

Задачи по планиметрии

Курс планиметрии (Р. К. Гордин) состоял почти полностью из решения задач. Приходя в класс, школьники уже год занимались геометрией, но по разным учебникам и в разной степени, поэтому по существу всё начиналось сначала.

119. Повторение. Измерение отрезков и углов

119.1. На прямой выбраны четыре точки A , B , C и D , причем $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$. Чему может быть равно AD ? Укажите все возможности.

119.2. На деревянной линейке отмечены три деления: 0, 7 и 11. Как отложить с ее помощью отрезок длиной (а) 8; (б) 5?

119.3. Точка B лежит на отрезке AC длиной 5. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и BC .

119.4. В деревне у прямой дороги стоят четыре избы A , B , C и D на расстоянии 50 метров друг от друга. В какой точке дороги надо построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до всех четырёх изб была бы наименьшей?

119.5. В деревне A живет 50 школьников, в деревне B живет 100 школьников. Расстояние между деревнями 3 километра. В какой точке дороги из A в B надо построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было как можно меньше?

119.6. Точки A , B , C расположены на одной прямой; отношение расстояний $AC : BC$ равно $m : n$. Найдите отношения $AC : AB$ и $BC : AB$. (Укажите все возможности.)

119.7. Точка B делит отрезок AC в отношении $2 : 1$ (считая от точки A). Точка D делит отрезок AB в отношении $3 : 2$ (считая от A). В каком отношении делит точка D отрезок AB ?

119.8. Имеется деревянный угольник с углом в 19° . Как построить с его помощью угол в 1° ?

119.9. Через точку на плоскости провели 10 прямых, после чего плоскость разрезали по этим прямым на углы. Докажите, что хотя бы один из этих углов меньше 20° .

119.10. (а) На сколько градусов поворачивается за минуту минутная стрелка? Часовая стрелка? (б) Какой угол образуют минутная и часовая стрелка в пять минут четвёртого? (в) В полдень минутная и часовая стрелка совпали. Когда они совпадут в следующий раз? (г) Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки совпадают? Образуют развёрнутый угол? Образуют прямой угол?

119.11. Докажите, что (а) биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны; (б) биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.

119.12. Из точки на листе бумаги провели четыре луча, делящих плоскость на четыреугла. Затем лист разрезали по биссектрисам этих углов на четыре части (которые также являются углами). Докажите, что два из этих углов образуют в сумме 180° , и два других — тоже.

119.13. Из точки O на плоскости выходят 4 луча, следующие друг за другом по часовой стрелке: OA , OB , OC и OD . Известно, что сумма углов AOB и COD равна 180° . Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.

120. Повторение. Признаки равенства треугольников

- 120.1. Равны ли треугольники (а) по двум сторонам и углу; (б) по стороне и двум углам?
- 120.2. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник (а) по трём сторонам; (б) по двум сторонам и углу между ними; (в) по стороне и двум прилежащим к ней углам.
- 120.3. Докажите, что (а) в равнобедренном треугольнике углы при основании равны; (б) если два угла треугольника равны между собой, то треугольник равнобедренный.
- 120.4. Медиана треугольника является его высотой. Докажите, что треугольник равнобедренный.
- 120.5. Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины, является медианой и высотой.
- 120.6. Докажите, что высота равнобедренного треугольника, проведённая из вершины, является медианой и биссектрисой.
- 120.7. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 4$, $AC = 5$.
- 120.8. Биссектриса треугольника является его медианой. Докажите, что треугольник равнобедренный.
- 120.9. В треугольниках ABC и $A'B'C'$ равны две стороны и угол: $\angle A = \angle A'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. При этом $\angle C = 80^\circ$, а угол C' тупой. Найдите его величину.
- 120.10. Сформулируйте и докажите признаки равенства прямоугольных треугольников (а) по двум катетам; (б) по катету и гипotenузе; (в) по катету и острому углу.
- 120.11. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник (а) по углу, высоте и биссектрисе, проведённым из вершины этого угла; (б) по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и высоте, опущенной на другую сторону.
- 120.12. Докажите равенство треугольников (а) по двум сторонам и медиане, выходящим из одной вершины; (б) по медиане и двум углам, на которые разбивает эта медиана угол треугольника.
- 120.13. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудалённых от концов этого отрезка.
- 120.14. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие (а) медианы; (б) биссектрисы; (в) высоты равны между собой.
- 120.15. Две высоты треугольника равны между собой. Докажите, что треугольник равнобедренный.
- 120.16. Найдите геометрическое место внутренних точек угла, равноудалённых от его сторон.
- 120.17. Концы отрезка AB являются центрами двух окружностей, пересекающихся в точках C и D . Докажите, что CD перпендикулярно AB .
- 120.18. Разделите данный отрезок пополам с помощью циркуля и линейки.
- 120.19. Из точки вне прямой опустите перпендикуляр на эту прямую с помощью циркуля и линейки, проводя не более трёх линий.
- 120.20. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по двум сторонам и медиане.

120.21. Докажите признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

120.22. Найдите геометрическое место внутренних точек данного угла, сумма расстояний от которых до сторон этого угла равна заданной величине.

121. Повторение. Параллельность. Сумма углов треугольника

121.1. Через точку, не лежащую на данной прямой, проведите (циркулем и линейкой) прямую, параллельную данной.

121.2. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.

121.3. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

121.4. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой.

121.5. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из них.

121.6. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию. Верно ли обратное?

121.7. Докажите, что сумма углов треугольника равна 180° .

121.8. Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних.

121.9. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC . Найдите угол B .

121.10. Медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник прямоугольный. Верно ли обратное?

121.11. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30° градусов, равен половине гипotenузы.

121.12. Даны точки A и B . Пользуясь только циркулем, удвойте отрезок AB , т.е. постройте такую точку C , чтобы точки A , B и C лежали на одной прямой и $AC = 2BC$.

121.13. Какие значения может принимать (а) наибольший угол треугольника; (б) наименьший угол треугольника; (в) средний по величине угол треугольника?

121.14. Найдите сумму внутренних углов (а) четырехугольника; (б) выпуклого пятиугольника; (в) выпуклого n -угольника.

121.15. Найдите сумму пяти углов при вершинах пятиконечной звезды.

121.16. Найдите сумму внешних углов при вершинах выпуклого n -угольника.

121.17. Продолжения двух противоположных сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются под углом 20° , продолжения двух других противоположных сторон (AD и BC) — тоже. Докажите, что два угла в четырехугольнике равны, а два других отличаются на 40° .

121.18. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и сумме двух других сторон.

121.19. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

121.20. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $BCKF$. Из точек E и F на прямую AB опущены перпендикуляры EM и FN . Докажите, что $EF + FN = AB$.

121.21. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL . Докажите, что треугольник AKL правильный.

121.22. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $AMNB$ и $BKLC$. Докажите, что отрезок KN вдвое больше медианы BP треугольника ABC .

122. Неравенство треугольника

122.1. Стороны равнобедренного треугольника равны 3 и 7. Какая из сторон является основанием?

122.2. Может ли в треугольнике сторона быть вдвое больше другой стороны и вдвое меньше третьей?

122.3. В треугольнике две стороны равны 3,14 и 0,67. Найдите третью сторону, если известно, что ее длина равна целому числу.

122.4. На плоскости даны четыре точки A , B , C и D . Докажите, что $AD \leq AB + BC + CD$.

122.5. Докажите, что в треугольнике любая сторона меньше половины периметра.

122.6. Докажите, что в четырёхугольнике любая диагональ меньше половины периметра.

122.7. Две окружности радиусов 3 и 5 пересекаются. Докажите, что расстояние между их центрами (а) не больше 8; (б) не меньше 2.

122.8. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 3 равно 8. Найдите наименьшее и наибольшее из расстояний между точками, одна из которых лежит на первой окружности, а другая — на второй.

122.9. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырёхугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырех домов была наименьшей?

122.10. Докажите, что медиана треугольника ABC , проведенная из вершины A , меньше полусуммы сторон AB и AC , но больше их полуразности.

122.11. Точка M расположена внутри треугольника ABC . Докажите, что угол AMC больше угла ABC .

122.12. Сторона AB треугольника ABC длиннее стороны AC , и на ней отложен отрезок AD , равный отрезку AC . Докажите, что угол при основании равнобедренного треугольника ACD настолько же больше угла B , насколько меньше угла C . (Заодно будет доказано, что угол C больше угла B , т.е. что против большей стороны треугольника лежит больший угол.)

122.13. Докажите, что против большего угла треугольника лежит большая сторона.

122.14. В треугольнике ABC сторона AB длиннее стороны BC . Медиана BM делит угол B на два угла. Какой из них больше?

122.15. В треугольнике ABC с тупым углом C точки M и N расположены соответственно на сторонах AC и BC . Докажите, что отрезок MN длиннее отрезка AB .

122.16. Точка M расположена внутри треугольника ABC . Докажите, что $BM + CM < AB + AC$.

122.17. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до трех его вершин больше полупериметра, но меньше периметра треугольника.

122.18. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, а угол BAC больше угла $B_1A_1C_1$. Докажите, что BC больше B_1C_1 . (Увеличивая угол между двумя шарнирно соединёнными отрезками, мы увеличиваем расстояние между их концами.)

122.19. В стране есть несколько городов, причем все расстояния между ними попарно различны. В одно прекрасное утро из каждого города вылетает по одному самолету, который приземляется в ближайшем городе. Может ли в одном городе приземлиться более пяти самолетов?

123. Параллограмм

Параллограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

123.1. Докажите следующие свойства параллелограмма: (а) углы при соседних вершинах параллелограмма дают в сумме 180° , а углы при противоположных вершинах равны; (б) диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника; (в) противоположные стороны параллелограмма равны; (г) точка пересечения диагоналей параллелограмма делит каждую из диагоналей пополам.

123.2. Докажите следующие признаки параллелограмма: (а) если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то это параллелограмм; (б) если в четырёхугольнике противоположные углы попарно равны, то это параллелограмм; (в) если в четырёхугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то это параллелограмм; (г) если диагонали четырёхугольника делятся точкой их пересечения пополам, то это параллелограмм.

123.3. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки длиной 3 и 5. Найдите стороны параллелограмма.

123.4. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM (так что $AM = MD$). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Точку пересечения диагоналей параллелограмма называют его центром.

123.5. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через его центр.

123.6. Постройте параллелограмм по двум сторонам и диагонали, исходящим из одной вершины.

123.7. На сторонах параллелограмма взяты четыре точки, делящие эти стороны в одном и том же отношении (считая по часовой стрелке). Докажите, что они являются вершинами параллелограмма, центр которого совпадает с центром исходного.

123.8. Через данную точку внутри угла проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри этого угла, делится данной точкой пополам.

123.9. На сторонах AB и AC треугольника ABC постройте соответственно точки M и N так, что $BM = AN$ и $MN \parallel BC$.

123.10. Ранее было доказано, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке и серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Докажите, что и высоты треугольника пересекаются в одной точке.

124. Прямоугольник, ромб, квадрат

Параллелограмм, в котором все углы прямые, называется **прямоугольником**.

124.1. Докажите, что параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

124.2. Диагонали прямоугольника равны 8 и пересекаются под углом 60° . Найдите меньшую сторону прямоугольника.

124.3. Докажите, что точки попарного пересечения биссектрис всех четырёх углов параллелограмма являются вершинами прямоугольника.

124.4. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен 15° . Найдите гипотенузу.

Ромбом называется параллелограмм, в котором все стороны равны.

124.5. Докажите, что диагонали ромба (а) взаимно перпендикулярны; (б) являются биссектрисами углов ромба. Верны ли обратные утверждения?

124.6. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30° , а сторона равна 4.

124.7. Три равных окружности проходят через одну точку и попарно пересекаются в трёх других точках А, В и С. Докажите, что треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в центрах окружностей.

Прямоугольник, являющийся одновременно ромбом, называется **квадратом**; у него все стороны равны, а все углы прямые.

124.8. На каждой стороне квадрата взяли по одной точке. При этом оказалось, что эти точки являются вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна 6.

124.9. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами другого квадрата. А если вместо центра взять произвольную точку внутри квадрата?

124.10. Докажите, что точки попарного пересечения биссектрис всех четырёх углов прямоугольника являются вершинами квадрата.

124.11. Точка K — середина стороны AB квадрата ABCD, точка L расположена на диагонали AC, причем $AL : LC = 1 : 2$. Найдите $\angle KLD$.

124.12. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры сами образуют квадрат.

124.13. Точка M расположена внутри квадрата ABCD, причем $\angle MAB = \angle MBA = 15^\circ$. Докажите, что треугольник DMC правильный.

124.14. На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем всё, кроме этих точек, стёрли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки.

125. Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

125.1. Докажите, что она параллельна третьей стороне и равна её половине.

125.2. Докажите, что три средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника.

125.3. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по серединам трех его сторон.

125.4. (Теорема Вариньона) Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

125.5. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырехугольника и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

125.6. Докажите, что (а) если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника равны, то диагонали четырехугольника перпендикулярны; (б) если эти отрезки перпендикулярны, то диагонали четырехугольника равны.

125.7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD равен 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD .

125.8. Найдите геометрическое место середин всех отрезков, соединяющих данную точку со всеми точками данной прямой.

125.9. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на бисектрисы внешних углов B и C . Найдите отрезок PM , если периметр треугольника ABC равен 10.

125.10. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершин треугольника.

125.11. Две медианы треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

125.12. Постройте параллелограмм по вершине и серединам сторон, не содержащим эту вершину.

125.13. Докажите, что сумма трех медиан треугольника меньше периметра, но больше трех четвертей периметра треугольника.

125.14. Точки M и N — середины соседних сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

125.15. Постройте треугольник по высотам, проведенным из двух вершин, и медиане, проведенной из третьей.

125.16. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты соответственно точки M и N , причём $BM = CN$. Докажите, что середина отрезка MN лежит на средней линии треугольника ABC , параллельной его основанию.

