Винера. Однако это не так, и приходится существенно использовать теорию n-гомоморфизмов. Так мы столкнулись с дискретным вариантом комплексной теории преобразования Радона *).

Список литературы

[1] Brauer R. Representations of finite groups / T. L. Saaty, Ed. — New York: Wiley, 1963. — (Lectures in Modern Mathematics, v. 1). — P. 133—175.

[2] Бухштабер В. М., Рис Э. Г. Многозначные группы и n-алгебры Хопфа // Успехи матем. наук. — 1996. — Т. 51, № 4. — С. 149—150.

[3] Бухштабер В. М., Рис Э. Г. k-характеры Фробениуса и n-кольцевые гомоморфизмы // Успехи матем. наук. — 1997. — Т. 52, № 2. — С. 159—160.

[4] Buchstaber V. M., Rees E. G. The Gelfand map and symmetric products // Sel. Math. New Ser. — 2002. — V. 8, № 4. — P. 523—535.

[5] Бухштабер В. М., Рис Э. Г. Приложения фробениусовых n-гомоморфизмов // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57, № 1. — С. 149—150.

[6] Бухштабер В. М., Рис Э. Г. Кольца непрерывных функций, симметрические произведения и алгебры Фробениуса // Успехи матем. наук. — 2004. — Т. 59, № 1. — С. 125—144.

[7] Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V. Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants. — Boston: Birkhäuser, 1994. — (Mathematics: Theory and Applications).

[8] Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. — М.: Мир, 2000.

*) Решение этой, и других близких к ней задач, описано в работе [5].

[9] Olver P. J. Classical Invariant Theory. — Cambridge Univ. Press, 1999. — (LMS Student Texts, v. 44).

[10] Junker F. Ueber symmetrischen Functionen von mehren Reihen von Veränderlichen // Math. Ann. — 1893. — № 43. — P. 225—270.

[11] Junker F. Die symmetrischen Functionen und die Relationen zwischen den Elementarfunctionen derselben // Math. Ann. — 1894. — № 45. — P. 1—84.

19 апреля 2001 г.

С. Г. Гиндикин

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ АНАЛИЗОМ И ГЕОМЕТРИЕЙ

Я очень рад возможности прочитать лекцию в Независимом университете, который я рассматриваю как совершенно исключительное явление в мировой математической жизни. В качестве темы для моей первой лекции здесь я решил выбрать математический предмет, который очень важен для меня лично. Он чуть моложе, чем моя собственная математическая жизнь. Я помню, как Израиль Моисеевич Гельфанд пришёл на семинар по группам Ли, который вёл Евгений Борисович Дынкин. Я тогда был пятикурсником. Про этот семинар можно прочитать целую историческую лекцию; это был совершенно замечательный семинар, из которого вышли Кириллов, Винберг. Это было второе поколение участников семинара. А в первом поколении, среди старших участников, были Пятецкий-Шапиро, Березин, Карпелевич. Там была «ланкастерская» система, когда старшие участники обучали нас; я даже пытался это описать в предисловии к нашему с Винбергом сборнику «Семинар Дынкина». Тогда Гельфанд сказал (я хорошо это помню), что в математике начинается совершенно новая жизнь; через несколько лет все поймут, что надо заниматься только интегральной геометрией, а не теорией представлений, как он объяснял раньше. Это было в 1959 г. Прошло ещё не 50 лет, но уже больше, чем 40. Надо сказать, что интегральная геометрия, как математическая наука, началась при чуть-чуть скандальных обстоятельствах. Термин «интегральная геометрия» был уже занят, была интегральная геометрия в стиле Бляшке. Израиль Моисеевич объяснил, что то, что они сделали, это настолько несерьёзная вещь, что никаких прав собственности Бляшке на это направление не имеет, а вот теперь будет настоящая интегральная геометрия, и скоро все это поймут. И вот прошло 40 лет. Я не хочу говорить, что я подвожу итоги; существенную часть моей жизни я занимаюсь именно интегральной геометрией. Математики в моём возрасте должны прежде всего бурчать. В истории это называют *феноменом Понселе*. Обычно мы должны объяснять, что всё то, что сейчас делают люди в этой области, это что-то несерьёзное. Понселе только благодаря императору Александру I смог какое-то короткое время всерьёз заниматься математикой, когда его взяли в плен после отступления под Смоленском. И когда он был в лагере военнопленных (в старом смысле, в смысле XIX столетия) около Саратова, тогда он создал проективную геометрию. После возвращения во Францию он сделал быструю и успешную военную и государственную карьеру, не имел шансов записать и опубликовать его «русские» результаты и только к концу жизни обнаружил что какие-то молодые люди (Шаль и др.) заново создают проективную геометрию и делают это совершенно «неправильно», на что Понселе постоянно жаловался. Я постараюсь избегать подобных жалоб.

Первые шаги интегральной геометрии

Давайте я объясню, что я более или менее узнал в 1959 г. Я постараюсь с вами обсудить, в какой мере предсказание Гельфанда сбылось, а в какой нет. Я выбрал три истории про интегральную геометрию, чтобы проследить их не то, чтобы исторически, но в более или менее квазиисторическом ключе.

В 1959 г. вполне модным предметом была теория представлений групп. С 40-х годов начали пытаться строить гармонический анализ на некоммутативных группах. По-видимому, Дирак первым высказал такую фантастическую идею, что вместо экспонент в случае обычного Фурье-анализа для группы Лоренца, например, нужно рассматривать бесконечномерные представления в гильбертовых пространствах. Узловым моментом была работа Гельфанда и Наймарка; это было примерно в 1948 г. Это была работа об унитарных представлениях группы Лоренца. Речь шла о том, как в более или менее полном объёме построить интеграл Фурье для группы Лоренца. Группа Лоренца — это группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = G$, которая состоит из комплексных матриц второго порядка с определителем 1: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Это была статья, которую мы, когда учили теорию представлений, называли «красной статьёй» (по цвету обложки); она была опубликована в «Известиях Академии наук». Потом была «синяя книга»; это было уже для $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. В красной статье практически полностью был построен интеграл Фурье на этой группе. Высшим достижением этой теории был аналог формулы Планшереля, или Парсеваля, т. е. равенство между нормами в исходном $L^2(G)$ и в некотором другом L^2 уже унитарных представлений, что то же самое, как написать обратное преобразование Фурье. То есть мы определяем обобщённое преобразование Фурье и восстанавливаем исходную функцию. Итак, в конце этой статьи была формула Планшереля, или Парсеваля. Это — мечта аналитика: несколько страниц вычислений (это, конечно, первое, о чём мечтает каждый аналитик), но что ещё более важно — в конце простая и ясная формула. Это был важный момент в истории теории представлений. Затем несколько человек развивали эти результаты. Баргман рассмотрел случай вещественных матриц второго порядка, что было существенно более сложно; затем была деятельность Хариш-Чандры; Гельфанд и Наймарк рассмотрели классические группы, которые включали $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. И в каждом случае высшей точкой должна была быть формула Планшереля. Исходное доказательство не удалось обобщить ни на одну из других групп. И примерно через 10 лет, к концу 50-х годов Гельфанд заметил такую странную вещь, что до 90% вывода формулы Планшереля было посвящено решению некоторой задачи геометрического анализа, про которую даже непонятно, почему она попала в эту историю. Задача была следующая. В $\mathbb{C}^3$ рассматриваются комплексные прямые, которые пересекают гиперболу. По причинам, которые ясны из принятых выше обозначений, мы обозначим координаты в $\mathbb{C}^3$ (α, β, δ). Рассматривается гипербола в плоскости $\beta = 0$, которая задана параметрически: $\alpha = \lambda$, $\delta = \lambda^{-1}$, где $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Конечно, в комплексном пространстве говорить о гиперболе несерьёзно; это может быть любая коника. Но давайте говорить о гиперболе. Затем рассмотрим прямые, которые пересекают эту гиперболу: $\beta = t$, $\alpha = \lambda + ut$, $\delta = \lambda^{-1} + vt$. Соответственно, (λ, u, v) — комплексные параметры семейства прямых, а t — внутренний параметр на прямой. Затем мы берём функцию $f(\alpha, \beta, \delta) \in C_0^\infty(\mathbb{C}^3)$, гладкую в вещественном смысле, и интегрируем её по этим прямым:

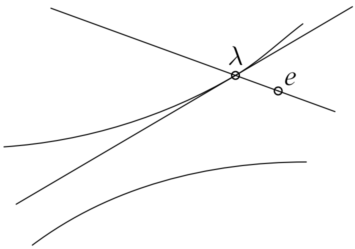


Рис. 1. Построение обратного преобразования

$$\hat{f}(\lambda, u, v) = \int\limits_{\text{по прямой}} f\, dt \wedge \overline{dt}.$$

В результате возникает интегральное преобразование. Что существенно, функцию от трёх переменных мы преобразуем в функцию от трёх переменных: $f \mapsto \hat{f}$. В вычислениях Гельфанда и Наймарка строилось обратное преобразование, и это преобразование выглядело очень просто. Я его объясню геометрическим образом (рис. 1).

Рассмотрим нашу гиперболу. Пусть нам нужно восстановить нашу функцию в некоторой точке e. Проведём через эту точку прямую, которая будет пересекать нашу гиперболу в некоторой точке λ. Можно взять значение преобразования на этой прямой — точке пространства прямых. В пространстве прямых, проходящих через точку λ, есть такое естественное преобразование. Возьмём касательную прямую к гиперболе в точке λ.

Нашу прямую можно инфинитезимально повернуть в плоскости, содержащей касательную к гиперболе и нашу прямую; здесь есть выделенное естественное направление дифференцирования. Пусть L — оператор, зависящий от точки λ и прямой. Оказывается, что

$$\int\limits_{\Lambda(e)} (L \circ \bar{L})\hat{f} = c\, f(e),$$

где $\Lambda(e)$ — семейство прямых, проходящих через точку e. Это — результат; к нему приводят несколько страниц вычислений. Но при этом эта формула никак в статье не выделена. Хочется верить авторам, что они не знали в этот момент такой геометрической интерпретации, а не то чтобы они по каким-то причинам скрыли от читателей такую замечательную геометрическую задачу. В истории математики известен такой феномен: когда молодой Лейбниц по совету Гюйгенса читал рукописи Паскаля о циклоиде, он не мог поверить, что Паскаль не знал общих правил дифференциального и интегрального исчисления, а только по каким-то причинам работал с единственной кривой. Здесь тоже есть такой интересный феномен, хотя, может быть, и менее великий: эта подзадача не была идентифицирована лет 10, хотя все обозначения и все формулы таковы, как будто авторы всё это видели.

Это был момент, когда началась интегральная геометрия в смысле Гельфанда. Формулу Планшереля получить очень просто. Обобщённое преобразование Фурье отличается от функции $\hat{f}$ на обычное преобразование Меллина по λ. Грубо говоря, вы после этого должны сделать одномерное преобразование Фурье, и вы получите то, что называется плотностью меры Планшереля, которая, соответственно, будет полиномиальной, раз здесь были дифференциальные операторы.

Мы видим, что на достаточно серьёзном уровне гармонический анализ на группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = G$ эквивалентен такой задаче: есть функция в трёхмерном пространстве, вы знаете интегралы по прямым, пересекающим гиперболу, и нужно восстановить функцию.

Допустимые комплексы прямых

Здесь есть естественные вопросы. Например, можно ли заменить гиперболу какой-либо алгебраической кривой, скажем, кривой третьей степени? Ответ очень простой. Он заключается в том, что не просто можно, но и доказательство для любой алгебраической кривой, и, более того, для кривой в n-мерном пространстве, получается почти дословным повторением того доказательства, которое было у Гельфанда и Наймарка. Сделал это Александр Александрович Кириллов. Это был простой, но важный шаг. Здесь важно то, что после того как вы заменили гиперболу другой алгебраической кривой, у вас не осталось групп. Никакой групповой симметрии в задаче нет, а формула есть. Идеологически всё поменялось. Это начальная точка. Многомерный гармонический анализ, по-видимому, нужно уже связывать не с группами, а с каким-то более общими геометрическими структурами.

Некоторые вещи выяснились немедленно, в начале 60-х годов. Как я уже сказал, мы можем решать задачу об обращении интегрального преобразования для прямых, пересекающих гиперболу. Скоро был замечен ещё один пример обращения такого преобразования. Рассмотрим в $\mathbb{C}^3$ некоторую поверхность и возьмём прямые, касающиеся этой поверхности. Это снова будет 3-параметрическое семейство. Оказывается, для этой задачи интеграл тоже можно обратить.

Если вы посмотрите 5-й выпуск «Обобщённых функций», то в этот момент стало понятно, скажем, в трёхмерном пространстве, что есть более или менее обратная теорема. Если предполагать, что формула обращения имеет такую структуру для некоторого оператора первого порядка, то тогда других примеров нет. Скажем более точно. Прямые в трёхмерном пространстве зависят от четырёх параметров. Мы ищем 3-параметрические семейства прямых, для которых можно обойтись знанием интеграла по этим прямым. Классики дифференциальной геометрии 3-параметрические семейства прямых называли *комплексами*. Так вот, для каких комплексов можно восстановить функцию? Гельфанд и Граев доказали, что в трёхмерном пространстве фактически только для таких примеров (если наложить естественные ограничения на структуру формулы обращения). Довольно ясно было, что в n-мерном пространстве в общем положении тоже ничего нового нет. Но если рассмотреть вырождение, то там, грубо говоря, могут быть очень сложные комбинации касания и пересечения. В окончательной форме мы с Иосифом Бернштейном описали все комплексы, для которых существует формула обращения, используя сигма-процесс. Я хочу сказать пару слов о том, как выглядит доказательство в этой задаче, и в каком смысле доказывается обратная теорема. Потом оказалось, что по другому поводу классики уже знали специальную роль этих двух типов комплексов прямых.

Идея очень проста. Давайте в $\mathbb{C}^n$ рассмотрим прямые $z=\alpha t+\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ — фиксированные векторы. Тогда если мы имеем функцию $f \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{C}^n)$, которая гладкая только в вещественном смысле, то можно рассмотреть функцию

$$\hat{f}(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{C}_t} f(\alpha t+\beta)\, dt \wedge d\bar{t};$$

мы интегрируем по комплексной прямой. Пусть Σ — все прямые, а Σ_0 — те прямые, для которых $\beta = 0$. Для удобства мы будем рассматривать просто функцию от α и β, которую обозначим $F(\alpha, \beta)$. Мы рассмотрим проблему восстановления функции в точке $z = 0$. Образуем дифференциальную форму

$$\kappa F = \sum_j \frac{\partial F}{\partial \beta_j}\Big|_{\beta=0} d\alpha_j; \tag{1}$$

мы дифференцируем по координате β_j и берём дифференциал $d\alpha_j$, и в конечном счёте рассматриваем эту форму для $\beta = 0$. Простое упражнение на непосредственное дифференцирование интеграла даёт, что если $F = \hat{f}$, то форма κF d-замкнута (т. е. замкнута по аналитическим координатам, по координате α_j). Мы берём форму $(\kappa \wedge \bar{\kappa})\hat{f}$; это будет (1, 1)-форма, и она будет уже просто замкнута. Тогда оказывается, что если мы берём эту форму и рассматриваем её интеграл по какому-то циклу $\gamma \subset \Sigma_0$, то снова

$$\int\limits_{\gamma \subset \Sigma_0} (\kappa \wedge \bar{\kappa})\hat{f} = c(\gamma) f(0).$$

Здесь топология простая, поэтому это равенство достаточно проверить для какого-нибудь очень простого цикла. Например, можно фиксировать некоторую 2-мерную плоскость, и в качестве цикла взять все прямые в этой плоскости, проходящие через некоторую фиксированную точку. Тогда мы получаем то, что называется формулой Радона (в комплексном варианте), которая хорошо известна и которая получается при помощи преобразования Фурье. А в общем случае получается такая формула. Поэтому, если $n = 3$ и мы имеем комплекс прямых, который зависит от шести вещественных параметров, или от трёх комплексных параметров, то тогда через точку 0 (если это регулярная точка) проходит 1-параметрическое (параметр комплексный) семейство прямых. Мы должны просто ограничить нашу форму на этот цикл. Тут, конечно, может произойти неприятность, потому что коэффициент $c(\gamma)$ может оказаться равным нулю. Но в этом конкретном случае этого обычно не бывает: если цикл настоящий, нетривиальный, то и интеграл не равен нулю. Так получается формула.

На первый взгляд это означает, что тогда мы можем восстановить функцию для любого 3-параметрического семейства прямых. Это не так. Причину проясняет формула (1). Для того чтобы вычислять дифференциальную форму κF, мы должны дифференцировать по β. А если вы знаете функцию только на трёхмерном подмногообразии, то тогда с большой вероятностью вам придётся вычислять производную по трансверсальному направлению. Это означает, что если бы вы знали не только функцию, но и её производные по β, то это была бы задача Коши. А вам надо быть уверенными, что вы можете вычислить дифференциальный оператор первого порядка только по ограничению функции на это семейство. То есть мы имеем такое условие характеристичности. Такие комплексы прямых, для которых имеется характеристичность (когда можно вычислить оператор первого порядка по ограничению на эти прямые) называют *допустимыми* комплексами. Для них может быть решена задача Гурса, а не задача Коши, как в общем случае.

С этого места начинается вторая половина задачи. Нужно выяснить, для каких 3-параметрических семейств множество прямых, проходящих через точку, будет удовлетворять этому условию характеристичности. Оказывается, что на это 3-параметрическое семейство возникает одно нелинейное уравнение, которое можно интегрировать при помощи метода характеристик, совершенно классического. И если вы разберётесь с геометрией, как устроены эти характеристики, ответ будет как раз такой: это либо все прямые, которые пересекают прямую, либо все прямые, которые касаются коники. Ещё можно доказать, что если есть формула обращения с каким-то оператором первого порядка, то она всегда может быть вычислена при помощи оператора κ с небольшими вариациями.

Допустимые семейства кривых

Куда можно двигаться дальше? Вместо прямых можно рассматривать семейства алгебраических кривых и интегрировать по ним. Для них тоже могут быть какие-то формулы. Оказалось, что так оно и есть. На эту тему есть две следующие друг за другом статьи. Одна из них — работа конца 60-х годов (Гельфанд, Гиндикин, З. Я. Шапиро). Мы рассматривали такую задачу. Поскольку здесь всё локально, вы всегда можете считать, что вы находитесь в некоторой области $M \subset \mathbb{C}^n$. В этой области можно рассмотреть какие-то кривые. Пусть имеется n-параметрическое семейство кривых Ξ^n. Спрашивается, по каким семействам можно восстановить функции, пользуясь формулой такого же вида, с дифференциальными операторами первого порядка. Результат нашей работы, грубо говоря, состоит в следующем: можно построить некоторую универсальную формулу. Именно, рассмотрим бесконечномерное пространство Π всех аналитических кривых $z=\varphi(t)$. Рассмотрим снова подпространство Π_0, состоящее из кривых $\varphi \in \Pi$, для которых $\varphi(0)=0$. Первый вопрос состоит в том, как построить аналог формы κ, про которую я, нарушая историческую последовательность, рассказал в случае прямых. Ответ очень простой. Во-первых, если у вас есть финитная функция $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{C}^n)$, гладкая в вещественном смысле, то можно рассмотреть интеграл по этим кривым

$$\hat{f}(\varphi) = \int f(\varphi(t))\,dt \wedge d\bar{t}$$

и получить функционал, зависящий от кривой. В конечном счёте у нас будет n-параметрическое подпространство $\Sigma \subset \Pi$, и мы хотим по $\hat{f}|_\Sigma$ восстановить f. Результат имеет следующую структуру. Мы опять строим некоторый универсальный дифференциальный оператор из функционалов на пространстве кривых в дифференциальные (вариационные) 1-формы на этом пространстве:

$$\kappa_{\hat{f}}(\varphi;\,\delta\varphi) = \delta\hat{f}(\varphi;\,\delta\varphi/t).$$

Как я уже упомянул, мы берём кривые, для которых $\varphi(0) = 0$. Если мы варьируем такую кривую внутри нашего семейства, она в нуле будет равна нулю. Поэтому мы без неприятностей можем разделить вариацию на t. Это будет другая вариация, другой элемент касательного пространства. Мы берём обычную вариацию на такой вариации. Построенная форма будет дельта-замкнута. Основная теорема нашей работы с Гельфандом и Шапиро заключалась в том, что если у вас имеется такого типа форма обращения, то она всегда является ограничением такой универсальной формы плюс ещё некоторый член, связанный с изменением параметра. Получилась вещь, которая нас тогда страшно удивила. Все формулы обращения с операторами первого порядка обратной формы являются ограничениями стандартной дифференциальной вариационной формы на пространстве всех кривых. Когда получались первые явные формулы интегральной геометрии, мы никак не могли понять, почему все они похожи одна на другую. Например, в пространстве Лобачевского и в евклидовом пространстве. Хотя если вы работаете с представлениями, с формулой Планшереля, там они совершенно разные. Эта стандартная форма является идеологическим обоснованием универсального вида структуры этих формул.

Следующей частью этой программы была наша работа с Иосифом Бернштейном. Она была опубликована в виде препринтов, которые издавал Лейтес в Стокгольмском университете. Это была одна из последних работ, которые сделал Иосиф перед отъездом отсюда, поэтому были некоторые проблемы с публикацией. Мы, анализируя формулу из нашей тройной работы, показали, что если мы хотим восстановить функции только по интегралам по такому семейству кривых, то это немедленно накладывает очень серьёзные ограничения на эти кривые. А именно, эти кривые должны быть рациональными. Если у вас есть n-параметрическое семейство кривых $\Sigma^n \subset \Pi$, для которого существует такая формула, то эти кривые должны быть рациональными. То есть не совсем прямыми, но они должны одновременно иметь структуру проективных прямых. Более того, эти семейства должны быть в каком-то смысле полными. Если у вас есть какое-то алгебраическое многообразие и на нём взять семейство всех рациональных кривых, то оно, конечно, является полным. Но это не является бирациональным инвариантом. Вы можете сделать какой-то сигма-процесс, и тогда ваше семейство будет уже неполным. Нужно сделать это определение бирационально инвариантным. Грубо говоря, если вы берёте кривую из вашего семейства и на каком-то кусочке рассматриваете остальные кривые, то тогда им будут отвечать сечения нормального пучка, и это семейство сечений должно быть такое же, как в семействе всех кривых (полном семействе кривых), а это описывается теоремой Гротендика о линейных расслоениях на проективной прямой. Это условие локальное. У вас есть многообразие и есть семейство кривых. Тогда, если взять одну кривую, здесь это будет точка. Касательному подпространству $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma$ будут отвечать сечения нормального расслоения этой кривой.

