ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

А. С. Холево

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании Комментарии к главам и библиография были обновлены и расширены. За последние годы получило значительное развитие квантовое (некоммутативное) обобщение теории вероятностей, математической статистики и теории информации. Разработана теория квантовых случайных процессов, объединяющая повторные и непрерывные квантовые измерения с динамикой открытых квантовых систем. Этот материал получил отражение в книге [152], где читатель найдет и обширную библиографию. С появлением идей квантовых вычислений получила импульс квантовая теория информации, которая зародилась более чем полвека назад и сформировалась как самостоятельная дисциплина в 1990-е. Этот прогресс, в частности, стимулировал развитие асимптотических методов квантовой теории оценивания. Введение в этот круг вопросов можно найти в книгах [171], [158], [153].

Настоящее издание не могло бы появиться без настойчивой поддержки Витторио Джованнетти и Розарио Фацио, которым автор выражает свою признательность. Автор благодарит доктрессу Луизу Феррини, *Edizioni della Normale*, за профессиональную и эффективную помощь в подготовке рукописи к печати.

Александр Холево
Москва, сентябрь 2010.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Когда эта книга была издана впервые более двадцати лет назад, автор адресовал ее широкому кругу читателей, как математиков, так и физиков, с намерением познакомить их с новыми перспективами и возможностями, которые несет взаимопроникновение идей математической статистики и квантовой теории. За прошедшее время подобный подход приобрел еще большую актуальность. С одной стороны, стали более очевидны и общепризнаны его преимущества в вопросах оснований квантовой теории, связанных с квантовыми измерениями.

С другой стороны, в современных высокоточных физических экспериментах исследователи все более осваивают возможности оперирования элементарными квантовыми системами, такими как одиночные ионы, атомы и фотоны. Приобретает большое значение вопрос об извлечении максимально возможной информации из состояния данной квантовой системы. Например, в обсуждаемых сейчас предложениях квантовых вычислений информация записывается в состояниях элементарных квантовых ячеек памяти — q-битов, а считывается при помощи квантовых измерений. Со статистической точки зрения, измерение дает оценку квантового состояния — либо всего состояния в целом, либо некоторых его компонент (параметров). Так возникает новый интерес к квантовой теории оценивания, начала которой изложены в настоящей книге. Одним из существенных последствий проникновения идей математической статистики в теорию квантового измерения является широкое использование разложений единицы в гильбертовом пространстве системы (в зарубежной литературе — POVM, положительных операторно-значных мер), описывающих статистику решающих процедур. За прошедшее время разложения единицы стали стандартным инструментом как в математической, так и в физической (правда, в основном, зарубежной) литературе по квантовым измерениям. Все это, на наш взгляд, оправдывает появление второго русского издания книги, тем более, что первое стало библиографической редкостью.

В настоящее издание включено Дополнение, в котором подробно рассмотрена продолжающая вызывать живой интерес проблема скрытых параметров в квантовой механике. Кроме того, издание снабжено комментариями, в которых отражены некоторые новые работы и достижения.

Академик К.А. Валиев
25 августа 2003 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическим аппаратом современной квантовой механики служит теория операторов в гильбертовом пространстве. Операторы играют здесь такую же основополагающую роль, что в функции в классической механике, теории вероятностей и статистике. Однако если в классических теориях использование математического аппарата функций базируется на интуитивно ясных предпосылках (которые кажутся настолько очевидными, что классическая механика как бы сливается с лежащей в основе ее математикой), то в квантовой теория ситуация носят иной характер.

Исторически «матричная механика» Гейзенберга и «волновая механика» Шредингера, непосредственно предшествовавшие современной квантовой теории, возникли как результат ряда удачных догадок, в ходе подбора математических объектов, способных отразить непонятные особенности, в частности, своеобразное сочетание дискретности в непрерывности в поведении микрообъектов. Разработанная позднее Борном и другими «вероятностная интерпретация» прояснила значение элементов операторного формализма, установив правила, по которым они должны связываться с реально наблюдаемыми величинами, однако и в этих постулатах оставалась, во видимости, значительная доля «произвола теоретиков». Основным доводом в пользу непривычного формализма продолжало оставаться поразительное соответствие построенных на его основе предсказаний с экспериментальными данными. Такая ситуация породила множество попыток, с одной стороны, найти классическую альтернативу квантовой механики, которая столь же удовлетворительно описывала бы существующий массив экспериментальных данных, с другой стороны, наоборот, обосновать с физических и философских позиций неизбежность новой механики в области явлений микромира. Появилась и продолжает пополняться обширная физико-философская литература, посвященная основаниям квантовой теории.

Наряду с этим ощущается потребность и в математически более определенном рассмотрении структуры квантовой теории и «словаря», устанавливающего соответствие между элементами формализма и физической реальности. Из работ такого характера в первую очередь следует упомянуть имеющиеся в русском переводе монографии фон Неймана «Математические основы квантовой механика» и Макки «Лекции по математическим основам квантовой механики». Настоящая книга примыкает к ним по направленности, но значительно отличается по содержанию и методологическим предпосылкам, учитывая недавний прогресс в математической теории квантового измерения.

Первые три главы книги образуют введение в основания квантовой механики, адресованное читателю, который интересуется структурой квантовой теории и ее связями с классической теорией вероятностей. Несмотря на математический характер изложения, оно не является чисто «аксиоматическим».

Его цель — выявить происхождение основных элементов квантовомеханического формализма, оставаясь в рамках общепринятой вероятностной интерпретации и базируясь, насколько это возможно, на классических вероятностных концепциях.

Обращение к этим вопросам не было для автора самоцелью — разобраться в них оказалось необходимым для решения конкретных задач о границах точности квантовых измерений, возникших в приложениях. До недавнего времени к ним не было сколько-нибудь единого и четкого подхода. Методы математической статистики, приспособленные для решения аналогичных задач в классической вероятностной постановке, нуждались в радикальной переработке с позиций квантовой теория. Вторая часть книги — главы IV-VI — содержащая в основном новые результаты, посвящена квантовой теории оценивания — аналогу соответствующего раздела математической статистики.

Перейдем к изложению краткого содержания глав. В главе I вводятся основные понятия состояния и измерения. В отличие от традиционного способа изложения, когда это делается постулативно, здесь эти понятия выводятся из анализа статистического описания экспериментальной ситуации. Помимо чисто методических преимуществ, такой подход уже на начальной стадии приводит к содержательному расширению традиционной концепции квантового измерения, идущей от Дирака и фон Неймана. В математическом плане это приводит к произвольным (вообще говоря, неортогональным) разложениям единицы в гильбертовом пространстве вместо прежних ортогональных (спектральных мер) и к отказу от самосопряженности как необходимого атрибута наблюдаемой. Надо сказать, что неортогональные разложения единицы не являются какой-то «экзотикой» в физике; пример дают «переполненные» системы векторов типа «когерентных состояний», играющие все большую роль в теоретической физике и приложениях. Новая концепция измерения является стержнем всего дальнейшего изложения.

Цель первой главы состоит также в том, чтобы привлечь внимание к общему понятию статистической модели, которое может оказаться полезным и за пределами квантовой теории. Благодаря ему получает новое освещение проблема скрытых переменных [1] (во всяком случае, тот ее аспект, который поддается математическому анализу).

Во второй главе вводится аппарат квантовой механики — элементы теории операторов в гильбертовом пространстве. Наряду с изложением традиционного материала (ядерные операторы, спектральная теория) много внимания уделено неортогональным разложениям единицы. Новым моментом здесь также является введение пространств $\mathscr{L}^2$, связанных с квантовым состоянием и играющих ту же роль, что гильбертовы пространства случайных величин с конечным вторым моментом в теории вероятностей. В этих пространствах получают простое и естественное обоснование некоторые действия над неограниченными операторами.

Фундаментальную роль в квантовой теории играет понятие симметрии. В главе III на простейших квантовых моделях показано, каким образом свойства

[1] Мы предпочитаем говорить о «скрытых переменных», а не о «скрытых параметрах», чтобы взбежать ненужных ассоциаций с параметрами в статистической теория оценивания. Такой перевод английского термина «hidden variables» представляется также более точным.

симметрии позволяют установить связь между физическими параметрами и вполне определенными разложениями единицы в гильбертовом пространстве. В частности, строятся разложения единицы, канонически отвечающие таким величинам, как угол поворота, фаза гармонического осциллятора, время достижения, а также паре величин координата—скорость. Измерения этих величин не имели определенного статута в квантовой механике, поскольку самосопряженных операторов (ортогональных разложений единицы) с необходимыми свойствами симметрии вообще не существует.

Квантовомеханическая природа объекта находит выражение в принципиальных ограничениях на возможности производимых над ним измерений. Прогресс физического эксперимента заставляет задуматься о необходимости правильного учета квантовомеханических ограничений на точность измерений. Важным типом таких ограничений являются известные соотношения неопределенностей для пар канонически сопряженных величии. Однако, если рассматривать соотношение неопределенностей не как априорный физический принцип, дающий порядковую оценку, а как строгое неравенство, являющееся математическим следствием основных положений квантовой теории, то ситуация оказывается простой только в случае канонической пары «координата — импульс». В главе IV строго устанавливаются соотношения неопределенностей «угол—угловой момент», «фаза — число квантов» и другие неравенства. Они оказываются тесно связанными с квантовым аналогом теоремы Ханта — Стейна, известной в математической статистике.

Высокая точность характерна, в частности, для измерений в квантовой оптике. Примером ситуации, в которой может оказаться необходимым учет квантовых ограничений, является передача сигнала по оптическому каналу связи, в котором уровень «квантового шума» сравним с уровнем классического теплового шума или превосходит его. Здесь возникают те же задачи, что и в обычной статистической теории связи, однако они уже не могут быть решены и даже правильно поставлены в рамках математической статистики в силу квантовомеханической природы носителя информации.

Глава V посвящена так называемым гауссовским состояниям, которые, в частности, возникают при описании оптического сигнала на фоне «квантового шума». Изложение построено так, чтобы проследить и в максимальной мере использовать замечательную аналогию с гауссовскими распределениями теории вероятностей. Важную роль здесь играет понятие квантовой характеристической функции. В главе VI рассматривается задача измерения среднего значения гауссовского состояния, которую можно интерпретировать как выделение сигнала из аддитивного квантового гауссовского шума. Дается вывод общих неравенств, подобных неравенству Рао—Крамера в математической статистике. С их помощью удается охарактеризовать наиболее точное измерение среднего значения.

Настоящая книга, конечно, не может и не ставит цель заменить стандартное руководство по квантовой механике; целый ряд важнейших вопросов, составляющих основное содержание таких курсов, в ней рассматривается фрагментарно, либо вообще не затрагивается (например, теория возмущений). Автор не стремился также охватить все, что относится к квантовым измерениям. Освещены только те вопросы, которые касаются статистики результатов измерения и не требуют рассмотрения изменения квантового состояния после измерений; в частности, отсутствует обсуждение последовательных измерений, квантовых случайных процессов и динамики «открытых» систем, в математической теории которых за последнее время достигнут определенный прогресс. Краткий обзор современного состояния этих и других вопросов, имеющих непосредственное отношение к излагаемому материалу, читатель найдет в комментариях.