125.17. Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

125.18. Постройте треугольник по трём медианам.

125.19. Докажите признак равенства треугольников по трём медианам.

* * *

125.20. Постройте пятиугольник по серединам его сторон.

125.21. Точки A_1 , B_1 и C_1 образы произвольной точки M при симметрии относительно середин сторон соответственно BC , AC и AB треугольника ABC . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

125.22. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина AB , точка F — середина CD . Докажите, что середины отрезков AF , CE , BF и DE являются вершинами параллелограмма.

125.23. В выпуклом четырехугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырехугольника. Докажите, что эти диагонали равны.

125.24. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до противоположной стороны.

125.25. Постройте треугольник, зная три точки, симметричные центру его описанной окружности относительно сторон.

125.26. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку.

125.27. Внутри треугольника ABC взята точка P , причём $\angle PAC = \angle PBC$. Из точки P на стороны BC и CA опущены перпендикуляры PM и PK соответственно. Пусть D — середина стороны AB . Докажите, что $DK = DM$.

125.28. На сторонах AB и BC треугольника ABC как на гипotenузах построены вне его прямоугольные треугольники APB и BQC с одинаковыми углами величины β при их общей вершине B . Найдите углы треугольника PQK , где K — середина стороны AC .

125.29. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены по одну сторону от прямой AE и имеют единственную общую точку C . Пусть M , N и K — середины отрезков BD , AC и CE соответственно. Докажите, что треугольник MNK — равносторонний.

126. Трапеция

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две противоположные стороны (основания) параллельны, а две другие (боковые стороны) нет.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

126.1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

126.2. Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны между собой. Докажите следующие утверждения:

- (а) углы при основании равнобедренной трапеции равны;
- (б) если углы при одном из оснований трапеции равны, то она равнобедренная;
- (в) диагонали равнобедренной трапеции равны;
- (г) если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

126.3. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C меньшего основания BC равнобедренной трапеции $ABCD$ на большее основание AD . Найдите DP и AP , если основания трапеции равны a и b ($a > b$).

126.4. В равнобедренной трапеции острый угол равен 60° . Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

126.5. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол 60° с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

126.6. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Могут ли прямые BN и DM быть параллельными?

126.7. Отрезки AB и BC — соответственно боковая сторона и меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что $AB = 2,6$ и $BC = 2,5$. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла A : основание BC или боковую сторону CD ?

126.8. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на её средней линии.

126.9. Данна трапеция $ABCD$ с основанием AD . Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P , а при вершинах C и D — в точке Q . Докажите, что отрезок PQ равен полупериметру трапеции.

126.10. Основания трапеции равны a и b , причём $a > b$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

126.11. Найдите отношение оснований трапеции, если ее средняя линия делится диагоналями на три равные части.

126.12. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

126.13. Боковая сторона трапеции равна одному основанию и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.

126.14. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

126.15. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

126.16. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6, а вторая образует с основанием угол, равный 30° . Найдите среднюю линию трапеции.

126.17. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите основания и

меньшую боковую сторону трапеции.

* * *

126.18. Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой боковой стороне.

126.19. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

126.20. Одним прямолинейным разрезом отрежьте от треугольника трапецию, у которой меньшее основание равно сумме боковых сторон.

126.21. Существуют ли две трапеции, основания первой из которых соответственно равны боковым сторонам второй, а основания второй — боковым сторонам первой?

127. Площади

Площадь есть неотрицательная величина. Равные фигуры имеют равные площади. Если фигура разрезана на две фигуры, то ее площадь равна сумме площадей этих фигур. Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон.

Фигуры, имеющие равные площади, называются *равновеликими*.

127.1. Докажите, что (а) площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту; (б) площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту; (в) площадь ромба равна половине произведения его диагоналей; (г) площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту.

127.2. Каждая сторона треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 0,01?

127.3. Основания равнобедренной трапеции равны a и b , острый угол равен 45° . Найдите площадь трапеции.

127.4. Какую часть площади треугольника отсекает от него средняя линия?

127.5. Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики. Верно ли обратное (если они равновелики, то четырехугольник — трапеция)?

127.6. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

127.7. Докажите, что если диагональ четырёхугольника делит другую диагональ пополам, то она делит пополам и площадь четырёхугольника.

127.8. Дан треугольник ABC . Найдите геометрическое место точек M , для которых (а) треугольники AMB и ABC равновелики; (б) треугольники AMB и AMC равновелики; (в) треугольники AMB , AMC и BMC равновелики.

127.9. Точка M делит сторону AB треугольника ABC в отношении $AM : MB = m : n$. Докажите, что площади треугольников CAM и CBM относятся как $m : n$.

127.10. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.

127.11. Точки M и N лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC или их продолжениях, причём $AM : AB = m : n$, $AN : AC = p : q$. Докажите, что площади треугольников AMN и ABC относятся как $(m/n) \cdot (p/q)$.

127.12. Стороны треугольника площади 1 разделены в отношении 2 : 1, считая по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.

127.13. Данный параллелограмм разделите на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

127.14. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах сторон выпуклого четырёхугольника, площадь которого равна 1.

127.15. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон всегда одна и та же.

127.16. Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной c , и острым углом 15° .

127.17. В параллелограмме середина каждой стороны соединена с концом следующей стороны; получился внутренний параллелограмм. Докажите, что его площадь составляет $1/5$ площади данного параллелограмма.

127.18. Произвольный четырёхугольник разделен диагоналями на четыре треугольника; площади трёх из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвертого треугольника. Найдите площадь четырёхугольника.

127.19. Боковая сторона AB и основание BC трапеции $ABCD$ вдвое меньше её основания AD . Найдите площадь трапеции, если $AC = a$, $CD = b$.

127.20. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, делит его на два равновеликих четырёхугольника. Докажите, что эти стороны параллельны.

127.21. Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника PDC равна половине площади четырёхугольника $ABCD$, то стороны BC и AD параллельны.

127.22. (Теорема Пифагора) Доказать, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

* * *

127.23. Точки M и N лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC , причем $AM = CN$ и $AN = BM$. Докажите, что площадь четырехугольника $BMNC$ по крайней мере в три раза больше площади треугольника AMN .

127.24. Внутри квадрата со стороной, равной 1, произвольно берут 101 точку, причем никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $1/100$.

127.25. Найдите геометрическое место точек X , лежащих внутри или на сторонах трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD , для которых $S(XAB) = S(XCD)$.

127.26. Пусть M и N — середины противоположных сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, отрезки AM и BN пересекаются в точке P , а отрезки DM и CN — в точке Q . Докажите, что сумма площадей треугольников APB и CQD равна площади четырехугольника $MPNQ$.

127.27. Точка внутри правильного $2n$ -угольника соединена с вершинами. Возникшие $2n$ треугольников раскрашены попеременно в голубой и красный цвет. Докажите, что сумма площадей голубых треугольников равна сумме площадей красных (а) для $n = 4$; (б) для $n = 3$; (в) для произвольного n .

127.28. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

127.29. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

128. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек, удаленных от данной точки (центра), на одно и то же положительное расстояние (радиус). Отрезок, соединяющий точку окружности с центром, также называют радиусом. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют хордой. Диаметр окружности — хорда, проходящая через центр.

128.1. Докажите следующие свойства окружности: (а) диаметр есть наибольшая хорда окружности; (б) диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам; (в) окружность симметрична относительно каждого своего диаметра; (г) дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны; (д) равные хорды удалены на равные расстояния от центра; (ж^{*}) из двух неравных хорд большая удалена от центра на меньшее расстояние.

128.2. Через точку окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

128.3. Данна окружность с центром O . На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC , равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (при этом D — точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.

128.4. Диагонали вписанного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки пересечения диагоналей до центра описанной окружности равно расстоянию между серединами диагоналей.

128.5. Через данную точку внутри круга проведите хорду наименьшей длины.

128.6. Найдите геометрическое место точек M , из которых данный отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMD = 90^\circ$).

128.7. Найдите центр данной окружности с помощью чертёжного угольника.

128.8. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведенной к гипотенузе.

128.9. Через данную точку окружности проведите хорду, которая делится данной хордой пополам.

128.10. Впишите в окружность прямоугольный треугольник, катеты которого проходят через две данные точки.

128.11. Расстояние между равными параллельными хордами равно радиусу окружности. Найдите угол между прямыми, проходящими через концы этих хорд.

128.12. Продолжения высоты и медианы прямоугольного треугольника ABC , проведенных из вершины C прямого угла, пересекают описанную окружность треугольника в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $ABNM$, если площадь треугольника ABC равна S и $\angle ABC = 30^\circ$.

128.13. Даны две точки A и B . Найдите геометрическое место точек, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B .

128.14. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O . Докажите, что ломаная AOC делит его на две равновеликие части.

128.15. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы часть ее, заключённая внутри окружностей, имела заданную длину.

128.16. В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC , равной a , выбирается точка M . Найдите наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AMB и AMC .

128.17. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую, на которой окружности высякают хорды с наибольшей суммой. (Центры окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды).

128.18. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.

128.19. Два противоположных угла выпуклого четырехугольника — тупые. Докажите, что соединяющая их диагональ короче другой диагонали.

* * *

128.20. Данна окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Постройте на окружности две точки X и Y , симметричные относительно AB , для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA .

128.21. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на данный диаметр данной окружности (точка не лежит ни на окружности, ни на диаметре).

128.22. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O . Найдите расстояние от точки O до стороны AB , если известно, что $CD = 8$.

128.23. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A , и делит этот отрезок пополам.

128.24. Две неперпендикулярные прямые пересекаются в точке A . Точки B и C — проекции точки M на эти прямые. Найдите угол между прямой BC и прямой, проходящей через середины отрезков AM и BC .

128.25. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG . Докажите, что $EF = DG$.

128.26. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF . Докажите, что $CE = FA$.

128.27. На отрезке AB взята точка C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L , а также окружность с диаметром AB в точках M и N . Докажите, что $KM = LN$.

129. Касательная к окружности

Касательная к окружности — прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку (называемую точкой касания).

129.1. (Теорема о касательной) Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

129.2. Докажите обратное утверждение: прямая, проходящая через некоторую точку окружности перпендикулярно радиусу, является касательной.

129.3. Расстояния от концов некоторого диаметра до касательной к окружности равны 7 и 3. Найдите радиус окружности.

129.4. Через точку M проведены две касательные MA и MB к некоторой окружности (A и B — точки касания). Докажите, что $MA = MB$.

129.5. Через данную точку проведите касательную к данной окружности.

129.6. Постройте треугольник, если известны отрезки, на которые вписанная окружность делит его сторону, и радиус вписанной окружности.

129.7. Постройте прямую, касающуюся данной окружности в данной точке. (Центр окружности не задан.)

129.8. Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.

129.9. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанного круга.

129.10. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC . В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что отрезок O_1O_2 виден из точки D под прямым углом.

129.11. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности. Найдите углы треугольника.

129.12. В трапецию вписана окружность. Докажите, что отрезки, соединяющие центр этой окружности с концами одной из боковых сторон, взаимно перпендикулярны.

129.13. Окружность высекает на сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

129.14. В прямой угол вписана окружность радиуса R , касающаяся сторон угла в точках A и B . Через некоторую точку на меньшей дуге AB окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.

129.15. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a , проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

129.16. В равнобедренный треугольник с основанием, равным 12, вписана окружность. К ней проведены три касательные, отсекающие от данного треугольника три маленьких треугольника, сумма периметров которых равна 48. Найдите боковую сторону данного треугольника.

129.17. Через данную точку проведите прямую, на которой данная окружность высекала бы хорду данной длины.

129.18. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , BC и AC в точках K , M и N соответственно. Найдите угол KMN , если $\angle A = 60^\circ$.

129.19. Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c . Докажите, что $r = (a + b - c)/2$.

129.20. Докажите, что площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

129.21. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M . Пусть $AM = x$, $BC = a$, полупериметр треугольника равен p . Докажите, что $x = p - a$.

129.22. Найдите расстояние между точками касания со стороной AC окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC , если (а) $AB = 5$, $BC = 7$, $CD = AD$; (б) $AB = 5$, $BC = CD$, $AD = 7$.

129.23. Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны между собой.

129.24. Вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M и продолжений сторон AB и AC в точках N и P (соответственно). Вписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке K , а стороны AB — в точке L . Докажите, что (а) AN равно полупериметру треугольника ABC ; (б) $BM = CK$; (в) $NL = BC$.

129.25. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная, пересекающая две большие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

129.26. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник заданного периметра.

129.27. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.

129.28. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку. Докажите, что две окружности касаются тогда и только тогда, когда они касаются некоторой прямой в одной и той же точке.

129.29. Прямая, проходящая через центры двух окружностей, называется их линией центров. Докажите, что линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания.

129.30. В острый угол, равный 60° , вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r . Найдите радиус большей окружности.

129.31. Две окружности касаются в точке A . Прямая, проходящая через точку A , пересекает эти окружности вторично в точках B и C соответственно. Докажите, что касательные, проведенные к этим окружностям в точках B и C , параллельны.

129.32. (а) Постройте окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности в данной на ней точке. (б) Постройте окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

129.33. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a . Докажите, что четыре точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности и найдите радиус этой окружности.

* * *

129.34. Через вершину треугольника проведите прямую, делящую периметр треугольника пополам.

129.35. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке M . Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABM и ACM , касаются отрезка AM в одной точке.

129.36. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты (соответственно) точки A_1 , B_1 и C_1 , причем $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что A_1 , B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

129.37. Даны три точки A , B и C . Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

129.38. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках A , B и C . Докажите, что касательные к этим окружностям в точках A , B и C пересекаются в одной точке.

129.39. Докажите, что в четырехугольник, суммы противолежащих сторон которого равны между собой, можно вписать окружность.

130. Углы, связанные с окружностью

Центральный угол — угол между двумя радиусами. Угловая величина дуги \widehat{AB} (обозначается $\widehat{\cdot AB}$) окружности с центром O — угловая величина соответствующего центрального угла AOB . Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются хордами.