Глобальная структура пространства сечений на рациональной кривой такая же, как на проективной прямой, они описываются теоремой Гротендика, т. е. совершенно явно. И вы можете узнать, такое у вас семейство сечений или нет, глядя на очень маленький кусочек этой кривой. А дальше уже могут быть какие-то сингулярности. Условие заключается в том, что семейство сечений должно быть такое, как семейство сечений векторного расслоения на проективной прямой. То есть главное, как устроены сечения, обращающиеся в нуль; они должны задаваться однородными полиномами.

Значит, есть такое полное описание всех таких семейств кривых. Это первая часть нашей работы. Она сравнительно простая. Это, по существу, интерпретация нашей работы с Гельфандом и Шапиро. Другой вопрос заключается в следующем. Это определение не требует, конечно, никакого условия на размерности. Число параметров, от которых зависит наше семейство кривых, может быть любым. Вопрос заключается в том, чтобы попытаться описать какие-то полные подсемейства рациональных кривых в семействе всех рациональных кривых. Мы получили такой ответ. В этой задаче всегда опять появляется условие касания и пересечения. Я это объясню на каком-нибудь простейшем примере. Например, возьмём проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$ и возьмём все коники на ней. Все коники на проективной плоскости зависят от пяти параметров. Пусть это будет множество Σ. Для интегральной геометрии было бы существенно описать двупараметрические подсемейства, которые являются полными в смысле того определения. Как мы должны выделить двупараметрическое семейство? Мы должны наложить три условия. Первый тип условия такой: вы можете взять кривую и рассмотреть коники, которые её касаются.

Второй тип условия такой: вы можете взять точку и оставить только те коники, которые проходят через эту точку. В этом примере мы можем взять коники, проходящие через две фиксированные точки. Саратовская теорема Понселе утверждает, что такое семейство квадрик эквивалентно семейству окружностей, потому что окружности как раз проходят через две циклические точки на бесконечности. Теперь мы должны наложить ещё одно условие. Какие бывают полные двупараметрические семейства окружностей? Один вариант такой: мы можем взять все окружности, которые касаются некоторой кривой. Хорошо известен вариант этой задачи, когда эта кривая — окружность или прямая. Тогда получаются просто орициклы на плоскости Лобачевского (в комплексифицированном варианте). Другой вариант: можно взять все окружности, проходящие через фиксированную точку. Тогда, пользуясь инверсией, можно доказать, что это семейство изоморфно семейству всех прямых. Таковы специальные случаи этой теоремы. Зато если бы вы взяли семейство всех окружностей фиксированного радиуса, то видно, что для него такого рода формулы не существует. Это объясняет те неприятности, которые возникают при попытках восстановить функцию по интегралам по окружностям радиуса 1.

У этой теоремы есть два варианта доказательства. Одно доказательство алгебро-геометрическое. Другое доказательство — чисто через дифференциальные уравнения. Если мы берём параметры всех кривых, пересекающих данную кривую, то это задаёт некоторое коническое многообразие в касательном пространстве многообразия кривых. Эти подсемейства в простейшем случае — квадрики, когда мы имеем конформную структуру. А вообще говоря, они — некие замечательные конусы. Дальше начинается, во-первых, линейная алгебра. Мы интересуемся подмногообразием, т. е. мы интересуемся, когда при пересечении конуса получается конус из того же подсемейства. Эта задача полностью решается. Оказывается, что это алгебраическое условие. Это алгебраическое условие превращается в систему нелинейных дифференциальных уравнений, которая интегрируется при помощи некоторого многомерного варианта метода характеристик. Наконец, опять возникает что-то вроде алгебраической геометрии, когда описывается явно, что такое эти характеристики.

Вокруг этой теоремы есть много интересной геометрии и анализа. Тут есть вещи, связанные с тем, что Арнольд называл теоремой Дезарга. Есть такой вариант теоремы Гильберта о том, что теорема Дезарга — теорема в 3-мерном пространстве, но аксиома на плоскости. В контексте рациональных кривых теорема Дезарга превращается в теорему о дифференциальных уравнениях. Эта отдельная задача о полных семействах рациональных кривых, немедленно дала, как говорят в научных отчётах, внешние приложения. В этот момент были очень популярны твисторные вещи. Пенроуз показал, что для решения автодуального уравнения Эйнштейна важно уметь построить семейство рациональных кривых с нормальным пучком $\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(1)$. Это важный момент в построении явных решений, которые долго не удавалось построить. Затем Уорд и Хитчин построили некоторые явные решения. Оказалось, что наш алгоритм немедленно даёт возможность строить явные решения этой системы. Конечно, был известен уже целый ряд анзатцев, в которых строились такие решения, и в них никаких разговоров о касаниях и пересечениях не было. Но когда вы потом смотрите на формулу, она немедленно может быть переведена на такой язык. Там действительно есть задача о том, является ли такой способ построения решения в каком-то смысле универсальным.

В начале 2005 г. в журнале «Nonlinearity» появится моя статья с соавторами, где показывается систематическая связь допустимых семейств рациональных кривых и солитонных решений важных нелинейных уравнений математической физики.

Тут многое зависит от того, в какой категории вы строите семейство рациональных кривых. Уже сравнительно недавно Гончаров алгебраически описал, как строить такие семейства в алгебраической категории. Он показал, что все они могут быть реализованы как кривые на многообразиях Энриквеса (многообразиях минимальной степени в проективном пространстве, т. е. многообразиях, которые имеют минимальную степень среди всех многообразий, которые нельзя поместить в проективное пространство меньшей размерности). В прошлом веке дель Пеццо описал поверхности минимальной степени. Простейший пример многообразия — многообразие Веронезе. Многообразия Энриквеса — их обобщения.

Интегральная геометрия для многомерных подмногообразий

В том, что касается комплексных кривых, интегральная геометрия достаточно понятна. Есть два направления, о каждом из которых я хотел бы сказать хотя бы немного. Одно из них такое: как заменить кривые подмногообразиями большей размерности? Ситуация меняется драматически. Это понятно с точки зрения связи с нелинейными дифференциальными уравнениями. Кривые появляются в задачах с одним спектральным параметром, и их более или менее можно интегрировать. А если есть несколько спектральных параметров, то об интегрируемости сказать уже почти ничего обычно нельзя. Тем не менее, в интегральной геометрии есть ситуации, в которых можно нечто сказать. И это будет мой второй сюжет. Третий сюжет: как быть в вещественном случае?

Я начал с представлений, но полностью ушёл в жизнь кривых. Сейчас я хочу вернуться к примеру с $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$. Эту группу матриц можно рассматривать как гиперболоид $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ в $\mathbb{C}^4$. Что такое прямые, пересекающие гиперболу? Что это значит на групповом языке? Сначала не на групповом языке: прямые — это в точности линейные образующие гиперболоида. Они образуют трёхпараметрическое семейство. А если вы спроектируете на первые три координаты, то вы как раз получите прямые, пересекающие гиперболу. Наоборот, прямые, пересекающие гиперболу, это как раз те прямые, которые могут быть подняты на гиперболоид. А если говорить на групповом языке, то мы должны взять максимальную унипотентную подгруппу (это будет прямая на гиперболоиде) и её двусторонние сдвиги матрицами из нашей группы: $g_1\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_2$. Таким способом получится то же самое семейство прямых. Это — орициклы. Орициклы в данном случае — это как раз сдвиги унипотентной подгруппы.

Следующий естественный ход заключался в том, чтобы обобщить это на все комплексные полупростые группы. Например, можно взять группу $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$ и в ней взять максимальную унипотентную подгруппу N. Это матрицы с единицами на диагонали и с чем угодно выше диагонали: $\begin{pmatrix}1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$. Подгруппу N тоже будем сдвигать с двух сторон: $\xi(g_1,\ g_2)=g_1Ng_2$. Тогда получится семейство подмногообразий, которое будет зависеть от того же числа параметров, что и эта группа, т. е. от n^2-1 параметров. Это было предложено в 1959 г. Гельфандом и Граевым. То есть вы можете рассмотреть орисферическое преобразование. Эти сдвиги называются орисферами. Вы можете интегрировать функцию по орисфере по естественной мере, полученной с этой унипотентной подгруппы:

$$\hat{f}(g_1,\ g_2)=\int\limits_{\xi(g_1,g_2)} f.$$

Тогда остаётся верным всё то, что было замечено для $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$. А именно, чтобы восстановить проекции на унитарные представления (это получается опять-таки евклидовским меллиновским преобразованием из $\hat{f}$) и написать формулу Планшереля, достаточно научиться восстанавливать f из $\hat{f}$, через орисферическое преобразование. Это было замечено в 1959 г., и в этом месте обнаружилась такая неприятность: никаких средств решения этой задачи, за пределами случая с 1-мерными орициклами, не было найдено, хотя этим они тогда занимались довольно интенсивно.

План был рассмотреть какой-то широкий контекст геометрического анализа, в котором мы умеем восстанавливать функцию через интегралы по подмногообразиям, так, чтобы в специальном случае мы получили формулу обращения орисферического преобразования, и тогда получили бы формулу Планшереля. Но этот радужный план не реализовался. Единственное, что удалось сделать в тот момент, — получить формулу обращения, пользуясь формулой Планшереля, которая была уже известна. Я вам уже говорил, что доказательство из первой работы Гельфанда и Наймарка не удавалось обобщить. Причина этого была, грубо говоря, в том, что не было видно прямого способа обращать орисферическое преобразование. Но были найдены другие способы, в поисках которых участвовал Хариш-Чандра, потом был способ Гельфанда и Граева через рисовские интегралы. А прямого способа не было. Потребовалось около 10 лет, пока удалось что-то сделать в этом направлении. Сделано это было лично для группы $\mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$. Была замечена такая вещь. Мы можем считать, что $\mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$ — это почти то же самое, что пространство $\mathbb{C}^N$, где $N = n^2 - 1$. Орисферы там будут плоскостями. Нильпотентная группа будет плоскостью размерности $\frac{n(n+1)}{2}$. Соответственно, когда мы умножаем нильпотентную подгруппу слева и справа, мы делаем линейное преобразование. Для этой группы проблема обращения орисферического преобразования — проблема линейного анализа. То есть мы должны восстановить функцию в линейном пространстве, если известны её интегралы по k-мерным плоскостям, где $k = \frac{n(n+1)}{2}$.

В 1969 г. Гельфанд, Граев и Шапиро предложили замечательный способ прямого решения этой задачи. На время они не стали думать, чем замечательно семейство орисфер, чем замечательно такое семейство плоскостей. Вместо этого они рассмотрели общую задачу восстановления функции f в N-мерном пространстве, если известны интегралы по какому-то N-параметрическому семейству плоскостей. То, что я рассказывал про оператор κ для прямых, — это был фрагмент их работы. Идея была опять-таки очень простой. Пусть Ξ — все k-мерные аффинные плоскости в $G = \mathbb{C}^N$. Мы будем рассматривать не просто плоскости, а плоскости параметризованные: $z = \alpha^{(1)} t_1 + \ldots + \alpha^{(k)} t_k$. Тогда интеграл по этим плоскостям будет зависеть от α и β. Поэтому мы получаем функцию $\hat{f}(\alpha, \beta)$. Если вы рассматриваете интегралы по всем плоскостям, то задача переопределена. Но вы хотите восстанавливать функцию, если известны интегралы по N-параметрическому семейству плоскостей $\Pi^N \subset \Xi$. Рассмотрим множество $\Xi_0 \subset \Xi$, состоящее из плоскостей, для которых $\beta = 0$. Затем для каждого вектора α возьмём форму $\kappa^{(j)} = \sum \frac{\partial f}{\partial \beta_i} d\alpha_i^{(j)}$ и положим

$$\tilde{\kappa} \hat{f} = \prod (\kappa^{(j)} \wedge \overline{\kappa^{(j)}}) \hat{f}|_{\beta=0}.$$

Опять оказывается, что эта форма замкнута. Мы интегрируем эту форму по какому-то циклу подходящей размерности в Σ_0. Поскольку это грассманиан, мы знаем базис в пространстве когомологий (клетки Шуберта) и исследование интеграла даёт $\int\limits_{\gamma} \tilde{\kappa}\hat{f} = c(\gamma) f(0)$. Если мы имеем N-мерное подмногообразие Π, то в качестве цикла мы берём его пересечение с Σ_0. В общем случае опять-таки возникает проблема с вычислением формы, которое может потребовать дифференцирования в трансверсальных направлениях. Замечательный факт состоит в том, что если ваши плоскости — орисферы, то вы можете вычислить эту форму, которая является дифференциальным оператором из функций в формы, только через ограничение $\tilde{\kappa}$ на орисферы, только через интегралы по орисферам. То есть множество плоскостей, которые являются орисферами, является характеристическим для этого дифференциального оператора; вы можете его сосчитать. И это даёт вам очень быстро формулу обращения.

Ничего похожего на одномерный результат для прямых, а потом и для кривых, о том, что можно описать все такие характеристические подмногообразия через касания и пересечения, здесь нет — никаких следов. Всё кончается на одномерном случае. Однако тут есть интересный сюжет. Почему для $G = \mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$ всё можно посчитать? Анализ показывает, что всё дело в том, что плоскости, которые представляют орисферы, пересекаются максимально вырожденным образом. Когда у нас было $\mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$, это означало следующее. Если мы возьмём двойственное семейство орициклов и возьмём точку в этом двойственном пространстве, то тогда точкам на группе будут отвечать какие-то кривые здесь. И если вы в касательном пространстве взяли касательные к ним, то это будет некоторый конус. Вырожденность означает, что этот конус является плоскостью. Нечто такое на более высоком уровне имеется и для орисфер, отвечающих группе $\mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$. Очень интересно было бы понять природу допустимых семейств плоскостей. Есть некоторые результаты Гончарова о таких допустимых семействах плоскостей, но картина абсолютно не понятна. Есть только один ясный факт, что в случае группы $\mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$ мы можем сосчитать обратный оператор. Почти нет других серьёзных примеров.

Для других полупростых групп тоже хочется сделать что-то такое. Но вы немедленно понимаете, что нет никаких надежд, что орисферы будут плоскостями. Поэтому нужно научиться что-то делать в случае искривлённых поверхностей. Оказывается, это тоже возможно. Есть моя работа конца 80-х годов, результаты которой напоминают то, что было сделано для кривых. Я рассмотрел множество всех k-параметрических аналитических подмногообразий и для него написал некоторую вариационную форму, которая является замкнутой и в плоском случае совпадает с формой Гельфанда—Граева—Шапиро. Оказывается, что для орисфер на комплексных полупростых группах (и некотором более широком классе симметрических пространств) мы получаем формулу обращения. И опять-таки выясняется, что там значительно более богатая геометрия поведения орисфер, но они всегда пересекаются наиболее вырожденным способом. Вы можете только одним способом сказать, что означает вырожденное пересечение подмногообразий, и оно всегда реализуется для орисфер на симметрических пространствах. И оно нужно вам для того, чтобы вы могли применить эту формулу.

На конференции Петровского, которая была неделю назад, я предложил некую аксиоматику. Я пытался превратить то, что надо для восстановления, в набор аксиом. Фактически написано некое нелинейное дифференциальное уравнение, решениями которого являются симметрические пространства. И если у вас есть решение этого уравнения, то вы можете обратить соответствующий оператор интегральной геометрии. Для ранга больше 1 я не знаю ни одного другого решения этого нелинейного дифференциального уравнения. Это нелинейное дифференциальное уравнение записано как $(L—A)$-пара, как условие совместности линейных дифференциальных уравнений с несколькими параметрами.

Мне кажется, что здесь было бы очень хорошо понять геометрию орисфер и связь с нелинейными дифференциальными уравнениями, и сопоставить это с тем, что известно про другие уравнения, интегрируемые методом обратной задачи.

Вещественные задачи

В заключение я хочу рассказать ещё об одном, как мне кажется, важном направлении этих исследований — о вещественной задаче. С самого начала Гельфанд и Наймарк, Гельфанд и Граев рассматривали группы над $\mathbb{C}$. Все последующие результаты тоже были для групп над $\mathbb{C}$. Дело в том, что каждый, кто знает преобразование Радона, знает, что там есть неприятности в вещественном случае. В вещественном случае мы можем написать все эти формулы, мы можем написать оператор κ. Но когда вы его интегрируете, он всегда даст вам нуль, т. е. он не даст вам формулу обращения. Это связано с многими обстоятельствами. Например, с тем, что в вещественной интегральной геометрии вообще часто формулы обращения нелокальные. Это означает, что вместо дифференциальных операторов в них участвуют псевдодифференциальные операторы. Но причина не только в этом. В теории представлений имеются дискретные серии представлений. Давайте я рассмотрю ситуацию в самом простом примере: в случае $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})=G_{\mathbb{R}}$. Это будет вещественный гиперболоид $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ в $\mathbb{R}^4$. Вы можете рассмотреть ровно такие же орисферы. Это будут прямые на этом гиперболоиде. Вы можете интегрировать по ним. У вас получится интегральный оператор. Но этот интегральный оператор имеет огромное ядро; вы не можете его обратить. И его ядро в точности отвечает дискретным сериям представлений, голоморфным и антиголоморфным. Когда я в первый раз услышал о том, какие задачи есть в интегральной геометрии, я услышал об этой задаче: «Отвечает ли какая-нибудь интегральная геометрия вещественным группам, в частности, группе $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$? Можно ли найти что-нибудь для этих групп? Или в более общем случае — для вещественных аффинных симметрических пространств, где тоже есть дискретные серии.»

Это была старая задача Гельфанда, над которой мы все много мучились. Пару работ я опубликовал с Гельфандом. Мы пытались найти какие-то обходные пути. И пару лет назад я обнаружил, что мы все дружно просмотрели очень простую, почти тривиальную, возможность, что надо делать в этой задаче.

Одна возможность — рассматривать прямые на гиперболоиде $G_{\mathbb{R}}\subset\subset G_{\mathbb{C}}\ni z$. Но есть эквивалентный язык, когда вы рассматриваете не орициклы, а орисферы. Что такое орисферы? Мы рассматриваем билинейную форму, которая является поляризацией квадратичной формы $\square(z)=\alpha\delta-\beta\gamma$. Обозначим её $\zeta\cdot z$; здесь z — точки нашего пространства. Есть замечательные сечения нашего гиперболоида (этого или же комплексного) — изотропные сечения. Это такие сечения $\omega(\zeta)$ плоскостями $\zeta\cdot z=1$, что $\square\zeta=0$. Изотропные сечения это и есть орисферы. Орисферы являются параболоидами.

Задача о восстановлении функции через интегралы по орициклам, которую мы обсуждали, и задача о восстановлении функции через сечения изотропными плоскостями абсолютно эквивалентны. Они пересчитываются одна в другую обычным преобразованием Радона. Мне сейчас более удобно работать со второй задачей, когда мы рассматриваем сечения изотропными плоскостями.

Ситуация та же самая. Если вы взяли вещественные изотропные сечения нашего гиперболоида, то это преобразование имеет ядро. Идея тривиальная. Давайте вместо того, чтобы брать вещественные сечения гиперболоида, будем брать сечения комплексного гиперболоида без вещественных точек. Итак, мы берём комплексные орисферы без вещественных точек.

Это множество мы будем обозначать Ω. Это разумно потому, что мы тогда можем определить преобразование следующим образом:

$$\hat{f}(\zeta) = \int\limits_{G_{\mathbb{R}}} \frac{f(x)}{\zeta x - 1}\, d\mu(x).$$

Если у вас нет вещественных точек, то нет особенностей под интегралом. Написанный интеграл имеет смысл и, кроме того, если можно, он будет голоморфно зависеть от параметра ζ. Что мы сделали? Мы рассмотрели комплексные орисферы без вещественных точек. Если мы рассматривали вещественные орисферы, то мы по ним интегрировали, т. е. мы интегрировали дельта-функцию. А теперь мы, во-первых, заменили орисферы, а во-вторых, вместо дельта-функции стали рассматривать ядро Коши. И что же оказывается? Оказывается, что если вы рассмотрели такое преобразование, то его уже можно обратить. Ядро исчезло.

Задача 1. Описать комплексные орисферы без вещественных точек.

Орисферы без вещественных точек описываются следующим образом. Пусть $\zeta = \xi + i\eta$. Автоматически $\Box\zeta = 0$. Первый класс орисфер задаётся условием $\Box\xi > 1$. Второй класс орисфер задаётся условиями $\eta = \lambda\xi$ и $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$.

Оказывается, что второй класс орисфер в точности эквивалентен обычным вещественным орисферам, которые лежат у них на границе. Первое семейство орисфер имеет две связные компоненты $\Xi_\pm$. Второе множество Ξ_0 связно, компоненты $\Xi_\pm$ являются областями, а множество Ξ_0 имеет меньшую размерность.

Мы можем рассмотреть ограничения комплексного орисферического преобразования на эти три множества: $\hat{f}_\pm(\zeta)$ и $\hat{f}_0(\zeta)$. Есть теорема, что можно восстановить функцию через них, и для этого есть явные формулы. Более того, оказывается, что эти орисферы автоматически разъединяют серии представлений. Я сейчас объясню для людей, которые имеют какой-то опыт общения с $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Там есть непрерывная серия представлений и есть голоморфные и антиголоморфные серии. Когда вы пишете обратную формулу, автоматически каждая из этих трёх компонент даёт вам какой-то вклад в восстанавливающую функцию. Эти три компоненты f_+, f_-, f_0 автоматически являются проекциями на эти три серии.