Желание совместить строгость рассуждений с доступностью заставило автора отказаться от наиболее общего и, быть может, математически наиболее «экономного» способа изложения. Было сочтено возможным не углубляться в вопросы, связанные с измеримостью и интегрированием; подробное и общее рассмотрение этих вопросов интересующийся читатель найдет в других работах, на которые даются ссылки в комментариях. Необходимым для понимания всего материала является владение основными понятиями теории вероятностей, а для глав IV и VI — и математической статистики.

Наиболее элементарной в техническом отношении является глава I, использующая лишь аппарат линейной алгебры. В главе II дается неформальный обзор сведений на теории операторов, причем теоремы, как правило, не доказываются, а сопровождаются пояснениями и примерами. Материал, необходимый для физических приложений в гл. III, излагается в §§ 1—6 гл. II; читателю, знакомому с функциональным анализом, будет достаточно бегло их просмотреть. С другой стороны, читатель, знающий квантовую механику, может опустить в гл. III подробное математическое рассмотрение таких вопросов, как гармонический осциллятор, угловой момент, спин, включенное для замкнутости изложения, и сосредоточиться на менее известных ему вещах.

В книге активно используется символика Дирака, но для обозначения скалярного произведения употребляются не угловые, а круглые скобки, как это принято в математической литературе. Угловые скобки, ассоциирующиеся с символом усреднения в статистической физике, обозначают другое скалярное произведение, задающее корреляционную функцию двух наблюдаемых. Для квантового состояния (оператора плотности) используется символ S (а не ρ), родственный символу P для классического состояния (распределения вероятностей), в остальном обозначения стандартны.

Автор благодарен Д. П. Желобенко и Ю. М. Широкову, которые прочли рукопись книги и сделали ряд полезных замечаний.

Глава I

ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

§ 1. Состояния и измерения

В основе теоретической модели реального явления или объекта лежат в конечном счете данные опыта; совокупность всевозможных экспериментов вместе с полным описанием их результатов образует «остов» всякой теоретической модели. Рассмотрим схематизированное описание произвольного эксперимента и проследим, как отсюда возникают основные элементы теоретической модели.

Во всяком эксперименте можно выделить две основные стадии. В первой стадии, стадии приготовления, фиксируется определенная экспериментальная ситуация, т. е. устанавливаются исходные условия, задаются «входные данные» эксперимента. В следующей стадии измерения определенным образом «приготовленный» объект воздействует на тот или иной измерительный прибор, результатом чего в каждом индивидуальном эксперименте являются те или иные «выходные данные» (рис. 1). Важнейшим условием, которому должен удовлетворять всякий научный эксперимент, является условие воспроизводимости, возможности неограниченного повторения данного измерения в данной экспериментальной ситуации. Рассмотрим последовательность одинаковых и независимых повторений некоторого эксперимента. Результаты подобных индивидуальных экспериментов, как правило, не будут строго одинаковы. Практически всегда получаемые результаты подвержены случайному разбросу, амплитуда которого варьируется в зависимости от характера эксперимента и природы исследуемого объекта. Наличие ошибок измерения является объективным фактом, мимо которого не может пройти ни одна разумная теория эксперимента. Существуют, однако, обширные классы явлений, для которых разброс экспериментальных результатов оказывается настолько несущественным, что его вообще можно не принимать в расчет. Это относится, например, к механическому поведению макроскопических объектов или к процессам, протекающим в электрических цепях. Соответствующие теории — классическая механика и теория электрических цепей — исходят из предпосылки, что возможно сколь угодно точное, в идеале — абсолютно точное измерение параметров, характеризующих поведение объекта. В таких случаях говорят, что объект допускает детерминированное описание. Подчеркнем, что детерминированное описание обычно является лишь некоторым приближением к реальности, справедливым лишь постольку, поскольку оно согласуется с данными опыта.

Плодотворность детерминистических представлений в классической теоретической физике 18—19 вв. породила иллюзию универсальности детерминированного описания. Однако по мере проникновения экспериментальной физики в область явлений микромира становилась все более ясной неприменимость в этой области детерминированного описания, заимствованного из классической механики, и необходимость привлечения статистических концепций. Характерный пример ситуации, в которой приходится существенно учитывать разброс результатов измерения, дают эксперименты по рассеянию частиц. В подобных экспериментах невозможно точно предсказать, в каком направлении рассеется данная частица — можно лишь говорить о вероятности рассеяния в том или ином направлении. Можно было бы привести целый ряд других примеров, однако заинтересованный читатель легко найдет их в курсах квантовой физики. В настоящее время необходимость статистического описания микромира можно считать общепризнанной.

Говоря о возможности статистического описания, мы подразумеваем, что рассматриваемое явление удовлетворяет следующему фундаментальному требованию, включающему в себя условие воспроизводимости, которое для удобства ссылок мы будем называть статистическим постулатом: *всякий эксперимент допускает в принципе неограниченное число повторений; индивидуальные результаты в последовательности одинаковых, независимых экспериментов могут быть различны, однако появление того или иного результата в достаточно длинной последовательности характеризуется определенной частотой* (устойчивость частот). Тогда, абстрагируясь от практической невозможности произвести неограниченную последовательность одинаковых экспериментов, можно принять, что результаты эксперимента допускают теоретическое описание в виде вероятностей тех или иных исходов. Точнее говоря, следует различать понятия индивидуального эксперимента, результатом которого являются конкретные данные, и эксперимента как совокупности всевозможных индивидуальных реализаций. Понимая эксперимент именно в этом смысле, естественно считать его конечным результатом распределение вероятностей. При этом детерминированная зависимость результатов эксперимента от входных данных уступает место статистической: функцией входных данных является распределение вероятностей результатов измерения.

Примером эксперимента как совокупности индивидуальных реализаций являются распространенные в физике наблюдения над пучками идентичных, независимых частиц. Предположим, что для регистрации частиц, рассеянных на некотором препятствии, используется экран-детектор, попадание в который индивидуальной частицы вызывает, например, почернение фотоэмульсии. Тогда в результате экспозиции достаточно интенсивного пучка частиц на экране образуется некоторое распределение темных и светлых пятен, которое по существу дает представление о плотности распределения вероятностей попадания индивидуальной частицы. Хорошо известные из оптики дифракционные картины, образующиеся при рассеянии естественного света (который есть не что иное, как хаотический поток огромного числа фотонов), дают визуальное представление плотности распределения вероятностей для индивидуального фотона.

Разумеется, статистическое описание не является прерогативой явлений микромира. При исследовании физических объектов, состоящих из огромного числа частиц, таких как газы, жидкости или кристаллы, экспериментатор имеет возможность варьировать по своему произволу лишь весьма ограниченное число входных данных — таких как объем, давление, температура. Огромное количество переменных, характеризующих подробности поведения составных частей системы, остается вне контроля исследователя; их неконтролируемые изменения могут оказывать влияние на индивидуальные результаты измерений, вызывая флуктуации, учет которых имеет существенное значение для понимания механизма явлений, происходящих в таких больших системах. Статистика наблюдений играет важнейшую роль в вопросах передачи информации, где флуктуации параметров физического носителя информации являются источником разного рода «шумов», искажающих сообщение.

Подобная ситуация может иметь место и в биологических исследованиях. Например, проводя апробацию какого-либо метода лечения, исследователь располагает лишь ограниченным набором «входных данных», характеризующих его пациентов (возраст, пол, группа крови и т. п.). Однако эффект лечения в каждом индивидуальном случае будет определяться, вообще говоря, не только этими «интегральными» параметрами, но и целым рядом других, неучтенных либо не поддающихся учету внутренних факторов. Таким образом, эффект лечения, или, на нашем языке, «результат измерения», не является, вообще говоря, однозначной функцией известных данных пациента; в таких случаях статистический подход бывает весьма уместным и плодотворным.

На этих двух примерах мы видели, что источником случайного разброса в результатах измерения может быть неопределенность значений некоторых «скрытых переменных», находящихся вне контроля экспериментатора. Природа статистичности поведения объектов микромира не столь ясна, хотя пятидесятилетний опыт успешного применения статистических концепций в квантовой теории несомненно свидетельствует о том, что они дают правильную картину.

Мы не будем затрагивать здесь вопроса о природе статистичности в микрофизике, хотя и коснемся некоторых математических аспектов соответствующей «проблемы скрытых переменных» в § 7. Основное внимание мы уделим здесь следствиям сформулированного выше статистического постулата для произвольного объекта, удовлетворяющего этому требованию. Мы покажем, что уже на таком общем уровне возникают фундаментальные понятия состояния и измерения, играющие, в частности, столь важную роль в квантовой теории.

Условно представим себе объект как «черный ящик», на «входе» которого могут создаваться те или иные исходные условия $\tilde{S}$. После того как объект приготовлен определенным образом, экспериментатор производит то или иное измерение и получает данные u. Выходные данные u могут иметь различный характер. Они могут быть дискретными, например, в том случае, когда измерительный прибор является пороговым устройством, регистрирующим наличие или отсутствие определенной частицы, либо непрерывными, если прибор имеет шкалу или несколько шкал. Выходными данными могут быть показания нескольких приборов. Наконец, результатом измерения может быть целая траектория — фотография следа частицы. Чтобы дать единообразное рассмотрение всевозможных ситуаций, мы примем, что *множество индиви-*

дуальных результатов измерения образует некоторое измеримое пространство U с σ-алгеброй измеримых подмножеств $\mathscr{A}(U)$. Измеримому подмножеству $B \subset U$ соответствует событие: результат измерения u лежит в B[1].

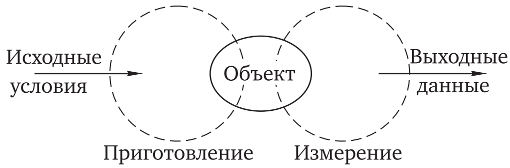

Рис. 1.