130.1. (Теорема о вписанном угле) Вписанный угол равен половине дуги, заключённой между его сторонами.

130.2. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности. Известно, что угловые величины дуг $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$ и \widehat{DA} относятся как $1 : 3 : 5 : 6$. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$.

130.3. Докажите, что у четырёхугольника, вписанного в окружность, сумма противоположных углов равна 180° .

130.4. Рассмотрим четыре сегмента, отсекаемых от окружности вписанным в нее четырехугольником (и находящихся вне этого четырехугольника). Найдите сумму углов, вписанных в эти сегменты.

130.5. В круге провели три хорды AB, BC, CD и отметили их середины: M, N, K . Докажите, что $\angle BMN = \angle NKC$.

130.6. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$.

130.7. Из точки P , расположенной внутри острого угла BAC , опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC . Докажите, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

130.8. Три прямые, проходящие через точку O , образуют друг с другом углы в 60° . Докажите, что проекции любой точки (кроме самой точки O) на эти прямые являются вершинами правильного треугольника.

130.9. Вершины угольника скользят по сторонам прямого угла. Найдите траекторию вершины прямого угла угольника.

130.10. Две окружности пересекаются в точках A и B . Продолжения хорд AC и BD первой окружности пересекают вторую окружность в точках E и F . Докажите, что прямые CD и EF параллельны.

130.11. Угловые величины противоположных дуг, высекаемых на окружности пересекающимися хордами, равны α и β . Найдите угол между хордами.

130.12. Угловые величины дуг, заключённых между двумя хордами, продолжения которых пересекаются вне круга, равны α и β , при этом $\alpha > \beta$. Под каким углом пересекаются продолжения хорд?

130.13. Точки A, B, C, D лежат на окружности. Точки M, N, K, L — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $MK \perp NL$.

130.14. Продолжения противоположных сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а сторон AD и BC — в точке N . Докажите, что биссектрисы углов AMD и DNC взаимно перпендикулярны.

130.15. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

130.16. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведённой из вершины этого угла.

130.17. Прямая, проходящая через точку A и центр вписанной окружности треугольника ABC , вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M . Докажите, что треугольники BOM и COM — равнобедренные.

130.18. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , причём $\angle AOC = 60^\circ$. Найдите угол AMC , где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC .

130.19. Точки A и B — фиксированные точки окружности, точка C — произвольная точка окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения (а) биссектрис; (б) высот треугольника ABC .

130.20. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную вокруг него окружность в точках A_1, B_1, C_1 . Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1 .

130.21. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1, C_1 . Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1 .

130.22. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ известны углы $\angle DAB = \alpha, \angle ABC = \beta$ и угол $\angle BKC = \gamma$ (здесь K — точка пересечения диагоналей). Найдите угол ACD .

130.23. Докажите, что около четырёхугольника, сумма противоположных углов которого равна 180° , можно описать окружность.

130.24. Докажите, что точка, симметричная точке пересечения высот (ортцентру) треугольника относительно одной из сторон, лежит на описанной окружности.

130.25. Пусть O — центр описанной вокруг треугольника ABC окружности, AH — высота. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

130.26. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , точка O — центр описанной окружности. Докажите, что $CO \perp A_1B_1$.

130.27. Четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C , пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Известно, что $BC = 1$. Найдите EF .

130.28. Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью продолжений его высоты, медианы и биссектрисы, проведённых из одной вершины.

130.29. Докажите, что угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

130.30. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M , проведена общая касательная. Докажите, что если A и B — точки касания, то $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$.

130.31. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E ; отрезок AD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AE = ED$.

130.32. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку K первой окружности проводятся прямые KA и KB , пересекающие вторую окружность в точках P и Q . Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.

130.33. Около равностороннего треугольника ABC описана окружность, и на дуге BC взята произвольная точка M . Докажите, что $AM = BM + CM$.

130.34. Треугольник с вершинами в основаниях высот треугольника ABC называется ортотреугольником треугольника ABC . Докажите, что высоты треугольника ABC являются биссектрисами его ортотреугольника.

* * *

130.35. Из точки A проведены к окружности две касательные AP и AQ (точки P и Q — точки касания) и секущая AKL (точка K лежит между A и L). Пусть M — середина отрезка KL . Докажите, что $\angle AMP = \angle AMQ$.

130.36. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой (прямая Симсона).

130.37. Две окружности касаются внутренним образом в точке M . Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T . Докажите, что MT — биссектриса угла AMB .

130.38. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проводится прямая, пересекающая окружности в точках C и D , а затем через точки C и D проводятся касательные к этим окружностям. Докажите, что точки A , C , D и точка P пересечения касательных лежат на одной окружности.

130.39. Окружность S_2 проходит через центр O окружности S_1 и пересекает ее в точках A и B . Через точку A проведена касательная к окружности S_2 . Точка D — вторая точка пересечения этой касательной с окружностью S_1 . Докажите, что $AD = AB$.

130.40. Точки касания вписанного в данный треугольник круга соединены отрезками и в полученным треугольнике проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

130.41. Диагонали трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOD и BOC , касаются друг друга.

130.42. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P . Через точку A проведена касательная AB к окружности S_1 , а через точку P — прямая CD , параллельная прямой AB (точки B и C лежат на S_2 , точка D — на S_1). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

130.43. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C . Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B . Окружность S_1 она пересекает в точке M . Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

130.44. К двум окружностям различного радиуса проведены общие внешние касательные AB и CD . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда окружности касаются.

131. Теорема Фалеса

131.1. (Теорема Фалеса) Если на одной из сторон угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне образуются также равные отрезки.

131.2. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на n равных частей.

131.3. Верна ли теорема, обратная теореме Фалеса?

131.4. (Обобщение теоремы Фалеса) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки. Докажите эту теорему для случая, когда отрезки на одной из сторон угла соизмеримы, т.е. имеют общую меру. (Отрезок e называется общей мерой отрезков a и b , если он целое число раз укладывается в этих отрезках.)

131.5. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри данного угла, делился бы данной точкой в заданном отношении.

131.6. Даны отрезки a , b и c . Постройте такой отрезок x , что $x : a = b : c$

131.7. Сторона AB треугольника ABC разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC . Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, если $BC = 12$.

131.8. Каждая из сторон AB и AC треугольника ABC разделена соответственно точками M и N в отношении $2:3$, считая от точки A . (а) Докажите, что $MN \parallel BC$. (б) Найдите MN , если $BC = 20$.

131.9. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно, причем $AM : MB = AN : NC = m : n$ (m и n — натуральные). Найдите отношение $MN : BC$.

131.10. Основания трапеции равны a и b . Каждая боковая сторона трапеции разделена на три равных части. Найдите отрезки, соединяющие соответствующие точки деления.

131.11. Боковая сторона трапеции разделена на пять равных частей, и через третью точку деления (считая от вершины меньшего основания) проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите отрезок прямой, заключенный между сторонами трапеции, если основания трапеции равны a и b .

131.12. Каждая из боковых сторон трапеции разделена на 5 равных частей. Пусть M и N — вторые точки деления на боковых сторонах, считая от вершин меньшего основания. Найдите MN , если основания трапеции равны a и b .

131.13. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно a и b . Диагональ AC разделена на три равные части и через ближайшую к A точку деления M проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между диагоналями.

131.14. На диагоналях AC и BD трапеции $ABCD$ взяты соответственно точки M и N , причем $AM : MC = DN : NB = 1 : 4$. Найдите MN , если основания AD и BC равны соответственно a и b .

131.15. Через точку на стороне четырехугольника проведена прямая, параллельная диагонали, до пересечения с соседней стороной четырехугольника. Через полученную точку проведена прямая, параллельная другой диагонали, и т.д. Докажите, что пятая точка, полученная таким способом, совпадет с исходной.

131.16. Через точку на стороне треугольника проведена прямая, параллельная другой стороне, до пересечения с третьей стороной треугольника. Через полученную точку проведена прямая, параллельная первой стороне треугольника и т.д. Докажите, что (а) если исходная точка сопадает с серединой стороны треугольника, то четвертая точка, полученная таким способом, совпадет с исходной; (б) если исходная точка отлична от середины стороны треугольника, то седьмая точка, полученная таким способом, совпадет с исходной.

131.17. Докажите, что диагонали трапеции делятся точкой пересечения на отрезки, пропорциональные основаниям.

131.18. Каждая сторона выпуклого четырехугольника поделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Докажите, что эти отрезки делят друг друга на три равные части.

131.19. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $AK : KB = 3 : 2$, а $AM : MC = 4 : 5$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC , делит отрезок BM .

131.20. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AC , а точка L на стороне BC расположена так, что $BL : LC = 2 : 5$. Прямая, проходящая через точку L параллельно стороне AB , пересекает отрезок BM в точке O , причем $BO : OM = 7 : 4$. Найдите отношение, в котором точка M делит сторону AC .

131.21. (Замечательное свойство трапеции) Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой.

131.22. Даны две параллельные прямые l и l_1 . С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них.

131.23. Даны две параллельные прямые l и l_1 . С помощью одной линейки проведите через данную точку M прямую, параллельную прямым l и l_1 .

132. Подобные треугольники

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны:

$$\Delta ABC \simeq \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

Отношение соответствующих сторон подобных треугольников называется коэффициентом подобия.

132.1. Докажите, что прямая, параллельная стороне данного треугольника и пересекающая две другие его стороны (или их продолжения), образует с этими сторонами треугольник, подобный данному.

132.2. (Признаки подобия треугольников) Докажите, что два треугольника подобны, если (а) два угла одного из них соответственно равны двум углам другого; (б) две стороны одного из них соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны; (в) три стороны одного из них соответственно пропорциональны трем сторонам другого.

132.3. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B . Докажите, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ , которая равна $1/(n+1)$ всей диагонали.

132.4. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8, вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите сторону квадрата.

132.5. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри данного угла, делился бы данной точкой в заданном отношении.

132.6. Постройте прямоугольный треугольник по отношению его катетов и высоте, опущенной на гипотенузу.

132.7. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

132.8. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Докажите, что отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

132.9. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.

132.10. Параллельно основаниям трапеции проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри трапеции, делился бы ее диагоналями в отношении $1 : 3 : 1$.

132.11. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований трапеции равны a и b .

132.12. AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что: (а) треугольник AA_1C подобен треугольнику BB_1C ; (б) треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C .

132.13. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Найдите B_1C_1 , если $\angle A = 60^\circ$ и $BC = 6$.

132.14. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M . Докажите, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

132.15. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке K , известно, что $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$, $CD = d$. Найдите AC .

132.16. Две окружности пересекаются в точках A и B . В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB , если $CB = a$, $DB = b$.

132.17. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной m и n , считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найдите длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.

132.18. Точки K и M лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC , причем $AK : BK = 3 : 2$, $BM : MC = 3 : 1$. Через точку B проведена прямая l , параллельная AC . Прямая KM пересекает прямую l в точке P , а прямую AC в точке N . Найдите BP и CN , если $AC = a$.

132.19. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = AC$. Точка K - середина стороны AB . В каком отношении прямая KN делит сторону BC ?

132.20. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = (2/3) \cdot AC$. Точка K лежит на стороне AB , причем $AK : KB = 3 : 2$. В каком отношении прямая KN делит сторону BC ?

132.21. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $AC = 2 \cdot CN$. Точка M лежит на стороне BC , причем $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB ?

132.22. Точки K и M лежат соответственно на сторонах AB и BC треугольника ABC , причем $BK : KA = 1 : 4$, $BM : MC = 3 : 2$. Прямая MK пересекает продолжение стороны AC в точке N . Найдите $AC : CN$.

132.23. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$, причем $AM : MB = 1 : 2$, $AN : ND = 3 : 2$. Отрезки DM и CN пересекаются в точке K . Найдите отношения $DK : KM$, $CK : KN$.

132.24. AD — медиана треугольника ABC . Точка E - лежит на стороне AB , причем $AE : EB = 1 : 2$. Отрезки AD и CE пересекаются в точке M . Найдите отношения $AM : MD$, $CM : ME$.

132.25. Точки K и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC . Отрезки AK и CE пересекаются в точке M . В каком отношении прямая BM делит сторону AC , если $BK : KC = 1 : 2$, $AE : EB = 2 : 3$?

132.26. На медиане AD треугольника ABC взята точка M , причем $AM : MD = 1 : 3$. В каком отношении прямая BM делит сторону AC ?

132.27. Докажите, что биссектриса треугольника делит основание на отрезки, пропорциональные боковым сторонам.

132.28. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C ?

132.29. В равнобедренный треугольник ABC вписан ромб $DEC F$ так, что вершина E лежит на отрезке BC , вершина F лежит на отрезке AC и вершина D лежит на отрезке AB . Найдите длину стороны ромба, если $AB = BC = 12$, $AC = 6$.

132.30. В треугольнике ABC сторона AC равна b , сторона AB равна c , а биссектриса A пересекается со стороной BC в точке D , такой, что $DA = DB$. Найдите сторону BC .

132.31. Биссектриса внешнего угла A треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке M . Докажите, что $BM/MC = AB/AC$.

132.32. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $BD/AB = DC/AC$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC .

132.33. Окружность и прямая касаются в точке M . Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB .

132.34. Из точки M , лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Расстояния от точки C , лежащей на окружности, до касательных равны a и b . Найдите расстояние от точки C до прямой AB , где A и B — точки касания.

* * *

132.35. (Теорема Менелая) Дан треугольник ABC . Прямая пересекает его стороны AB , BC и продолжение стороны AC в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Докажите, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

132.36. (Теорема Чевы) Пусть точки A_1 , B_1 и C_1 принадлежат соответственно сторонам BC , AC и AB треугольника ABC . Докажите, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

132.37. В треугольник вписана окружность. Точки касания со сторонами треугольника соединены с противоположными вершинами. Докажите что три полученных отрезка пересекаются в одной точке.