Есть такая странная вещь, что даже для группы $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ в результате можно сказать некоторые вещи, которые мы не замечали до этого. Например, области $\Xi_\pm$, которые лежат на комплексном конусе, являются областями голоморфности. На них, конечно, действует группа $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Но она действует нетранзитивно. То есть это пример неоднородных областей с действием группы $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Оказывается, что на голоморфных функциях на этих областях можно естественным образом определить гильбертово пространство типа Харди, и это будут модели голоморфных и антиголоморфных серий. Каждое представление там будет встречаться с кратностью 1. Это первый результат. Второй результат такой. У нас есть гильбертово пространство $L^2(G)=\mathcal{H}$ — пространство функций на группе по инвариантной мере. Мы разлагаем его на три компоненты $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_-$ и $\mathcal{H}_0$, отвечающие этим сериям (проекциям). Вопрос был такой. У нас есть такое разложение пространства функций на группе на подпространства, отвечающие сериям. Если вы спросите специалиста по представлениям, он вам расскажет приятную историю, что здесь есть разные классы картановских подгрупп и что им отвечает. Но какой аналитический смысл этого разложения? Кое-что мы уже знали. Мы знали про подпространства, отвечающие голоморфным сериям, что если вы рассматриваете эти функции на вещественной группе, то тогда в комплексной группе можно построить трубы, которые являются многообразиями Штейна и которые имеют вещественную группу границей Шилова, и эти подпространства — в точности граничные значения голоморфных функций в верхней и нижней трубе. Не удивительно, что голоморфные и антиголоморфные серии както связаны с комплексным анализом. Но, как мне кажется, значительно более неожиданным и информативным является третье пространство $\mathcal{H}_0$, которое отвечает непрерывной серии представлений с чисто вещественной реализацией. Оказывается, что если взять третью область, которая является дополнением к первым двум областям (эта область невыпуклая; она не является многообразием Штейна), то функции из этого подпространства являются граничными значениями, но уже не голоморфных функций, а 1-мерных $\bar{\partial}$-когомологий. Другими словами (этот факт оставался незамеченным), если вы берёте на группе функции, которые разлагаются только по непрерывным сериям, то имеется очень жёсткое условие на их волновой фронт. Их волновой фронт должен лежать в некотором невыпуклом конусе. Но раз он лежит в невыпуклом конусе, то мы не могли это заметить и перевести на язык голоморфных функций. Но это можно сделать, если вы пользуетесь языком старших когомологий. И этот феномен мне кажется принципиальным в многомерном анализе. Вещественные функции на вещественном многообразии иногда имеют канонические продолжения в комплексную область не только как функции, но и как старшие когомологии Коши—Римана. И, по крайней мере в представлениях, это существенно. Я говорил о группе $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, но кое-что из этого уже удалось обобщить и на другие группы.

31 мая 2001 г.

С. П. Новиков

ГЕОМЕТРИЯ ПУАССОНОВЫХ СТРУКТУР

Я хочу рассказать о геометрии пуассоновых структур. Вы можете сказать, что это в каком-то смысле примыкает к симплектической геометрии. Но несмотря на близость этих двух предметов, это совершенно другое. Я бы даже сказал, что это другое не столько по сути первичных определений, а по целям, которые здесь ставятся, даже когда имеются пересекающиеся объекты. Симплектическая геометрия является разделом всё-таки геометрии. Она использует какие-то извлечения из аппарата теоретической физики XIX и XX века и развила на базе этого геометрию; оказалось, что это полезно просто для развития чистой геометрии. Наоборот, цели пуассоновой геометрии связаны с анализом и теоретической физикой. Она придаёт первостепенное значение не вопросу об изучении геометрии каких-то многообразий, а вопросу о фундаментальных свойствах гамильтоновых систем: что такое гамильтонова система и какие у них есть свойства?

Я буду говорить об уравнениях с частными производными. Эволюционные системы в моём докладе будут бесконечномерные. Полезно спросить, что значит, что уравнение с частными производными, эволюционная система является гамильтоновой, причём гамильтоновой системой с локальным гамильтонианом. Гамильтониан является законом сохранения, т. е. интегралом движения, и имеет вид интеграла от какой-то плотности, зависящей от самой функции и её производных. Я скоро дам более точные определения.

В современных исследованиях появились случаи, когда скобки Пуассона являются не вполне локальными. (Понятия локальной и нелокальной скобки Пуассона я определю через несколько минут.) Подавляющее большинство фундаментальных скобок Пуассона гамильтоновых структур локальные. Лишь в последние годы было выяснено, что некоторые из фундаментальных скобок Пуассона являются нелокальными. Именно с этим связаны мои собственные недавние исследования, совместные с моим учеником Андреем Мальцевым из института Ландау. Об этом я и буду говорить.

Фазовым пространством, которое будет меня интересовать, будет пространство отображений. Например, отображений $\mathbb{R} \xrightarrow{u} M$ или отображений $S^1 \xrightarrow{u} M$, где M — многообразие. В первом случае мы говорим о быстро убывающих граничных условиях, если на бесконечности отображение стремится к константе. Во втором случае мы говорим о периодических граничных условиях.

Гамильтонова система на символическом языке чистой математики обычно пишется таким образом: $\dot{u} = J(dH)$. На конечномерном или бесконечномерном многообразии есть функция H (гамильтониан), есть её градиент dH и есть оператор J, который применяется к градиенту и делает из него векторное поле. Такого рода система при определённых требованиях на оператор J называется гамильтоновой. Мы об этих требованиях ещё поговорим.

Прежде чем говорить о своих целях, я немножко расскажу о конечномерных многообразиях, потому что здесь некоторые простейшие проблемы являются открытыми. Конечно, меня будут интересовать бесконечномерные пространства отображений. Но пуассонова геометрия имеет смысл и на конечномерных многообразиях. Пусть N — конечномерное многообразие, $y^1, \ldots, y^n$ — локальные координаты. Предположим, что в каждой точке многообразия задан тензор $J^{ij}(y)$ — кососимметрическое скалярное произведение ковекторов (дифференциальных форм). Вообще, для динамических систем симплектическая структура не нужна. Нужна пуассонова структура. Вам не нужно задавать скалярное произведение векторов. Вам нужно задавать скалярное произведение только ковекторов: величин типа градиента функции. Это одно и то же, если вы работаете с невырожденными структурами, потому что обратная матрица к скалярному произведению векторов будет задавать скалярное произведение ковекторов, и наоборот. Но если они вырожденные, то тогда нужно помнить, что теория гамильтоновых систем требует задания скалярного произведения ковекторов, т. е., как говорят на языке тензоров, индексы должны быть сверху, а не снизу, как у римановой метрики или у симплектической структуры.

В этом случае у вас есть скалярное произведение ковекторов. Например, тут могут стоять градиенты функций в каждой точке. И если у вас есть две функции, то скалярное произведение их градиентов называется *скобкой Пуассона*. Всё это называется *пуассоновым многообразием* в том и только том случае, когда скобка Пуассона задаёт структуру алгебры Ли, т. е. если выполняется тождество Якоби. Вы берёте скалярное произведение градиентов функций $\{f, g\} = \langle \nabla f, \nabla g \rangle = J^{ij} f_i g_j = J^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \dfrac{\partial g}{\partial x^j}$ (здесь, как всегда, подразумевается суммирование по i и j). Единственное требование заключается в том, что эта операция должна задавать структуру алгебры Ли. Это называется *пуассоновой структурой*.

Необходимым условием для этого является кососимметричность скалярного произведения; если вы хотите получить алгебру Ли, то операция должна быть кососимметричной. Но неправильно было бы говорить, что скобка Пуассона — это только алгебра Ли. На пространстве функций на многообразии мы имеем всегда две операции. Одна операция — скобка Пуассона, которую мы ввели. Другая операция — обычное коммутативное умножение функций. Эти две операции связаны друг с другом так называемым тождеством Лейбница: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$. Так что если бы вы были абстрактными алгебраистами, то вы должны были бы сказать, что пуассонова структура — это алгебра с двумя операциями. Одна из них — алгебра Ли, а другая — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, и они связаны тождеством Лейбница. Тогда это всё будет называться скобкой Пуассона.

Скобка Пуассона — понятие фундаментальное. Многообразие называется пуассоновым, если его алгебра функций снабжена структурой Пуассона. А гамильтонова система, согласно классической схеме Лиувилля, определяется так, что для любой функции её производная по времени есть скобка Пуассона с гамильтонианом: $\dot{f} = \{f, H\}$. Это — форма уравнений классической механики, которую придал Лиувилль. Она называется формой Лиувилля и играет фундаментальную роль в кинетической теории гамильтоновых систем.

Определение пуассонова многообразия общее. Оно годится как для конечномерных многообразий, так и для бесконечномерных; разницы здесь никакой нет. Я упомяну только две-три вещи, которые отличают пуассоновы структуры от симплектических многообразий. Есть такое полезное упражнение на тензорные вычисления. Предположим, что пуассонова структура невырожденная, т. е. $\det(J^{ij}) \neq 0$. Скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби, т. е. всё корректно. Рассмотрим обратную матрицу $J_{ij} = (J^{kl})^{-1}$. В геометрии риманова метрика всегда пишется с нижними индексами, а обратная к ней матрица пишется с верхними индексами, но той же буквой. Стандартные обозначения такие: g_{ij} и g^{ij}. Рассмотрим для обратной (кососимметричной) матрицы дифференциальную форму $\Omega = \sum J_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$. Эта дифференциальная форма является симплектической структурой, т. е. $d\Omega = 0$, если и только если выполнено тождество Якоби. Поэтому в случае, когда скобки Пуассона невырожденные, вы приходите к понятию симплектического многообразия. Дифференциальные геометры предпочитают брать симплектическое многообразие за основу определения. Если же вы исходите из механики или теоретической физики, то, к сожалению, это не удаётся, потому что имеется слишком много фундаментальных скобок Пуассона, для которых эта матрица не является невырожденной; они, к сожалению, слишком часто имеют вырождения.

Симплектическая структура — это частный случай пуассоновых многообразий, когда тензор Пуассона является невырожденным. Надо сказать, что иногда это кое-что улучшает. Например, условие выполнения тождества Якоби выглядит как нелинейное уравнение на тензор Пуассона, а для обратной матрицы это линейные уравнения, и довольно простые. Они называются в классической физике второй парой уравнений Максвелла. Это линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Они проще, как и условие симплектичности проще условия пуассоновости. А если вы напишете условие на тождество Якоби, то оно будет нелинейным уравнением на коэффициенты исходной матрицы. Оно линейно для обратной матрицы.

Уже в конечномерном случае возникает феномен, не стопроцентно хорошо изученный, — появление так называемых *казимиров*. Казимир — это термин, позаимствованный из теории алгебр Ли, точнее, из её изложения физиками. Вместо казимиров можно употреблять термин *аннигиляторы*. Бывают такие функции на многообразии, которые имеют нулевую скобку Пуассона со всей алгеброй функций: $\{f, C^{\infty}(N, R)\}=0$. Как говорят, *центр* соответствующей алгебры Ли. Такие функции называются *казимирами*. В случае, если скобка Пуассона вырождена кое-где, эти казимиры, как правило, появляются. Структура казимиров недостаточно хорошо изучена, как мне кажется. Я бы сказал так. Легко доказывается аналог теоремы Дарбу. Он состоит в том, что если ранг матрицы Пуассона локально, около данной точки, постоянен, то локально можно найти соответствующее количество функций, равное как раз размерности вырождения. (Их общая поверхность уровня называется *симплектическим слоением*; если ограничить скобку Пуассона на поверхность уровня, то скобка Пуассона будет невырожденной.) Но это утверждение локальное. Мне не известно в литературе никакой топологической теоремы о том, какого типа функции здесь могут появиться. Например, кто сказал, что тут появляются только однозначные функции? На самом деле, симплектические геометры неправильно используют терминологию. Уже гамильтониан, когда вы рассматриваете гамильтоновы системы, не обязательно является однозначной функцией. Он вполне может быть замкнутой 1-формой. Но по каким-то причинам ситуация, когда гамильтониан не однозначная функция, а замкнутая 1-форма, в классической механике не встречалась. Поэтому определение гамильтоновой системы по ошибке автоматически включает, что гамильтониан является однозначной функцией.

А в современной теории действительно бывают случаи, когда гамильтониан является замкнутой 1-формой. Например, я нашёл такой случай в физике твёрдого тела, в фундаментальной квантовой теории твёрдого тела. Для знаменитого уравнения Ландау—Лифшица импульс является многозначным функционалом, т. е. замкнутой 1-формой. Такие экзотические случаи бывают.

В данном случае ответ прост. Гамильтониан может быть либо однозначной функцией, либо замкнутой 1-формой, больше ничем. Что же касается казимиров для скобок Пуассона, то я знаю случаи, когда казимиры являются замкнутыми 1-формами, а не функциями, даже в непосредственно физически важных задачах. Например, в квантовой теории твёрдого тела, в которой мне много приходилось с этим работать. Но для казимиров нет теоремы, что казимир является либо однозначной функцией, либо замкнутой 1-формой. Он может быть более широким, т. е. может появиться слоение, задаваемое не только замкнутыми формами. Я должен сказать, что этот вопрос не прояснён полностью. Как охарактеризовать слоения, которые могут здесь появиться? Конечно, листы должны быть симплектическими многообразиями. Но зачастую даже на трёхмерных многообразиях про простейшие двумерные слоения неясно, что на них нельзя ввести пуассонову структуру. Здесь нет полной ясности. Этот вопрос является вопросом чистой геометрии и топологии слоений; он остался абсолютно невыясненным.

Если закончить это маленькое введение, касающееся открытых проблем геометрии и топологии конечномерных пуассоновых структур, то я добавил бы к этому ещё одну проблему. Тензор Пуассона не обязательно имеет постоянный ранг. Например, есть скобки, которые можно назвать скобками Кириллова или скобками Ли—Пуассона—Костанта—Кириллова—Березина. Такую скобку все знают; это — фундаментальная скобка на обёртывающих алгебрах Ли. Тензор Пуассона совершенно не имеет для них постоянный ранг. В нуле он вообще превращается в нуль — вырождается до нуля. Такие примеры появляются сразу, когда вы имеете дело с фундаментальными скобками Пуассона, отличающимися от тех, которые получаются просто из классического вариационного исчисления. Вариационное исчисление приводит только к невырожденным скобкам Пуассона, да ещё заданным в канонических координатах. Это факт, известный с XIX века. А вот когда вы начинаете работать с алгебрами Ли (фактически это тоже появилось уже в XIX веке, начиная с Ли, и активно использовалось уже потом, лет 50—60 спустя, в теории представлений), вы сразу получаете примеры скобок Пуассона, которые отнюдь не имеют постоянного ранга. Надо сказать, что в литературе, в частности, развитой специалистами по теории особенностей (Уитни, Понтрягин, Том и даже Арнольд с его школой), полностью отсутствует какое-либо исследование типичных особенностей пуассоновых структур. Может быть, это связано с тем, что Владимир Игоревич, в те годы, когда он сделал свои классические работы, относящиеся к гамильтоновым системам и геометрии, считал важной не пуассонову, а симплектическую структуру. Так или иначе, и характеризация этих слоений, и построение теории типичных особенностей пуассоновых структур остаются до сих пор открытыми проблемами даже для конечномерных многообразий. Концевич показал в своей красивой работе, что любую пуассонову структуру можно подвергнуть так называемому формальному квантованию, хотя значение его пока неясно. Скажем, для алгебры Ли оно не даёт скобки Кириллова; оно даёт что-то более сложное. Тем не менее заведомо скобки непостоянного ранга, приводящие к хитрым особенностям, возникают. И любопытно было бы построить теорию типичных особенностей скобок Пуассона.

Теперь я обращусь собственно к своим целям. Конечномерные скобки Пуассона — это только введение. Реально я работаю с бесконечномерными скобками Пуассона, с вариационным исчислением. Существует фундаментальная причина, по которой скобки Пуассона в приложениях, связанных с естественными науками, играют более фундаментальную роль, чем симплектические структуры. Не для геометрии, а именно для описания возникающих в природе фундаментальных динамических систем — бесконечномерных, т. е. систем с частными производными. Причина для этого довольно проста и естественна. В конечномерном случае вопрос о том, что лучше, пуассонова структура или симплектическая структура, это вопрос точки зрения; можно сказать и так, и так. Если вы не ориентируетесь на какой-то определённый набор примеров. Если вы в конечномерном случае ориентируетесь на проблемы алгебраической геометрии, то зачем вам пуассоновы структуры? У вас сразу из кэлеровой метрики возникает симплектическая структура. В случае скобок Ли—Костанта—Кириллова—Березина другое. С точки зрения пуассоновых структур эти скобки выглядят проще. И так их Ли и открыл в XIX в. Хотя люди из теории представлений переоткрыли их позднее на более сложном языке симплектических структур, для этих скобок неестественном. Это сложнее. Когда скобку Кириллова вводят в учебниках как симплектическую структуру, там определение довольно сложное. А с точки зрения скобок Пуассона ввести её очень просто. Тензор Пуассона у вас является функцией естественных координат. Из вариационного исчисления возникают простейшие функции — константы тензора Пуассона, когда он просто равен константе. То есть из вариационного исчисления возникают тензоры Пуассона вида $J^{ij}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Следующий по сложности после констант случай — линейные функции. Это и есть алгебра Ли. В естественных координатах $J^{ij}=C^{ij}_k x^k$. Проверьте, что это — тензор структурных констант конечномерной алгебры Ли, или даже бесконечномерной.

Это замечание играет для нас роль и в бесконечномерном случае тоже. Допустим, что у нас есть какой-то очень сложный тензор Пуассона J на бесконечномерном многообразии, но мы заметили, что коэффициенты этого тензора являются линейными функциями от координат. Тогда мы знаем, что за этим лежит какая-то алгебра Ли, гораздо меньшая, чем полная алгебра Пуассона всех функционалов. В этом случае говорят о скобках Пуассона, порождённых алгебрами Ли. Они иногда так и появляются в фундаментальном вариационном исчислении, в бесконечномерном анализе, — как скобки Пуассона, у которых коэффициенты этого тензора являются линейными функционалами от полей. Из этого вы делаете вывод, что за ними обязательно лежит алгебра Ли, а отнюдь не вся громадная алгебра Пуассона. Так удобнее здесь это представлять.

Я не ответил на вопрос, почему скобки Пуассона важны в бесконечномерном случае. В конечномерном случае вы всегда можете любую невырожденную матрицу обратить. Это не так уж сложно. В конечномерном случае задать матрицу или задать обратную матрицу — это примерно одно и то же. А в бесконечномерном случае у вас есть один оператор — оператор Пуассона J или оператор симплектической структуры $S=J^{-1}$. Какой из них проще? Обращать операторы — дело сложное. Естественно, что тот из них проще и появляется сразу, который обычно в локальных фундаментальных задачах появляется дифференциальным оператором, локальным. И это всегда оператор Пуассона, а не оператор симплектической структуры. Поэтому естественно, что наиболее фундаментальной для подавляющего большинства естественных задач математической и теоретической физики является именно пуассонова, а не симплектическая бесконечномерная геометрия. Симплектическая геометрия связана уже с нахождением обратного оператора. Это, как правило, сложная задача. Есть такие примеры, когда пуассоновы операторы оказываются не вполне локальными. Это как раз и было предметом наших недавних исследований.

Давайте обратимся к нашим функциональным пространствам, к бесконечномерным многообразиям. Бесконечномерного анализа, скажем, гильбертовых многообразий математическая физика не рассматривает. Математическая физика рассматривает пространства конкретные, пространства отображений. В этих пространствах имеются координаты — индексы. Скажем, в конечномерном случае есть индекс i, дающий номер базисного вектора. Вы проводите суммирование по i и т. п. А в бесконечномерном случае вместо индекса i бывает пара (i, x), где x — точка пространства X. Надо помнить, что x — это индекс. Вместо суммирования по i у меня будет интеграл по x. Это естественно: интеграл — это какая-то большая сумма. В формулах тензорного исчисления и конечномерной линейной алгебры будут конечные суммы, а в формулах вариационного исчисления, излагаемом так, как это любят делать физики-теоретики, будут правильно понимаемые то суммы, то интегралы. Надо помнить, что точка пространства x, которая отображается — это индекс, как бы локальная координата в точке, нечто вроде дельта-функции, сидящей в этой точке. Так физик-теоретик, специалист по теории поля, представляет себе вариационное исчисление. Он, кстати сказать, будет называть вариационное исчисление теорией поля. Могу сообщить для вашего сведения, что теорией поля называют просто вариационные задачи. Это синонимы.

Тензор Пуассона в конечномерном случае был тензором с двумя индексами. А в бесконечномерном случае J^{ij} заменяется на $J^{ij}(x, y)$; конечномерные индексы остаются, но добавляются ещё бесконечномерные индексы. Скобки Пуассона теперь мы должны написать в такой форме: $\{u^i(x), u^j(x)\} = J^{ij}\delta(x-y) = h^{ij}(x, y)$; позвольте мне напомнить, что здесь u — это отображение $\mathbb{R} \xrightarrow{u} M$ или $S^1 \xrightarrow{u} M$, где M — многообразие. До тех пор пока я не наложил никаких дополнительных требований, это есть общее определение. То есть скобка Пуассона двух функционалов определяется следующим образом: берём градиент первого функционала, градиент второго функционала, умножаем на тензор Пуассона, суммируем по i и j и интегрируем по x и y:

$$\{F, G\} = \int\int\left(\frac{\delta G}{\delta u^2(x)} h^{ij} \frac{\delta F}{\delta u^2(y)}\right) dx\, dy.$$

Где индексы непрерывные, там вместо суммы всегда берётся интеграл. Кстати сказать, самая вредная точка зрения, когда математик глядит на конструкции теоретической физики глазами функционального анализа XX в. Это очень вредно — помнить, какие там точно пространства, что они гильбертовы, банаховы или что-то другое. Надо просто считать, что это удобный алгебраический формализм для вывода формул, и считать, что у вас всё строго, пока в ваших формулах нет формальных алгебраических противоречий. Не позволяйте людям из функционального анализа вас в этом сбивать на какие-то строгие обоснования. Так удобно. Так рассуждают физики. Это простейшее, что выработала такая замечательная наука, как теоретическая физика XX в. Вот так и надо работать.