Согласно статистическому постулату, результат индивидуального эксперимента можно рассматривать как реализацию некоторой случайной величины, принимающей значения в U. Пусть $\mu_{\widetilde{S}}(\mathrm{d}u)$ — распределение вероятностей этой случайной величины. Индекс $\widetilde{S}$ отражает зависимость статистики результатов измерения от процедуры приготовления, т. е. от исходных условий эксперимента, так что

$$\mu_{\widetilde{S}}(B) = \mathbf{Pr}\{u \in B \mid \widetilde{S}\}, \qquad B \in \mathscr{A}(U)$$

есть условная вероятность получить результат $u \in B$ при исходных условиях $\widetilde{S}$. Можно сказать, что полное статистическое описание результатов измерения дается отображением $\widetilde{S} \to \mu_{\widetilde{S}}(\mathrm{d}u)$, сопоставляющим конкретным исходным условиям $\widetilde{S}$ распределение вероятностей $\mu_{\widetilde{S}}$ на пространстве U результатов измерения. При этом следует подчеркнуть, что, давая полное описание результатов измерения, это отображение не содержит никаких указаний ни о конкретном механизме измерения, ни о его последствиях для рассматриваемого объекта. С этой точки зрения измерительные процедуры не различаются, если для любых исходных условий $\widetilde{S}$ они приводят к одному и тому же распределению вероятностей $\mu_{\widetilde{S}}$, хотя практически они могут осуществляться совершенно различными приборами. Каждой конкретной измерительной процедуре отвечает отображение $\widetilde{S} \to \mu_{\widetilde{S}}$, однако одно такое отображение может объединять в себе целый класс измерительных процедур, не различающихся статистикой результатов. Точно так же исходные условия $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{S}_2$ являются неразличимыми с точки зрения статистики результатов измерения, если $\mu_{\widetilde{S}_1} = \mu_{\widetilde{S}_2}$ для любого отображения $\widetilde{S} \to \mu_{\widetilde{S}}$, описывающего измерительную процедуру. Объединим неразличимые процедуры приготовления $\widetilde{S}$ в классы эквивалентности $S = [\widetilde{S}]$, которые назовем *состояниями*. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всевозможных состояний. Поскольку распределение вероятностей $\mu_{\widetilde{S}}$ одно и то же для всех $\widetilde{S}$ из одного класса S, то его можно считать функцией состояния, $\mu_{\widetilde{S}} = \mu_S$. Отображение $S \to \mu_S$ из множества состояний в множество

[1] Читатель, не знакомый с концепцией измеримости, может условно представлять себе U как область в многомерном пространстве, а B — как «достаточно хорошее» подмножество U. Однако у нас U может быть гораздо более сложным образованием — например, пространством непрерывных функций.

распределений вероятностей на пространстве результатов U будем называть измерением (со значениями в U).

Статистические постулат налагает определенное ограничение на структуру множества состояний $\mathfrak{S}$ и описывающее измерение отображение $S \to \mu_S$. Пусть $\{S_\alpha\}$ — какие-либо состояния. Предположим, что экспериментатор не знает точно, в каком из этих состояний приготовлен объект, однако ему известны вероятности $\{p_\alpha\}$ того, что приготовленным состоянием является $\{S_\alpha\}$. Фактически это означает, что в неограниченной последовательности индивидуальных экспериментов объект приготавливается в одном из состояний $\{S_\alpha\}$, причем появление состояния характеризуется соответствующей частотой. Физически это соответствует флуктуациям тех или иных параметров, характеризующих приготовительную процедуру. Пусть в каждом из индивидуальных экспериментов производится одно и то же измерение. Тогда согласно статистическому постулату и элементарным свойствам вероятностей появление того или иного результата u будет описываться распределением вероятностей $\mu(\mathrm{d}u) = \sum_\alpha p_\alpha \mu_{S_a}(\mathrm{d}u)$. Описанную выше ситуацию можно рассматривать как определенный способ приготовления состояния (смешивание), при котором значение некоторого параметра α не фиксируется точно, а выбирается согласно априорному распределению $\{p_\alpha\}$. Обозначим такое состояние-смесь следующим образом:

$$S = S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\}) \tag{I.1.1}$$

так что для любого измерения $S \to \mu_S$ выполняется

$$\mu_S(\mathrm{d}u) = \sum_a p_\alpha \mu_{S_\alpha}(\mathrm{d}u). \tag{I.1.2}$$

Таким образом, следует принять, что для каждого набора состояний $\{S_\alpha\} \subset \mathfrak{S}$ и распределения вероятностей $\{p_\alpha\}$ существует однозначно определенное состояние-смесь $S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\})$, характеризуемое соотношениями (I.1.2). Оказывается, что тогда множество состояний можно естественно отождествить с выпуклым подмножеством некоторого линейного пространства, так что будет выполняться $S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\}) = \sum_\alpha p_\alpha S_\alpha$. Для точной формулировки этого и ряда других утверждений нам потребуются сведения из теории выпуклости, изложению которых посвящается следующий параграф.

§ 2. Некоторые геометрические понятия

Пусть $S_1, \ldots, S_n$ — точки некоторого линейного пространства $\mathscr{L}$, $p_1, \ldots \ldots, p_n$ — набор вещественных чисел, удовлетворяющий условиям

$$p_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n; \qquad \sum_{j=1}^n p_j = 1,$$

т. е. конечное распределение вероятностей. Тогда точка

$$S = \sum_{j=1}^n p_j S_j$$

называется *выпуклой комбинацией* точек S_j с коэффициентами (весами) $\{p_j\}$. *Выпуклой оболочкой* множества точек $\mathscr{K} \subset \mathscr{L}$ называется совокупность выпуклых комбинаций всевозможных конечных наборов точек $\{S_j\} \subset \mathscr{K}$. Множество $\mathfrak{S}$ называется *выпуклым*, если оно совпадает со своей выпуклой оболочкой, т. е. содержит выпуклую комбинацию любого конечного набора своих точек. Если ограничиться двумя точками S_0, S_1, то совокупность их выпуклых комбинаций геометрически представляет собой отрезок, соединяющий эти точки:

$$\{S : S = p_0 S_0 + p_1 S_1; p_0, p_1 \geqslant 0, p_0 + p_1 = 1\}.$$

Нетрудно убедиться, что множество $\mathfrak{S}$ выпукло тогда и только тогда, когда вместе с любыми своими двумя точками оно содержит и соединяющий их отрезок.

Абстрактное множество $\mathfrak{S}$ назовем *пространством смесей*, если каждому конечному набору элементов $\{S_\alpha\}$ и распределению вероятностей $\{p_\alpha\}$ сопоставлен однозначный элемент-смесь $S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\}) \in \mathfrak{S}$. Предполагается, что смесь набора копий одного и того же элемента S_0 вновь дает S_0, т. е. если $S_\alpha \equiv S_0$ для всех α, то $S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\}) = S_0$. Примером пространства смесей является выпуклое множество, если смесь определяется как выпуклая комбинация.

Пусть F — отображение пространства смесей $\mathfrak{S}$ в какое-либо линейное пространство. Оно называется *аффинным*, если для любой смеси $S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\})$ выполняется

$$F(S(\{S_\alpha\}, \{p_\alpha\})) = \sum_\alpha p_\alpha F(S_\alpha).$$

Множество аффинных отображений непусто, поскольку отображение, при котором образом любого $S \in \mathfrak{S}$ является один и тот же вектор b, аффинно. Очевидно, что образ выпуклого множества при аффинном отображении является выпуклым множеством. В линейных пространствах существует тесная связь между аффинными и линейными отображениями: именно, всякое аффинное отображение F выпуклого множества $\mathfrak{S} \subset \mathscr{L}$ является сужением на $\mathfrak{S}$ отображения вида $F(T) = A(T) + b$, $T \in \mathfrak{S}$, где A — линейное отображение. В частности, всякий аффинный функционал (т. е. отображение на вещественную прямую $\mathbb{R}$) с точностью до постоянного слагаемого совпадает с сужением на $\mathfrak{S}$ линейного функционала на $\mathscr{L}$.

Пространство смесей называется *отделимым*, если для любых двух различных элементов S_1, $S_2 \in \mathfrak{S}$ найдется аффинный функционал φ на $\mathfrak{S}$ такой, что $\varphi(S_1) \neq \varphi(S_2)$.

Примером отделимого пространства смесей является множество состояний из § 1. В самом деле, для любого измерения $S \to \mu_S$ и любого подмножества $B \in \mathscr{A}(U)$ функционал $S \to \mu_S(B)$ является аффинным в силу (I.1.2). По построению, для любых состояний S_1 и S_2, должно найтись измерение $S \to \mu_S$ такое, что $\mu_{S_1} \not\equiv \mu_{S_2}$, т. е. $\mu_{S_1}(B) \neq \mu_{S_2}(B)$ для некоторого B. Из следующего предложения вытекает, что всякое множество состояний можно рассматривать как выпуклое подмножество некоторого линейного пространства с операцией выпуклой комбинации в качестве смешивания.

Предложение I.2.1. *Всякое отделимое пространство смесей $\mathfrak{S}$ взаимно-однозначно и аффинно отображается на выпуклое подмножество линейного пространства.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ — линейное пространство всех аффинных функционалов на $\mathfrak{S}$. Рассмотрим сопряженное пространство $\mathscr{L} = \mathfrak{A}(\mathfrak{S})'$ всех линейных функционалов на $\mathfrak{A}(\mathfrak{S})$. Для каждого $S \in \mathfrak{S}$ введем $\widehat{S} \in \mathscr{L}$, полагая

$$\widehat{S}(\varphi) = \varphi(S), \qquad \varphi \in \mathscr{L}.$$

Отображение $S \to \widehat{S}$ является аффинным, так как

$$\sum_j p_j \widehat{S}_j(\varphi) = \sum_j p_j \varphi(S_j) = \varphi(S(\{S_j\}, \{p_j\})) = \\ = \widehat{S}(\{S_j\}, \{p_j\})(\varphi),$$

и взаимно-однозначным, так как $\widehat{S}_1(\varphi) = \widehat{S}_2(\varphi)$ влечет $\varphi(S_1) = \varphi(S_2)$ для всех аффинных функционалов φ. Предложение доказано.

Простейшим примером выпуклого множества является n-мерный *симплекс*, который определяется как выпуклая оболочка $n+1$ точек $S_0, \ldots, S_n$ общего положения в пространстве размерности $\geqslant n$ (точки $S_0, \ldots, S_n$ называются точками общего положения, если n векторов $S_0S_1, \ldots, S_0S_n$ линейно независимы). В случае $n = 1$ симплекс является отрезком, в случае $n = 2$ — треугольником, в случае $n = 3$ — тетраэдром (рис. 2). Точки $S_0, \ldots, S_n$ называются вершинами симплекса.

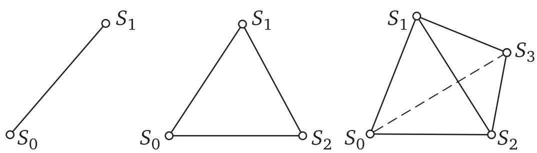

Рис. 2.

Фундаментальную роль в теории выпуклых множеств играет понятие крайней точки. Точка S называется *крайней точкой* выпуклого множества $\mathfrak{S}$, если она не является внутренней точкой отрезка, целиком лежащего в $\mathfrak{S}$, т. е. не может быть представлена в виде $S = p_0S_0 + p_1S_1$, где $p_0, p_1 > 0$, $p_0 + p_1 = 1$; S_0, $S_1 \in \mathfrak{S}$ и $S_0 \neq S_1$. Множество всех крайних точек назовем *остовом* выпуклого множества. В конечномерном линейном пространстве имеет место

Теорема I.2.2. *Всякое компактное (ограниченное и замкнутое) выпуклое множество $\mathfrak{S}$ совпадает с выпуклой оболочкой множества своих крайних точек.*

В произвольном выпуклом множестве одну и ту же точку S можно представить в виде выпуклой комбинации крайних точек, вообще говоря, разными способами. *Разложение по крайним точкам однозначно для любой точки $S \in \mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}$ является симплексом.* Заметим, что крайними точками симплекса являются его вершины.