132.38. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции равна a , отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен b . Найдите диаметр окружности.

132.39. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K . Найдите KC , если $BC = 4$ и $AK = 6$.

132.40. Продолжение медианы треугольника ABC , проведенной из вершины A , пересекает описанную окружность в точке D . Найдите BC , если $AC = DC = 1$.

132.41. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.

132.42. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD , делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC .

132.43. Сторона треугольника равна среднему арифметическому двух других сторон. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и точку пересечения биссектрис треугольника, параллельна этой стороне.

132.44. Докажите, что в любом треугольнике точка H пересечения высот (ортогоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой («прямая Эйлера»), причем точка M расположена между точками O и H , и $MH = 2 \cdot MO$.

132.45. Дан правильный треугольник ABC . Некоторая прямая, параллельная прямой AC , пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D - центр правильного треугольника PMB , точка E - середина отрезка AP . Определите углы треугольника DEC .

132.46. Через центр O окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , проведена прямая, перпендикулярная BO и пересекающая отрезок AB в точке P , и продолжение отрезка BC за точку C в точке Q . Вычислите длину отрезка BP , если известны длины сторон треугольника $AB = c$, $BC = a$, и длина отрезка BQ равна p .

132.47. Через точку D , взятую на стороне AB треугольника ABC , проведена прямая, параллельная AC , и пересекающая сторону BC в точке E . Докажите, что AE , CD и медиана, проведенная через вершину B , пересекаются в одной точке.

132.48. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по трем высотам.

132.49. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C . Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B . Окружность S_1 она пересекает в точке M . Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

132.50. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC , DC и DE равны соответственно a , b , c . Найдите расстояние от вершины A до прямой BE .

133. Теорема Пифагора

133.1. (Теорема Пифагора) Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов. (Указание: высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, делит его на два треугольника, подобных исходному.)

133.2. (Теорема о средних пропорциональных в прямоугольном треугольнике.) Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и своей проекцией на гипотенузу, а высота, проведенная из вершины прямого угла, — среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

133.3. Дан отрезок, равный 1. Постройте отрезки, равные $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

133.4. Даны отрезки a и b . Постройте отрезки $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, \sqrt{ab} .

133.5. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

133.6. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведенную к боковой стороне, если основание равно a , а боковая сторона равна b .

133.7. Дан треугольник со сторонами 13, 14, 15. Найдите высоту, проведенную к самой большой стороне.

133.8. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора. Верна ли она?

133.9. Высота CD треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AD и BD , причем $AD \cdot BD = CD^2$. Верно ли, что треугольник ABC прямоугольный?

133.10. Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.

133.11. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной a и b . Найдите диагонали ромба.

133.12. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны m и n . Найдите площадь квадрата.

133.13. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр её описанной окружности лежит на большем основании.

133.14. Диагональ равнобедренной трапеции равна a , а средняя линия равна b . Найдите высоту этой трапеции.

133.15. Прямые, содержащие боковые стороны трапеции пересекаются под прямым углом. Большая боковая сторона трапеции равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.

133.16. Медианы, проведенные к катетам прямоугольного треугольника, равны a и b . Найдите гипотенузу треугольника.

133.17. Две стороны треугольника равны a и b . Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

133.18. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите гипотенузу и второй катет.

133.19. На сторону BC ромба $ABCD$ опущена высота DE . Диагональ AC ромба пересекает высоту DE в точке F так, что $DF/FE = 5$. Найдите сторону ромба, если известно, что $AE = 5$.

133.20. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояние от

концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C , равны m и n соответственно. Найдите катеты AC и BC .

133.21. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

133.22. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите все стороны трапеции, если ее высота равна 12, а биссектрисы равны 15 и 13.

133.23. Окружность, вписанная в трапецию, делит ее боковую сторону на отрезки a и b . Найдите радиус окружности.

133.24. Даны окружности радиусов r и R , причем $R > r$. Расстояние между их центрами равно a и больше $R + r$. Найдите отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания.

133.25. Окружности радиусов r и R ($R > r$) касаются внешним образом в точке K . К ним проведены две общие внешние касательные. Их точки касания с меньшей окружностью — A и D , с большей — B и C соответственно. (а) Найдите AB и отрезок MN общей внутренней касательной, заключенный между внешними касательными. (б) Докажите, что углы $\angle AKB$ и $\angle O_1MO_2$ — прямые (O_1 и O_2 — центры окружностей). (в) Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

133.26. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна a , а высота, опущенная на основание, равна отрезку, соединяющему середину основания с серединой боковой стороны.

133.27. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу в точке D , причем $AD : DB = 1 : 3$. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC .

133.28. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота из вершины C прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность высекает на катетах отрезки, равные 12 и 18. Найдите катеты треугольника ABC .

133.29. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна основаниям AD и BC ; сумма острых углов A и C равна 90° . Основания $AD = a$, $BC = b$. Найдите боковые стороны AB и CD .

133.30. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите высоту трапеции.

133.31. Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются под прямым углом. Найдите BD , если $AC = a$.

133.32. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC с катетами $BC = a$ и $AC = b$ во внешнюю сторону построен квадрат $ABKM$. Найдите расстояние от точки C до центра квадрата.

133.33. Найдите геометрическое место точек M , разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B постоянна.

133.34. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

133.35. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

133.36. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Докажите что этот треугольник прямоугольный.

133.37. В круге проведены два диаметра AB и CD , M — некоторая точка. Известно, что $AM = 15$, $BM = 20$, $CM = 24$. Найдите DM .

133.38. Найдите геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к двум данным окружностям, равны между собой.

133.39. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр CD на гипотенузу AD . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники CAD и CBD , равны соответственно 3 и 4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

133.40. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр CD на гипотенузу AD . Расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники CAD и CBD , равно 1. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

133.41. Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух его других сторон, называется *вневписанной* окружностью треугольника. Найдите радиус вневписанной окружности, касающейся меньшей стороны прямогоугольного треугольника с острым углом, равным 30° , если радиус вписанной окружности равен r .

133.42. Найдите радиусы вписанной и вневписанных окружностей треугольника со сторонами (а) 5, 12, 13; (б) 10, 10, 12.

133.43. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке C , проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания. Найдите радиусы окружностей, если $AC = 6$, $BC = 8$.

133.44. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R . Его диагонали взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P . Найдите $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$ и $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

133.45. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 см касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

133.46. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90^\circ$ и два квадрата $BEFC$ и $AMNC$ расположены так, что точки E и A лежат по разные стороны от прямой BC , а точки M и B — по разные стороны от прямой AC). Найдите расстояние между центрами квадратов, если $AB = a$, $AC = b$.

133.47. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD , и в треугольники ACD и BCD вписаны окружности с центрами P и Q . Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает катеты AC и BC в точках M и N , а высоту CD — в точке K . Докажите, что (а) треугольники CMN и CBA подобны; (б) точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности с центром K , радиус которой равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC .

134. Тригонометрические функции острого угла

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе, **косинусом** — отношение прилежащего катета к гипотенузе, **тангенсом** — отношение противолежащего катета к прилежащему, **котангенсом** — прилежащего катета к противолежащему.

Другими словами, если AC и BC — катеты прямоугольного треугольника ABC , а AB — его гипотенуза, и $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, то

$$\sin \angle A = \frac{a}{c}, \cos \angle A = \frac{b}{c}, \operatorname{tg} \angle A = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg} \angle A = \frac{b}{a};$$

$$\sin \angle B = \frac{b}{c}, \cos \angle B = \frac{a}{c}, \operatorname{tg} \angle B = \frac{b}{a}, \operatorname{ctg} \angle B = \frac{a}{b}.$$

134.1. Докажите, что синус острого угла зависит только от градусной меры угла, то есть что равные углы имеют равные синусы. (Аналогично для косинусов и т.д.)

134.2. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов в 30° , 60° и 45° .

134.3. Докажите, что для любого острого угла α

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

134.4. Тангенс острого угла α равен 2. Найдите $\sin \alpha$.

134.5. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) $AB = 4$, $\angle A = 60^\circ$. Найдите BC и AC .

134.6. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Найдите гипотенузу и второй катет.

134.7. Сторона ромба равна 6, острый угол 30° . Найдите высоту ромба и его диагонали.

134.8. Найдите высоту и радиусы вписанной и описанной окружности равностороннего треугольника со стороной a .

134.9. Найдите высоту остроугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 8, а один из острых углов равен 60° .

134.10. Вершина M правильного треугольника ABM со стороной a расположена на стороне CD прямоугольника $ABCD$. Найдите диагональ прямоугольника $ABCD$.

134.11. Дан прямоугольник со сторонами $4\sqrt{3}$ и 4. Найдите его диагонали и острый угол между ними.

134.12. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120° , а основание равно 8. Найдите боковые стороны.

134.13. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 4, угол при большем основании равен 45° . Найдите диагонали трапеции.

134.14. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 8. Один из углов при меньшем основании равен 120° . Найдите диагонали трапеции.

- 134.15. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 12 и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите стороны треугольника.
- 134.16. Найдите площадь прямоугольной трапеции, если ее острый угол равен 60° , меньшее основание равно a , большая боковая сторона равна b .
- 134.17. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $3/5$, высота, опущенная на основание, равна h . Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.
- 134.18. Хорда AC окружности радиуса R образует с диаметром AB угол, равный α . Найдите расстояние от точки C до диаметра AB .
- 134.19. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна a , один из острых углов равен α . Найдите расстояния от основания высоты, опущенной на гипотенузу, до катетов треугольника.
- 134.20. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O (A и B — точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$.
- 134.21. Две вершины квадрата расположены на основании равнобедренного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найдите сторону квадрата, если основание треугольника равно a , а угол при основании равен 30° .
- 134.22. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60° . Найдите радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно a .
- 134.23. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен r , а острый угол ромба равен α . Найдите сторону ромба.
- 134.24. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.
- 134.25. Высота треугольника ABC , опущенная на сторону BC , равна h , а $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Найдите остальные высоты этого треугольника.
- 134.26. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведенной из той же вершины. Найдите катеты треугольника.
- 134.27. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R . Угол при основании равен α . Найдите стороны треугольника.
- 134.28. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с острым углом 60° , равен $\sqrt{3}$. Найдите стороны треугольника.
- 134.29. Сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45° . Найдите остальные стороны треугольника.
- 134.30. Диагональ равнобедренной трапеции равна a и образует углы α и β с большим основанием. Найдите основания трапеции.
- 134.31. Стороны параллелограмма равны a и b , а угол между ними равен α . Найдите стороны и диагонали четырехугольника, образованного пересечением биссектрис внутренних углов параллелограмма.
- 134.32. Найдите $\sin 15^\circ$ и $\tan 75^\circ$.
- 134.33. Найдите $\sin 18^\circ$.

135. Пропорциональные отрезки в круге

135.1. Доказать, что произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.

135.2. (Теорема о касательной и секущей) Доказать, что если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

135.3. Точка P удалена на расстояние 7 от центра окружности радиуса 11. Через точку P проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые делится хорда точкой P .

135.4. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K . Известно, что $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$, $CD = d$. Найдите AC .

135.5. Точка M лежит внутри окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d . Докажите, что для всех хорд AB этой окружности, проходящих через точку M , произведение $AM \cdot BM$ одно и то же. Чему оно равно?

135.6. Точка M лежит вне окружности радиуса R и удалена от её центра на расстояние d . Докажите, что для всех прямых, проходящих через точку M и пересекающих окружность в точках A и B , произведение $AM \cdot BM$ одно и то же. Чему оно равно?

135.7. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C , другой — в точках D и E . Известно, что $AB = 7$, $BC = 7$, $AD = 10$. Найдите DE .

135.8. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C катет BC равен a , радиус вписанной окружности равен r . Вписанная окружность касается катета AC в точке D . Найдите хорду, соединяющую точки пересечения окружности с прямой BD .

135.9. Из точки A , лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16, а расстояние от точки A до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если расстояние от центра окружности до секущей равно 5.

135.10. Диагональ AC вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой угла BAD . Докажите, что прямая BD отсекает от треугольника ABC подобный ему треугольник.

135.11. Пересекающиеся хорды окружности делятся точкой пересечения в одном и том же отношении. Докажите, что эти хорды равны между собой.

135.12. Каждая из двух равных пересекающихся хорд окружности делится точкой пересечения на два отрезка. Докажите, что отрезки первой хорды соответственно равны отрезкам второй.

135.13. В круге проведены две хорды AB и CD , пересекающиеся в точке M . Пусть K — точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD . Найдите отрезки BK и KD , если $BD = 3$, а площади треугольников CMB и AMD относятся как $1 : 4$.

135.14. Две окружности пересекаются в точках A и B . В каждой из этих окружностей проведено по хорде из точки A (хорды AC и AD). При этом хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB , если $CB = a$, $DB = b$.

135.15. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Известно, что $BC = 3 \cdot MN$ и $AB = 12$. Найдите AN .

135.16. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

135.17. В угол вписаны две окружности; одна из них касается сторон угла в точках K_1 и K_2 , а другая - в точках L_1 и L_2 . Докажите, что прямая K_1L_2 высекает на этих двух окружностях равные хорды.

135.18. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K . Найдите KC , если $BC = 4$ и $AK = 6$.

135.19. Продолжение медианы треугольника ABC , проведённой из вершины A , пересекает описанную окружность в точке D . Найдите BC , если $AC = DC = 1$.

135.20. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

135.21. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Касательная CK , проведенная из вершины C к этой же окружности, равна 2. Найдите диаметр окружности.

135.22. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся катета BC . Найдите длину отрезка гипотенузы AC , который лежит внутри этой окружности.

135.23. Точка B расположена между точками A и C . На отрезках AB и AC как на диаметрах построены окружности. Прямая, перпендикулярная AC и проходящая через точку B , пересекает большую окружность в точке D . Прямая, проходящая через точку C , касается меньшей окружности в точке K . Докажите, что $CD = CK$.