Захотите обосновывать — сначала проделайте это, а потом уже займитесь обоснованиями, позднее. Это другой вопрос. Не надо обосновывать неизученные теории. Это обычная ошибка в математических курсах.

Поэтому не надо особенно придираться, где, на каком пространстве я пишу интегралы. Я пишу алгебраические символы. Я буду предполагать, что я интегрирую по замкнутому многообразию, чтобы у меня не было границы. Тогда можно свободно интегрировать по частям и т. д. Правила моего калькулюса именно таковы.

Пуассонова структура называется *локальной*, если скобка Пуассона является дифференциальным оператором, применённым к дельта-функции. В этом случае двойной интеграл сразу сведётся к однократному. Интеграл по x возьмётся. Интеграл от дельта-функции легко берётся: надо положить $x=y$, и всё. Итак, локальная скобка Пуассона — это дифференциальный оператор, применённый к дельта-функции. И коэффициенты этого оператора могут зависеть от точки x и от значений наших полей и конечного числа их производных в той же самой точке x:

$$J=J^{ij}=\sum_{0\leqslant k\leqslant N} B^{ij}(x,\,u(x),\,u_x(x),\,\ldots)\partial_x^k.$$

Это называется *локальное вариационное исчисление*, или *локальная теория поля*.

Теперь вы можете меня спросить, что такое локальная симплектическая структура? Это тоже естественное понятие. Симплектическая структура называется локальной, если обратный оператор является локальным.

В дальнейшем я введу понятие слабо нелокальных пуассоновых структур, которые выявились в последние годы и которым посвящены мои собственные недавние результаты, совместные с моими учениками. Слабо нелокальная пуассонова структура задаётся оператором, у которого есть локальная часть, такая, как раньше, плюс ещё нечто, пропорциональное оператору ∂^{-1}:

$$\sum c_{kl}S^i_k(u,\,u_x,\,\ldots)\partial_x^{-1}S^j_l(u,\,u_x,\,\ldots)$$

Слабо нелокальный оператор не содержит ∂^{-k}, где $k>1$. О таких слабо нелокальных пуассоновых структурах я буду отдельно говорить.

Величины $B^{ij}(x,\,u(x),\,u_x(x),\,\ldots)$, возникающие в определении слабо нелокальной пуассоновой структуры, называются *структурными потоками*; такие уравнения с частными производными, такие динамические системы называются *структурными потоками*. Я хотел бы подчеркнуть, что хотя я буду говорить о нелокальных скобках Пуассона, однако меня интересует такая проблема. В каком случае уравнение локальное, уравнение с частными производными, является гамильтоновым? Я требую, чтобы уравнение движения было локальным. Я требую, чтобы гамильтониан и закон сохранения были локальными. Однако иногда оказывается, что это требует нелокальной скобки Пуассона. Такая ситуация возможна. Из-за этого нам и пришлось их рассматривать. К сожалению, гамильтонова структура локальных систем не полностью описывается чисто локальными скобками Пуассона. С этим связаны недавние исследования. Я должен буду этого ещё коснуться. По поводу нелокальных скобок Пуассона наша работа с Мальцевым этим летом вышла в журнале Physics D. Она так и называется: «О локальных гамильтоновых системах, слабо нелокальных по отношению к скобкам Пуассона». Это большая работа.

Надо сказать, что локальные скобки Пуассона в гидродинамике для сжимаемой жидкости первым написал Л. Д. Ландау в 1940 г. Вообще, он не знал, что он пишет скобки Пуассона. Он хотел квантовать жидкость, исследуя сверхтекучий гелий-4, открытый Капицей незадолго до этого. Ландау хотел построить теорию квантовой жидкости. С современной точки зрения каждому известно, что, чтобы квантовать, нужно взять скобки Пуассона и заменить их на коммутаторы. Понятие пуассоновой структуры он не вводил, гамильтонов формализм в гидродинамике никто не развивал. Однако Ландау просто взял и написал правильные формулы для квантового коммутатора. А поскольку там скобка Пуассона кирилловская, т. е. линейная по полям (задним числом можно сказать, что она кирилловская), то в этом случае, как известно, для алгебр Ли замена скобок на коммутаторы производится тривиальным прямым образом. Кстати сказать, хитрое замечательное квантование, придуманное Концевичем, в этом случае даёт неправильный результат: оно даёт другое — не кирилловскую скобку. Это любопытный феномен.

Ландау взял и проквантовал жидкость. Потом через год выяснилось, что Ландау не нужно такое настоящее квантование жидкости. Может быть, и сейчас в связи с квантовым эффектом Холла для Ферми-систем к нему возвращаются, забыв эти старые работы Ландау. Он построил теорию иначе через год и забыл про это дело.

Потом теория пуассоновых структур родилась заново вместе с теорией солитонов. В теории интегрируемых систем, солитонов, оказывается, что сразу появляются нетривиальные пуассоновы структуры — не те, которые появляются в тривиальном классическом вариационном исчислении. Известная скобка Гарднера—Захарова—Фаддеева (GZF) описывается просто в случае, когда пуассонова структура задаётся оператором дифференцирования: $J_0 = \partial$. Но интересно, что Захаров и Фаддеев в своей работе не говорили о локальной пуассоновой структуре. Тогда вообще не было понятия локальной пуассоновой структуры. Они говорили о нелокальной симплектической структуре — модный по их мнению термин. Если ∂ локально, то ∂^{-1}, конечно, нелокально. Что касается Гарднера, то он, по-видимому, даже раньше них эту форму придумал, но долго не мог понять, и только одновременно с ними в 1971 г. понял, что это означает гамильтоновость. Он вообще просто на пространстве периодических функций выбрал базис $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$ и записал этот оператор в виде матрицы бесконечного порядка. Вот так лучшие учёные представляли себе это ещё в 1971 г. Понятия локальной скобки Пуассона, структур пуассоновых бесконечномерных не существовало в 1971 г.

Были обобщения этих скобок. Гельфанд и Дикий обобщили скобку Гарднера—Захарова—Фаддеева, Адлер обобщил скобку Ленарда—Магри. Кстати сказать, для уравнения Кортевега—де Фриза в 1977 г. было обнаружено замечательное явление. Его открыл итальянский мат-физик Магри. Там, оказывается, есть две разные скобки Пуассона и даже целый пучок («pencil») скобок Пуассона. Уравнения Кортевега—де Фриза одно, но оно обслуживается разными скобками Пуассона и разными гамильтонианами. Это фундаментальное явление было открыто в 1977 г.

Как я уже сказал, скобку Гарднера—Захарова—Фаддеева обобщили Гельфанд и Дикий, а скобку Ленарда—Магри обобщил Адлер. В. Дринфельд напутал в литературе и перепутал терминологию; он назвал скобку Адлера скобкой Гельфанда—Дикого. По-видимому, он не знал разницу между ними. Так или иначе, эти скобки и даже классы нетривиальных скобок начали изучаться. Например, Гельфанд и Дорфман поняли ту идею, что скобки Пуассона, линейные по полям, — это какие-то алгебры Ли. Они стали изучать скобки Пуассона, линейные по полям, пока просто так, без каких-либо применений, без решения конкретных задач, и вскрыли там любопытные вещи.

Лично я начал этим заниматься под влиянием физиков, а не отсюда. Физики раскопали старую работу Ландау и обратили моё внимание на скобки Пуассона.

Позвольте мне привести простейший пример, один из наиболее фундаментальных и ни в каком смысле не тривиальный с точки зрения теории, которую я обсуждаю. Это пример, когда возникают нетривиальные скобки; в каком-то смысле, прообраз всей теории. Этот пример — теория уравнения Кортевега—де Фриза. Как известно, это уравнение (я его сейчас напишу) обладает двумя скобками Пуассона. Первая скобка — скобка Гарднера—Захарова—Фаддеева. Её можно было бы написать так: $\{u(x), u(y)\} = \delta'(x-y)$. То же самое можно сказать таким образом, что гамильтонова система для одной функции имеет вид

$$\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H_0}{\delta u(x)}\right). \tag{1}$$

Это — оператор Эйлера—Лагранжа.

Кстати, я видел, что некоторые изучатели теоретической физики стали употреблять обозначение $\frac{\delta H_0}{\delta u}$. Я хочу сказать, что это обозначение неправильное. Надо писать именно так, как в формуле (1), потому что это есть бесконечномерный аналог выражения $\frac{\partial H}{\partial x^i}$:

$$\frac{\delta H}{\delta u^i(x)} \longleftrightarrow \frac{\partial H}{\partial x^i}.$$

Всегда надо указывать, какой индекс. Поэтому если вам тут x не указали, то сразу, как говорят, гоните в шею. Это неграмотно. Такой человек не знает природы этого обозначения.

Если вы возьмёте функционал

$$H_0 = \int\left(\frac{u_x^2}{2} + u^3\right)dx,$$

то вы получите знаменитое уравнение Кортевега—де Фриза

$$u_t = 6u\,u_x - u_{xxx}, \tag{KdV}$$

на котором возникла современная теория интегрируемых систем со всеми её замечательными явлениями: метод обратной задачи рассеяния, алгебро-геометрические решения (включая применения в самой алгебраической геометрии), новые открытия в спектральной теории операторов и т. д. Это — фундаментальное уравнение, на котором сидят все открытия теории солитонов. Иногда в литературе, написанной алгебраистами, они путают уравнение KdV с его обобщениями, например, КП называют KdV; плохо знают разницу.

Этот оператор Пуассона — скобка Гарднера—Захарова—Фаддеева (GZF). С другой стороны, это же самое уравнение можно написать со скобкой $J_1\left(\frac{\delta H_1}{\delta u(x)}\right)$, где $H_1 = \int \frac{u^2}{2}dx$. После элементарных вычислений видно, что это уравнение может быть написано по отношению к двум разным скобкам Пуассона. Более того, эти скобки Пуассона образуют пучок: при любых значениях λ и μ выражение $\lambda J_0 + \mu J_1$ является корректно определённым оператором Пуассона. Корректно определённым означает, что соответствующая скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби. Тождество Якоби — это нетривиальное требование, совершенно не линейное. И довольно странно, почему мы здесь рассматриваем линейные пучки. Но такова жизнь, ничего не поделаешь.

Если бы мы работали со скобкой Гарднера—Захарова—Фаддеева, то этот функционал задавал бы уравнение $u_t = u_x$, т. е. $u_t = \partial\left(\frac{\delta H_1}{\delta u(x)}\right)$. Стандартная скобка Гарднера—Захарова—Фаддеева, кстати сказать, появляется непосредственно, если внимательно проанализировать вывод уравнения Кортевега—де Фриза, скажем, из гидродинамики, из теории мелкой воды. Для обычной скобки Гарднера—Захарова—Фаддеева функционал $H_1 = \int \frac{u^2}{2} dx$ является импульсом. В физике импульсом называется величина, которая порождает группу сдвигов. Решением уравнения $u_t = u_x$ является $u(x-t)$. Это — просто сдвиги начальной функции по оси t. Импульс — это генератор сдвигов, пространственных трансляций.

А для новой скобки, скобки Магри *), то, что было импульсом для исходной скобки Гарднера—Захарова—Фаддеева, становится гамильтонианом, т. е. энергией для уравнения KdV. Энергия — это просто значение гамильтониана, а импульс — это генератор группы трансляций.

Фундаментальной общефизической скобкой, которая порождает подобные системы, в том числе и неинтегрируемые, является именно скобка Гарднера—Захарова—Фаддеева. А скобка Ленарда—Магри — это какая-то специфическая тонкость, связанная только с интегрируемыми системами.

Любопытно ещё вот что. Для скобки Гарднера—Захарова—Фаддеева уравнения KdV ещё есть казимир $H_{-1} = \int u\,dx$. Он имеет нулевую скобку Пуассона вообще со всем. Его вариационная производная есть константа, если её ещё один раз продифференцировать, применить оператор d/dx, который входит в структуру этой скобки, то будет чистый нуль. Так что для скобки Гарднера—Захарова—Фаддеева есть казимир, есть импульс, есть энергия. А для скобки Магри всё будет по-другому. То, что было импульсом, станет энергией; то, что было казимиром, станет импульсом, как легко проверить. А вот казимиров у неё даже и не видно ни одного. Что тоже неестественно: казимиры должны быть. Казимиры у неё оказываются нелокальными. Здесь мы уже вынуждены при работе с локальными скобками рассматривать какие-то нелокальные феномены.

Это — простой пример. При этом теория Ленарда—Магри утверждает не только то, что у уравнения KdV две скобки, а то, что вообще весь пучок $\lambda J_0 + \mu J_1$ является корректно определёнными скобками Пуассона. Более того, если вы уже имеете этот пучок скобок, то легко устанавливается, что

$$J_n = R^n J_0, \qquad \text{где } R = J_1 J_0^{-1}, \tag{2}$$

*) Её почему-то называют скобкой Ленарда—Магри. Возможно, был какой-то человек по фамилии Ленард, который здесь что-то придумал, но я никогда не видел никакой его работы.

тоже является скобкой Пуассона для всех значений n, положительных и отрицательных. Это обстоятельство было открыто ещё в 70-х годах. И тогда же в связи с этим стали рассматривать нелокальные скобки Пуассона. Уже здесь мы видим, что одно и то же уравнение KdV может быть записано как гамильтонова система по отношению к бесконечному количеству различных скобок Пуассона, но только будут разные гамильтонианы. Все они будут так называемыми интегралами Крускала со сдвигами. И они все нелокальные: J_0 локальный, J_1 локальный, но если вы возьмёте J_2, то он уже будет нелокальный. Формула (2) показывает, что R — оператор, содержащий ∂^{-1}. Степени этого оператора могут содержать уже более высокие степени оператора ∂^{-1}. Но не всё так просто, как кажется. Можно рассматривать эти скобки Пуассона для всех n, положительных и отрицательных. Оказывается (и этот факт замечателен в своём роде), что для всех положительных n эта скобка Пуассона является слабо нелокальной. Вы можете возводить в степень, но вам только кажется, что ∂^{-2} там присутствует: на самом деле он сократится; ∂^{-1} появится, а ∂^{-2} не появится. Этот факт несколько раньше нас был доказан Энрикесом, Орловым и Рубцовым. Из нашей теоремы ещё дополнительно вытекает, что для отрицательных n, когда скобки Пуассона будут сильно нелокальные, соответствующие симплектические структуры будут слабо нелокальные, т. е. они будут содержать только ∂^{-1}, а ∂^{-2} и выше они содержать не будут.

Только в 90-х годах природу высших скобок Пуассона для уравнения KdV удалось прояснить. И все эти скобки оказались слабо нелокальными. Для нелинейного уравнения Шрёдингера мы с Мальцевым недавно тоже получили аналогичный результат, и для скобок Пуассона, и для симплектических структур. Для него вообще всего только одна локальная скобка Пуассона существует. Нелинейное уравнение Шрёдингера — это знаменитая интегрируемая система, которая записывается так:

$$i\psi_t = \psi_{xx} \pm |\psi|^2\psi;$$

тут есть два случая со знаком $\pm$. Этот случай более сложный, потому что локальная скобка Пуассона только одна. Но всё равно, если вы определите оператор рекурсии таким образом, то все высшие скобки Пуассона оказываются слабо нелокальными; они не содержат ничего, кроме оператора ∂^{-1} в своей нелокальной части. А для отрицательных степеней то же самое верно для симплектических структур. Таким образом, оказывается, что теория знаменитых интегрируемых систем уже на том уровне, который возник в конце 70-х годов, приводит к каким-то нелокальным скобкам Пуассона. Это было известно, но мы прояснили, что на самом деле эти скобки Пуассона являются только слабо нелокальными, т. е. это очень специальный узкий класс; ничего кроме ∂^{-1} в него не входит.

Позвольте мне коснуться ещё одного вопроса. Сначала я тоже скажу о локальных скобках. Существует такой вопрос, который длительное время оставался без ответа. Что означает, что уравнения типа Эйлера и подобные ему для сжимаемой жидкости (есть всякие его обобщения) являются гамильтоновыми системами? Здесь же нет никакой вязкости, есть законы сохранения энергии импульса и прочего. Однако этот вопрос тонкий. И почему-то длительное время он оставался без ответа. Кстати сказать, до сих пор не известно, является ли гамильтоновым уравнение Навье—Стокса. Этот вопрос не является тривиальным. Дело в том, что прикладные математики часто рассматривают не настоящее фундаментальное уравнение Навье—Стокса для жидкости с вязкостью; они рассматривают его несжимаемый предел. Несжимаемый предел уравнения Навье—Стокса не является гамильтоновым; это легко доказать. Этот предел, который все рассматривают и стараются доказать для него теоремы существования, теряет формальные законы сохранения. Что же касается фундаментального уравнения Навье—Стокса, как оно появляется из физики, с полной сжимаемостью, с полной термодинамикой, с энтропией, с температурой, то там выполнен полный набор законов сохранения: энергии, импульса, момента. Однако не известно, является эта система гамильтоновой или нет. Это единственный случай, в котором все законы сохранения есть, но система, скорее всего, не гамильтонова. Однако, как это доказать, я не представляю себе. Негативные теоремы труднее доказывать, чем позитивные.

Если вы исключите уравнение Навье—Стокса, то вы можете точно утверждать одну простую вещь. Всякий раз, когда есть закон сохранения энергии, физик ждёт, что система будет гамильтонова. Для уравнения Навье—Стокса физик этого ждать не будет, хотя этот вопрос в литературе не обсуждался. Я, по-видимому, первый поставил вопрос о том, гамильтоново ли фундаментальное уравнение Навье—Стокса с полным набором физических параметров. Когда вы берёте несжимаемый предел, вы перекрываете некоторые каналы, и у вас в одну сторону энергия утекает, а обратно не притекает — канал закрыт. А на самом деле она никуда не исчезала: перетекала, например, в термодинамические переменные.

Для уравнений типа Эйлера мы всегда ждём гамильтоновости. Эти уравнения — для сжимаемой жидкости. Несжимаемая жидкость вообще является объектом чистой геометрии. Она связана просто с геометрией группы диффеоморфизмов каких-то областей. В ней нет никакой физики; это чистая геометрия. Если говорить о физике, то надо всегда говорить о сжимаемой жидкости. Как известно, первым начал подробно изучать уравнение сжимаемой жидкости Риман. И он обратил внимание на то, что это геометрическая структура, вообще говоря. В одномерном случае эти уравнения имеют вид

$$u^i_k = V^i_j(u(x))u^j_k.$$

Вы можете заметить, что набор коэффициентов V^i_j (тензор скоростей) на самом деле является тензором, т. е. если вы будете делать замены переменных в u-пространстве (не в (x, t)-пространстве, а в пространстве значений, как говорится, в target space), то это — тензор. Более того, это было одним из важнейших источников введения понятия тензора. Но этот тензор не такого типа, как риманова геометрия. Этот тензор типа линейного оператора, заданного в каждой точке касательного пространства: у него один индекс верхний и один индекс нижний. Есть тысячи работ прикладных математиков и гидродинамиков, посвящённых вопросу о том, к какому виду можно привести уравнение типа Римана. Скажем, известно, что если u-пространство двумерно (как говорят, двухкомпонентная система), то всегда можно выбрать координаты так, чтобы этот тензор был диагональным. Эти координаты называются *инвариантами Римана*. А если размерность u-пространства 3 и больше, то это можно сделать не всегда. Возможность диагонализации нетривиальна, но никакого аналога теории кривизны здесь построено не было. Это так и осталось в геометрии проблемой приведения тензоров к каноническому виду, и хорошего решения она не имеет, в отличие от тензора типа g_{ij}, когда два индекса нижних.

Какие обычно бывают координаты, если сказать по-простому? Это плотность массы, плотность компоненты скорости. Скажем, в одномерном случае — это одна плотность массы, одна плотность энтропии и одна компонента скорости. Это всё — трёхмерное многообразие. Если движение изоэнтропическое, т. е. энтропия выпадает как полевая переменная, то это — пространство газовой динамики; оно двумерное. В этом случае инварианты Римана всегда есть — это двухкомпонентная система. А если система трёхкомпонентная, то инварианты Римана есть не всегда, а только в специфических вырожденных случаях. Инварианты Римана — это такие координаты, что тензор Римана диагонален, если они существуют; существование таких координат является сильным вырождением системы.

Мы с Борисом Анатольевичем Дубровиным в 83-м году построили гамильтонову теорию систем гидродинамического типа. Это было нужно, кроме всего прочего, для нужд теории солитонов, асимптотических задач, нелинейной квазиклассики в теории солитонов. Это было нужно, и мы эту задачу решили. Много новых систем гидродинамического типа появилось из теории солитонов. Скобка

$$\{u^i(x),\, u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta'(x-y) + b_k^{ij}(u(x))u_x^k\delta(x-y)$$

называется *скобкой Пуассона гидродинамического типа*. Здесь присутствует коэффициент δ' — производная δ-функции. Он умножается на g^{ij}, но g^{ij} зависит только от u и не зависит от производных u. Во втором члене тоже нет зависимости от производных u. Несмотря на то, что на первый взгляд этот вид скобки может показаться диковатым, если хорошо и долго предпринять некую медитацию, то после длительного раздумья станет понятно, что ничего более простого написать нельзя.