Теорема I.2.2, определение и характеристическое свойство симплекса обобщаются и на бесконечномерный случай, однако аккуратное изложение этих вопросов потребовало бы больше места, чем позволяют рамки этой книги. В то же время для понимания следующих разделов достаточно приведенных выше конечномерных результатов. Остановимся лишь на одном примере, который встретится дальше.

Рассмотрим множество всевозможных распределений вероятностей $\mathfrak{P}(\Omega)$ на некотором фиксированном измеримом пространстве Ω. Это множество является выпуклым, так как всякая выпуклая комбинация или «смесь» распределений $P_j(\mathrm{d}\omega)$, очевидно, является распределением на Ω:

$$P(A) = \sum_j p_j P_j(A), \qquad A \in \mathscr{A}(\Omega).$$

Всякой точке $\omega \in \Omega$ отвечает *δ-распределение*, сосредоточенное в точке ω:

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1, & A \ni \omega, \\ 0, & A \not\ni \omega. \end{cases}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что σ-алгебра $\mathscr{A}(\Omega)$ разделяет точки Ω, т. е. для любых ω_1, $\omega_2 \in \Omega$ существует $A \in \mathscr{A}(\Omega)$ такое, что $\omega_1 \in A$; $\omega_2 \notin A$. Тогда соответствие $\omega \to \delta_\omega$ является взаимно-однозначным. Крайними точками множества $\mathfrak{P}(\Omega)$ являются δ-распределения и только они. Очевидно, что для любого $P \in \mathfrak{P}(\Omega)$

$$P(A) = \int_\Omega \delta_\omega(A) P(\mathrm{d}\omega), \qquad A \in \mathscr{A}(\Omega). \tag{I.2.1}$$

Это представление является непрерывным аналогом разложения по крайним точкам, причем роль набора коэффициентов p_j здесь играет распределение $P(\mathrm{d}\omega)$. Представление (I.2.1) однозначно, так что выпуклое множество $\mathfrak{P}(\Omega)$ обладает свойством, характеризующим в конечномерном случае симплекс, и мы сохраним за ним это название.

Для иллюстрации рассмотрим случай, когда $\Omega = \Omega_n$ состоит из конечного числа n точек ($\mathscr{A}(\Omega_n)$ является булевой алгеброй всех подмножеств Ω_n). Тогда множество

$$\mathfrak{P}_n = \left\{ P = [p_1, \ldots, p_n] : p_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^n p_j = 1 \right\}$$

очевидно, является $(n-1)$-мерным симплексом с вершинами $[1, 0, \ldots, 0], \ldots,$ $[0, \ldots, 0, 1]$. Для нас будет удобно записывать P в виде диагональной $n \times n$-матрицы:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{bmatrix}.$$

Тогда условия, характеризующие , запишутся в виде

$$P \geqslant 0, \qquad \operatorname{Tr} P = 1, \tag{I.2.2}$$

где Tr обозначает *след матрицы*, т. е. сумму диагональных элементов.

Если X — случайная величина на Ω_n, принимающая значения $x_1, \ldots, x_n$, то, полагая

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{bmatrix}$$

получаем, что математическое ожидание величины X относительно распределения вероятностей P равно

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = \mathrm{Tr}\, PX. \tag{I.2.3}$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{O}_n$ случайных величин, удовлетворяющих условию $0 \leqslant x_j \leqslant 1$, т. е.

$$0 \leqslant X \leqslant I \tag{I.2.4}$$

где I — единичная $n \times n$-матрица. Тогда $\mathfrak{O}_n$ будет выпуклым множеством — единичным гиперкубом, а его крайними точками — вершины гиперкуба, т. е. такие матрицы X, для которых x_j равно 0 или 1. Для таких матриц $X^2 = X$, так что крайними точками множества $\mathfrak{O}_n$ являются проекционные матрицы.

Этот простейший пример позволяет естественно подойти к другому, который представляет основной интерес в связи с квантовой теорией. Мы можем рассматривать (комплексные) $n \times n$-матрицы как операторы, действующие в n-мерном унитарном пространстве $\mathscr{H}$ векторов-столбцов $\varphi = [\varphi_j]$, $\psi = [\psi_j]$. Скалярное произведение φ и ψ определяется формулой: $(\varphi|\psi) = \sum \overline{\varphi}_j \psi_j$. Мы будем использовать обозначения Дирака $|\varphi)$, $|\psi)$, ... для векторов-столбцов φ, ψ, ... и $(\varphi|$, $(\psi|$, ... для эрмитово сопряженных векторов-строк φ^*, ψ^*, ... Тогда скалярное произведение получается графическим объединением символов сомножителей $(\varphi|$ и $|\psi)$. «Внешнее» произведение $|\psi)(\varphi|$ является $n \times n$-матрицей с компонентами $[\psi_j \overline{\varphi}_k]$. Если ψ единичный вектор, $(\psi|\psi) = 1$, то $S_\psi = |\psi)(\psi|$ является матрицей (ортогональной) проекции на вектор ψ.

Согласно конечномерной спектральной теореме, для всякой эрмитовой $n \times n$-матрицы X найдется ортонормированный базис собственных векторов $\{e_j; j = 1, \ldots, n\}$, в котором X имеет диагональный вид

$$X = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |e_j)(e_j|, \tag{I.2.5}$$

где λ_j (вещественные) собственные числа матрицы X, отвечающие собственным векторам e_j.

В соотношении (I.2.5) числа λ_j не обязательно различны. Обозначим $x_1, \ldots$ $\ldots, x_m$ $(m \leqslant n)$ различные собственные числа матрицы X, занумерованные в порядке возрастания, и пусть $E_k = \sum |e_j)(e_j|$ (где сумма распространяется на все e_j, отвечающие собственному числу x_k) матрица проекции на инвариантное подпространство X, отвечающее собственному числу λ_k. Тогда имеет место другая форма спектрального представления

$$X = \sum_{k=1}^{m} x_k E_k. \tag{I.2.6}$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{S}_n$ всех комплексных эрмитовых $n \times n$-матриц $S = [s_{jk}]$, удовлетворяющих условиям типа (I.2.2):

$$S \geqslant 0, \qquad \mathrm{Tr}\, S = 1, \tag{I.2.7}$$

где первое условие означает неотрицательную определенность матрицы. Согласно конечномерной спектральной теореме

$$S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_{\psi_j}, \tag{I.2.8}$$

где λ_j собственные числа S, а $S_{\psi_j} = |\psi_j)(\psi_j|$ — взаимно-ортогональные проекторы на единичные собственные векторы матрицы S. Из условий (I.2.7) следует, что собственные числа матрицы S образуют распределение вероятностей

$$\lambda_j \geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

В частности, $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$ и из (I.2.8) следует

$$S - S^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (1 - \lambda_j) S_{\psi_j} \geqslant 0,$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда $S = S_{\psi_k}$ для некоторого ψ_k, т. е. если S — одномерный проектор.

Предложение I.2.3. *Множество $\mathfrak{S}_n$ выпукло, а его крайними точками являются в точности одномерные проекторы.*

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что оба условия (I.2.7) выдерживают образование выпуклых комбинаций. Докажем, что всякий одномерный проектор S является крайней точкой. Пусть

$$\begin{aligned} &S = p_0 S_0 + p_1 S_1; \\ &p_0, p_1 > 1, \qquad p_0 + p_1 = 1. \end{aligned}$$

Возводя это соотношение в квадрат, вычитая S^2 из S и учитывая, что $S \geqslant S^2$ для $S \in \mathfrak{S}_n$, получаем

$$\begin{aligned} S - S^2 = p_0(S_0 - S_0^2) + p_1(S_1 - S_1^2) + p_0 p_1 (S_0 - S_1)^2 \geqslant \\ \geqslant p_0 p_1 (S_0 - S_1)^2. \end{aligned}$$

Поскольку S одномерный проектор, то $S = S^2$, откуда следует $S_0 = S_1$. Таким образом S является крайней точкой.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим спектральное разложение (I.2.8). Так как $S_{\psi_j} \in \mathfrak{S}_n$ и $S_{\psi_j} \neq S_{\psi_k}$ при $j \neq k$, то для матрицы S, являющейся крайней точкой множества $\mathfrak{S}_n$, сумма (I.2.8) может содержать только одно ненулевое слагаемое. Следовательно, $S = S_{\psi_j}$ для некоторого ψ_j, что и требовалось доказать.

Формула (I.2.8) дает один из многих вариантов разложения S по крайним точкам.

Рассмотрим также выпуклое множество $\mathfrak{X}_n$ всех эрмитовых $n \times n$-матриц X, удовлетворяющих ограничениям (I.2.4). Покажем, что крайними точками множества $\mathfrak{X}_n$ являются проекторы, т. е. эрмитовы матрицы, удовлетворяющее условию $X^2 = X$, и только они. Доказательство того, что всякий проектор является крайней точкой, проводится так же, как в предложении I.2.3. Докажем, что всякая крайняя точка обязательно является проектором. Запишем спектральное разложение матрицы X в виде (I.2.6), где x_k собственные числа X (с учетом кратности), E_k — проектор на собственное подпространство, отвечающее собственному числу x_k. Пусть $x_1 > \ldots > x_m$, тогда, применяя к сумме (I.2.6) преобразование Абеля и учитывая, что $E_1 + \ldots + E_m = I$, имеем

$$X = (1 - x_1) \cdot 0 + \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - x_{k+1}) \cdot E'_k + x_m \cdot I,$$

где $E'_k = E_1 + \ldots + E_k$. Так как проекторы 0, I, а также E'_k принадлежат $\mathfrak{X}_n$, а все коэффициенты при них неотрицательны и в сумме составляют 1, то X является выпуклой комбинацией (несовпадающих) проекторов. Если X — крайняя точка, то сумма должна состоять из одного слагаемого, так что матрица X должна быть проектором. Еще раз подчеркнем, что разница между множествами $\mathfrak{P}_n$ и $\mathfrak{S}_n$, (соответственно между $\mathfrak{O}_n$ и $\mathfrak{X}_n$) заключается в том, что во втором случае рассматриваются все эрмитовы матрицы, удовлетворяющие (I.2.7), (соответственно (I.2.4)), тогда как в первом — только диагональные или, что то же, одновременно диагонализуемые (коммутирующие) матрицы. Поэтому второй случай можно рассматривать как «некоммутативный» аналог первого; так, матрицу $S \in \mathfrak{S}_n$ можно назвать «некоммутативным распределением вероятностей», эрмитову матрицу X — «некоммутативной случайной величиной», задав среднее значение формулой типа (I.2.3). Дальше мы увидим, что здесь кроется нечто большее, чем простая аналогия.