135.24. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

135.25. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E . Найдите высоту треугольника ABC , опущенную из точки A , если $AB = 5$, $AC = 2$, а точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

135.26. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведены биссектрисы AD , BE и CF . Найдите BC , если известно, что $AC = 1$, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E и F .

135.27. Из точки A к окружности радиуса R проведена касательная AM (M — точка касания). Секущая, проходящая через точку A , пересекает окружность в точках K и L , причем L — середина отрезка AK , а угол AMK равен 60° . Найдите AM .

135.28. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120° . Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB . При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC .

135.29. Две окружности внутренне касаются. Прямая, проходящая через центр большей окружности, пересекает её в точках A и D , а меньшую окружность — в точках B и C . Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 3 : 7 : 2$.

135.30. Точки A, B и C лежат на одной прямой (точка B расположена между точками A и C). Через точки A и B проводятся окружности, а через точку C — касательные к ним. Найдите геометрическое место точек касания.

135.31. Окружность и прямая касаются в точке M . Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от

точки M до прямой AB .

135.32. Из точки A , находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие AKC и ALB , угол между которыми равен 30° (K, C, L, B — точки пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника AKL , если площадь треугольника ABC равна 10.

135.33. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найдите радиус окружности, если одна из хорд равна a .

135.34. В окружность вписан треугольник. Вторая окружность, концентрическая с первой, касается одной стороны треугольника и делит каждую из двух других сторон на три равные части. Найдите отношение радиусов окружностей.

135.35. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и проходит через вершину C . Сторону DC она пересекает в точке N . Найдите площадь трапеции $ABND$, если $AB = 9$ и $AD = 8$.

135.36. Найдите радиус окружности, которая высекает на обеих сторонах угла величины α хорды длины a , если известно, что расстояние между ближайшими концами этих хорд равно b .

135.37. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B . Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C . Отрезок OC пересекает окружность в точке E . Прямые AE и OB пересекаются в точке K . Докажите, что $OK = KB$.

135.38. Точки A_1 и B_1 принадлежат соответственно сторонам OA и OB угла AOB (не равного 180°) и $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$. Докажите, что точки A, B, A_1, B_1 принадлежат одной окружности.

135.39. Через точку P , лежащую на общей хорде двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — вписанный.

135.40. Точка M находится на продолжении хорды AB . Докажите, что если точка C окружности такова, что $MC^2 = MA \cdot MB$, то MC — касательная к окружности.

135.41. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.

135.42. Постройте окружность, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной окружности S .

* * *

135.43. Через данную точку проведите окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности.

135.44. В треугольнике KLM проведена биссектриса MN . Через вершину M проходит окружность, касающаяся стороны KL в точке M и пересекающая сторону KM в точке P , а сторону LM — в точке Q . Длины отрезков KP , QM и LQ соответственно равны k , m и q . Найдите длину отрезка MN .

135.45. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A , и из неё проведены касательные AP и AQ ; M — середина отрезка PQ . Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.

135.46. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC , угол A равен 45° , угол

D равен 30° . На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N . Хорда MN пересекает основание BC в точке F . Найдите отношение $BF : FC$.

135.47. Докажите формулу Эйлера: $O_1O_2 = R^2 - 2rR$, где O_1 , O_2 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC , а r и R — радиусы этих окружностей.

135.48. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC , DC и DE равны соответственно a , b , c . Найдите расстояние от вершины A до прямой BE .

135.49. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) внешним образом касаются друг друга. Прямая касается этих окружностей в точках M и N . В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C . Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найдите CD .

135.50. На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Докажите, что отрезки касательных, проведенных из точки пересечения диагоналей трапеции к этим окружностям, равны между собой.

135.51. Противоположные стороны четырехугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках P и Q . Найдите PQ , если касательные к окружности, проведённые из точек P и Q , равны a и b .

135.52. Данна прямая l и точки A и B по одну сторону от неё. С помощью циркуля и линейки постройте на прямой l точку X , для которой $AX + BX = a$, где a — данная величина.

135.53. (Теорема Птолемея) Докажите, что если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей.

136. Теорема косинусов

136.1. (Теорема косинусов) Пусть a, b, c — стороны треугольника; α — угол, противолежащий стороне a . Тогда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

136.2. Стороны треугольника равны 5, 8, 10. Будет ли этот треугольник остроугольным?

136.3. Сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны. Докажите, что против третьей стороны лежит острый угол.

136.4. Дан равносторонний треугольник со стороной a . Найдите длину отрезка, соединяющего вершину треугольника с точкой, делящей противоположную сторону в отношении 2:1.

136.5. Одна из сторон треугольника вдвое больше другой, а угол между этими сторонами равен 60° . Докажите, что треугольник прямоугольный.

136.6. Сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$, а две другие стороны образуют угол в 30° и относятся, как $1 : 2\sqrt{3}$. Найдите эти стороны.

136.7. Одна из сторон параллелограмма равна 10, а диагонали равны 20 и 24. Найдите косинус острого угла между диагоналями.

136.8. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Известно, что $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120^\circ$. Найдите сторону AB .

136.9. Угол при вершине D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равен 60° . Найдите диагонали трапеции, если $AD = 10$, $BC = 3$ и $CD = 4$.

136.10. Одна из сторон треугольника равна 6, вторая сторона равна $2\sqrt{7}$, а противолежащий ей угол равен 60° . Найдите третью сторону треугольника.

136.11. На продолжении боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC за вершину A взята точка D , причем $AD = 2AB$. Известно, что $AB = AC = 1$, $\angle BAC = 120^\circ$. Докажите, что треугольник BDC равнобедренный.

136.12. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC ромба $ABCD$, причем $DM : AM = BN : NC = 2 : 1$. Найдите MN , если известно, что сторона ромба равна a , а $\angle BAD = 60^\circ$.

136.13. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его четырёх сторон.

136.14. Диагональ параллелограмма, равная b , перпендикулярна стороне параллелограмма, равной a . Найдите вторую диагональ параллелограмма.

136.15. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если эта медиана равна 3.

136.16. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5. Найдите боковые стороны.

136.17. Стороны треугольника равны a , b и c . Найдите медиану, проведенную к стороне, равной c .

136.18. Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

136.19. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведенная к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

136.20. Докажите, что отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон равно $3/4$.

136.21. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $AD = 2$. Найдите AC .

136.22. Можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность, если $\angle ADC = 30^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 6$?

136.23. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании.

136.24. В треугольнике ABC известны стороны $AC = 13$, $AB = 14$, $BC = 15$. На стороне BC взята точка M , для которой $CM : MB = 1 : 2$. Найдите AM .

136.25. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 18$. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины наибольшего угла.

136.26. Найдите косинусы углов трапеции с основаниями 3 и 7 и боковыми сторонами 2 и 5.

136.27. Медианы треугольника ABC , проведенные из вершин B и C , равны 6 и 9 и пересекаются в точке M . Известно, что $\angle BMC = 120^\circ$. Найдите стороны треугольника.

136.28. Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а угол между ними равен 60° . Через вершину этого угла проведены прямые, проходящие через середины двух других сторон параллелограмма. Найдите косинус угла между этими прямыми.

136.29. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке M , при этом $AM = 1$, $BM = 4$. Найдите CM , если известно, что $\angle BAC = 120^\circ$.

136.30. Основания трапеции равны 1 и 6, а диагонали — 3 и 5. Под каким углом видны основания из точки пересечения диагоналей?

136.31. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны соответственно a и b и пересекаются под углом 60° . Найдите диагонали четырехугольника.

136.32. Диагонали выпуклого четырехугольника равны c и d и пересекаются под углом 45° . Найдите отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника.

136.33. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, удален от вершин острых углов на расстояния a и b . Найдите гипotenузу.

136.34. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ с углом 45° при вершине A , причём $\angle AMD = 90^\circ$ и $BM : MC = 2 : 3$. Найдите отношение соседних сторон параллелограмма.

136.35. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, а боковая сторона CD равна $8\sqrt{3}$. Окружность проходящая через точки A , B и C , пересекает прямую AD в точке M , $\angle AMB = 60^\circ$. Найдите BM .

136.36. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а угол A равен 120° .

136.37. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, касается гипотенузы в точке M . Найдите расстояние от точки M до вершины прямого угла.

136.38. Точка M лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC со стороной, равной $3a$, причем $AM : MC = 1 : 2$. Точки K и L на сторонах AB и BC являются

вершинами другого равностороннего треугольника MKL . Найдите его стороны.

136.39. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE . Найдите AC , если $BC = a$, $AB = b$, $DE/AC = k$.

136.40. В окружности проведены хорды AB и BC , причем $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Найдите длину той хорды окружности, которая делит угол ABC пополам.

136.41. Дан треугольник ABC . Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K . Прямая, проходящая через точку B параллельно AC , пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M . Найдите KM .

136.42. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB , BC и AC соответственно в точках M , D и N . Найдите MD , если известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\angle BCA = 60^\circ$.

136.43. В окружности радиуса $R = 4$ проведены хорда AB и диаметр AK , образующий с хордой угол $22,5^\circ$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C . Найдите медиану AM треугольника ABC .

136.44. В треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB . Докажите, что медиана, проведенная из вершины B , меньше медианы, проведенной из вершины A .

136.45. Стороны треугольника равны a , b и c . Найдите биссектрису, проведенную к стороне a .

136.46. (Теорема Штейнера–Лемуса) Две биссектрисы треугольника равны между собой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

136.47. Данна трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$ и $BC = \sqrt{39}$. При этом $\angle BAD = 30^\circ$, и $\angle ADC = 60^\circ$. Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите длину всего отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

136.48. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB .

136.49. Докажите, что сумма квадратов расстояний от какой-либо точки окружности до вершин правильного вписанного треугольника есть величина постоянная (не зависящая от положения точки на окружности).

136.50. На окружности взяты две диаметрально противоположные точки A и C , а точка B расположена вне окружности. Отрезок AB пересекается с окружностью в точке P , отрезок CB — в точке Q . Известно, что $\angle ABC = 45^\circ$, $AB : AC = 1 : \sqrt{3}$. Найдите отношение отрезков CP и AQ .

136.51. Сторона ромба $ABCD$ равна a , а острый угол равен α . На отрезках AD и BC как на сторонах построены правильные треугольники (вне ромба). Найдите расстояние между центрами этих треугольников.

136.52. В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K , лежащей на продолжении стороны AF , для которой $KA < KF$ и $KA = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KN , пересекающая окружность в точках N и H . Известно, что внешняя часть секущей KN равна 2, а угол NFH — тупой. Найдите угол NKF .

136.53. Окружность, вписанная в треугольник ABC делит медиану BM на три равные части. Найдите отношение $BC : CA : AB$.

136.54. Медиана AD остроугольного треугольника ABC равна 5. Проекции этой медианы на стороны AB и AC равны 4 и $2\sqrt{5}$ соответственно. Найдите сторону BC .

136.55. (Теорема Стюарта) Точка D расположена на стороне BC треугольника ABC. Докажите, что

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

136.56. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок, равный $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

136.57. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность радиуса $2/\sqrt{3}$, вписанная в треугольник ABD, касается стороны AB в точке M, а окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в треугольник BCD, касается стороны BC в точке N. Известно, что BM = 6, BN = 5. Найдите стороны треугольника ABC.

136.58. Около окружности описана равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC ($AD > BC$). Прямая, параллельная диагонали AC, пересекает стороны AD и CD в точках M и N соответственно и касается окружности в точке P. Найдите углы трапеции, если $MP/PN = k$ ($k < 1$).

136.59. Сторона BC треугольника ABC равна 4, сторона AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проходящей через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.

137. Теорема синусов

Пусть a, b, c - стороны треугольника; α, β, γ - противолежащие им углы; R - радиус описанной окружности. *Теорема синусов.*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

137.1. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, а угол при вершине равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности.

137.2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами, равными a, a и b .

137.3. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом, равным 30° , если известно, что биссектриса, проведенная из вершины прямого угла, равна a .

137.4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами, равными 13, 14, 15.

137.5. Боковая сторона равнобокой трапеции равна a , средняя линия равна b , а один из углов при большем основании равен 30° . Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

137.6. Основания равнобокой трапеции равны 9 и 21, высота равна 8. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

137.7. Прямая, пересекающая основание равнобедренного треугольника и проходящая через противоположную вершину, делит этот треугольник на два. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны.

137.8. С помощью теоремы синусов докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

137.9. В треугольнике известны сторона a и два прилежащих к ней угла β и γ . Найдите биссектрису, проведенную из вершины третьего угла.

137.10. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы, равные α и β соответственно. Найдите эти стороны.

137.11. Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. На стороне AB взята точка D , а на стороне AC - точка M , причем CD — биссектриса треугольника ABC , $DM \parallel BC$ и $AM = a$. Найдите CM .

137.12. Углы треугольника равны α, β и γ , а периметр равен P . Найдите стороны треугольника.

137.13. Одна из боковых сторон трапеции образует с большим основанием угол, равный α , а вторая равна a и образует с меньшим основанием угол, равный β . Найдите среднюю линию трапеции, если меньшее основание равно b .

137.14. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

137.15. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной C , если $AB = c$ и $\angle C = 120^\circ$.

137.16. Стороны треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен 60° . Через центр вписанной окружности этого треугольника и концы третьей стороны проведена окружность. Найдите ее радиус.

137.17. Докажите, что если стороны a , b и противолежащие им углы α и β треугольника связаны соотношениями $a/\cos \alpha = b/\cos \beta$, то треугольник равнобедренный.

137.18. Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает эти окружности в точках C и D , причем точка A лежит между C и D , а хорды AC и AD пропорциональны радиусам своих окружностей. Докажите, что биссектрисы углов ADB и ACB пересекаются на отрезке AB .

137.19. В окружность вписаны две равнобедренные трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагональ одной из них равна диагонали другой трапеции.

137.20. Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна третьей стороне.

137.21. Каждое из оснований высот треугольника проецируется на его стороны. Докажите, что длина отрезка, соединяющего проекции, не зависит от выбора высоты.