Для таких скобок сюда входит производная δ-функции, поэтому оператор Пуассона J является дифференциальным оператором первого порядка. Мы с Дубровиным сразу же заметили, что эта структура типа римановой геометрии. Если бы вы просто работали с системами гидродинамического типа, то никакой метрики g^{ij} у вас не появлялось бы. Появлялся бы тензор V_i^j скоростей системы — и всё. Ничего другого ни у Римана, ни у кого другого не появлялось. Риманова геометрия, оказывается, появляется только тогда, когда вы ставите вопрос о том, является ли эта система гамильтоновой. Только в гамильтоновой теории появляется настоящая риманова метрика. Заметьте, что метрика g^{ij} с верхними индексами, т. е. это метрика на пространстве ковекторов, а не на пространстве векторов.

Кстати сказать, это определение естественно обобщается и на пространства X более высоких размерностей. Там возникают римановы пространства, на которых на одном пространстве задано несколько римановых метрик — столько, сколько переменных X. Можно построить эту теорию. Я не буду её обсуждать. Это — теория локальных скобок Пуассона гидродинамического типа.

Мы с Дубровиным заметили, что если делать замены переменных, то коэффициент $g^{ij}(u(x))$ преобразуется как риманова метрика (этот член симметричен, хотя сама скобка Пуассона кососимметрична, потому что косую симметрию взял на себя член $\delta'(x-y)$). Здесь появляется конечномерная риманова метрика, которая обслуживает бесконечномерные δ'-структуры гидродинамического типа. А член $b_k^{ij}(u(x))u_x^k$ при заменах переменных преобразуется как символ Кристоффеля (точнее говоря, как символ Кристоффеля, у которого индекс поднят вверх с помощью это метрики). Как только мы с Борисом Анатольевичем сделали это наблюдение, так сразу вдохновились.

Мы с Дубровиным доказали следующее. Если эта метрика невырожденная, то она имеет нулевую кривизну. Тем самым, то, что здесь есть, приводит только к плоским геометриям. В невырожденном случае нет никаких локальных инвариантов, кроме сигнатуры этой метрики. Но сигнатура есть, от сигнатуры никуда не деться.

Кстати сказать, есть ложное мнение, что геометрия евклидова пространства тривиальна. У плоского пространства есть очень глубокие проблемы римановой геометрии. Например, знаменитые математики конца XIX века (Дарбу, Дмитрий Фёдорович Егоров, Эли Картан) много занимались проблемой ортогональных координат в евклидовом пространстве. Ей занимались, в частности, в связи с разделением переменных при решении разных задач математической физики. Потом в XX веке до последнего времени эта проблема не оживала. Геометрия евклидова пространства — нетривиальный объект. Хотя метрики у нас пока возникают плоские, если скобки Пуассона локальные, тем не менее мой аспирант Сергей Царёв тогда же в 85-м году построил теорию интегрирования диагонализуемых гамильтоновых систем. Ещё с классических времён было известно, что если система задана в инвариантах Римана (диагонализуема), то, конечно, решить её не удаётся, но это сильно помогает, скажем, при изучении ударных волн и т. д. А когда мы точно создали теорию гамильтоновых систем, я сразу сформулировал гипотезу. Никто никогда не смотрел, что получается, когда у нас система обладает двумя свойствами: она обладает инвариантами Римана и одновременно является гамильтоновой. Это более или менее должно приводить к чему-то вроде полной интегрируемости. Эта теорема была очень красиво доказана моим учеником Царёвым, который построил дифференциально-геометрическую процедуру интегрирования таких систем. Хотя, конечно, при применении её в реальных задачах требуется калькулюс римановых поверхностей, тэта-функции и т. д.

Так или иначе, в этих случаях свойство гамильтоновости позволяет решать эти классические системы. Оно сразу же многое проясняет. В теории солитонов оказалось так. Ещё со времён Уизема было известно, что системы гидродинамического типа, получающиеся в теории асимптотических задач, в теории солитонов, в частности KdV, обладают инвариантами Римана. А то, что они гамильтоновы, известно не было. Мы с Дубровиным для этой цели и работали. Мы выяснили гамильтоновость. Пересечение этих двух свойств автоматически влечёт полную интегрируемость.

Однако было замечено, что если вы добавите нелокальные добавки к этим скобкам Пуассона, то метрика может оказаться уже ненулевой кривизны. Если рассматривается скобка Пуассона

$$\{u^i(x),\, u^j(y)\} = g^{ij}\delta' + b^{ij}_k(u(x))u^k_x\delta + c u^i_x[\partial^{-1}\delta(x-y)]u^j_x,$$

то уже даже в простейшем случае может возникнуть метрика постоянной кривизны, ненулевой. А если слагаемые с ∂^{-1} имеют более сложный вид, то может возникнуть и более общий класс метрик ненулевой кривизны. Поэтому в этом частном случае слабо нелокальные скобки в последние годы были предметом изучения некоторых участников моего семинара: Ферапонтова, Мохова и других.

Можно доказать следующую теорему. Пусть есть метрика, возникающая в качестве коэффициентов скобок Пуассона, когда у вас имеется ещё и нелокальная часть, но слабо нелокальная. Тогда возникающее многообразие (с метрикой) представляет собой подмногообразие в евклидовом пространстве, у которого нормальное расслоение является плоским. Как говорят, *нормально плоское*. В частности, все подмногообразия коразмерности 1 для этой цели всегда годятся. Все нормально плоские многообразия могут появляться таким образом. А скобка Пуассона, которая тут вводилась, может быть вычислена как дираковский образ стандартной локальной скобки Пуассона с плоскими координатами.

Надо сказать, что появление такого типа нелокальных скобок Пуассона — без всяких гидродинамических слагаемых, без метрики, а просто

$$\{u^i(x),\, u^j(y)\} = u_x[\partial^{-1}\delta(x-y)]u_x,$$

впервые появилось в середине 80-х годов в работах Володи Соколова, который доказывал, что одно уравнение, которое мы с Игорем Моисеевичем Кричевером нашли в теории коммутирующих операторов ранга 2 и которое связано с деформацией оснащённых голоморфных двумерных расслоений над эллиптическими кривыми (это уравнение называют *уравнением Кричевера—Новикова*), обслуживается такой скобкой Пуассона. Так что скобки Пуассона с такой нелокальностью только в середине 80-х годов впервые начали рассматриваться.

Позвольте мне в заключение сформулировать наши недавние результаты. Кроме теорем, которые я уже сформулировал, о том, что высшие скобки Пуассона, обслуживающие нелинейное уравнение Шрёдингера, и симплектические структуры для KdV являются слабо нелокальными, ещё большой кусок нашей недавней работы, совместной с Мальцевым, посвящён изучению слабо нелокальных скобок Пуассона, связанных с римановой геометрией. Скобок гидродинамического типа, как мы говорим. Как я уже сказал, нас интересуют феномены смешанного типа, т. е. мы интересуемся скобкой Пуассона нелокальной, но изучаем только такие аспекты теории подобных скобок Пуассона, которые обслуживают локальные дифференциальные уравнения с частными производными. Интегралы, системы — у нас всё локальное. К сожалению, мы вынуждены вводить нелокальную скобку, потому что локальными их нельзя описать.

Допустим, что у нас есть слабо нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа:

$$\{u^i(x),\, u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta'(x-y) + b^{ij}_k(u(x))u^k_x\delta(x-y) + \sum c_{kl} S^i_k \partial^{-1} S^j_l.$$

Такие скобки, с одной стороны, содержат риманову метрику, а с другой стороны, содержат нелокальные куски. Здесь S^i_k и S^j_l зависят от функции u. Я назвал их *структурными потоками*; они должны быть тоже потоками гидродинамического типа. Про такие скобки Пуассона мы знаем следующее. Вы можете задать естественный вопрос: в каком случае такая скобка Пуассона задаёт уравнение с частными производными? Какие для этого должны быть гамильтонианы? Ответ очень простой. Гамильтонианы должны коммутировать со всеми структурными потоками, которые здесь сидят. Тогда автоматически гамильтонова система, порождённая такой нелокальной скобкой Пуассона, будет локальной: она будет задаваться уравнениями с частными производными. В частном случае, когда здесь всего одно слагаемое, то вообще любой трансляционно инвариантный гамильтониан порождает локальное уравнение с частными производными.

Наши результаты, которые я сейчас хочу сформулировать, состоят в следующем. Мы задали такой вопрос: «Как вычислить все казимиры для этой скобки Пуассона?» Когда вы начинаете работать со скобкой Пуассона, вы должны знать все казимиры. Вы не можете работать со скобкой Пуассона, если вы не знаете величин, которые имеют нулевую скобку Пуассона со всем фазовым пространством; казимиры нужно знать прежде всего. Это — законы сохранения, которые порождают нулевые потоки. Наша теорема состоит в следующем. Я рассматриваю скобку Пуассона только на пространстве быстро убывающих функций. Я напомню, что мы рассматриваем пространство отображений $\mathbb{R} \xrightarrow{u} M$, где $u(+\infty) = u(-\infty) = u_0$. Надо сказать, что мы не можем решить нашу задачу для пространства периодических функций. Мы можем её решить только, как в теории поля, для пространства отображений, постоянных на бесконечности, т. е. для пространства петель $L(M,\, u_0)$ с фиксированной точкой. А на пространстве свободных петель мы не можем её решить. Это следствие нелокальности. Наш результат состоит в следующем. Мы хотим вычислить множество казимиров для этой скобки Пуассона. Нужно взять точку u_0 многообразия M. Многообразие M лежит в евклидовом пространстве: $u_0 \in M^n \subset \mathbb{R}^N$. Оно не только лежит в евклидовом пространстве, но у него нормальное расслоение имеет плоскую связность (естественную, индуцированную вложением). Я уже говорил, что это — условие корректности скобки Пуассона. Нормально плоские многообразия определяют такие скобки. Мы должны рассмотреть такиеестественные функционалы. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ есть координаты $(z^1, \ldots, z^N)$. Рассмотрим функционал $\mathbb{Z}^j = \int z^j dx$; каждая координата определяет такой функционал. Если многообразие лежит в евклидовом пространстве, то любая координата определяет функцию на многообразии. Если прямая отображается в многообразие, то мы получаем уже функцию $z^j(x)$ на прямой. Эту функцию мы интегрируем по x. Получаем N-мерное пространство функционалов, не зависящее от выбора точки u_0. Но мы должны взять в нём только касательное пространство. У нас есть точка u_0 и есть касательное пространство размерности n в этой точке. Если взять эти функционалы, принадлежащие только касательному пространству, то это будет n-мерное пространство функционалов. Наша теорема заключается в том, что они и только они дают казимиры. Оставшиеся гамильтонианы, отвечающие нормальному пространству, порождают структурные потоки. Тем самым мы доказываем, что структурные потоки тоже являются гамильтоновыми системами с локальными гамильтонианами. Этот вывод довольно любопытен, потому что тем самым оказывается, что хотя мы работаем с локальными системами, с уравнениями в частных производных, мы не допускаем к рассмотрению никаких законов сохранения, которые сами не были бы интегралами от локальных плотностей, только локальные величины, однако тем не менее такие фундаментальные инварианты гамильтонова формализма, как казимиры, зависят от граничных условий, зависят от точки u_0. В этом случае мы их вычислили. А представляете себе, если бы мы имели граничные условия, когда, скажем, на одной бесконечности одна точка, а на другой другая. Уже в этот случае было бы что-то гораздо более сурово нелокальное. Это показывает, что в этом случае, хотя подобного рода скобки Пуассона возникают в целом ряде довольно фундаментальных одномерных задач, тем не менее, скажем, для периодического случая мы не можем казимиры даже корректно определить. Только для быстро убывающих функций; и при этом они зависят от граничных условий. Хотя полный набор функционалов не зависит от граничных условий. Но как они перераспределяются, какие из них являются гамильтонианами структурных потоков (т. е. нормальная плоскость), какие из них являются казимирами (т. е. касательная плоскость), зависит от граничных условий.

У нас есть и другие побочные результаты, как-то связанные с этим. Позвольте мне в качестве заключительного замечания отметить такое полезное забавное детское обстоятельство. Мы ещё нашли канонические виды подобных скобок. Если бы скобка Пуассона гидродинамического типа была бы локальной и метрика была бы невырожденной, то канонический вид её находится просто. Канонический вид — это вид, где координаты плоские. Там получается δ', умноженное на постоянную матрицу, а символы Кристоффеля в плоских координатах зануляются. Хотя в практических задачах эти координаты невозможно найти; это очень трудная задача. Существуют — это одно, а найти их — совсем другое. Приходится работать с полным ансамблем объектов римановой геометрии, зная, что ты на самом деле сидишь в евклидовой геометрии. Только знаешь, что кривизна равна нулю, поэтому ковариантные производные коммутируют. Это, кстати сказать, очень полезное тождество. А если метрика неплоская за счёт присутствия нелокальных членов, как я сказал? Вот, скажем, тот же простейший нелокальный член, приводящий к многообразиям постоянной кривизны. Мы доказали, что скобка всегда приводится к такому каноническому виду:

$$\{z^i(x),\, z^j(x)\} = (\varepsilon^i \delta^{ij} - c z^i z^j)\delta'(x-y).$$

Это результат мой и Павлова. Здесь написана метрика квадрики в евклидовом пространстве. Когда вы, как во всех учебниках, напишете метрику g_{ij} для сферы, то в неё будут входить какие-то корни. А если вы напишете метрику g^{ij} с верхними индексами, как вы пишете скобки Пуассона, то все корни уйдут; получится просто квадратичное выражение, никаких корней там не останется, все они сократятся. В тривиальных учебниках метрика сферы с верхними индексами не приводится, но её можно за две минуты вычислить. Метрика с верхними индексами в такой ситуации более естественна.

30 августа 2001 г.

А. Г. Сергеев

АБРИКОСОВСКИЕ СТРУНЫ И УРАВНЕНИЯ ЗАЙБЕРГА—ВИТТЕНА

Уравнения Зайберга—Виттена впервые появились в 1994 г. в работе Зайберга и Виттена. Эта работа была физическая, но в том же 1994 г. вышла статья Виттена, где он наметил математические применения найденных уравнений. Уравнения Зайберга—Виттена немедленно оказались в центре внимания математиков, прежде всего 4-мерных топологов, поскольку с их помощью удалось построить новые гладкие инварианты 4-мерных многообразий, которые получили название *инвариантов Зайберга—Виттена*. Оказалось, что они содержат ту же информацию, что и введённые ранее полиномы Дональдсона. С другой стороны, уравнения Зайберга—Виттена абелевы и потому вычислять инварианты Зайберга—Виттена удобнее и проще, чем инварианты Дональдсона. Помимо этого выяснилось, что инвариант Громова 4-мерных симплектических многообразий (который, грубо говоря, равен числу псевдоголоморфных кривых в заданном топологическом классе) тоже может быть выражен через инварианты Зайберга—Виттена. Имеется даже так называемое «уравнение Таубса»:

$$\mathrm{SW} = \mathrm{Gr},$$

за которым скрывается простая формула, связывающая инварианты Зайберга—Виттена с инвариантом Громова. Эта формула даёт другой способ вычисления инварианта Громова. На приведённых фактах и был основан энтузиазм относительно уравнений Зайберга—Виттена.

Ценность «уравнения Таубса» заключается в том, что это не просто мнемоническая формула, а за ним стоит конкретная конструкция, которую я буду называть *конструкцией Таубса*, позволяющая по решению уравнения Зайберга—Виттена строить некоторую псевдоголоморфную кривую, и наоборот. Позже оказалось, что связь между уравнениями Зайберга—Виттена и псевдоголоморфными кривыми, устанавливаемая конструкцией Таубса, имеет трёхмерный эквивалент, известный в теории сверхпроводимости. При этом уравнениям Зайберга—Виттена будут соответствовать *уравнения Гинзбурга—Ландау*, а псевдоголоморфным кривым — так называемые *абрикосовские струны* (или *нити*).

В процессе моего доклада я буду двигаться от физики к математике (с нарастанием математических сложностей к концу доклада) и по восходящей размерности (начиная с двумерного случая вихревых уравнений, переходя к трёхмерной модели Хиггса, и заканчивая уравнениями Зайберга—Виттена на 4-мерных многообразиях). Сначала несколько слов о физическом смысле абрикосовских струн.

Двумерный случай: вихревые уравнения

Физическое введение. Известно, что многие металлы и сплавы, если охладить их до очень низкой температуры (порядка нескольких градусов Кельвина), начинают вести себя как сверхпроводники, т. е. электрический ток течёт по ним почти без сопротивления, не выделяя джоулева тепла. Согласно современной теории это происходит из-за того, что при низких температурах электроны могут объединяться в пары, образуя новые *квазичастицы*. Эти квазичастицы, называемые *парами Купера*, имеют удвоенный заряд электрона, но нулевой спин. Таким образом, в отличие от электронов, являющихся фермионами, новые квазичастицы — бозоны. Из дальнейшего будет ясно, что объединение электронов в пары Купера при низких температурах энергетически выгодно. Ток этих квазичастиц и является сверхпроводящим. Иначе говоря, при низких температурах в проводнике имеются две компоненты тока: сверхпроводящая и нормальная. Чем ниже температура, тем больше превалирует сверхпроводящая компонента, и при температуре ниже критической мы получаем сверхпроводимость.

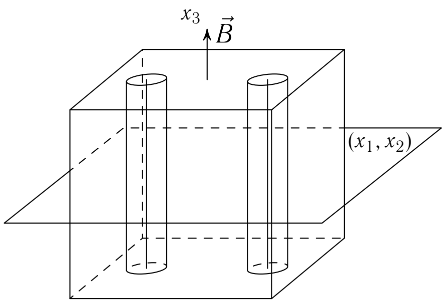


Рис. 1. Сверхпроводник

Рассмотрим теперь сверхпроводник во внешнем магнитном поле B. Я условно изображаю его в виде куба (рис. 1). Заметим, что когда проводник превращается в сверхпроводник, магнитное поле B «выталкивается» за его пределы; таким образом внутри сверхпроводника магнитное поле равно нулю. Указанный эффект называется эффектом Мейсснера и даёт наиболее простой практический способ убедиться в наличии сверхпроводимости. Достаточно измерить магнитное поле внутри проводника и убедиться, что оно равно нулю.

Допустим, что мы начинаем увеличивать уровень магнитного поля B. Тогда при некотором критическом значении этого поля произойдёт пробой сверхпроводника, и он начнёт превращаться в обычный проводник. Пробой проводника может развиваться по двум различным сценариям. Либо он происходит резким скачком по всему сверхпроводнику, либо постепенно, мелкими шагами, так что с физической точки зрения может рассматриваться как непрерывный. Остановимся подробнее на более интересном для нас втором сценарии. В этом случае имеются два критических значения магнитного поля. При первом значении B^1_{cr} в сверхпроводнике появляются так называемые *трубки тока* — трубчатые зоны, внутри которых нарушается сверхпроводимость. Точнее, внутри них присутствуют обе компоненты тока: нормальная и сверхпроводящая. В центре трубок, вдоль так называемых абрикосовских струн или нитей, течёт нормальный ток; сверхпроводимости там нет. Если мы будем наращивать магнитное поле далее, то количество трубок тока будет расти. В конце концов, при втором критическим значении B^2_{cr}, они заполнят весь сверхпроводник, и он превратится в обычный проводник.

Согласно двум приведённым сценариям все сверхпроводники делятся на два класса. Сверхпроводники первого класса, где пробой происходит резким скачком, называются сверхпроводниками *первого рода*, а сверхпроводники, где этот процесс происходит по второму сценарию, называются сверхпроводниками *второго рода*. (Различие между двумя типами сверхпроводников станет, возможно, более понятным из вида лагранжиана, который я вскоре выпишу). Сверхпроводники второго рода — это в основном сплавы, а сверхпроводники первого рода — в основном металлы. Металлы обычно становятся сверхпроводниками при температурах порядка 4° Кельвина, а для сплавов эта температура может быть около 10°—12° Кельвина. Я буду говорить о сверхпроводниках второго рода, поскольку они более интересны с математической точки зрения.

Лагранжиан Гинзбурга—Ландау. Прежде чем заниматься математическим описанием общей трёхмерной ситуации, давайте рассмотрим двумерную редукцию нашей задачи на плоскость (x_1, x_2), ортогональную направлению магнитного поля B (рис. 1), при условии, что ситуация однородна по оси x_3. При этом следами струн будут точки, в которых они пересекают плоскость (x_1, x_2). Сформулированная физическая задача будет описываться *лагранжианом Гинзбурга—Ландау*, который был предложен ими ещё до того, как возникли пары Купера. Этот лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}(A, \Phi) = |F_A|^2 + |d_A\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2.$$

(Он записан здесь в так называемой безразмерной форме; от физических констант осталась только λ). В этом лагранжиане:

• A физически — это электромагнитный потенциал. Математически, A — это 1-форма, т. е. $A = A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2$, где функции A_1 и A_2 не вещественные, а чисто мнимые.

• F_A физически — электромагнитное поле (тензор Максвелла). Математически, $F_A = dA = \sum F_{ij}\,dx_i \wedge dx_j$ (дифференциал 1-формы в обычном смысле). В нашем случае переменных всего две, поэтому из приведённого общего выражения выживает только один член $F_{12}\,dx_1 \wedge dx_2$. Функция F_{12} также принимает чисто мнимые значения.

• d_A физически — ковариантная производная (ковариантный дифференциал). Математически, $d_A = d + A$, где d — внешний дифференциал.

• Φ — пожалуй, самая интересная функция. Для неё имеется много разных названий. Гинзбург и Ландау использовали термин *параметр порядка*, что связано со спонтанным нарушением симметрии. Другое название — волновая *функция пар Купера*; иначе говоря, $|\Phi|^2$ описывает плотность пар Купера внутри сверхпроводника. Есть ещё названия: *поле Хиггса*, или *скалярное поле*. Математически, $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ есть просто комплексная функция.