Аналогичным образом можно было бы рассмотреть и случай вещественных симметричных матриц, однако для квантовой теории основной интерес представляет именно комплексный случай. В заключение рассмотрим подробнее структуру выпуклого множества $\mathfrak{S}_n$ в простейшем «некоммутативном» случае $n = 2$. Всякая матрица $S \in \mathfrak{S}_2$ может быть записана в виде

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & 1 - \theta_3 \end{bmatrix}, \tag{I.2.9}$$

где θ_1, θ_2, θ_3 — вещественные числа, называемые параметрами Стокса. Условие $S \geqslant 0$ равносильно неравенству $\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 \leqslant 1$. Таким образом, $\mathfrak{S}_2$, как выпуклое множество представляет собой шар в трехмерном вещественном пространстве; крайними точками являются матрицы, для которых точка $[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$ лежит на сфере $\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1$. В случае $n > 2$ множество $\mathfrak{S}_n$ является уже некоторым собственным подмножеством $(n^2 - 1)$-мерного вещественного шара и дать ему компактное геометрическое описание представляется затруднительным.

§ 3. Определение статистической модели

Основываясь на рассуждениях § 1, введем следующее определение: *статистической моделью*[2] назовем совокупность $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$, состоящую из некоторого выпуклого множества $\mathfrak{S}$ и некоторого класса $\mathfrak{M}$ аффинных отображений множества $\mathfrak{S}$ в множества распределений вероятностей на различных пространствах U. Элементы множества $\mathfrak{S}$ называются *состояниями*, а отображения из $\mathfrak{M}$ — *измерениями*. Проблему теоретического описания всякого объекта или явления, удовлетворяющего статистическому постулату, можно тогда сформулировать как задачу построения соответствующей статистической модели. Говоря подробнее, такое построение должно, во-первых, содержать описание математических объектов $\mathfrak{S}$ (множества теоретических состояний) и $\mathfrak{M}$ (множества теоретических измерений) и, во-вторых, устанавливать правила соответствия между реальными процедурами приготовления и измерения и теоретическими объектами, т. е. задавать вложение экспериментальных данных в статистическую модель.

В классической теории вероятностей и математической статистике рассматриваются статистические модели, в которых множество состояний $\mathfrak{S}$ имеет особо простую структуру. Квантовая теория имеет дело с радикально отличной статистической моделью. Мы рассмотрим эти модели в следующих параграфах.

В этой главе мы часто будем проводить рассмотрения на измерениях с конечным числом значений. В этом случае множество U возможных результатов индивидуального измерения конечно и распределение вероятностей результатов измерения задается конечным набором аффинных вещественных функций $\{\mu_S(u);\, u \in U\}$ на $\mathfrak{S}$, удовлетворяющим условиям

$$\mu_S(u) \geqslant 0, \quad u \in U; \qquad \sum_{u \in U} \mu_S(u) = 1. \tag{I.3.1}$$

Здесь $\mu_S(u)$ — вероятность результата u относительно состояния S. Для любого $B \subset U$

$$\mu_S(B) = \sum_{u \in B} \mu_S(u).$$

Технически этот случай гораздо проще непрерывного и в то же время он позволяет понять основные положения теории. Практически измерения с конечным числом значений соответствуют измерительным процедурам, целью которых является некоторая классификация данных. В то же время легко представить себе, что измерения непрерывных величин могут быть аппроксимированы измерениями с конечным числом значений путем разбиения пространства U на достаточно мелкие части.

Измерения с двумя значениями будут называться *тестами*. Обозначая один из результатов теста 1, а другой 0, получаем, что всякий тест определяется заданием одной функции на $\mathfrak{S}$ — например, вероятности получения 1, так как $\mu_S(0) = 1 - \mu_S(1)$. Вероятность $\mu_S(1)$ является аффинным функционалом на $\mathfrak{S}$, удовлетворяющим условию $0 \leqslant \mu_S(1) \leqslant 1$.

[2] Концепция статистической модели будет рассмотрена во всех подробностях в Дополнении.

Пусть $S \to \mu_S(\mathrm{d}u)$ — измерение с произвольным пространством значений U. Тогда всякому измеримому подмножеству $B \in \mathscr{A}(U)$ можно сопоставить тест $S \to \{\mu_S(\overline{B}),\ \mu_S(B)\}$, результат которого равен 0, если $u \in \overline{B}$ и 1, если $u \in B$. Таким образом, всякое измерение можно рассматривать как определенным образом согласованное семейство тестов.

§ 4. Классическая статистическая модель

В § 1 мы видели, что состояние можно рассматривать как сжатое описание исходных условий эксперимента. Попытаемся уточнить понятие «исходных условий», приняв дополнительно, что они допускают теоретическое описание в виде, вообще говоря, бесконечного «списка исходных данных» ω. Обозначим через Ω множество всех конкретных списков, отвечающих всевозможным вариантам исходных условий. Назовем Ω *фазовым пространством* объекта.

Далее, мы хотим учесть возможность того, что при повторении индивидуальных экспериментов входные данные могут испытывать случайные отклонения, обусловленные практической невозможностью в точности воспроизвести одинаковые условия либо неопределенностью некоторых параметров. Чтобы охватить такие ситуации, мы будем рассматривать распределения вероятностей на Ω (следует, конечно, предположить, что в Ω выделена σ-алгебра $\mathscr{A}(\Omega)$ измеримых подмножеств; мы будем считать также, что $\mathscr{A}(\Omega)$ разделяет точки Ω).

Всякое распределение вероятностей P на Ω мы назовем *классическим состоянием*. Его следует интерпретировать как полное статистическое описание стадии приготовления. Всякому списку $\omega \in \Omega$ отвечает *чистое состояние* $\delta_\omega(A)$, $A \in \mathscr{A}(\Omega)$. Согласно § 2 множество $\mathfrak{P}(\Omega)$ всех классических состояний является выпуклым множеством простейшей структуры — симплексом, а чистые состояния являются крайними точками этого множества.

Перейдем к измерениям. Всякое измерение со значениями в пространстве U описывается аффинным отображением

$$P \to \mu_P(\mathrm{d}u) \qquad \text{(I.4.1)}$$

множества классических состояний $\mathfrak{P}(\Omega)$ в множество распределений вероятностей $\mathfrak{P}(U)$. Обозначим через $M_\omega(\mathrm{d}u)$ распределение вероятностей данного измерения относительно чистого состояния δ_ω (т. е. $M_\omega(\mathrm{d}u) = \mu_{\delta_\omega}(\mathrm{d}u)$). Рассмотрим смесь чистых состояний

$$P(\mathrm{d}\omega) = \sum_\alpha p_\alpha \delta_{\omega_\alpha}(\mathrm{d}\omega).$$

В силу аффинности отображения (I.4.1), распределение вероятностей данного измерения относительно такого состояния будет даваться формулой

$$\mu_P(B) = \int M_\omega(B) P(\mathrm{d}\omega), \qquad B \in \mathscr{A}(U). \qquad \text{(I.4.2)}$$

При некоторых дополнительных предположениях эта формула будет верна для любого классического состояния P. Мы не будем углубляться в этот вопрос, а просто ограничимся измерениями $P \to \mu_P$, которые задаются соотношениями (I.4.2), где $M_\omega(\mathrm{d}u)$ — переходная вероятность из Ω в U[3]. Если P характеризует неопределенность в исходных условиях эксперимента, то распределение вероятностей $M_\omega(\mathrm{d}u)$ описывает статистическую погрешность измерения, вносимую измерительным прибором. Формула (I.4.2) показывает, каким образом эти два источника случайности входят в итоговую статистику измерения. Условимся кратко обозначать через $\mathbf{M}$ набор вероятностей $\{M_\omega(\mathrm{d}u)\}$, а также задаваемое ими измерение (I.4.1).

В основе классической статистической модели, определение которой будет дано ниже, лежит допущение о полной наблюдаемости, согласно которому любые параметры объекта могут быть измерены с абсолютной точностью. Для того, чтобы дать математическое выражение этому допущению, введем следующее понятие. Измерение $\mathbf{M} = \{M_\omega(\mathrm{d}u)\}$ называется *детерминированным*, если для любого $\omega \in \Omega$ и любого $B \in \mathscr{A}(U)$ имеет место альтернатива $M_\omega(B) = 0$ или $M_\omega(B) = 1$. Это означает, что если объект приготовлен в чистом состоянии, то для любого $B \in \mathscr{A}(U)$ результат измерения с вероятностью 1 принадлежит либо не принадлежит B. Это можно записать также в следующем виде:

$$M_\omega(B)^2 = M_\omega(B), \qquad B \in \mathscr{A}(U). \tag{I.4.3}$$

Раскроем смысл этого условия, ограничась для простоты измерениями с конечным числом значений. Такое измерение задается набором переходных вероятностей $\mathbf{M} = \{M_\omega(u); u \in U\}$, где $M_\omega(u)$ — вероятность результата u относительно чистого состояния δ_ω, удовлетворяющим условиям

$$M_\omega(u) \geqslant 0, \quad \sum_u M_\omega(u) = 1; \qquad \omega \in \Omega. \tag{I.4.4}$$

Если $\mathbf{M}$ — детерминированное измерение, то $M_\omega(u)$ равно 0 или 1. Обозначая $\mathbf{1}_F(\omega)$ *индикатор* множества F, т. е. функцию, равную 1 на F и 0 вне F, имеем $M_\omega(U) = \mathbf{1}_{\Omega_{(u)}}(\omega)$, где $\Omega_{(u)} = \{\omega : M_\omega(u) = 1\}$. Из (I.4.4) вытекает, что множества $\Omega_{(u)}$ при разных u не пересекаются и в объединении составляют Ω, т. е. образуют *разбиение* пространства Ω. Поэтому для любого ω есть единственное значение $u = u(\omega)$, для которого $M_\omega(u(\omega)) = 1$. При этом для любого подмножества $B \subset U$

$$M_\omega(B) = \sum_{u \in B} M_\omega(u) = \mathbf{1}_B(u(\omega)). \tag{I.4.5}$$

Функция $\omega \to u(\omega)$ является случайной величиной на Ω со значениями в U; формула (I.4.5) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между детерминированными измерениями и случайными величинами со значениями в U. Чтобы сделать эту связь еще более прозрачной, рассмотрим дискретную вещественную случайную величину $X(\omega)$ на Ω, принимающую конечное число значений $\{x\}$. Пусть $\Omega_{(x)}$ — подмножество Ω, на котором $X(\omega)$ принимает

[3] Т. е. функция аргументов $\omega \in \Omega$ и $B \in \mathscr{A}(U)$, $M_\omega(B)$, которая измерима по ω при каждом фиксированном B и является распределением вероятностей как функция B при каждом фиксированном ω.

значение x, тогда

$$X(\omega) = \sum_X x \cdot \mathbf{1}_{\Omega_{(x)}}(\omega) = \sum_x x M_\omega(x). \tag{I.4.6}$$

Таким образом, случайной величине X однозначно сопоставляется детерминированное измерение $\mathbf{M} = \{M_\omega(x)\}$, так что X принимает значение x тогда и только тогда, когда x является результатом измерения $\mathbf{M}$.