137.22. На окружности, описанной около треугольника ABC , найдите точку M такую, что расстояние между ее проекциями на прямые AC и BC максимально.

137.23. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , AHB , BHC и AHC , равны между собой.

137.24. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.

137.25. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 6$. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот треугольника ABC .

137.26. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB . Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

137.27. Отрезки AB и CD — диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD . Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M .

137.28. Постройте треугольник по углу и радиусам вписанной и описанной окружностей.

137.29. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r , пересекающая сторону BC в точке D . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , D и C , если $AB = c$ и $AC = b$.

137.30. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α . Найдите отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной около него окружности.

137.31. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр другой окружности, проходящей через вершины A , C и точку пересечения высот треугольника ABC . Найдите AC .

137.32. Дан треугольник ABC , в котором $\angle BAC = 75^\circ$, $AB = 1$, $AC = \sqrt{6}$. На сто-

роне BC выбрана точка M так, что $\angle BAM = 30^\circ$. Прямая AM пересекает окружность, описанную около треугольника ABC в точке N , отличной от A . Найдите AN .

137.33. Даны отрезок AB и на нем точка C . Найдите геометрическое место точек пересечения двух равных окружностей, одна из которых проходит через точки A и C , другая — через точки C и B .

137.34. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q . Найдите радиус описанной окружности, если $AC = a$, $PQ = 6a/5$.

137.35. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

137.36. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаютсяся прямой в точках C и D . N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите:

- 1) радиус окружности, описанной около треугольника ACD ;
- 2) отношение высот треугольников NAC и NAD , опущенных из вершины N .

137.37. В треугольник ABC помещены три равных окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Все три окружности имеют одну общую точку. Найдите радиусы этих окружностей, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны R и r .

137.38. В выпуклом четырехугольнике $ABKC$ сторона $AB = \sqrt{3}$, диагональ BC равна 1, а углы $\angle ABC$, $\angle BKA$ и $\angle BKC$ равны 120° , 30° и 60° соответственно. Найдите сторону BK .

137.39. В треугольнике ABC известно, что $AC = b$ и $\angle ABC = \alpha$. Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанного в треугольник ABC круга и вершины A и C .

* * *

137.40. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD . Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, и расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD , равно $\sqrt{2}$. Найдите BC .

137.41. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведенная к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении $1 : 2$.

137.42. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle BAC = 20^\circ$, $\angle BCA = 35^\circ$, $\angle BDC = 40^\circ$, $\angle BDA = 70^\circ$. Найдите угол между диагоналями этого четырехугольника.

137.43. На окружности, описанной около треугольника ABC взята точка M . Прямая MA пересекается с прямой BC в точке L , а прямая CM — с прямой AB в точке K . Известно, что $AL = a$, $BK = b$, $CK = c$. Найдите BL .

138. Площадь (2)

Пусть a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — противолежащие им углы; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; p — полупериметр.

Формулы площади треугольника.

$S = (1/2) \cdot ab \cdot \sin \gamma$, $S = pr$, $S = abc/(4R)$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона).

138.1. Среди всех треугольников с заданными сторонами AB и AC найдите тот, у которого наибольшая площадь.

138.2. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу.

138.3. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60° , а сторона AB равна 3. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E . Найдите площадь треугольника ABE .

138.4. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

138.5. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

138.6. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана, проведенная к третьей, равна 2.

138.7. Стороны треугольника равны a, b, b . Найдите высоту, проведенную к стороне, равной b .

138.8. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

138.9. В треугольнике со сторонами a и b и углом α между ними вписан полукруг с диаметром на третьей стороне. Найдите его радиус.

138.10. а) В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите биссектрису AM .

б) Стороны треугольника равны a и b , а угол между ними равен α . Найдите биссектрису, проведенную из вершины этого угла.

138.11. Найдите площадь трапеции

а) с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4;

б) с основаниями 16 и 44 и боковыми сторонами 17 и 25.

138.12. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $AB = c$. Найдите площадь треугольника ABC .

138.13. Найдите площадь трапеции

а) с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12;

б) с основаниями 6 и 3 и диагоналями 7 и 8.

138.14. В равнобедренной трапеции основания равны 40 и 24, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

138.15. Площадь треугольника ABC равна S , $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$. Найдите BC .

138.16. Две стороны треугольника равны $2\sqrt{2}$ и 3, площадь треугольника равна 3. Найдите третью сторону.

- 138.17. Медианы AN и BM треугольника ABC равны 6 и 9 соответственно и пересекаются в точке K , причем угол AKB равен 30° . Найдите площадь треугольника ABC .
- 138.18. Расстояния от точки M , лежащей внутри треугольника ABC , до его сторон AC и BC соответственно равны 2 и 4. Найдите расстояние от точки M до прямой AB , если $AB = 10$, $BC = 17$, $AC = 21$.
- 138.19. В треугольник вписан круг радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.
- 138.20. Вершины треугольника соединены с центром вписанного круга. Проведенными отрезками площадь этого треугольника разделилась на три части: 28, 60 и 80. Найдите стороны треугольника.
- 138.21. Основание равнобедренного треугольника равно a , а высота, опущенная на боковую сторону, равна h . Найдите площадь треугольника.
- 138.22. Углы треугольника равны α , β и γ , а площадь равна S . Найдите высоты треугольника.
- 138.23. Углы треугольника равны α , β и γ , а площадь равна S . Найдите стороны треугольника.
- 138.24. Точки B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC , площадь которого равна S , а угол BAC равен α . Найдите площадь треугольника AB_1C_1 .
- 138.25. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними равна 12.
- 138.26. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB . Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
- 138.27. Дан треугольник ABC . Из вершины A проведена медиана AM , а из вершины B — медиана BP . Известно, что угол APB равен углу BMA . Косинус угла ACB равен 0,8 и $BP = 1$. Найдите площадь треугольника ABC .
- 138.28. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K , образуя угол AKD , равный 30° . Найдите площадь треугольника AKD , если площадь трапеции равна P .
- 138.29. В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD , биссектриса угла ABC пересекает в точке O отрезок AE . Найдите площадь четырехугольника $OBCE$, зная, что $AD = a$, $DE = b$, $\angle ABO = \alpha$.
- 138.30. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.
- 138.31. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S . Найти длины сторон параллелограмма.
- 138.32. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D . Через точки A , D и C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E . Найдите площадь треугольника ADE .
- 138.33. В параллелограмме $ABCD$ острый угол BAD равен α . Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников DAB , DAC , DBC , ABC . Найдите отношение площади четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллело-

грамма $ABCD$.

138.34. В четырехугольнике $ABCD$ острый угол между диагоналями равен α . Через каждую вершину проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не содержащей эту вершину. Найдите отношение площади четырехугольника, ограниченного этими прямыми, к площади четырехугольника $ABCD$.

138.35. Из точки P , расположенной внутри остроугольного треугольника ABC , опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k , b и m , c и n . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

138.36. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

138.37. Стороны треугольника не превосходят 1. Докажите, что его площадь не превосходит $\sqrt{3}/4$.

138.38. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E . Известно, что $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AE = 6$. Найдите площадь треугольника ABC .

138.39. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно k .

138.40. Дан треугольник ABC . На стороне BC взята точка P , а на стороне AC взята точка M так, что $\angle APB = \angle BMA = 45^\circ$. Отрезки AP и BM пересекаются в точке O . Известно, что площади треугольников BOP и AOM равны между собой, $BC = 1$, $BO = \sqrt{2}/2$. Найдите площадь треугольника ABC .

138.41. Пусть r_1 — радиус вневписанной окружности треугольника ABC , касающейся стороны $BC = a$, r — полупериметр треугольника ABC , S — его площадь. Докажите, что

а) $1/r = 1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3$, где r — радиус вписанной окружности, а r_1 , r_2 и r_3 — радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC ; б) $S = \sqrt{r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}$.

138.42. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN , O — центр описанной около ABC окружности. Известно, что $\angle ABC = \beta$, а площадь четырехугольника $NOMB$ равна S . Найдите AC .

138.43. Две окружности пересекаются в точках A и K . Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK . Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB , касается одной окружности в точке A . Прямая, содержащая отрезок AC , касается другой окружности также в точке A . Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $1/\sqrt{15}$. Найдите площадь треугольника ABC .

138.44. В остроугольном треугольнике ABC с углом C , равным 30° , высоты пересекаются в точке M . Найдите площадь треугольника AMB , если расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до сторон BC и AC соответственно равны $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}/3$.

138.45. На отрезке AB лежат точки C и D , причем точка C — между точками A и D . Точка M взята так, что прямые AM и MD перпендикулярны и прямые CM и MB тоже перпендикулярны. Найдите площадь треугольника AMB , если известно, что величина угла CMD равна α , а площадь треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.

138.46. (Формула Брахмагупты) Докажите, что если стороны вписанного четырех-

угольника равны a , b , c и d , то его площадь S может быть вычислена по формуле: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = (a+b+c+d)/2$ — полупериметр четырехугольника.

138.47. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен 120° . Найдите площадь треугольника.

138.48. Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$. Угол BAC равен 120° . Угол ABC больше угла ACB . Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , равно 2. Найдите медиану треугольника ABC , проведенную из вершины B .

138.49. В окружность радиуса 7 вписан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = BC$, площадь треугольника BCD в два раза меньше площади треугольника ABD , $\angle ADC = 120^\circ$. Найдите длины всех сторон четырехугольника $ABCD$.

138.50. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B так, что $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B . Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB . Найдите площадь треугольника ABC , где C — точка пересечения этих касательных.

138.51. Точки K , L , M , N и P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM , если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45° , где O — точка пересечения хорд LN и MP .

138.52. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C , углом B , равным 30° , и катетом $CA = 1$, проведена медиана CD . Кроме того, из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F . Найдите площадь треугольника CDF .

138.53. Окружность радиуса 3 проходит через вершину B , середины сторон AB и BC , а также касается стороны AC треугольника ABC . Угол BAC острый, и $\sin \angle BAC = 1/3$. Найдите площадь треугольника ABC .

138.54. Остроугольный равнобедренный треугольник и трапеция вписаны в окружность. Одно основание трапеции является диаметром окружности, а боковые стороны параллельны боковым сторонам треугольника. Докажите, что трапеция и треугольник равновелики.

138.55. Внутри правильного треугольника имеется точка, удаленная от его вершин на расстояния 5, 6 и 7. Найдите площадь этого правильного треугольника.

138.56. Все биссектрисы треугольника меньше 1. Докажите, что его площадь меньше $1/\sqrt{3}$.

138.57. В трапеции основания равны a и b , диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен α . Найдите площадь трапеции.

138.58. Стороны четырехугольника равны a , b , c и d . Известно, что в этот четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Докажите, что его площадь равна \sqrt{abcd} .

138.59. Пусть a , b , c , d — последовательные стороны четырехугольника. Докажите, что если S — его площадь, то $S \leq (ac + bd)/2$, причем равенство имеет место только для вписанного четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

138.60. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

138.61. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D . Окружности, вписанные в

треугольники ABD и BCD , касаются стороны AC в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 3$, $MD = 2$, $DN = 2$, $NC = 4$. Найдите стороны треугольника ABC .

138.62. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB , BC и AC построены как на диаметрах полуокружности S_1 , S_2 и S_3 по одну сторону от AC . Пусть D — точка на S_3 , проекция которой на AC совпадает с точкой B . Общая касательная к S_1 и S_2 касается этих полуокружностей в точках E и F соответственно.

- Докажите, что прямая EF параллельна касательной к S_3 , проведенной через точку D .
- Докажите, что $BFDE$ — прямоугольник.

в) Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если известно, что ее центр удален от прямой AC на расстояние a .

138.63. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного вокруг окружности четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон первого четырехугольника с окружностью.

139. Применение тригонометрии

139.1. В треугольнике ABC угол ABC равен α , угол BCA равен 2α . Окружность, проходящая через точки A, C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AB в точке M . Найдите отношение AM к AB .

139.2. В равнобедренной трапеции с острым углом α при основании окружность, построенная на боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны. В каком отношении она делит большее основание трапеции?

139.3. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

139.4. Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM , если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45° , где O — точка пересечения хорд LN и MP .

139.5. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в семь раз меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найдите хорду DE и радиус окружности, если $AB = 4$ и $\angle C = 45^\circ$.

139.6. В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC . Известно, что $MN = a$, $BD = b$. Найдите угол ABC .

139.7. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делит сторону BC на отрезки $BD = b$ и $DC = c$. Найдите биссектрису AD .

139.8. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB . Найдите радиус окружности.

139.9. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B так, что $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B . Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB . Найдите площадь треугольника ABC , где C — точка пересечения этих касательных.

139.10. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в точке пересечения с высотой, опущенной на гипотенузу, делится на отрезки, отношение которых равно $1 + \sqrt{2}$, считая от вершины. Найдите острые углы треугольника.

139.11. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

139.12. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC , прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O . Известно, что точки C, D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC , $AC : AB = 3 : 2$, а величина угла DAC в три раза больше величины угла DAB . Найдите косинус угла ACB .

139.13. На окружности радиуса 12 с центром в точке O лежат точки A и B . Прямые AC и BC касаются этой окружности. Другая окружность с центром в точке M вписана в треугольник ABC и касается стороны AC в точке K , а стороны BC — в точке H . Расстояние от точки M до прямой KH равно 3. Найдите величину угла AOB .

139.14. Биссектриса AE угла A рассекает четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный

треугольник ΔBE ($AB = BE$) и ромб $AEC D$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD , в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ΔBE . Найдите отношение периметров этих треугольников.

139.15. В треугольнике ABC известно, что $AB = 20$, $AC = 24$. Известно также, что вершина C , центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой лежит на стороне AC . Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

139.16. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4, причем $AC = BC$. На прямой AB взята точка D , удаленная от прямых AC и BC на расстояние 11 и 3 соответственно. Найдите косинус угла DBC .

139.17. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{2}/3$. Найдите углы трапеции.