• λ — единственный оставшийся физический параметр, который здесь остался. О его физическом смысле я скажу позже, он связан как раз с различием между сверхпроводниками первого и второго рода.

Физический смысл приведённого лагранжиана таков:

• $|F_A|^2$ — стандартный лагранжиан в теории электромагнитного поля (лагранжиан Максвелла).

• $|d_A\Phi|^2$ — стандартное ковариантное выражение для описания взаимодействия между электромагнитным полем и скалярным полем Φ.

• Потенциал $V(\Phi) = \frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2$ описывает нелинейное самодействие поля Φ.

Рассмотрим график $V(\Phi)$ на рис. 2, имея в виду, что горизонтальная ось представляет собой комплексную плоскость. Этот график хорошо известен в теории поля. Точки, где $|\Phi| = 1$, отвечают сверхпроводимости; они образуют окружность на комплексной плоскости. А точки, где $|\Phi| = 0$, отвечают нормальной проводимости. Сам вид нелинейного члена (самодействия) указывает на то, что находиться в сверхпроводящем состоянии энергетически более выгодно, чем в обычном. Состояние

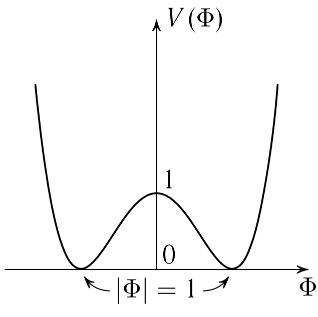


Рис. 2. График $V(\Phi)$

нормальной проводимости неустойчиво, а состояние сверхпроводимости устойчиво. Энергетическая выгодность сверхпроводимости заложена уже в самом лагранжиане Гинзбурга—Ландау, предложенном ими из феноменологических соображений ещё до появления пар Купера.

Точки пересечения абрикосовских нитей с плоскостью (x_1, x_2) — это те точки, где имеется нормальная проводимость, т. е. нули Φ. Если мы запишем Φ в полярной форме $\Phi = re^{i\theta}$, то график зависимости $|\Phi|^2$ от r в окрестности нуля будет выглядеть так, как показано на рис. 3. Аргумент Φ, равный θ, будет накручиваться при обходе нуля. Если ввести векторное поле $\vec{v} = \operatorname{grad} \theta$, то в окрестности нуля оно будет выглядеть так, как показано на рис. 4, напоминая гидродинамический вихрь. На самом деле, аналогия с гидродинамическими вихрями простирается гораздо дальше простого внешнего сходства. По этой причине пары (A, Φ), минимизирующие энергию, отвечающую лагранжиану Гинзбурга—Ландау, также называются *вихрями*, а абрикосовские нити — *вихревыми линиями*.

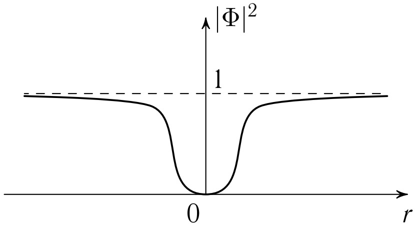


Рис. 3. График $|\Phi|^2$

Последний физический комментарий, который я хочу сделать, касается смысла параметра λ. Это очень важный физический параметр, отвечающий за межвихревое взаимодействие. Вихри могут притягиваться и отталкиваться. (Вообще, их можно представлять себе как частицы, взаимодействие между которыми переносится потоком, аналогичным гидродинамическому). Смысл параметра λ состоит в следующем:

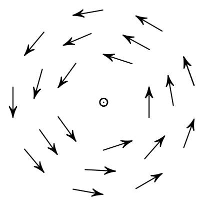


Рис. 4. Векторное поле $\vec{v} = \operatorname{grad} \theta$

- Если $\lambda > 1$, то одноимённые (закрученные в одну сторону) вихри отталкиваются.
- Если $\lambda < 1$, то одноимённые вихри притягиваются.

Если $\lambda = 1$, то между вихрями нет взаимодействия. (Это так называемый *автодуальный* случай). Поэтому можно ожидать, что при $\lambda = 1$ могут возникать произвольные расположения вихрей на плоскости. Оказывается, так оно и есть: в автодуальном случае вихри могут быть как угодно разбросаны на плоскости. Тем самым, при $\lambda = 1$ имеется наибольший набор решений и я ограничусь именно этим случаем, наиболее интересным с математической точки зрения.

Вихревые уравнения. Теперь я перехожу к математической задаче. Математически, вихри — это гладкие пары (A, Φ), которые минимизируют функционал потенциальной энергии

$$U(A,\,\Phi) = \int \mathcal{L}(A,\,\Phi)\,d^2x < \infty$$

(мы рассматриваем только такие пары, на которых функционал энергии конечен). Из условия конечности энергии следует, что $|\Phi| \to 1$ при $|x| \to \infty$. А если такое условие есть, то можно ввести топологический инвариант задачи — вихревое число d, — совпадающий, по определению, с числом вращения отображения

$$\Phi\colon S^1_\infty \to S^1 = \{|\Phi| = 1\}.$$

Отрицательность или положительность числа d связана с тем, в какую сторону закручены вихри. Я буду предполагать, что $d > 0$.

Сейчас я напишу уравнение, которому удовлетворяют вихри. Для этого введём комплексную координату $z = x_1 + ix_2$. Тогда вихревые уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} \bar\partial_A \Phi = 0, \\ F_A = *\frac{1}{2}(1 - |\Phi|^2). \end{cases}$$

Этим уравнениям удовлетворяют вихри $(A,\,\Phi)$, минимизирующие энергию в заданном топологическом классе. Заметим, что уравнения Эйлера—Лагранжа для произвольных критических точек энергии $U(A,\,\Phi)$ второго порядка, а уравнения для минимумов энергии имеют первый порядок. Вихревые уравнения выводятся с помощью так называемого *преобразования Богомольного*. Теперь я поясню обозначения в вихревых уравнениях. Здесь: $\bar\partial_A = \frac{\partial}{\partial\bar z}d\bar z + A^{0,1}$; от формы $A = A^{1,0} + A^{0,1}$ берётся только $(0,\,1)$-компонента $A^{0,1}$. В форме $F_A = dA$ в нашем случае присутствует только одна компонента F_{12}, поэтому второе уравнение можно переписать в виде: $F_{12} = \frac{1}{2}(1 - |\Phi|^2)$ (и тогда можно обойтись без звёздочки Ходжа).

Вихревые уравнения, как всегда, когда мы имеем дело с калибровочными теориями, имеют очевидную группу преобразований, относительно которых и уравнения, и лагранжиан инвариантны. Это так называемые калибровочные преобразования, которые в рассматриваемом случае имеют простой вид:

$$A \mapsto A + i\,d\chi, \qquad \Phi \mapsto e^{-i\chi}\Phi,$$

где χ — гладкая вещественная функция. Нас интересует не столько пространство всех решений, сколько пространство решений по модулю калибровочных преобразований, называемое иначе пространством модулей решений

$$\mathcal{M}_d = \left\{ \begin{matrix} \text{решения } (A,\,\Phi) \\ \text{с фиксированным } d \end{matrix} \right\} \Big/ \left\{ \begin{matrix} \text{калибровочные} \\ \text{преобразования} \end{matrix} \right\}.$$

Сейчас я приведу описание этого пространства.

Теорема (Таубс). (I) *Для любого набора точек* $(z_1, \ldots, z_k)$ *комплексной плоскости с кратностями* $d_1, \ldots, d_k$, *удовлетворяющими условию* $\sum d_i = d$, *существует единственное (с точностью до калибровки) решение* (A, Φ) *вихревых уравнений с конечной энергией, для которого нули* Φ *— точки* $(z_1, \ldots, z_k)$ *с кратностями* $d_1, \ldots, d_k$. *Такое решение с заданными нулями называется* d-*вихрем.*

(II) *Любая критическая точка энергии* $U(A, \Phi) < \infty$ *калибровочно эквивалентна* d-*вихрю.*

Второе утверждение означает, иными словами, что уравнения Эйлера—Лагранжа $\delta U(A, \Phi) = 0$, которые имеют второй порядок, эквивалентны вихревым уравнениям первого порядка при условии конечности энергии. Отсюда следует, в частности, что все критические точки с конечной энергией — минимумы, т. е. сёдел здесь вообще нет. Все вихри положительны, т. е. закручены в одну сторону. Физически это понятно: если бы были два вихря, закрученные в противоположные стороны, то они должны были бы аннигилировать. (Математическое доказательство этого утверждения можно найти в книге [4]).

Из теоремы Таубса вытекает, в частности, что пространство модулей совпадает с $\mathcal{M}_d = S^d\mathbb{C} = \mathbb{C}^d$. Действительно, указанное пространство состоит из любых неупорядоченных наборов из d точек на плоскости, т. е. совпадает с d-й симметрической степенью $\mathbb{C}$. А симметрическая степень $S^d\mathbb{C}$ — это $\mathbb{C}^d$, потому что любому неупорядоченному набору из d комплексных чисел можно сопоставить полином с этими корнями, имеющий коэффициент 1 при старшей степени; такие полиномы образуют пространство $\mathbb{C}^d$.

На произвольной компактной римановой поверхности Σ также имеется аналог этой теории, но там не всегда будет разрешимость. Возникает некоторое необходимое условие разрешимости, при выполнении которого пространство модулей тоже будет совпадать с симметрической степенью Σ: $\mathcal{M}_d = S^d\Sigma$. Это условие типа стабильности и легко понять, откуда оно берётся. В случае римановой поверхности A является связностью в линейном расслоении $L \to \Sigma$. Если мы проинтегрируем второе вихревое уравнение по Σ, то получим, что $2\pi i c_1(L) = \mathrm{vol}(\Sigma) - \|\Phi\|^2$. Отсюда сразу следует, что должно выполняться неравенство $c_1(L) < \mathrm{vol}(\Sigma)$. Это условие стабильности расслоения с сечением (для линейных расслоений нет понятия стабильности, но для пары, состоящей из линейного расслоения и его сечения, понятие стабильности есть).

Трёхмерный случай: (2+1)-мерная абелева модель Хиггса

Динамические уравнения. Перейдём от двумерной задачи к трёхмерному случаю. Третью координату можно добавить двумя различными способами. Мы можем добавить ещё одну евклидову переменную x_3, вернувшись к рассмотренной вначале задаче об описании абрикосовских струн в $\mathbb{R}^3$. Это задача на минимум для трёхмерного аналога потенциальной энергии, выписанной выше. А можем добавить переменную $x_0 = t$, рассматриваемую как время, получив в итоге гиперболическую задачу об описании динамики вихрей в $\mathbb{R}^2$. Наш подход применим к обеим задачам, но я предпочитаю начать со второй ввиду её большей физической наглядности. Позже я снова вернусь к задаче об абрикосовских струнах в $\mathbb{R}^3$.

Итак, я рассматриваю $(2+1)$-мерную задачу об описании динамики вихрей в $\mathbb{R}^2$, которую иначе принято называть *абелевой моделью Хиггса* в $\mathbb{R}^{2+1}$. В этом случае потенциальная энергия заменяется функционалом действия, который имеет вид

$$S(A, \Phi) = \int [T(A, \Phi) - U(A, \Phi)]\, dt.$$

Здесь $T(A, \Phi)$ — кинетическая энергия, а $U(A, \Phi)$ — потенциальная энергия, которая задаётся той же формулой, что и выше. Разность $T(A, \Phi) - U(A, \Phi)$ называется функцией Лагранжа и её нужно проинтегрировать по времени, чтобы получить действие. Кинетическая энергия имеет вид

$$T(A, \Phi) = \int \{|d_0\Phi|^2 + |F_{01}|^2 + |F_{02}|^2\}\, d^2x,$$

где $d_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} dx_0 = \frac{\partial}{\partial t} dt$, $F_{0j} = \partial_0 A_j - \partial_j A_0$ и $A = A_0\, dx_0 + A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2$.

Мы интересуемся решениями уравнения Эйлера—Лагранжа $\delta S(A, \Phi) = 0$, которое имеет второй порядок по A и Φ. В рассматриваемой динамической задаче уже нет никакого преобразования Богомольного, которое позволило бы, как в двумерном случае, свести это уравнение к уравнению первого порядка. Возникает вопрос, как решать такие уравнения, которые оказываются весьма трудными даже при вычислениях на компьютере. Поэтому было бы важно найти какой-нибудь математический метод, позволяющий строить решения динамических уравнений хотя бы приближённо. Такой метод был предложен английским физиком Мэнтоном на эвристическом уровне; его математического обоснования, по крайней мере в общей ситуации, пока не дано. Идея Мэнтона состоит в следующем.

Адиабатический предел. Будем называть решения уравнения Эйлера—Лагранжа для краткости *динамическими решениями*. Рассмотрим динамическое решение $(A(t), \Phi(t))$ и выберем калибровку так, чтобы $A_0 = 0$.

Будем считать, что вихревое число $d>0$ постоянно (т. е. вихри не рождаются и не уничтожаются) и энергия $(A(t),\,\Phi(t))$ конечна. Такое динамическое решение можно рассматривать как траекторию $t\mapsto[A(t),\,\Phi(t)]$ (квадратные скобки означают, что пара $(A,\,\Phi)$ задана с точностью до калибровки) в так называемом конфигурационном пространстве

$$\mathcal{N}_d=\left\{\begin{matrix}\text{пара } (A,\,\Phi) \text{ с фиксированным}\\ \text{вихревым числом } d\end{matrix}\right\}\Big/\left\{\begin{matrix}\text{калибровочные}\\ \text{преобразования}\end{matrix}\right\}.$$

Изобразим это в виде следующей картинки (рис. 5): конфигурационное пространство $\mathcal{N}_d$ можно представлять себе как овраг, дно которого совпадает с пространством модулей статических решений $\mathcal{M}_d$. Траектория γ как-то идёт по $\mathcal{N}_d$; если она попадает на $\mathcal{M}_d$, то она не может там оставаться, поскольку каждая точка $\mathcal{M}_d$ — это статическое решение. Следовательно, траектория γ может попасть на $\mathcal{M}_d$ только с ненулевой кинетической энергией и потому должна проскочить дальше. Давайте предположим, что траектория γ зависит от какого-то параметра ε и скорость $\|\dot\gamma_\varepsilon(t)\|$ стремится к нулю по параметру в подходящей норме. Тогда в пределе траектория ляжет на пространство модулей. Если мы просто устремим ε к нулю, то в пределе получим точку. Но, если мы одновременно введём на траектории «медленное время» $\tau=\varepsilon t$, где $\|\dot\gamma_\varepsilon(t)\|\approx\varepsilon$, то траектория начнёт пробегать всё большее и большее расстояние за то же самое время, и мы получим в пределе траекторию γ_0 на пространстве модулей $\mathcal{M}_d$. С одной стороны, предельная траектория γ_0 лежит на пространстве модулей, т. е. каждая её точка является статическим решением (и потому сама траектория не может быть решением динамических уравнений). А с другой стороны, траектория γ_0 в каком-то смысле близка к настоящему решению: для каждого ε можно найти динамическое решение, которой близко к γ_0. Давайте теперь возьмём произвольную траекторию γ_0 на пространстве модулей $\mathcal{M}_d$, и найдём условия, при которых вблизи γ_0 существует настоящее решение. Это будет приближённое решение нашего уравнения, описываемое чисто в терминах пространства статических решений; тем самым мы найдём приближённое решение динамических уравнений, не решая их. Эта красивая идея довольно часто встречается у физиков и механиков под названием *адиабатического предела*.

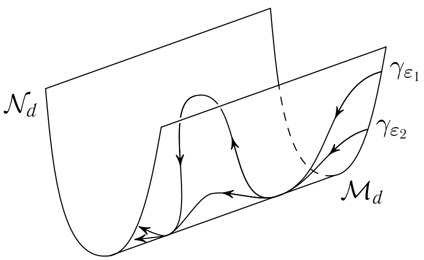


Рис. 5. Конфигурационное пространство

Поясню её более подробно. Если мы возьмём динамическое решение и перейдём к указанному адиабатическому пределу, то получим траекторию на пространстве модулей, которая аппроксимируется динамическими решениями. Но если мы стартуем с произвольной траектории на пространстве модулей, то где гарантия, что в её окрестности существует настоящее решение? Это ведь должны быть какие-то специальные траектории. Итак, первый вопрос, который нужно задать, такой: «Каковы те траектории γ_0 на пространстве модулей $\mathcal{M}_d$, в окрестности которых существуют решения динамических уравнений (т. е. их с любой точностью можно приблизить динамическим решением)?» Такие траектории γ_0 будем называть *адиабатическими*. Ответ, который гипотетически был предложен Мэнтоном, но математически обоснован лишь в некоторых частных случаях, таков. Указанные адиабатические траектории γ_0 на $\mathcal{M}_d$ должны быть экстремалями действия $S(\gamma)$, ограниченного на траектории, лежащие в $\mathcal{M}_d$. Исходное уравнение Эйлера—Лагранжа $\delta S(A, \Phi) = 0$ относится ко всем траекториям, лежащим на конфигурационном пространстве $\mathcal{N}_d$. Если мы ограничим его только на кривые, лежащие в $\mathcal{M}_d$, то получим совсем другие экстремали. Оказывается, эти экстремали и есть искомые адиабатические траектории. Так как U постоянно на $\mathcal{M}_d$, то эти траектории будут геодезическими в метрике $\mathcal{M}_d$, определяемой только кинетической энергией $\int_\gamma T\,dt$. Отсюда можно сразу получить уравнения для адиабатических траекторий.

Адиабатический принцип. Попытаемся теперь сформулировать некоторый общий адиабатический принцип приближённого решения динамических уравнений. Пусть у нас имеется такое уравнение. Перейдём в этом уравнении к адиабатическому пределу (это означает, что мы «садимся» на пространство модулей статических решений, вводя медленное время). В адиабатическом пределе исходное нелинейное динамическое уравнение превращается в гамильтонову систему линейных уравнений. Тогда наш принцип состоит в том, что вблизи любого решения адиабатической гамильтоновой системы найдётся настоящее решение.

Эта идея применялась к конкретным задачам, например, к задаче об описании динамики двух вихрей. Эта динамика, согласно указанному принципу, описывается геодезическими на пространстве модулей $\mathcal{M}_2$, причём настоящие вихри должны вести себя похожим образом. Пусть, например, происходит лобовое столкновение вихрей. Что произойдёт после рассеяния? Из соображений симметрии ясно, что возможны всего две ситуации: либо вихри проходят друг через друга, продолжая двигаться по соединяющей их прямой, либо рассеиваются под углом $\pi/2$. Из описания геодезических вытекает (и это действительно так, как показывают реальные эксперименты), что вихри рассеиваются под углом $\pi/2$.

Мы здесь привели описание медленно движущихся вихрей, т. е. вихрей, близких к статическим решениям. Аналогичным образом можно изучать абрикосовские струны, которые не сильно отклоняются от прямых, параллельных оси x_3. В адиабатическом пределе (когда производная по x_3 стремится к нулю) исходные уравнения Эйлера—Лагранжа будут также сводиться к уравнениям для геодезических, но только в другой метрике.

Четырёхмерный случай: уравнения Зайберга—Виттена

Уравнения Зайберга—Виттена на 4-многообразиях. Теперь я покажу, что в четырёхмерном случае мы имеем комплексный аналог только что рассмотренной ситуации.

Прежде всего, что такое уравнения Зайберга—Виттена? Пусть X — компактное четырёхмерное ориентируемое риманово многообразие, снабжённое Spin^c-структурой. Spin^c-структура — замечательная дифференциально-геометрическая конструкция, которая, как оказалось, является адекватным инструментом для работы с четырёхмерными римановыми многообразиями. Точное определение Spin^c-структуры я давать не буду, но из этого определения вытекает, что на многообразии X, обладающем Spin^c-структурой, заданы два комплексных векторных расслоения ранга 2 с заданным клиффордовым умножением, т. е. послойным спинорным представлением алгебры Клиффорда TX в сечениях расслоения $W = W^+ \oplus W^-$:

$$\begin{tikzcd} W^+ \arrow[dr] & & W^- \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

так, что $\det W^+ = \det W^- = L$ ($\det W^\pm$ — детерминантное расслоение $W^\pm$). Расслоения W^+ и W^- — это так называемые *полуспинорные* расслоения; сечения расслоения $W = W^+ \oplus W^-$ называются *спинорами Дирака*.

Те, кто не знаком с алгебрами Клиффорда, могут просто считать, что для векторных полей v на X имеется представление, с помощью которого можно действовать векторным полем v на сечения W^+. (На самом деле это действие уже однозначно определяет представление всей алгебры Клиффорда TX).

Функционал Зайберга—Виттена — это функционал, который является 4-мерным аналогом функционала Гинзбурга—Ландау. Он имеет вид

$$E(A, \Phi) = \int_X \left\{ |F_A|^2 + |\nabla_A \Phi|^2 + \frac{|\Phi|^2}{4}(s + |\Phi|^2) \right\} d\mathrm{vol},$$

где

• A — $U(1)$-связность на детерминантном (характеристическом) расслоении L,

• F_A — кривизна этой связности,

• ∇_A — так называемая Spin^c-связность на W, которая строится по A и связности Леви-Чивита на X,

• Φ — сечение W^+,

• $s(x)$ — скалярная кривизна метрики g.

Этот функционал отличается от рассмотренного выше тем, что функционал Зайберга—Виттена может быть и отрицательным (при отрицательной скалярной кривизне $s(x)$), а также тем, что вместо $\frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2$ здесь стоит $\frac{|\Phi|^2}{4}(s + |\Phi|^2)$, где $s(x)$ — скалярная кривизна метрики g, т. е. функция от x. Уравнения, определяемые функционалом Зайберга—Виттена, не будут зависеть от метрики, а только от Spin^c-структуры.