Аналогичные, но технически более сложные рассмотрения можно провести и для измерений с непрерывным пространством значений: при некоторых предположениях можно показать, что формула (I.4.5) устанавливает взаимнооднозначное соответствие между случайными величинами и детерминированными измерениями.

Мы можем теперь формализовать постулат полной наблюдаемости, приняв следующее определение: *Классической статистической моделью* называется модель $(\mathfrak{P}(\Omega), \mathfrak{M})$, в которой множеством состояний служит симплекс распределений вероятностей $\mathfrak{P}(\Omega)$ на «фазовом пространстве» Ω, а класс измерений $\mathfrak{M}$ содержит всевозможные детерминированные измерения.

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{M}(U)$ всевозможных аффинных отображений $P \to \mu_P$ вида (I.4.2). Оно, очевидно, является выпуклым множеством.

Предложение I.4.1. *Детерминированные измерения образуют остов множества $\mathfrak{M}(U)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{M} = \{M_\omega(B)\}$ — детерминированное измерение, и пусть $\mathbf{M} = p_0\mathbf{M}^0 + p_1\mathbf{M}^1$; p_0, $p_1 > 0$; $p_0 + p_1 = 1$, т. е.

$$M_\omega(B) = p_0 M_\omega^0(B) + p_1 M_\omega^1(B), \qquad B \in \mathscr{A}(U).$$

Возводя это равенство в квадрат и используя равенство $M_\omega(B) = M_\omega(B)^2$, получаем

$$p_0 M_\omega^0(B)[1 - M_\omega^0(B)] + p_1 M_\omega^1(B)[1 - M_\omega^1(B)] + \\ + p_0 p_1 [M_\omega^0(B) - M_\omega^1(B)]^2 = 0,$$

Отсюда, учитывая неравенство $M_\omega^0(B)[1 - M_\omega^0(B)] \geqslant 0$ и аналогичное неравенство для $\mathbf{M}^1$, получаем $M_\omega^0(B) \equiv M_\omega^1(B)$, а это означает, что $\mathbf{M}$ является крайней точкой множества $\mathfrak{M}(U)$.

Обратно, пусть $\mathbf{M} = \{M_\omega(B)\}$ — крайняя точка множества $\mathfrak{M}(U)$. Пусть B_1 — фиксированное подмножество из $\mathscr{A}(U)$, $B_2 = \overline{B}_1$, $B_2 = \overline{B}_1$ — его дополнение. Положим

$$M_\omega^\pm(B) = M_\omega(B) \pm [M_\omega(B_1) M_\omega(B \cap B_2) - \\ - M_\omega(B_2) M_\omega(B \cap B_1)]. \tag{I.4.7}$$

Тогда $M_\omega(B) = \frac{1}{2} M_\omega^\pm(B) + \frac{1}{2} M_\omega^-(B)$. Покажем, что $\{M_\omega^\pm(B)\}$ являются переходными вероятностями из Ω в U. Для этого достаточно проверить, что $M_\omega^\pm(B)$, $B \in \mathscr{A}(U)$ для каждого $\omega \in \Omega$ являются распределениями вероятностей. Очевидно, что $M_\omega^\pm(U) = M_\omega(U) = 1$ и что $M_\omega^\pm(B)$ являются мерами по

$B \in \mathscr{A}(U)$, так как каждое из слагаемых в (I.4.7) является мерой. Остается проверить только, что $M_\omega^\pm(B) \geqslant 0$, а это следует из неравенства

$$M_\omega^\pm(B) \geqslant M_\omega(B \cap B_1)[1 \mp M_\omega(B_2)] + \\ + M_\omega(B \cap B_2)[1 \pm M_\omega(B_1)] \geqslant 0.$$

Из того, что $\mathbf{M}$ — крайняя точка, вытекает, что $M_\omega^\pm(B) = M_\omega(B)$, $B \in \mathscr{A}(U)$, т. е.

$$M_\omega(B_1)M_\omega(B \cap B_2) = M_\omega(B_2)M_\omega(B \cap B_1).$$

Полагая здесь $B = B_1$ и учитывая, что $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, имеем $M_\omega(B_2)M_\omega(B_1) = 0$ или $M_\omega(B_1)[1 - M_\omega(B_1)] = 0$. Следовательно, $\{M_\omega(B)\}$ — детерминированное измерение.

Пусть $\{\mathbf{M}^j\}$ — некоторый конечный набор детерминированных измерений из $\mathfrak{M}(U)$ и $\{p_j\}$ — распределение вероятностей. Тогда выпуклая комбинация

$$M_\omega(B) = \sum_j p_j M_\omega^j(B), \qquad B \in \mathscr{A}(U)$$

описывает *рандомизованное измерение*, в котором с вероятностью p_j производится измерение $\mathbf{M}^j$. Физически это может соответствовать флуктуациям тех или иных параметров измерительного устройства. В простейшем случае, когда и Ω и U конечны, $\mathfrak{M}(U)$ является компактным выпуклым подмножеством конечномерного пространства и из теоремы I.2.2 вытекает, что всякий элемент множества $\mathfrak{M}(U)$ можно рассматривать как рандомизованное измерение. Аналогичный результат справедлив и для значительно более общего случая: при некоторых естественных ограничениях на пространства Ω и U можно показать, что всякое переходное распределение вероятностей $\{M_\omega(\mathrm{d}u)\}$ является «непрерывной выпуклой комбинацией» детерминированных измерений

$$M_\omega(B) = \int M_\omega^\alpha(B)Q(\mathrm{d}\alpha), \qquad B \in \mathscr{A}(U).$$

Эта формула описывает рандомизованное измерение, в котором $Q(\mathrm{d}\alpha)$ является рандомизующим распределением на множестве детерминированных измерений. Таким образом, не ограничивая существенно общности, можно считать, что в классической статистической модели измерения описываются всевозможными отображениями вида (I.4.2) множества состояний $\mathfrak{P}(\Omega)$ в множество $\mathfrak{P}(U)$, где U — достаточно произвольное пространство результатов измерения.

В заключение этого раздела остановимся на описании тестов в классической модели. Всякий тест однозначно задается вероятностью единичного исхода $X(\omega) = M_\omega(1)$, которая является функцией на Ω, удовлетворяющей условиям

$$0 \leqslant X(\omega) \leqslant 1. \tag{I.4.8}$$

Вероятность единичного исхода относительно классического состояния P равна

$$\int X(\omega)P(\mathrm{d}\omega).$$

Для детерминированного теста $X(\omega) = 0$ или 1, так что $X(\omega) = 1_{\Omega_{(1)}}(\omega)$. Таким образом, детерминированный тест задает дихотомию фазового пространства $\Omega = \Omega_{(1)} \cup \Omega_{(0)}$, $\Omega_{(1)} \cap \Omega_{(0)} = \emptyset$.

Если пространство Ω конечно, $\Omega = \Omega_n$, то множество всевозможных классических тестов (I.4.8) является n-мерным единичным гиперкубом $\mathfrak{O}_n$, а его крайними точками являются вершины гиперкуба (см. § 2). Вероятность единичного исхода для теста $\{X_\omega\}$ относительно состояния $\{P_\omega\}$ равна $\Sigma_\omega P_\omega X_\omega$.

§ 5. Редукция статистической модели. Классическая модель с ограничениями на множество измерений

Предположение о полной наблюдаемости, на котором основывается классическая статистическая модель, является определенной идеализацией, и выводы, к которым приводит это предположение, разумеется, должны сопоставляться с данными опыта. Фактически далеко не всякий воображаемый эксперимент является реально выполнимым, и возможность неограниченно увеличивать точность измерений представляется не столь безусловной. Не вдаваясь здесь в обсуждение природы ограничений на множество возможных измерений, изучим с общих позиций последствия для статистической модели, к которым приводит наличие таких ограничений.

Рассмотрим произвольную статистическую модель с множеством состояний $\mathfrak{S}$ и множеством измерений $\mathfrak{M}$. Два состояния S_1, $S_2 \in \mathfrak{S}$ назовем *неразличимыми*, если для любого измерения $S \to \mu_S$ из класса $\mathfrak{M}$ распределения вероятностей совпадают: $\mu_{S_1} \equiv \mu_{S_2}$. Допустим, что экспериментатор, проводящий измерения, не знает, в каком из состояний S_1, S_2 действительно приготовлен данный объект. С точки зрения такого экспериментатора, располагающего лишь статистикой всевозможных измерений, неразличимые состояния будут абсолютно идентичными, что и оправдывает этот термин.

Если мы объединим неразличимые состояния S в классы эквивалентности $[S]$ и положим $\mu_{[S]} = \mu_S$, то получим новую статистическую модель $(\mathfrak{S}', \mathfrak{M}')$, где $\mathfrak{S}'$ множество классов эквивалентности $[S]$, а $\mathfrak{M}'$ — совокупность аффинных отображений вида $[S] \to \mu_{[S]}$. Описанный здесь переход к новой модели мы назовем *редукцией* исходной модели $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$[4]. Новая модель является *отделимой* в том смысле, что в $\mathfrak{S}'$ нет неразличимых состояний. Фактически мы уже встретились с таким переходом в § 1; проведенные там рассуждения показывают, что именно отделимая статистическая модель является конечным продуктом анализа статистики измерений.

Редуцированная модель $(\mathfrak{S}', \mathfrak{M}')$ совершенно эквивалентна исходной с точки зрения статистики результатов измерения. Интересным в этой конструкции является то, что редуцированное множество состояний $\mathfrak{S}'$ может радикально отличаться от исходного множества $\mathfrak{S}$. В частности, если исходным множеством является классический симплекс $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}(\Omega)$, то, подбирая соответствующим образом множество измерений $\mathfrak{M}$, в качестве $\mathfrak{S}'$ можно полу-

[4] Такую редукцию множества состояний статистической модели (в Дополнении это называется «сжатием») не следует смешивать с пресловутой «редукцией квантового состояния», т. е. изменением состояния в результате измерения.

чить практически любое выпуклое множество. В частности, свойство однозначности представления по крайним точкам уже может не иметь места для редуцированных состояний из $\mathfrak{S}'$. Чтобы проиллюстрировать это положение, приведем простейший пример.