139.18. В прямоугольном треугольнике ABC из точки E , расположенной в середине катета BC , опущен перпендикуляр EL на гипotenузу AB . Найдите углы треугольника ABC , если $AE = \sqrt{10} \cdot EL$ и $BC > AC$.

139.19. Равнобедренные треугольники ABC ($AB = BC$) и $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = B_1C_1$) подобны и $AC : A_1C_1 = 5 : \sqrt{3}$. Вершины A_1 и B_1 расположены соответственно на сторонах AC и BC , а вершина C_1 — на продолжении стороны AB за точку B , причем A_1B_1 перпендикулярно BC . Найдите угол ABC .

139.20. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и D прямые, сторона AB параллельна стороне CD ; длины сторон равны: $AB = 1$, $CD = 4$, $AD = 5$. На стороне AD взята точка M так, что угол CMD вдвое больше угла BMA . В каком отношении точка M делит сторону AD ?

139.21. Углы треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1.$$

Найдите площадь этого треугольника, если радиусы вписанной и описанной окружностей равны $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$ соответственно.

139.22. В остроугольном треугольнике ABC высота AD , медиана BE и биссектриса CF пересекаются в точке O . Найдите $\angle C$, если $OE = 2 \cdot OC$.

139.23. Высоты равнобедренного остроугольного треугольника, в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если $AO = 5$, а длина высоты AD равна 8.

139.24. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

139.25. На основании AB равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник BCD , имеет тот же радиус, что и окружность, касающаяся продолжений отрезков CA и CD и отрезка AD (вневписанная окружность треугольника ACD). Докажите, что этот радиус равен $1/4$ высоты треугольника, опущенной на ее боковую сторону.

139.26. Даны две непересекающиеся окружности, к которым проведены две общие внешние касательные. Рассмотрим равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной касательной, противоположная вершина — на другой, а каждая из боковых сторон

касается одной из данных окружностей. Докажите, что высота треугольника равна сумме радиусов окружностей.

140. Центральная симметрия

140.1. Докажите, что при центральной симметрии каждый луч переходит в противоположный направленный с ним луч.

140.2. Докажите, что четырехугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

140.3. На противоположных сторонах параллелограмма как на сторонах построены вне параллелограмма два квадрата. Докажите, что прямая, соединяющая их центры, проходит через центр параллелограмма.

140.4. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

140.5. Найдите координаты образа точки $M(x; y)$ при симметрии относительно а) начала координат; б) точки $A(a; b)$.

140.6. Пусть a и b — некоторые числа. Каждой точке $M(x; y)$ координатной плоскости поставим в соответствие точку $M'(x'; y')$, для которой $x' = 2a - x$ и $y' = 2b - y$. Докажите, что это соответствие есть центральная симметрия плоскости. Каковы координаты центра симметрии?

140.7. Выпуклый многоугольник имеет центр симметрии. Докажите, что сумма его углов делится на 360° .

140.8. Дан угол и точка внутри него. С помощью центральной симметрии проведите через данную точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри угла, делился бы этой точкой пополам.

140.9. Дан параллелограмм и точка M на одной из его сторон. Постройте ромб, одна вершина которого — точка M , а остальные три вершины лежат на трех других сторонах параллелограмма.

140.10. Проведите через общую точку A окружностей S_1 и S_2 прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

140.11. Через данную точку проведите прямую, отрезок которой, заключенный между двумя данными окружностями, делился бы этой точкой пополам.

140.12. Даны две концентрические окружности S_1 и S_2 . С помощью циркуля и линейки проведите прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

140.13. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M . Через точки A , B , C и D проведены прямые, параллельные прямым MC , MD , MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

140.14. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что он имеет центр симметрии.

140.15. При симметрии относительно точки пересечения медиан треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ при пересечении образуют шестиугольник $KLMNOP$. Докажите, что диагонали KN , LO и MP этого шестиугольника пересекаются в одной точке и найдите стороны шестиугольника, если стороны треугольника ABC равны a , b и c .

140.16. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, параллельными сторонам,

равны между собой.

140.17. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOB и COD , касаются.

140.18. Существуют фигуры, имеющие бесконечное множество центров симметрии (например, полоса между двумя параллельными прямыми). Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

140.19. (Теорема Монжа) Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

140.20. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C , а вторую — в точке D . Пусть M и N — середины дуг BC и BD , не содержащих точку A , а K — середина отрезка CD . Докажите, что угол MKN равен 90° . (Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A).

141. Осевая симметрия

- 141.1. Докажите, что диагональ ромба является его осью симметрии.
- 141.2. Существует ли фигура, не имеющая осей симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?
- 141.3. Существует ли фигура, не имеющая ни осей симметрии, ни центров симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?
- 141.4. Найдите координаты точки, симметричной точке $M(x; y)$ относительно а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) прямой $x = a$; г) прямой $y = b$; д) прямой $y = x$; е) прямой $y = -x$.
- 141.5. Фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии. Докажите, что она имеет центр симметрии.
- 141.6. Существует ли фигура, имеющая ровно две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии?
- 141.7. Четырехугольник имеет ровно две оси симметрии. Верно ли, что он — либо прямоугольник, либо ромб?
- 141.8. Может ли пятиугольник иметь ровно две оси симметрии?
- 141.9. Может ли фигура иметь центр симметрии и ровно одну ось симметрии?
- 141.10. Докажите, что всякий выпуклый четырехугольник с осью симметрии либо вписанный, либо описанный.
- 141.11. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l . Постройте на этой прямой точку M так, чтобы прямая l делила угол AMB пополам.
- 141.12. Внутри острого угла даны точки M и N . Как из точки M направить луч света, чтобы он, отразившись последовательно от сторон угла, попал в точку N ?
- 141.13. AB — диаметр окружности; C, D, E — точки на одной полуокружности $ACDEB$. На диаметре AB взяты: точка F так, что $\angle CFA = \angle DFB$, и точка G так, что $\angle DGA = \angle EGB$. Найдите $\angle FDG$, если дуга AC равна 60° , а дуга BE равна 20° .
- 141.14. Внутри острого угла даны точки M и N . Постройте на сторонах угла точки K и L так, чтобы периметр четырехугольника $MKLN$ был наименьшим.
- 141.15. Постройте треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.
- 141.16. Постройте треугольник по основаниям двух его биссектрис и прямой, на которой лежит третья биссектриса.
- 141.17. Точки M и N расположены по разные стороны от прямой l . Постройте на прямой l такую точку K , чтобы разность отрезков MK и NK была наибольшей.
- 141.18. На плоскости даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой l выбраны точка M , сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N , для которой расстояния от A и B равны: $AN = BN$. Докажите, что точки A, B, M, N лежат на одной окружности.
- 141.19. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам, если известно, что его диагональ AC является биссектрисой угла A .
- 141.20. Постройте четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D , если известно, что в него можно вписать окружность.

141.21. Постройте треугольник, если дана одна его вершина и три прямых, на которых лежат его биссектрисы.

141.22. Постройте треугольник по двум сторонам и разности углов, прилежащих к третьей.

141.23. Постройте треугольник по двум углам и разности противолежащих им сторон.

141.24. Постройте треугольник по разности двух сторон, углу между ними и стороне, противолежащей этому углу.

141.25. AD — биссектриса угла A в треугольнике ABC . Через точку A проведена прямая, перпендикулярная к AD , и из вершины B опущен перпендикуляр BB_1 на эту прямую. Докажите, что периметр треугольника BB_1C больше периметра треугольника ABC .

141.26. Среди всех треугольников ABC с данным углом C и стороной AB найдите треугольник с наибольшим возможным периметром.

141.27. Найдите среди всех треугольников с данным основанием и данной площадью треугольник наименьшего периметра.

141.28. Постройте остроугольный треугольник по основаниям двух его высот и прямой, содержащей третью высоту.

141.29. Постройте треугольник по центру его описанной окружности и двум прямым, на которых лежат высоты.

141.30. (Задача Фаньяно) Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра.

141.31. На плоскости заданы две пересекающиеся прямые, и на них отмечено по одной точке (D и F). Постройте треугольник ABC , у которого биссектрисы CD и AE лежат на данных прямых, а их основания — данные точки D и F .

141.32. Восстановите треугольник, если на плоскости отмечены три точки: O — центр описанной окружности, P — точка пересечения медиан и H — основание одной из высот этого треугольника.

141.33. Найдите углы остроугольного треугольника ABC , если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC .

141.34. Даны прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. Пусть A_1 и B_1 — проекции этих точек на прямую l . Постройте на прямой l такую точку M , чтобы угол AMA_1 был вдвое меньше угла BMB_1 .

141.35. На плоскости дан треугольник ABC и точка M . Известно, что точки, симметричные точке M относительно двух сторон треугольника ABC попадают на окружность, описанную около треугольника ABC . Докажите, что точка, симметричная точке M относительно третьей стороны, также попадает на эту окружность.

141.36. Внутри треугольника ABC с углами $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$ дана точка M такая, что $\angle AMB = 110^\circ$, $\angle BMC = 130^\circ$. Найдите $\angle MBC$.

141.37. Постройте равнобедренный треугольник, основание которого лежало бы на одной стороне данного острого угла, вершина — на другой стороне того же угла, а боковые стороны проходили бы через две данные точки внутри этого угла.

141.38. Даны прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. С помощью циркуля и линейки постройте на прямой l точку X такую, что $AX + BX = a$, где a — данная величина.

142. Поворот

142.1. Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на 60° (либо по часовой стрелке, либо против) относительно точки A вершина B переходит в C .

142.2. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.

142.3. Пусть две прямые пересекаются в точке O под углом α . Докажите, что при повороте на угол α (в одном из направлений) относительно произвольной точки, отличной от O , одна из этих прямых перейдет в прямую, параллельную другой.

142.4. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ постройте точки M и N так, чтобы угол при вершине A равнобедренного треугольника MAN имел данную величину α .

142.5. Пусть M и N — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите величину угла между прямыми AM и BN .

142.6. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный, K и M — середины отрезков BD и EF . Докажите, что треугольник AMK правильный.

142.7. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы его вершины лежали на трех данных параллельных прямых.

142.8. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на данной окружности, другая — на данной прямой, а третья — в данной точке.

142.9. Постройте квадрат три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.

142.10. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в данной точке и с вершинами острых углов на двух данных окружностях.

142.11. Точка P лежит внутри равностороннего треугольника ABC . Докажите, что существует треугольник стороны которого равны отрезкам PA , PD и PC .

142.12. Впишите квадрат в данный параллелограмм.

142.13. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE ; M и P — середины отрезков AD и BE . Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

142.14. Дан ромб $ABCD$ с острым углом A , равным 60° . Прямая MN отсекает от сторон AB и BC отрезки MB и NB , сумма которых равна стороне ромба. Найдите углы треугольника MDN .

142.15. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC , взята произвольная точка M . Докажите с помощью поворота, что $AM = BM + CM$.

142.16. Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B . Докажите с помощью поворота, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

142.17. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

142.18. Дан правильный треугольник ABC . Некоторая прямая, параллельная прямой AC , пересекает прямые AB и BC в точках M и P , соответственно. Точка D — центр

правильного треугольника PMB , точка E — середина отрезка AP . Определите углы треугольника DEC .

142.19. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC_1 , AB_1C и A_1BC . Пусть P и Q — середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 . Докажите, что треугольник APQ правильный.

142.20. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P . Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P , из A_2 — на A_3P , из A_3 — на A_4P , из A_4 — на A_1P . Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

142.21. Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры BK , BL , DM , DN из вершин B и D . Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны друг другу.

142.22. Даны две точки и окружность. через данные точки проведите две секущие, отрезки которых внутри данной окружности были бы равны и пересекались бы под данным углом α .

142.23. На сторонах треугольника ABC построены вне треугольника равносторонние треугольники BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 , и проведены отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что эти отрезки равны между собой.

142.24. Точка M лежит внутри квадрата $ABCD$, а точка K — вне, причем треугольники AMD и CKD — равносторонние. Докажите, что точки B , M и K лежат на одной прямой.

142.25. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, причем $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Найдите угол APB .

142.26. Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные их вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат.

142.27. Дан треугольник ABC . На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

142.28. (Задача Ферма) Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

143. Параллельный перенос

- 143.1. Дан угол ABC и прямая l . Параллельно прямой l проведите прямую, на которой стороны угла ABC высекают отрезок данной длины.
- 143.2. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную данному отрезку.
- 143.3. Постройте отрезок, равный и параллельный данному, так, чтобы его концы лежали на данной прямой и на данной окружности.
- 143.4. Постройте отрезок, равный и параллельный данному, так, чтобы его концы лежали на двух данных окружностях.
- 143.5. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M . Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC , стороны которого равны AM , BM , CM , DM .
- 143.6. Две окружности радиуса R касаются в точке K . На одной из них взята точка A , а на другой — точка B , причем $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что $AB = 2R$.
- 143.7. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N . Пусть A и B — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN . Докажите, что $MN^2 + AB^2 = 4R^2$.
- 143.8. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую две данные деревни A и B , чтобы путь $AMNB$ из деревни A в деревню B был кратчайшим (берега реки считаются параллельными прямыми, мост предполагается перпендикулярным к реке).
- 143.9. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы часть ее, заключенная внутри окружностей, имела данную длину.
- 143.10. Параллельно данной прямой проведите прямую, на которой две данные окружности высекали бы хорды равной длины.
- 143.11. Параллельно данной прямой проведите прямую, на которой две данные окружности высекали бы хорды, сумма (или разность) длин которых имела бы заданную величину a .
- 143.12. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем углам и сторонам $AB = a$ и $CD = b$.
- 143.13. Постройте четырехугольник по трем сторонам и углам, прилежащим к четвертой.
- 143.14. Постройте четырехугольник по диагоналям, углу между ними и двум каким-нибудь сторонам.
- 143.15. Постройте выпуклый четырехугольник по четырем сторонам и отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон.
- 143.16. Среди всех четырехугольников с данными диагоналями и данным углом между ними найдите четырехугольник наименьшего периметра.
- 143.17. Дан отрезок AB . Найдите на плоскости множество точек C таких, что в треугольнике ABC медиана проведенная из вершины A , равна высоте, проведенной из вершины B .
- 143.18. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BN . Известны отрезки $KN = a$ и $BD = b$. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKN .

143.19. Даны непересекающиеся хорды AB и CD некоторой окружности. Постройте на этой окружности такую точку X , чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF , имеющий данную длину a .

143.20. Даны окружность, две точки P и Q этой окружности и прямая. Найдите на окружности такую точку M , чтобы прямые MP и MQ отсекали на данной прямой отрезок AB данной величины.

143.21. Через данную точку проведите прямую, на которой две данные окружности высекали бы равные хорды.

144. Гомотетия

144.1. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N так, что $MN \parallel BC$. На отрезке MN взята точка P так, что $MP = MN/3$. Прямая AP пересекает сторону BC в точке Q . Докажите, что $BQ = BC/3$.

144.2. Постройте прямоугольный треугольник по гипotenузе и отношению катетов.

144.3. Постройте прямоугольный треугольник по данному отношению одного катета к гипotenузе и второму катету.

144.4. На плоскости даны точки A и B и прямая l . По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC , если точка C движется по прямой l ?

144.5. На основаниях трапеции как на сторонах построены во внешнюю сторону два квадрата. Докажите, что отрезок, соединяющий центры квадратов, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

144.6. Постройте трапецию, если даны: отношение ее оснований, два угла при одном из этих оснований и высота.

144.7. Даны два отрезка, лежащие либо на одной прямой, либо на двух параллельных. Сколько существует гомотетий, переводящих эти отрезки друг в друга?

144.8. Докажите, что две касающиеся окружности гомотетичны относительно их точки касания.

144.9. Две окружности касаются в точке K . Прямая, проходящая через точку K , пересекает эти окружности в точках A и B . Докажите, что касательные к окружностям, проведенные через точки A и B , параллельны.

144.10. Сколько существует гомотетий, переводящих друг в друга две окружности?

144.11. Постройте общую касательную к двум данным окружностям.

144.12. Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих данную точку, лежащую вне данной окружности, с точками этой окружности.

144.13. Через данную точку проведите секущую к данной окружности так, чтобы внешняя часть секущей была равна внутренней.

144.14. С помощью циркуля и линейки постройте хорду данной окружности, которую два данных радиуса разделили бы на три равные части.

144.15. Через точку M , лежащую на данной окружности, проведите хорду, которая данной хордой AB делилась бы пополам.

144.16. Постройте окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности в данной на ней точке.

144.17. Постройте окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

144.18. Через данную точку проведите окружность, касающуюся данных прямой и окружности.

144.19. В данный треугольник впишите квадрат так, чтобы одна сторона квадрата была расположена на стороне треугольника, а остальные вершины квадрата лежали на двух других сторонах треугольника.

144.20. Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, площади которых равны S_1 и S_2 , расположены так, что лучи A_1B_1 и A_2B_2 , B_1C_1 и B_2C_2 , C_1A_1 и C_2A_2 параллельны, но проти-

воположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 .

144.21. На окружности фиксированы точки A и B , а точка C движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC .

144.22. Вершины K и N треугольника KMN перемещаются соответственно по сторонам AB и AC угла BAC , а стороны треугольника KMN соответственно параллельны трем данным прямым. Найдите геометрическое место вершин M .

144.23. Через точку D , взятую на стороне AB треугольника ABC , проведена прямая, параллельная AC , и пересекающая сторону BC в точке E . Докажите, что AE , CD и медиана, проведенная через вершину B , пересекаются в одной точке.

144.24. В данный параллелограмм впишите ромб так, чтобы стороны ромба были параллельны диагоналям параллелограмма, а вершины ромба лежали бы на сторонах параллелограмма.

144.25. В данный треугольник впишите другой треугольник, стороны которого соответственно параллельны трем данным прямым.

144.26. На сторонах AB и AC треугольника ABC постройте соответственно точки M и N так, что $AM = MN = NC$.

144.27. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

144.28. Постройте треугольник ABC , если заданы его наименьший угол $\angle A$ и отрезки длины $d = AB - BC$ и $e = AC - BC$.

144.29. Впишите в данный угол окружность, проходящую через данную внутри угла точку.

144.30. Впишите в данный угол окружность, касающуюся данной окружности.

144.31. (Прямая Эйлера) Докажите, что точка пересечения медиан, ортоцентр и центр описанной окружности треугольника лежат на одной прямой. (Рассмотрите $H_M^{1/2}$, где M — точка пересечения медиан).

144.32. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M ; P — произвольная точка. Прямая l_a проходит через точку A параллельно прямой PA_1 , прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что

а) прямые l_a , l_b и l_c пересекаются в одной точке Q ;

б) точка M лежит на отрезке PQ , причем $PM : MQ = 1 : 2$.

144.33. Сторона C_1C_2 прямоугольника C_1C_2PR расположена на стороне AB треугольника ABC , сторона B_1B_2 прямоугольника B_1B_2QP — на стороне AC , сторона A_1A_2 прямоугольника A_1A_2RQ — на стороне BC , причем точки P , Q и R лежат внутри треугольника ABC . Докажите, что прямые AP , BR и CQ пересекаются в одной точке.

144.34. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D , DM — ее диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K . Докажите, что $AK = DC$.

144.35. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO , которая пересекает высоту AH в точке E . Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

144.36. Рассмотрим всевозможные пары касающихся внешним образом окружностей, вписанных в круговой сегмент. Докажите, что общие внутренние касательные каждой такой пары проходят через одну точку.

144.37. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) внешним образом касаются друг друга. Прямая касается этих окружностей в точках M и N . В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C . Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найдите CD .

144.38. В полукруг помещены две окружности диаметром d и D ($d < D$) так, что каждая окружность касается дуги и диаметра полукруга, а также другой окружности. Через центры окружностей проведена прямая, пересекающая продолжение диаметра полукруга в точке M . Из точки M проведена касательная к дуге полукруга (N — точка касания). Найдите длину отрезка MN .

144.39. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшего возможного периметра.

144.40. Опустим из любой точки P биссектрисы угла A треугольника ABC перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на его стороны BC, CA и AB соответственно. Пусть R — точка пересечения прямых PA_1 и B_1C_1 . Докажите, что прямая AR делит сторону BC пополам.

144.41. Равные окружности S_1 и S_2 касаются внутренним образом окружности S в точках A_1 и A_2 . Пусть C — некоторая точка окружности S , прямые A_1C и A_2C пересекают окружности S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2 соответственно. Докажите, что $B_1B_2 = (?)A_1A_2$.

144.42. На плоскости расположены три окружности S_1, S_2, S_3 радиусов r_1, r_2, r_3 — каждая вне двух других, причем $r_1 > r_2$ и $r_1 > r_3$. Из точки пересечения внешних касательных к окружностям S_1 и S_2 проведены касательные к окружности S_3 , а из точки пересечения внешних касательных к окружностям S_1 и S_3 проведены касательные к окружности S_2 . Докажите, что последние две пары касательных образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность, и найдите ее радиус.

144.43. На отрезках AB , BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2 , BCC_1B_2 и CAA_1C_2 . Докажите, что перпендикуляры к отрезкам A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 , восставленные в их серединах, пересекаются в одной точке.

145. Контрольная работа. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

Вариант 1

145.1. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K , а продолжение стороны CD — в точке M . Известно, что $CM = 1$, $BK = 3$. Найдите стороны параллелограмма.

145.2. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 5, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.

145.3. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ — ромб. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30° . Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.

* * *

145.4. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC , точка N — середина стороны CD , P — точка пересечения отрезков DM и BN . Докажите, что угол MAN равен углу BPM .

Вариант 2

145.5. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 5$, $AD = 8$ пересекает сторону BC в точке P , а продолжение стороны CD — в точке Q . Найдите CQ и BP .

145.6. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с периметром, равным 25, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Периметр получившегося четырехугольника равен 16. Найдите стороны треугольника.

145.7. Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Известно, что $AB = BM = 6$. Найдите наибольшую сторону прямоугольника.

* * *

145.8. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC , точка N — середина стороны CD , P — точка пересечения отрезков DM и BN . Докажите, что угол MAN равен углу BPM .

Вариант 3

145.9. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC . Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках M и N , причем $MN = 12$. Найдите стороны параллелограмма.

145.10. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Периметр получившегося четырехугольника равен 12. Найдите боковые стороны треугольника.

145.11. Прямая, проходящая через центр прямоугольника перпендикулярно диагонали, пересекает большую сторону прямоугольника под углом, равным 60° . Отрезок этой прямой, заключенный внутри прямоугольника, равен 10. Найдите большую сторону прямоугольника.

146. Контрольная работа. Площадь, 1

Вариант 1

146.1. Точки M и N расположены на стороне BC треугольника ABC , а точка K — на стороне AC , причем $BM : MN : NC = 1 : 1 : 2$ и $CK : AK = 1 : 4$. Известно, что площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь четырехугольника $AMNK$.

146.2. Проекция вершины меньшего основания равнобедренной трапеции на ее большее основание делит его на отрезки, равные a и b . Найдите площадь трапеции, если угол при ее меньшем основании равен 150° .

146.3. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны между собой. Найдите площадь четырехугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

* * *

146.4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, площадь которого равна 25, проведены диагонали. Известно, что площадь треугольника ABC вдвое больше площади треугольника ABD , а площадь треугольника BCD втройне больше площади треугольника ADC . Найдите площади треугольников ABC , ABD , ACD и BCD .

Вариант 2

146.5. Точки M и N расположены на стороне AC треугольника ABC , а точки K и L — на стороне AB , причем $AM : MN : NC = 1 : 3 : 1$ и $AK = KL = LB$. Известно, что площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь четырехугольника $KLNM$.

146.6. Найдите угол при основании равнобедренной трапеции, если известно, что ее площадь равна произведению отрезков, на которые высота, проведенная из вершины меньшего основания, делит большее основание.

146.7. Точки M и N расположены соответственно на сторонах AB и BC треугольника ABC . Отрезок, соединяющий середины MN и AC , равен отрезку, соединяющему середины AN и CM . Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = a$, $BC = b$.

* * *

146.8. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 28, пересекаются в точке O . Найдите площади треугольников AOB , BOC , COD и DOA , если известно, что площадь треугольника AOB в 2 раза больше площади треугольника COD , а площадь треугольника BOC в 18 раз больше площади треугольника DOA .

Вариант 3

146.9. Точки E , F , M расположены соответственно на сторонах AB , BC , AC треугольника ABC . Отрезок AE составляет одну треть стороны AB , отрезок BF составляет одну шестую стороны BC , отрезок AM составляет две пятых стороны AC . Найдите отношение площади треугольника EFM к площади треугольника ABC .

146.10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка L является серединой стороны BC , точка M является серединой AD , точка N является серединой стороны AB . Найдите отношение площади треугольника LMN к площади четырехугольника $ABCD$.

146.11. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 1, взяты точки: K — на AB , L — на BC , M — на CD , N — на AD . При этом $AK/KB = 2$, $BL/LC = 1/3$, $CM/MD = 1$, $DN/NA = 1/5$. Найдите площадь шестиугольника $AKLCMN$.

Ответы

146.1: $13/20$; 146.2: $ab/2$; 146.3: 48; 146.4: 20, 10, 15, 5; 146.5: $7/15$; 146.6: 45° ; 146.7: $ab/2$; 146.8: 6, 18, 3, 1.

147. Контрольная работа. Средняя линия треугольника

Вариант 1

147.1. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны и равны между собой. Одна из диагоналей четырехугольника равна 10. Найдите вторую диагональ.

147.2. Медиана BD треугольника ABC равна 14 и образует угол 30° со стороной BC . Найдите высоту, проведенную из вершины A .

147.3. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах медиан треугольника с периметром, равным 32.

* * *

147.4. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ втрое больше диагонали BD и пересекается с ней под углом в 60° . Найдите отрезок, соединяющий вершину D с серединой стороны BC , если $AC = 24$.

Вариант 2

147.5. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны 6 и пересекаются под углом 60° . Найдите меньшую диагональ четырехугольника.

147.6. Острый угол A ромба $ABCD$ равен 45° , проекция стороны AB на сторону AD равна 12. Найдите расстояние от центра ромба до стороны CD .

147.7. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведенные из вершин B и C , равны 7 и 9, а медиана AM равна 8. Точки P и Q симметричны точке M относительно сторон AC и AB соответственно. Найдите периметр четырехугольника $APMQ$.

* * *

147.8. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ втрое больше диагонали BD и пересекается с ней под углом в 60° . Найдите отрезок, соединяющий вершину D с серединой стороны BC , если $AC = 24$.

148. Контрольная работа. Трапеция

Вариант 1

148.1. Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины меньшего основания, делит ее большее основание на отрезки, равные 4 и 8. Найдите основания трапеции.

148.2. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол, равный 30° , с одним из оснований. Найдите это основание, если на нем лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

148.3. Средняя линия трапеции равна 4, а углы при одном из оснований равны 40° и 50° . Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.

* * *

148.4. В выпуклом четырехугольнике ABCD длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 1. Если стороны BC и AD продолжить до их пересечения, то угол, образованный этими прямыми будет равен 90° . Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

Вариант 2

148.5. Найдите меньшее основание равнобедренной трапеции, если высота, проведенная из вершины меньшего основания, делит большее основание на отрезки, один из которых на 5 больше другого.

148.6. Один из углов прямоугольной трапеции равен 120° , большее основание равно 12. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей, если известно, что меньшая диагональ трапеции равна ее большему основанию.

148.7. В трапеции углы при одном из оснований равны 20° и 70° , а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите основания трапеции, если ее средняя линия равна 4.

* * *

148.8. В выпуклом четырехугольнике ABCD длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найдите величину угла, образованного продолжением сторон AB и CD.