Для функционала Зайберга—Виттена имеется аналог преобразования Богомольного, что позволяет немедленно написать уравнения для его минимумов. Они удовлетворяют уравнениям Зайберга—Виттена или, коротко, SW-уравнениям

$$D_A \Phi = 0,$$
$$F_A^+ = \Phi \otimes \Phi^* - \frac{1}{2}|\Phi|^2 \cdot \mathrm{id}.$$

Здесь

• Φ — сечение W^+.

• D_A — линейный оператор, который переводит сечения W^+ в сечения W^-. Это так называемый *ковариантный оператор Дирака*. Его можно задать явной формулой, которая в локальном базисе $\{e_i\}$ касательного расслоения TX выглядит следующим образом:

$$D_A \Phi = \sum_{i=1}^{4} e_i \cdot \nabla_{A, e_i} \Phi.$$

Здесь «·» обозначает клиффордово умножение или, иначе говоря, спинорное действие.

• F_A^+ — автодуальная часть кривизны. В четырёхмерном случае кривизну можно разложить на две компоненты: автодуальную и антиавтодуальную, поскольку пространство тензоров кривизны в 4-мерном случае приводимо.

• $\Phi \otimes \Phi^*$ — 2×2-матрица, получаемая умножением вектор-столбца на вектор-строку (эрмитов бесследный эндоморфизм пространства W^+).

Приравнять обе части второго уравнения можно следующим образом. Слева стоит 2-форма, а справа оператор. Автодуальную часть кривизны можно реализовать как бесследный эрмитов эндоморфизм W^+ с помощью клиффордова умножения, которое действует не только на векторных полях, но и на любых формах, реализуя их эндоморфизмами W. При этом автодуальная форма с чисто мнимыми значениями реализуется как бесследный эрмитов эндоморфизм $W^{\pm}$. Поэтому обе части уравнения можно приравнять друг другу.

Уравнения Зайберга—Виттена, также как и вихревые уравнения, инвариантны относительно калибровочных преобразований, задаваемых гладкими отображениями $u\colon X \to U(1)$. Нас снова интересует пространство модулей решений с точностью до калибровочных преобразований. Действие группы калибровочных преобразований на решениях SW-уравнений является свободным, если только $\Phi \not\equiv 0$. Чтобы избежать подобных решений, мы заменим выписанные выше SW-уравнения на возмущённые, добавляя в левую часть второго уравнения произвольную автодуальную 2-форму η.

В отличие от многих других уравнений, пришедших в геометрию из физики (таких например, как уравнения дуальности Янга—Миллса), уравнения Зайберга—Виттена не инвариантны относительно изменения масштаба. Если изменить масштаб метрики, перейдя от метрики g к метрике $\lambda^2 g$, то решению (A, Φ) SW-уравнений для метрики g будет отвечать решение $\left(A, \frac{1}{\lambda}\Phi\right)$ SW-уравнений для метрики $\lambda^2 g$.

Уравнения Зайберга—Виттена на симплектических 4-многообразиях. Перейдём теперь от произвольных римановых 4-многообразий X к симплектическим. Если (X, ω) — симплектическое многообразие, то его можно снабдить почти комплексной структурой J, совместимой как с симплектической структурой ω, так и с римановой метрикой g. На таком многообразии имеется каноническая Spin^c-структура, для которой

$$W_0^+ = \overset{0}{\Lambda} \oplus \overset{0,2}{\Lambda}, \qquad W_0^- = \overset{0,1}{\Lambda}.$$

Характеристическое расслоение $L_0 = \det W_0^{\pm}$ канонической Spin^c-структуры совпадает с антиканоническим расслоением $\overset{0,2}{\Lambda}$ и на нём существует каноническая связность A_0.

Любая другая Spin^c-структура на X получается из канонической тензорным умножением на некоторое комплексное линейное расслоение E, так что

$$W_E^{\pm} = W_0^{\pm} \otimes E, \quad L_E = \det\, W_E^{\pm} = \bigwedge^{0,2} \otimes E^2,$$

а связность A на L_E имеет вид

$$A = A_0 + 2B,$$

где B — некоторая связность на E.

Выпишем теперь SW-уравнения для произвольной Spin^c-структуры на X, задаваемой линейным расслоением E. Сечение Φ расслоения W_E^+ имеет вид $\Phi = (\alpha, \beta)$, где α — это сечение расслоения E, а β — $(0, 2)$-форма со значениями в E. Уравнения Зайберга—Виттена записываются в виде

$$\begin{gathered} \bar{\partial}_B \alpha + \bar{\partial}_B^* \beta = 0, \\ F_B^{0,2} + \eta^{0,2} = \frac{1}{2}\bar{\alpha}\beta, \\ F_{A_0} + 2F_B^{\omega} + \eta^{\omega} = \frac{1}{4i}(|\beta|^2 - |\alpha|^2), \end{gathered}$$

где

• $\bar{\partial}_B$ — $(0, 1)$-компонента оператора ковариантного внешнего дифференцирования d_B.

• $\bar{\partial}_B^*$ — L^2-сопряжённый оператор к $\bar{\partial}_B$.

• F_B^{ω}, η^{ω} — $(1, 1)$-компоненты форм F_B и η, параллельные симплектической форме ω.

Первое уравнение — это уравнение Дирака на симплектическом многообразии, выписанное в терминах почти комплексной структуры на расслоении E, задаваемой оператором $\bar{\partial}_B$. Второе и третье уравнения — это соответственно $(0, 2)$- и $(1, 1)$-компоненты второго SW-уравнения

$$F_A^+ + \eta = \Phi \otimes \Phi^* - \frac{1}{2}|\Phi|^2 \cdot \mathrm{id}$$

относительно почти комплексной структуры J.

Конструкция Таубса. В качестве возмущения η естественно выбрать форму, параллельную симплектической форме ω, с параметром λ в качестве коэффициента. Устремляя затем этот параметр к $+\infty$, мы сможем избавиться от нежелательной зависимости SW-решения от масштаба метрики. Конкретно, выберем η в виде

$$\eta = -F_{A_0} + i\lambda\omega.$$

Подставляя в SW-уравнения, получим

$$\bar\partial_B\alpha+\bar\partial_B^*\beta=0,$$
$$F_B^{0,2}=\frac{1}{2}\bar\alpha\beta,$$
$$2F_B^{\omega}=\frac{1}{4i}(|\beta|^2-|\alpha|^2-4\lambda).$$

Согласно теореме Таубса решение $(B_\lambda,\ (\alpha_\lambda,\ \beta_\lambda))$ этих уравнений при $\lambda\to+\infty$ ведёт себя следующим образом.

• $|\alpha_\lambda|\to 1$ всюду вне нулей, приближаясь к почти голоморфному сечению расслоения E, наделённого почти комплексной структурой, задаваемой оператором $\bar\partial_B$.

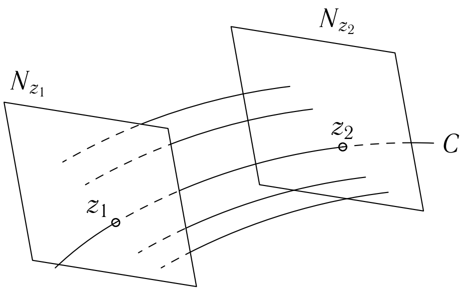
• $|\beta_\lambda|\to 0$ всюду на X.

Обозначим через C_λ множество нулей сечения α_λ. Тогда

$$C_\lambda\to C$$

в смысле потоков (т. е. в слабом смысле) и Таубс доказывает, что предельный поток C есть псевдоголоморфная кривая, класс гомологий которой является пуанкаре-двойственным к $c_1(E)$.

Более того, выбирая подходящую подпоследовательность, можно добиться того, чтобы решения SW-уравнений сходились к семейству решений вихревых уравнений, заданных на нормальных плоскостях к кривой C, и параметризуемых, тем самым, точками $z\in C$. Этот предел является аналогом адиабатического предела в трёхмерном случае. Поэтому естественно, также как в трёхмерном случае, поставить обратный вопрос: какому условию должны удовлетворять псевдоголоморфная кривая C и семейство вихревых решений на её нормальном расслоении, чтобы по ним можно было построить приближённое решение SW-уравнений?



Р и с. 6. Семейство вихревых решений

Пусть C — некоторая псевдоголоморфная кривая на X и d — натуральное число. Рассмотрим семейство вихревых уравнений на нормальном расслоении $N\to C$ заданной кривой и семейство их d-вихревых решений $(A_z,\ \Phi_z)$, $z\in C$ (см. рис. 6). Это семейство задаёт комплексную кривую

$$\gamma\colon C\ni z\mapsto[A_z,\ \Phi_z]\in\mathcal{M}_d$$

в пространстве $\mathcal{M}_d$ модулей d-вихревых решений на комплексной плоскости, которую естественно называть *комплексной абрикосовской струной*. С помощью стандартной процедуры гладкого продолжения, по семейству (A_z, Φ_z), заданному на нормальном расслоении $N \to C$, можно построить набор SW-данных $(E, B, (\alpha, \beta))$ для SW-уравнений на X. Для них поставленный выше вопрос будет звучать так: когда построенные SW-данные будут близки к какому-либо решению SW-уравнений? Ответ: тогда, когда комплексная абрикосовская струна

$$\gamma = [A, \Phi] : C \to \mathcal{M}_d$$

удовлетворяет комплексному адиабатическому уравнению на $\mathcal{M}_d$. Указанное адиабатическое уравнение является нелинейным $\bar{\partial}$-уравнением на $\mathcal{M}_d$, а в частном случае, когда $d = 1$, а нули Φ совпадают с кривой C, это уравнение эквивалентно условию псевдоголоморфности C.

Список литературы

[1] Witten E. Monopoles and 4-manifolds // Math. Res. Letters. — 1994. — V. 1. — P. 769—796.

[2] Donaldson S. K. The Seiberg—Witten equations and 4-manifold topology // Bull. Amer. Math. Soc. — 1996. — V. 33. — P. 45—70.

[3] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. — М.: Наука, 1978.

[4] Jaffe A., Taubes C. H. Vortices and monopoles. — Boston: Birkhäuser, 1980.

[5] Salamon D. Spin geometry and Seiberg—Witten invariants. Warwick Univ., 1996. Preprint.

[6] Taubes C. H. SW $\Rightarrow$ Gr: From the Seiberg—Witten equations to pseudo-holomorphic curves // J. Amer. Math. Soc. — 1996. — V. 9. — P. 845—918.

[7] Taubes C. H. Gr $\Rightarrow$ SW: From pseudo-holomorphic curves to Seiberg—Witten solutions // J. Diff. Geom. — 1999. — V. 51. — P. 203—334.

18 октября 2001 г.

С. М. Гусейн-Заде

О МОТИВНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ И ЕГО АНАЛОГАХ

Идея мотивного интегрирования (motivic integration) — это обобщение интегрирования по эйлеровой характеристике. Интегрирование по эйлеровой характеристике формально было чётко сформулировано (и так названо) Олегом Виро в его статье «О целочисленном анализе, связанном с эйлеровой характеристикой», но на самом деле, как утверждают многие, в виде фольклора оно существовало и раньше. Мне говорили, что когда Макферсон делал доклад на семинаре Бурбаки, он писал какие-то формулы и сказал: «Можно считать, что я пишу интегралы по эйлеровой характеристике».

Речь идёт вот о чём. Для того чтобы интегрировать, нужно иметь меру, т. е. функцию μ на множествах, которая удовлетворяет соотношению

$$\mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2) - \mu(X_1 \cap X_2). \tag{1}$$

Это свойство и обычные формулы интегрирования неявным образом присутствуют во многих утверждениях, связанных с вычислением эйлеровой характеристики. Например, один из самых известных фактов, связанных с вычислением эйлеровой характеристики, следующий. Пусть C — неприводимая комплексная кривая, т. е. связная вещественная двумерная ориентируемая поверхность, и пусть есть комплексно-аналитическое отображение $p\colon C \to \mathbb{CP}^1$. Это отображение является n-листным разветвлённым накрытием. Для простоты будем считать, что все точки ветвления — второго порядка. Пусть k — количество точек ветвления. Тогда для того, чтобы узнать топологический тип поверхности, считают её эйлерову характеристику:

$$\chi(C) = 2 - 2g = 2n - k = n\chi(A) + (n-1)\,\chi(\mathbb{CP}^1 \setminus A), \tag{2}$$

где A — множество, над которым накрытие неразветвлённое. Здесь $\mathbb{CP}^1 \setminus A$ — множество, состоящее из k точек; его эйлерова характеристика равна k. Множество A гомотопически эквивалентно букету $k-1$ окружности; его эйлерова характеристика равна размерности 0-мерной группы гомологий минус размерность 1-мерной группы гомологий, т. е.

она равна $1-(k-1)=2-k$. (Тут я немножко лукавлю; это не совсем так, как нужно правильно говорить.) Множители n и $n-1$, стоящие перед $\chi(A)$ и $\chi(\mathbb{CP}^1 \setminus A)$, это на самом деле тоже эйлеровы характеристики. А именно, n — эйлерова характеристика прообраза любой точки множества A, а $n-1$ — эйлерова характеристика прообраза любой точки множества $\mathbb{CP}^1 \setminus A$. Формулу (2) в каком-то смысле можно записать так:

$$\chi(C)=\int\limits_{\mathbb{CP}^1} \chi\big(p^{-1}(x)\big)\, d\chi.$$

Я должен сказать, что вопрос о том, что такое эйлерова характеристика, чуть-чуть скользкий. Я специально сказал, что пространство A гомотопически эквивалентно букету $k-1$ окружностей, поэтому его эйлерова характеристика равна размерности 0-мерной группы гомологий минус размерность 1-мерной группы гомологий. Обычно эйлерова характеристика пространства X определяется следующим образом:

$$\chi(X)=\sum_{q\geqslant 0}(-1)^q \dim H_q(X;\, \mathbb{R})$$

(имеется в виду, что сумма конечна). Но такое определение плохое, потому что при таком определении формула (1) для эйлеровой характеристики, вообще говоря, не выполняется. Самый простой пример такой: $X_1=\{x\}$, где $x \in S^1$, $X_2=S^1 \setminus X_1$. Тогда $\chi(X_1 \cup X_2)=\chi(S^1)=0$, $\chi(X_1)=\chi(X_2)=1$ и $\chi(X_1 \cap X_2)=\chi(\varnothing)=0$.

На самом деле, имеет место свойство, которое в какой-то момент мне даже казалось странным. Если мы работаем с комплексно-аналитическими пространствами, то этой проблемы не существует. Если X_1 и X_2 — комплексно-аналитические пространства, то формула (1) для эйлеровой характеристики всегда выполняется. Но если мы хотим работать не только в комплексно-аналитической ситуации, но и в вещественной, то такое определение эйлеровой характеристики уже не проходит. Тут приходится пользоваться другим определением. Оно зависит от того, что нам нужно. Если брать произвольные множества, то любое множество измеримым быть не должно. Если в качестве множеств брать произвольные CW-комплексы, которые неизвестно как вложены, то формулы (1) априори ожидать не приходится; нужно требовать, чтобы они пересекались хорошим образом. Поскольку меня будут интересовать приложения в алгебраической геометрии или около неё, я буду считать, что X_i всегда полуалгебраические множества. Или, если меня интересует алгебра, на которой определена эта мера (эйлерова характеристика), то это — *конструктивные множества*, т. е. минимальная алгебра, которая порождена алгебраическими множествами. Например, множество

$$(\mathbb{C}^2 \setminus \{xy = 0\}) \cup \{0\}$$

лежит в алгебре, порождённой полуалгебраическими множествами. (Полуалгебраическим множеством я называю разность двух проективных множеств.)

Для полуалгебраических множеств эйлерову характеристику можно определить так:

$$\chi(X) = \sum_{q \geqslant 0} (-1)^q \dim H_q(X^*, *; \mathbb{R}),$$

где X^* — одноточечная компактификация X, $*$ — это добавленная точка; это определение работает во всех случаях. А если множество конструктивно, то его можно разбить на полуалгебраические множества, и для них посчитать $\chi(X)$. Другой вариант такой: конструктивное множество можно разбить на конечное число клеток и посчитать альтернированную сумму количеств клеток разных размерностей. В этом смысле множество X_2 из примера разбиения окружности — это 1-мерная клетка. Альтернированная сумма равна -1.

Так определённая эйлерова характеристика уже удовлетворяет основному соотношению (1), поэтому она вполне пригодна для определения интеграла. Но, как и в любой теории интегрирования, здесь есть понятие интегрируемой функции. Интегрируемые функции определяются так. Мы снова рассматриваем конструктивные множества. Мне не всегда будет удобно считать, что функция принимает значения в вещественных числах; иногда мне нужно будет рассматривать функции со значениями в абелевой группе G. Пусть X — конструктивное множество. Функцию $F\colon X \to G$ называют *конструктивной* (*интегрируемой*), если $X = \bigcup_{i=1}^{N} X_i$, где каждое множество X_i конструктивно и на каждом множестве X_i функция F принимает постоянное значение g_i. Тогда интеграл от функции F по эйлеровой характеристике определяется так:

$$\int_X F(x)\, d\chi = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i)\, g_i.$$

Если функция принимает не конечное, а счётное множество значений, то такой интеграл тоже можно рассматривать, правда, тогда он уже не всегда имеет смысл. Но если он не имеет смысла, то функцию следует считать неинтегрируемой.

У этого интеграла интегрируемых функций не слишком много. Но если функция интегрируема, то этот интеграл обладает многими свойствами обычного интеграла. Например, имеет место формула Фубини. Для интеграла по эйлеровой характеристике формула Фубини выглядит следующим образом. Пусть X, Y — конструктивные множества. Пусть заданы два отображения

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"] & G \\ Y & \end{tikzcd}$$

где F — конструктивная функция. Возьмём точку $y \in Y$ и рассмотрим ограничение функции F на множество $p^{-1}(Y)$. Эта функция будет конструктивна. Оказывается, что можно сначала проинтегрировать по слою, а потом проинтегрировать по базе:

$$\int_X F\,d\chi = \int_Y \left(\int_{p^{-1}(y)} F\,d\chi \right) d\chi.$$

Например, формула (2) представляет собой частный случай формулы Фубини:

$$\chi(C) = \int_C 1\,d\chi = \int_{\mathbb{CP}^1} \chi(p^{-1}(y))d\chi.$$

Мотивное интегрирование — это обобщение интегрирования по эйлеровой характеристике в двух направлениях:

1) вместо того чтобы интегрировать по конечномерным конструктивным множествам, можно интегрировать по некоторым бесконечномерным пространствам;

2) можно рассматривать не только эйлерову характеристику, но и некоторые другие аддитивные функционалы от конструктивных множеств.

Теперь я напишу некоторые формулы из теории особенностей, которые пишутся в виде интеграла по эйлеровой характеристике. Это поможет объяснить, зачем нужно ещё что-то другое, почему недостаточно просто интеграла по эйлеровой характеристике. В теории особенностей распространена такая конструкция. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции с критической точкой в начале координат (не обязательно изолированной), $V_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{D}_\delta$ — слой Милнора ростка f; здесь $0 < \|\varepsilon\| \ll \delta$, чтобы он был корректно определён, $\bar{D}_\delta$ — шар радиуса δ с центром в начале координат в $\mathbb{C}^n$. Имеется расслоение $\bar{D}_\delta \to D^2_{\varepsilon_0}$, поэтому если ε обвести вокруг начала координат, то возникает преобразование монодромии этого расслоения $h\colon V_\varepsilon \to V_\varepsilon$. У этого преобразования есть дзета-функция, которая называется дзета-функцией монодромии ростка f:

$$\zeta_f(t)=\prod_{q=0}^{n-1}\{\det(\mathrm{id}\ -th_*|_{H_q(V_\varepsilon;\mathbb{R})})\}^{(-1)^q}.$$

Если особенность f изолированная, то это почти характеристический многочлен особенности, потому что тогда гомологии есть только в размерностях 0 и $n-1$. А если особенность не изолированная, то, вообще говоря, гомологии есть в разных размерностях.

Есть формула, которая выражает дзета-функцию в терминах разрешения особенностей. Разрешение особенности — это n-мерное неособое комплексное многообразие X с собственным отображением $p\colon X\to\mathbb{C}^n$ и с дивизором $D=p^{-1}(0)$, которое обладает следующим свойством. Поднимем f на X, т. е. рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & (X,\, D) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\
(\mathbb{C}^n,\, 0) \arrow[rr, "f"] & & (\mathbb{C},\, 0)
\end{tikzcd}$$

Тогда отображение π — изоморфизм вне $f^{-1}(0)$ и в окрестности любой точки многообразия X есть локальные координаты $y_1, \ldots, y_n$, в которых функция $f\circ\pi$ записывается в виде $f\circ\pi=u(y)\prod\limits_{i=1}^{n} y_i^{k_i}$, где $u(y)$ — обратимая функция, т. е. $u(0)\neq 0$. (Функция $u(y)$ написана только для того, чтобы не маяться с точками, в которых все числа k_i обращаются в нуль.) Итак, функция, поднятая наверх, локально оказывается произведением координат в каких-то степенях. Теорема о том, что такое разрешение всегда существует — это частный случай теоремы Хиронаки о разрешении особенностей.

Для дзета-функции есть такая формула. Пусть $S_m=\{x\in D\colon f\circ\pi=y_1^m\}$, т. е. множество S_m состоит из точек прообраза нуля, в которых можно выбрать локальные координаты $y_1, \ldots, y_n$ так, что $f\circ\pi=y_1^m$. В частности, в S_m не входят никакие пересечения компонент D (здесь D — это дивизор с нормальными пересечениями; в S_m входят только гладкие части D, а именно, те, где соответствующая кратность равна m). Тогда

$$\zeta_f(t)=\prod_{m\geqslant 1}(1-t^m)^{\chi(S_m)}=\int_D \zeta_{f\circ\pi|_y}(t)\,d\chi, \tag{3}$$

где $f\circ\pi|_y$ — росток функции $f\circ\pi$ в точке $y\in D$. Когда я пишу такую формулу, я работаю с абелевой группой (относительно умножения) ненулевых рациональных функций от t. Раньше я писал эйлерову характеристику, умноженную на что-то; в мультипликативной терминологии это будет что-то в степени эйлерова характеристика, и вместо суммы надо взять произведение. Речь идёт о той же самой записи, но только в абелевой группе, в которой закон композиции записывается мультипликативно.