Рассмотрим некоторый условный объект, для которого имеются четыре различных варианта приготовления чистого состояния, т. е. $\Omega = \Omega_4$, так что всякое состояние задается вектором $[P_1, \ldots, P_4]$ из трехмерного симплекса $\mathfrak{P}_4$. В качестве измерений мы будем рассматривать тесты, т. е. векторы $[X_1, \ldots, X_4]$ из 4-мерного гиперкуба $\mathfrak{O}_4$, удовлетворяющие дополнительному условию

$$X_1 + X_2 = X_3 + X_4. \tag{I.5.1}$$

Состояния $P = \{P_j\}$ и $Q = \{Q_j\}$ неразличимы относительно этого множества тестов, если из (I.5.1) следует

$$\sum_j P_j X_j = \sum_j Q_j X_j,$$

т. е. если вектор $[P_j - Q_j]$ перпендикулярен гиперплоскости (I.5.1). Ортогональное дополнение к (I.5.1) является одномерным подпространством, натянутым на вектор $e = [1, 1, -1, -1]$, поэтому состояния $P = \{P_j\}$ и $Q = \{Q_j\}$ неразличимы тогда и только тогда, когда соответствующие векторы лежат на одной прямой с направляющим вектором e, т. е. для некоторого t

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_1 + t, \qquad & P_3 &= Q_3 - t,\\ P_2 &= Q_2 + t, \qquad & P_4 &= Q_4 - t. \end{aligned} \tag{I.5.2}$$

Если изобразить $\mathfrak{P}_4$ в виде тетраэдра, погруженного в трехмерное пространство (рис. 3), то числа P_j будут барицентрическими координатами точки внутри тетраэдра, а уравнения (I.5.2) задают прямые, проходящие в направлении, соединяющем середины ребер $[1, 2]$ и $[3, 4]$. Класс неразличимых состояний образуют точки тетраэдра, лежащие на любой такой прямой. Поэтому множество состояний можно отождествить с проекцией тетраэдра вдоль указанного направления на любую подходящую плоскость (см. рис. 3). Множество состояний является в этом случае выпуклым четырехугольником на плоскости.

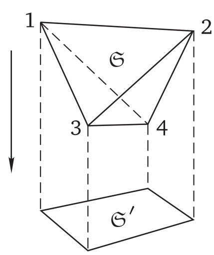

Рис. 3.

На этом примере уже видно, каким образом ограничения на множество тестов приводят к «склеиванию» состояний и возникновению новых выпуклых множеств, в которых нет однозначности представления по крайним точкам. Не входя пока в более подробное обсуждение этого вопроса, заметим, что ограничения на множество измерений могут возникнуть как отражение тех или иных эмпирических «законов симметрии». В нашем примере роль такого «закона» играет равенство (I.5.1); в статистических моделях квантовой механики, где существенную роль играет пространственно-временное описание объекта, на первый план выходят законы симметрии относительно групп кинематических и динамических преобразований (пространственных и временных сдвигов, поворотов, отражений).

Рассмотрим теперь пример, относящийся к квантовой механике, а именно к описанию квантовой частицы со спином $\frac{1}{2}$. Мы увидим далее, что состояния такого объекта описываются 2×2-матрицами вида (I.2.9). Как было показано в § 2, множество всех таких матриц $\mathfrak{S}_2$ можно представить как шар в трехмерном вещественном пространстве. Полезно проследить, какого рода ограничения могут привести к отображению классического симплекса на выпуклое множество, которое в смысле однозначности разложения по крайним точкам «противоположно» симплексу: вся граница его состоит из крайних точек и разложение является в высшей степени неоднозначным.

Рассмотрим схему эксперимента Штерна—Герлаха, который в свое время и привел к открытию спина. Пучок частиц (в опытах Штерна—Герлаха это были атомы серебра) пропускался между полюсами магнита, который создавал неоднородное магнитное поле $\mathbf{B}$. Частицы, прошедшие через поле, оседали на пластинке $\mathscr{E}$, так что по распределению плотности вещества, осевшего на пластинке, можно было судить об отклонении частиц под действием неоднородного магнитного поля $\mathbf{B}$ (рис. 4).

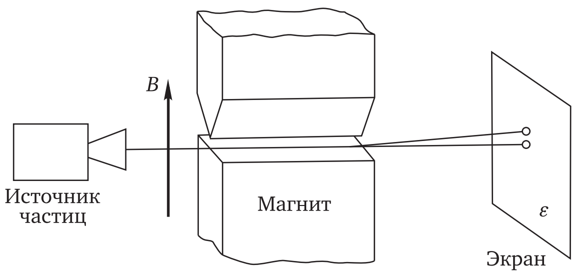

Рис. 4.

Тогда как классическая теория предсказывала всевозможные отклонения, т. е. более или менее равномерное осаждение вещества на пластинке, в эксперименте наблюдалось четкое разделение отклонившихся частиц на два симметричных пучка. Используя атомы других веществ, можно было получить расщепление исходного пучка на другое число компонент $2j+1$, где j — целое или полуцелое число, называемое спином данного сорта атомов (при расщеплении на два пучка $j = \frac{1}{2}$).

Рассмотрим модифицированный эксперимент Штерна—Герлаха, в котором вместо пластинки $\mathscr{E}$ находится экран с отверстием, пропускающий верхний пучок и поглощающий нижний. Такого рода прибор можно назвать фильтром Штерна—Герлаха. Отфильтрованный пучок, который называется поляризованным в направлении $\mathbf{B}$, не распадается далее при повторном пропускании через поле с тем же направлением **B**, однако распадается, если направление **B** будет другое. При пропускании через второй фильтр с противоположным направлением **B** отфильтрованный пучок полностью поглощается.

Схематизированное «полное описание» фильтра определяется заданием единичного вектора $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]$ в трехмерном пространстве, указывающего ориентацию фильтра, т. е. направление **B** (все остальные параметры остаются фиксированными и поэтому могут быть исключены из описания). Рассмотрим следующий эксперимент: пучок частиц определенной интенсивности пропускается через фильтр $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}}$ (приготовление), затем выходящий пучок пропускается через фильтр $\boldsymbol{\theta}_{out}$, после чего с помощью того или иного детектора определяется интенсивность прошедшего пучка (измерение) (рис. 5). Отношение «выходной» интенсивности к половине «входной» интенсивности дает для индивидуальной частицы вероятность того, что частица, «приготовленная» фильтром $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{i}n}$ пройдет через фильтр $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}}$, (предполагается, что пучок, входящий в $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}}$, является «хаотическим», так что ровно половина входящих частиц проходит через $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}}$). Пространством Ω в этом случае будет множество всевозможных направлений $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}}$, т. е. единичная сфера $\mathbb{S}^2$ в трехмерном вещественном пространстве. Классическое состояние $P(\mathrm{d}\theta)$ на $\mathbb{S}^2$ описывает «частично поляризованный» пучок, чистое состояние $\delta_{\boldsymbol{\theta}}$ соответствует полностью поляризованному, а равномерное распределение — хаотическому, неполяризованному пучку.

Обозначим $\mathbf{Pr}\{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}}|\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}}\}$ вероятность прохождения частицы в эксперименте на рис. 5. Из соображений симметрии естественно ожидать, что эта вероятность зависит только от величины угла φ между направлениями $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}}, \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}}$, или от его косинуса, $t = \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}} \cdot \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}}$. Итак, $\mathbf{Pr}\{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}}|\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}}\} = F(t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

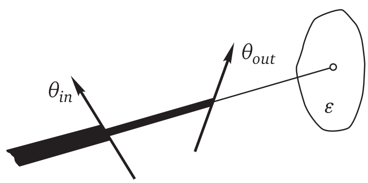

Рис. 5.

Если направление $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}}$ совпадает с $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}}$, то весь пучок, выходящий из первого фильтра, пройдет через второй. Если направление $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}}$ противоположно $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}}$, то весь пучок поглотится вторым фильтром. Отсюда $F(1) = 1$, $F(0) = 0$. Вообще, для любого направления $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}}$ отклонившиеся частицы пойдут либо в направлении $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}}$, либо в противоположном, откуда $F(t) + F(-t) = 1$ или $\frac{1}{2} - F(t) = -\frac{1}{2} + F(-t)$. Таким образом, $\frac{1}{2} - F(t)$ является нечетной функцией $t \in [-1, 1]$, принимающей значения $\mp\frac{1}{2}$ в концах интервала. Простейшей непрерывной функцией, удовлетворяющей этим условиям, является линейная функция $F(t) = \frac{1}{2}(1 + t)$, т. е.

$$\mathbf{Pr}\{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}}|\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}}\} = \frac{1 + \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{out}} \cdot \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}}}{2} = \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \tag{I.5.3}$$

где $\boldsymbol{\theta}_{\text{out}} \cdot \boldsymbol{\theta}_{\text{in}}$ — скалярное произведение векторов. Как мы увидим далее, именно такое выражение дает для вероятности $\mathbf{Pr}\{\boldsymbol{\theta}_{\text{out}}|\boldsymbol{\theta}_{\text{in}}\}$ квантовомеханическая модель в двумерном комплексном пространстве. Это распределение подтверждается и экспериментальными данными.

Если мы примем, что результат измерения равен 1, когда частица, приготовленная первым фильтром, пройдет через второй фильтр $\boldsymbol{\theta}_{\text{out}}$, и 0, когда она поглотится, то такое измерение может рассматриваться как тест, определяемый функцией

$$X(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1 + \boldsymbol{\theta}_{\text{out}} \cdot \boldsymbol{\theta}}{2}; \qquad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2. \tag{I.5.4}$$

Вероятность результата 1, когда приготовленное состояние есть $P(\mathrm{d}\theta)$, равна

$$\mu_P(1) = \int \frac{1 + \boldsymbol{\theta}_{\text{out}} \cdot \boldsymbol{\theta}}{2} P(\mathrm{d}\theta). \tag{I.5.5}$$

Множество измерений $\mathfrak{M}$ для этой модели состоит из всех тестов, определяемых функциями вида (I.5.4) с $\boldsymbol{\theta}_{\text{out}} \in \mathbb{S}^2$.

Условие неразличимости двух классических состояний P_1, P_2 сводится к следующему:

$$\int \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\theta} P_1(\mathrm{d}\theta) = \int \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\theta} P_2(\mathrm{d}\theta), \qquad \theta_0 \in \mathbb{S}^2,$$

или $\int \boldsymbol{\theta} P_1(\mathrm{d}\theta) = \int \boldsymbol{\theta} P_2(\mathrm{d}\theta)$. Следовательно, состояния находятся во взаимнооднозначном аффинном соответствии

$$[P] \leftrightarrow \int \boldsymbol{\theta} P(\mathrm{d}\theta) = \left[\int \theta_1 P(\mathrm{d}\theta), \int \theta_2 P(\mathrm{d}\theta), \int \theta_3 P(\mathrm{d}\theta)\right]$$

с векторами, представимыми в виде $\boldsymbol{\theta}_P = \int \boldsymbol{\theta} P(\mathrm{d}\theta)$, где $P(\mathrm{d}\theta)$ — распределение вероятностей на $\mathbb{S}^2$, т. е. с точками единичного шара в трехмерном пространстве. Из (I.5.5)

$$\mu_{[P]}(1) = \frac{1 + \boldsymbol{\theta}_{\text{out}} \cdot \boldsymbol{\theta}_P}{2}. \tag{I.5.6}$$

Рассматривая компоненты векторов в единичном шаре как параметры Стокса, введем матрицы

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \int \theta_3 P(\mathrm{d}\theta) & \int (\theta_1 - i\theta_2) P(\mathrm{d}\theta) \\ \int (\theta_1 + i\theta_2) P(\mathrm{d}\theta) & 1 - \int \theta_3 P(\mathrm{d}\theta) \end{bmatrix},$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \theta'_3 & \theta'_1 - i\theta'_2 \\ \theta'_1 + i\theta'_2 & 1 - \theta'_3 \end{bmatrix},$$

где $[\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3] = \boldsymbol{\theta}_{\text{out}}$. Тогда редуцированные состояния представляются матрицами S из $\mathfrak{S}_2$, тесты — матрицами X, и в силу (I.5.6) вероятность исхода 1 для теста X и состояния S равна

$$\mu_S(1) = \operatorname{Tr} SX = \int X(\boldsymbol{\theta}) P(\mathrm{d}\theta).$$

Если угодно, мы дали явное построение модели со скрытыми переменными для частицы со спином $\frac{1}{2}$. Мы продолжим обсуждение этого вопроса в § 7, а сейчас рассмотрим общую статистическую модель квантовой механики.