Разрешений бывает много. Если я хочу доказать, что эйлерова характеристика множества S_m является инвариантом функции и не зависит от выбора разрешения, то для этого можно воспользоваться формулой (3), потому что выражение в левой части от разрешения никак не зависит. Однако если мы такой формулы не имеем, то доказать другим способом инвариантность эйлеровой характеристики множества S_m трудно. Проблемы такого типа бывают довольно серьёзными.

Примерно такая же проблема и привела к созданию мотивного интегрирования. А именно, проблема такова: что-то формулируется в терминах разрешения, а нужно доказать, что это не зависит от разрешения. Конкретно речь шла о том, что зеркальная симметрия устанавливает равенство между числами Ходжа—Делиня $h^{p,q}$ для многообразий, но эти многообразия на самом деле часто имеют особенности. В зеркальной симметрии для этих многообразий предполагалось строить разрешения особенностей (на самом деле не произвольное разрешение, а разрешение, которое уважает канонический класс, но это неважно) и брать числа Ходжа—Делиня уже для этого разрешения. Гипотеза зеркальной симметрии предсказывала, что для соответствующих пар эти числа Ходжа—Делиня связаны зеркальной симметрией. Изначальная проблема, которая здесь возникла, состояла в том, что числа $h^{p,q}$ определяются разрешением, поэтому даже сам факт, что они от разрешения не зависят, был совершенно не очевиден и было неясно, как его доказывать. Идея состояла в том, что нужно выразить инварианты, которые зависят от разрешения, через что-то, не зависящее от разрешения. В качестве того, что не зависит от разрешения, было предложено следующее. Пусть есть голоморфная функция $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Мы строим разрешение

$$\begin{tikzcd} & (X, D) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ (\mathbb{C}^n, 0) \arrow[rr, "f"] & & (\mathbb{C}, 0) \end{tikzcd}$$

Напомню, что π — собственное отображение, которое является изоморфизмом вне $f^{-1}(0)$. Рассмотрим внизу, в $\mathbb{C}^n$, дуги $\varphi\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, для которых $\operatorname{Im}\varphi \not\subset f^{-1}(0)$. Мы рассматриваем дуги, подходящие к нулю. Наверху, в X, можно рассмотреть аналогичные дуги $\psi\colon (\mathbb{C}, 0) \to (X, D)$, для которых $\operatorname{Im}\psi \not\subset \pi^{-1}\bigl(f^{-1}(0)\bigr)$. Меня, конечно, интересуют не сами дуги, а их ростки. Каждой дуге наверху соответствует дуга внизу (проекция этой дуги). Более того, каждой дуге внизу соответствует ровно одна дуга наверху: прообраз дуги внизу будет дугой наверху, подходящей к какой-либо точке D. Возникает взаимно однозначное соответствие между дугами внизу и дугами наверху. Пространство дуг, которые подходят к нулю, от способа разрешения не зависит. Поэтому для любого разрешения пространство дуг, которые подходят к D, от способа разрешения не зависит. Идея состояла в том, чтобы свести инварианты, сформулированные в терминах разрешения, к инвариантам, сформулированным в терминах пространства дуг, а именно, к некоторым интегралам по ним.

Я уже сказал, что есть два направления обобщения интеграла по эйлеровой характеристике. Одно направление связано с более общим понятием меры. Это я обсужу позже. Сначала я обсужу просто эйлерову характеристику. Как можно в пространстве дуг ввести понятие эйлеровой характеристики для некоторых подмножеств и как, соответственно, можно определить интеграл по эйлеровой характеристике для каких-то функций, определённых на пространстве этих дуг? Какие именно функции берутся, я обсужу чуть позже. Идея состоит в следующем. Пусть $\mathcal{A}$ — пространство всех дуг $\varphi\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$. Это, естественно, бесконечномерное пространство. Чтобы определить, что такое измеримые множества (т. е. те, у которых есть эйлерова характеристика) и что такое эйлерова характеристика, поступают следующим образом: рассматривают аппроксимации множества $\mathcal{A}$. А именно, пусть $\mathcal{A}_k$ — множество k-струй $\{j_k\varphi\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)\}$; каждая k-струя представляет собой n многочленов степени $\leqslant k$. Это уже конечномерное пространство; его размерность равна nk. Для таких пространств есть отображения $\ldots \leftarrow \mathcal{A}_{k-1} \leftarrow \mathcal{A}_k \leftarrow \mathcal{A}_{k+1} \leftarrow \ldots$ Каждое такое отображение — забывание последнего коэффициента. Вообще, для каждого $k \leqslant m$ есть отображение $\pi_{m,k}\colon \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_k$. Прообраз точки при этом отображении — это аффинное пространство $\mathbb{C}^{(m-k)n}$.

Дальше вводится такое определение. Множество $X \subset \mathcal{A}$ называется *цилиндрическим* (измеримым), если существует такое k и такое конструктивное подмножество $Y \subset \mathcal{A}_k$, что $X = \pi_k^{-1}(Y)$, где $\pi_k\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}_k$ — естественная проекция. Это означает, что, во-первых, свойство ростка принадлежать этому множеству в действительности определяется его k-струёй. Во-вторых, на уровне k-струй это свойство конструктивное, т. е. задаётся объединением конечного числа множеств, которые определяются равенствами или неравенствами. Тогда мы можем объявить, что $\chi(X) = \chi(Y)$. Действительно, если $X = \pi_k^{-1}(Y) = \pi_m^{-1}(Y')$, где $Y' \subset \mathcal{A}_m$ и $m \geqslant k$, то можно считать, что Y' — это Y, умноженное на комплексное пространство $\mathbb{C}^{(m-k)n}$. А эйлерова характеристика комплексного аффинного пространства равна 1. Заметим, что эйлерова характеристика мультипликативна. Тогда получается, что эйлерова характеристика у Y и у Y' одна и та же. Поэтому это определение корректно.

Пересечение двух цилиндрических множеств является цилиндрическим множеством; объединение — тоже. Поэтому для функции, принимающей каждое своё значение на цилиндрическом множестве (т. е. на измеримом в этом смысле множестве), определяется интеграл по эйлеровой характеристике тем же самым образом, что и выше.

Вся эта адаптация для бесконечномерного случая была идеей Максима Концевича. Она, кстати сказать, нигде им не опубликована. Все ссылаются на его лекцию, которая была им прочитана, но не опубликована. Все определения написаны позже теми, кто в этом направлении работал.

Такая конструкция с эйлеровой характеристикой бывает для каких-то задач полезной, но для исходной задачи о числах Ходжа—Деллиня в зеркальной симметрии нужно рассматривать не только эйлерову характеристику, но и другие меры, аддитивные и мультипликативные. Есть способ, который позволяет определить наиболее общую аддитивную и мультипликативную функцию на конструктивных подмножествах. Любые другие такие функции, например, эйлерова характеристика или полином Ходжа—Делиня, будут уже гомоморфизмами её в какую-то другую группу, т. е. будут её специализациями. Этот способ состоит в следующем. Рассмотрим все полуалгебраические множества и построим группу Гротендика, образующими которой являются эти полуалгебраические множества. На эти полуалгебраические множества нужно наложить некоторые соотношения. Во-первых, если $X_1 \cong X_2$, то $[X_1] = [X_2]$ (если множества изоморфны, то соответствующие им классы равны). Второе правило такое: если $X \supset Y$, то нужно положить, что $[X] = [Y] + [X \setminus Y]$. Полугрупповая операция — несвязное объединение. Взяв минимальную группу, содержащую эту полугруппу, получим группу Гротендика K (группу Гротендика полуалгебраических множеств). С точки зрения инвариантов группа Гротендика K — это та самая группа, в которой принимает значение самая обобщённая эйлерова характеристика, какая только может быть, потому что группа Гротендика K — это универсальный объект для всех аддитивных гомоморфизмов алгебры полуалгебраических множеств. Группа K является также и кольцом: прямое произведение множеств задаёт в K структуру кольца. Поэтому лучше говорить не о группе Гротендика, а о кольце Гротендика.

Это действительно самая обобщённая эйлерова характеристика. В этом смысле, если мы интегрируем по конечномерным множествам, то можно брать интегралы со значениями в K. Для её адаптации к бесконечномерной ситуации (ситуации с пространством дуг) требуется некоторый дополнительный шаг, о котором я сейчас скажу.

Беда состоит в том, что про группу Гротендика K никто почти ничего не знает. Какие-то формулы можно писать и в ней, но что эти формулы означают, совершенно непонятно. Реально результаты получаются, когда рассматриваются гомоморфизмы этой группы в какую-нибудь другую группу. Здесь есть два основных гомоморфизма: обычная эйлерова характеристика $K \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}$ и ещё так называемый полином Ходжа—Делиня $K \to \mathbb{Z}[u, v]$. Каждому гладкому неособому проективному многообразию можно сопоставить числа $h^{p,q}$, и если мы рассмотрим полином $\sum h^{p,q} u^p v^q$, то оказывается, что если этот полином продолжить на остальные конструктивные множества по аддитивности, то он инвариантно определён. Этот инвариант и есть полином Ходжа—Делиня. Больше никаких инвариантов не известно. Практические приложения могут быть только тогда, когда мы берём либо эйлерову характеристику, либо полиномы Ходжа—Деллиня.

Если мы перейдём к бесконечномерной ситуации, т. е. если мы хотим рассматривать обобщённую меру для цилиндрических множеств, то трудность состоит в следующем. Рассмотрим соответствие $X \mapsto [X] \in K$. Я сказал, что это универсальная (обобщённая) эйлерова характеристика, поэтому я буду обозначать $[X] = \chi_g(X)$. Для обобщённой эйлеровой характеристики определение $\chi_g(X) = \chi_g(Y)$ (см. выше) становится некорректным. Если X — цилиндр над множеством Y, которое лежит в $\mathcal{A}_k$, и одновременно цилиндр над множеством Y', которое лежит в $\mathcal{A}_m$, то, грубо говоря, $Y' = Y \times \mathbb{C}^{(m-k)n}$. Поэтому в зависимости от того, что мы берём: Y или Y', ответ получается разный. На самом деле ситуация не слишком плохая. Можно поступить следующим образом. Положим $\chi_g(X) = \chi_g(Y) \cdot [\mathbb{C}]^{-kn}$ ($[\mathbb{C}]$ — класс комплексной прямой $\mathbb{C}$). Такая формула в кольце Гротендика никакого смысла не имеет. Элемент $[\mathbb{C}]$ необратим, поскольку его полином Ходжа—Делиня равен uv. Но элемент $[\mathbb{C}]$, во всяком случае, не делитель нуля, поэтому можно рассмотреть локализацию кольца Гротендика по идеалу, порождённому этим элементом. При локализации мы добавляем все элементы вида $\frac{[X]}{[\mathbb{C}]^l}$ (с естественными соотношениями). Формула $\chi_g(X) = \chi_g(Y) \cdot [\mathbb{C}]^{-kn}$ теперь имеет смысл. Но в этом случае обобщённая эйлерова характеристика χ_g принимает значения в кольце Гротендика K, локализованном по классу комплексной прямой. Это кольцо ненамного лучше исходного кольца K: два его гомоморфизма известны, а само оно — неизвестно что.

Есть не так много примеров, когда это использовалось. Один из первых примеров — доказательство того, что разрешения алгебраических пространств, уважающие канонический класс, имеют одинаковые числа Ходжа—Делиня. Это как раз изначальная идея Концевича. Этот пример технически довольно сложен, поэтому я объясню какой-нибудь элементарный пример. Я возвращаюсь к ситуации с ростком голоморфной функции и с его разрешением

$$\begin{tikzcd} & (X, D) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ (\mathbb{C}^n, 0) \arrow[rr, "f"] & & (\mathbb{C}, 0) \end{tikzcd}$$

Возьмём в D множество точек, в окрестности которых $f\circ\pi(\ldots)=y_1^m$. Множество таких точек я обозначаю S_m. Я хочу доказать, что эйлерова характеристика $\chi(S_m)$ от разрешения не зависит. Идея доказательства такая. Рассмотрим множество дуг $\{\varphi\colon (\mathbb{C}, 0)\to(\mathbb{C}^n, 0)\}$. Самая естественная функция, которая возникает на множестве дуг, — это порядок нуля на дуге исходной функции. Это самый распространённый объект, который фигурирует почти во всех мотивных интегралах. На каждой дуге можно рассмотреть функцию f, т. е. рассмотреть композицию $f\circ\varphi\colon (\mathbb{C}, 0)\to(\mathbb{C}, 0)$. Эта композиция имеет вид $(f\circ\varphi)(t)=at^v+\ldots$ Тем самым, каждой дуге φ соответствуют два числа $v(\varphi)$ и $a(\varphi)$. Рассмотрим множество

$$\{\varphi\colon (\mathbb{C}, 0)\to(\mathbb{C}^n, 0)\colon v(\varphi)=m \text{ и } a(\varphi)=1\}. \tag{4}$$

Я фиксирую $a(\varphi)$, потому что если его не фиксировать, то получится множество с нулевой эйлеровой характеристикой, а это неинтересно.

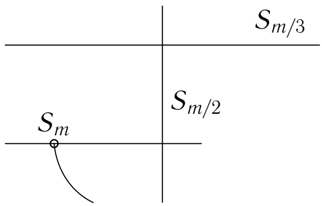


Рис. 1. Дивизор с нормальными пересечениями

Давайте разбираться, какая эйлерова характеристика у этого множества. Рассмотрим разрешение. Там есть дивизор с нормальными пересечениями (рис. 1). В вычислениях будут играть роль точки множеств $S_m, S_{m/2}, S_{m/3}, \ldots$ Я сказал, что дуги можно рассматривать как внизу, так и вверху, — это одно и то же множество. Порядок нуля равен m, если соответствующая дуга трансверсально подходит к дивизору S_m. Поэтому дуга должна иметь вид

$$\varphi(t)=(\xi t+\ldots, \ldots), \tag{5}$$

где $\xi=\sqrt[m]{1}$ (чтобы первый коэффициент был равен 1), а многоточием обозначены любые числа. Один коэффициент принимает m значений, а остальные коэффициенты свободные. Такие дуги образуют m аффинных пространств; эйлерова характеристика равна m. Такова ситуация в каждой точке множества S_m. У нас получается почти прямое произведение S_m на множество таких рядов. Эйлерова характеристика множества дуг вида (5) равна $m\chi(S_m)$. Для множества $S_{m/2}$ ряд должен иметь вид $\xi t^2 + \ldots$, где $\xi = \sqrt[m/2]{1}$. Эйлерова характеристика такого множества равна $\frac{m}{2}\chi(S_{m/2})$. Поэтому в эйлерову характеристику множества (4) входят члены

$$m\chi(S_m) + \frac{m}{2}\chi(S_{m/2}) + \frac{m}{3}\chi(S_{m/3}) + \ldots \tag{6}$$

Рассмотрим теперь пересечение двух множеств S_k и S_l (рис 2). Здесь поднятие имеет вид $f \circ \pi = y_1^k y_2^l$. Дуга может иметь кратность m лишь в том случае, когда какая-то линейная комбинация чисел k и l равна m. Пусть, например, $k + l = m$. Тогда дуга должна иметь вид $(\alpha t + \ldots, \beta t + \ldots, \ldots)$, где $\alpha^k \beta^l = 1$. Это уравнение задаёт комплексный тор $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Это множество имеет нулевую эйлерову характеристику. Поэтому все такие множества не играют никакой роли. По тем же самым причинам все пересечения не будут играть никакой роли.

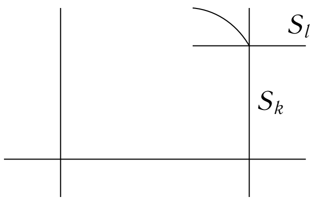


Рис. 2. Множества S_k и S_l

Я выделил множество дуг, для которых эйлерова характеристика записывается формулой (6). Из этого следует, что эйлерова характеристика каждого S_m не зависит от выбора разрешения (это доказывается индукцией по m).

Я сказал, что по пространству дуг или по какому-то его подпространству A можно интегрировать. Какие интегралы обычно участвуют в мотивном интегрировании? Пусть есть росток $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Тогда каждой дуге φ соответствует порядок нуля функции f на этой дуге, который я обозначил $v(\varphi)$. Мотивный интеграл имеет вид $\int_A t^{v(\varphi)}\, d\chi_g$. Этот интеграл принимает значения в рядах от t. Чаще всего мотивный интеграл считается для $t = [\mathbb{C}]^{-1}$. Именно про этот интеграл доказаны основные теоремы. Но этому интегралу ещё нужно придавать смысл. Этот интеграл не полином, а ряд. Чтобы придать ему смысл, нужно ещё раз потревожить наше кольцо и взять не только локализацию кольца по классу комплексной прямой, но ещё и пополнение, т. е. добавить ряды. Сейчас я не хочу вдаваться в эти алгебраические тонкости.

Мотивные интегралы иногда бывают полезны при построении некоторых инвариантов. Например, есть так называемая топологическая дзета-функция Игусы, которая строится по такому интегралу. Это некий инвариант ростка функции.

Оказывается, что некоторые инварианты очень естественным образом пишутся как интегралы, но не по пространствам дуг, а по в некотором смысле двойственным пространствам. Вместо дуг мы будем рассматривать проективизацию пространства функций от n переменных $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$; я предпочитаю работать с проективизацией, потому что иначе в большинстве случаев эйлерова характеристика будет нулевая. Это бесконечномерное пространство. Можно рассмотреть проективизацию пространства k-джетов $J^k_{\mathbb{C}^n,0}$ с одной добавленной точкой (нулём); эту проективизацию мы обозначим $\mathbb{P}^*J^k_{\mathbb{C}^n,0}$. Добавленная точка — это точка, в которую отображается нуль при факторизации. Тогда для $m \geqslant k$ есть отображение $\mathbb{P}^*J^m_{\mathbb{C}^n,0} \xrightarrow{\pi_{m,k}} \mathbb{P}^*J^k_{\mathbb{C}^n,0}$. Имеется также отображение $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \xrightarrow{\pi_k} \mathbb{P}^*J^k_{\mathbb{C}^n,0}$. Если есть подмножество $X \subset \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, то я назову его цилиндрическим (измеримым), если для некоторого k существует такое конструктивное множество $Y \subset \mathbb{P}J^k_{\mathbb{C}^n,0}$, что $\pi_k^{-1}(Y) = X$. Для таких множеств можно определить эйлерову характеристику: $\chi(X) = \chi(Y)$. Можно определить и обобщённую эйлерову характеристику со значениями в кольце Гротендика, локализованном по классу комплексной прямой: $\chi_g(X) = \chi_g(Y)[\mathbb{C}]^{-\cdots}$, где многоточием я обозначил размерность пространства джетов, которая легко считается. Теперь, когда определена эйлерова характеристика и обобщённая эйлерова характеристика, можно писать интегралы.

Я расскажу только про одну формулу. Эта формула в каком-то смысле удивительна, потому что до сих пор непонятно, почему она имеет место. Можно проверить, что левая и правая части совпадают, но каковы основания для того, чтобы они совпадали, — это пока абсолютно тёмный лес.

Пусть мы рассматриваем приведённый (но приводимый) росток аналитической кривой $C \subset (\mathbb{C}^2, 0)$, т. е. $C = \{f = 0\} = \bigcup\limits_{i=1}^{r} C_i$, где $C_i = \{f_i = 0\}$ и $f = \prod\limits_{i=1}^{r} f_i$, причём компоненты C_i неприводимы. Рассмотрим на проективизации множества функций на плоскости (т. е. теперь $n = 2$) следующие числа. Каждую кривую C_i можно запараметризовать. Пусть $\varphi_i \colon (\mathbb{C}_{\tau_i}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ — униформизация компоненты C_i, т. е. $\operatorname{Im} \varphi_i = C_i$. Если есть произвольная функция $g \in \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$, то её можно ограничить на ветвь C_i, т. е. рассмотреть функцию $g \circ \varphi_i = a_i(g)\tau_i^{v_i(g)} + \ldots$ Тем самым, каждому ростку можно сопоставить число v_i (если получаем тождественный нуль, то считаем, что v_i не определено или равно бесконечности). В результате получается отображение $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \xrightarrow{v_i} \mathbb{Z}$. Функции v_i цилиндрические, т. е. условие, что $v_i = \mathrm{const}$, определяется конечной струёй. Более того, функция $t_1^{v_1} \ldots t_r^{v_r} \in \mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_r]]$ тоже цилиндрическая, т. е. условие, что все v_i равны каким-то константам, определяется конечной струёй.

У кривой C есть такой инвариант. Можно рассмотреть пересечение $C \cap S^3_\varepsilon = L_1 \cup \ldots \cup L_r$, где ε достаточно мало. Это будет зацепление, содержащее r компонент. Такому зацеплению в теории узлов ставится в соответствие полином Александера $\Delta^c(t_1, \ldots, t_r)$.

Теорема (Гусейн-Заде, Кампильо, Дельгадо).

$$\Delta^c(t_1, \ldots, t_r) = \int\limits_{\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}} t_1^{v_1} \ldots t_r^{v_r} \, d\chi.$$

Я говорил, что иногда v_i может быть неопределённым (равным бесконечности). В таком случае мы полагаем $t^\infty = 0$.

25 октября 2001 г.

Оглавление

ГЛОБУС

Общематематический семинар. Выпуск 2

Научный редактор *М. А. Цфасман*
Редактор *В. В. Прасолов*
Тех. редактор *А. Протопопов*

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 26.08.2005 г. Формат $70 \times 100\ ^{1}/_{16}$. Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Печ. л. 13,5. Тираж 800 экз. Заказ № 1481

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (095) 241–72–85.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“». 119009, Москва, Шубинский пер., 6.