§ 6. Статистическая модель квантовой механики

Основным предметом нашего рассмотрения будет статистическая модель, в которой состояния описываются комплексными эрмитовыми матрицами S, удовлетворяющими условиям

$$S \geqslant 0, \qquad \operatorname{Tr} S = 1,$$

(матрицами плотности). Множество таких матриц $\mathfrak{S}_n$ является выпуклым подмножеством вещественного линейного пространства всех эрмитовых $n \times n$-матриц, причем крайними точками являются матрицы плотности вида $S_\psi = |\psi)(\psi|$, $(\psi|\psi) = 1$ (см. § 2); они описывают *чистые состояния.* В дальнейшем для нас основной интерес будет представлять бесконечномерный аналог матрицы плотности, однако в этой главе мы ограничимся конечномерным случаем, чтобы объяснить некоторые принципиальные положения, не останавливаясь на технических трудностях, связанных с бесконечномерностью.

Помимо множества состояний, для задания статистической модели необходимо описать множество измерений. Согласно общему определению, всякое измерение с пространством результатов U описывается аффинным отображением множества состояний $\mathfrak{S}_n$ в множество распределений вероятностей на U. Предположим для начала, что множество U конечно, и рассмотрим в этом случае более подробно математическую структуру такого отображения.

Предложение I.6.1. *Соотношение*

$$\mu_S(u) = \operatorname{Tr} SM_u, \qquad u \in U, \tag{I.6.1}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между аффинными отображениями $S \to \mu_S$ множества матриц плотности $\mathfrak{S}_n$ в множество распределений вероятностей на U и разложениями единицы, т. е. наборами эрмитовых матриц $\{M_u; u \in U\}$, удовлетворяющих условиям

$$M_u \geqslant 0, \qquad \sum_{u \in U} M_u = I. \tag{I.6.2}$$

Лемма I.6.2. *Всякий аффинный функционал $\mu(S)$ на $\mathfrak{S}_n$ имеет вид $\mu(S) = \operatorname{Tr} SM$, где M — эрмитова матрица.*

Доказательство. Множество матриц плотности порождает вещественное линейное пространство $\mathscr{L}$ всех эрмитовых матриц. Это означает, что всякая эрмитова матрица представляется в виде $T = \sum_j t_j S_j$, где t_j — вещественные числа, S_j — матрицы плотности (для доказательства достаточно рассмотреть спектральное разложение матрицы T). Построим по μ функционал на $\mathscr{L}$, полагая

$$\mu(T) = \sum_j t_j \mu(S_j).$$

Для обоснования корректности этого определения необходимо показать, что сумма в правой части не зависит от способа представления T в виде линейной комбинации матриц плотности, т. е. что равенство $\sum_j t_j S_j = \sum_k t'_k S'_k$ влечет

$$\sum_j t_j \mu(S_j) = \sum_k t'_k \mu(S'_k).$$

Перенося, если необходимо, некоторые слагаемые в другую часть равенства, мы можем считать, что $t_j \geqslant 0$ и $t'_k \geqslant 0$ (причем хотя бы одно из t_j и t'_k строго положительно). Беря след от получившегося равенства и учитывая, что $\operatorname{Tr} S_j = \operatorname{Tr} S'_k = 1$, получим $\sum_j t_j = \sum_k t'_k = \tau > 0$. Введем распределения вероятностей $p_j = t_j/\tau$, $p'_k = t'_k/\tau$. Тогда нам достаточно показать, что из $\sum_j p_j S_j = \sum_k p'_k S'_k$ следует $\sum_j p_j \mu(S_j) = \sum_k p'_k \mu(S'_k)$, а это вытекает из аффинности функционала μ.

По построению $\mu(T)$ является вещественным линейным функционалом на $\mathscr{L}$. Всякий такой функционал от $T = [t_{jk}]$, очевидно, имеет вид

$$\mu(T) = \sum_{j,k} t_{jk} m_{jk} = \operatorname{Tr} TM,$$

где $M = [m_{jk}]$, причем $m_{jk} = \overline{m}_{kj}$, так что $M = M^*$.

Лемма I.6.3. *Пусть X эрмитова матрица; $X \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Tr} SX \geqslant 0$ для всех $S \in \mathfrak{S}_n$.*

Доказательство. $X \geqslant 0$ означает, что $(\psi|X\psi) \geqslant 0$ для всех (единичных) векторов ψ, т. е. $\operatorname{Tr} S_\psi X \geqslant 0$. Согласно предложению I.2.3 это равносильно тому, что $\operatorname{Tr} SX \geqslant 0$, $S \in \mathfrak{S}_n$.

Доказательство предложения I.6.1. Согласно лемме I.6.2, $\mu_S(u) = \operatorname{Tr} SM_u$, где $\{M_u\}$ — некоторый набор эрмитовых матриц. Из леммы I.6.3 и неотрицательности функций $\mu_S(u)$ вытекает $M_u \geqslant 0$. Наконец, для любого $S \in \mathfrak{S}_n$ выполняется $\sum_u \mu_S(u) = \operatorname{Tr} S(\sum_u M_u) = 1$, откуда $\sum_u M_u = I$. В самом деле, $\operatorname{Tr} S(\sum_u M_u - I) = 0$ для $S \in \mathfrak{S}_n$, так что по лемме I.6.3 $\sum_u M_u - I \geqslant 0$ и одновременно $\sum_u M_u - I \leqslant 0$. Предложение доказано.

Набор $\{M_u\}$ формально аналогичен набору переходных вероятностей $\{M_\omega(u)\}$, характеризовавших измерение в классической статистической модели. Там особую роль играли детерминированные измерения. Аналог условия детерминированности (I.4.3) в некоммутативном случае имеет вид

$$M_u^2 = M_u, \qquad u \in U. \tag{I.6.3}$$

Но это означает, что M_u для любого u является ортогональным проектором. Покажем, что (I.6.3) влечет равенство

$$M_u M_v = 0, \qquad u \neq v, \tag{I.6.4}$$

т. е. M_u, M_v являются проекторами на взаимно-ортогональные подпространства.

Лемма I.6.4. *Если A, B, C эрмитовы матрицы, $0 \leqslant B \leqslant C$ и $CA = 0$, то $BA = 0$.*

Доказательство. Из $CA=0$ следует $A^*CA=0$, так что $0=A^*CA \geqslant A^*BA \geqslant 0$, откуда $A^*BA=0$. Это можно записать как $(\sqrt{B}A)^*(\sqrt{B}A)=0$, где $\sqrt{B}$ — положительный квадратный корень из матрицы $B \geqslant 0$. Отсюда $\sqrt{B}A=0$ и $BA=0$.

Чтобы вывести (I.6.4), запишем (I.6.3) в виде $(I-M_u)M_u=0$ и заметим, что в силу (I.6.2) $0 \leqslant M_v \leqslant I-M_u$ при $u \neq v$. Остается применить лемму I.6.4 с $A=M_u$, $B=M_v$, $C=I-M_u$.

Таким образом, формальным аналогом классических детерминированных измерений в квантовой теории являются *ортогональные разложения единицы* $\{E_u\}$:

$$E_uE_v=\delta_{uv}E_u, \qquad \sum_u E_u=I.$$

(δ_{uv} — символ Кронекера). Соответствующие измерения мы называем *простыми.* Подобно тому как классическое детерминированное измерение задает разбиение фазового пространства Ω на непересекающиеся области $\Omega_{(u)}$, простое измерение задает разложение рассматриваемого унитарного векторного пространства $\mathscr{H}$ в сумму ортогональных подпространств $\mathscr{H}_{(u)}=E_u(\mathscr{H})$. Пусть возможными результатами простого измерения $\{E_x\}$ является конечный набор вещественных чисел $\{x\}$, тогда этому измерению сопоставляется эрмитова матрица (оператор)

$$X=\sum_x xE_x. \tag{I.6.5}$$

Эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между простыми измерениями и эрмитовыми операторами в $\mathscr{H}$, аналогичное соответствию (I.4.6) между детерминированными измерениями и случайными величинами в теории вероятностей. Эрмитовы операторы поэтому играют в квантовой теории ту же роль, что случайные величины в теории вероятностей; они называются также квантовыми наблюдаемыми. Среднее значение результатов измерения $\{E_x\}$ непосредственно выражается через соответствующую наблюдаемую по формуле

$$\sum_x x\mu_S(x)=\sum_x x\,\mathrm{Tr}\,SE_x=\mathrm{Tr}\,SX.$$

В обычном изложении квантовой теории отправным является понятие наблюдаемой и установленное выше выражение для среднего значения наблюдаемой. Это равносильно тому, что отправляться от простых измерений, задаваемых ортогональными разложениями единицы. Мы видели, однако, что общее статистическое описание измерения приводит, вообще говоря, к неортогональным разложениям единицы. Выделение простых измерений должно основываться на каких-то дополнительных соображениях; очевидно, что формальная аналогия с классической теорией вероятностей не является достаточным для этого основанием. В теории вероятностей исключительная роль детерминированных измерений обосновывается предложением I.4.1, согласно которому статистика всякого измерения может быть выражена через статистику детерминированных измерений посредством подходящей рандомизации. Важно, однако, подчеркнуть, что аналог подобной теоремы в квантовой теории уже не верен.

Обозначим через $\mathfrak{M}(U)$ выпуклое множество всех разложений единицы $\{M_u; u \in U\}$.

Предложение I.6.5. *Всякое ортогональное отложение единицы* $\{E_u; u \in U\}$ *является крайней точкой множества* $\mathfrak{M}(U)$. *Обратное утверждение верно лишь для* $U = \{0, 1\}$; *если* U *состоит более чем из двух элементов, то существует крайняя точка множества* $\mathfrak{M}(U)$, *не являющаяся ортогональным разложением единицы.*

Доказательство. Первое утверждение доказывается точно так же, как предложение I.4.1 в классическом случае. Если $U = \{0, 1\}$, то всякое разложение единицы имеет вид $\{I - X, X\}$, и поэтому однозначно определяется оператором $M_1 = X$, который удовлетворяет единственному условию $0 \leqslant X \leqslant I$. Из § 2 известно, что крайними точками этого множество являются проекторы и только они. Таким образом, для крайних точек X и $I - X$ являются проекторами, т. е. M_0, M_1 — ортогональное разложение единицы.

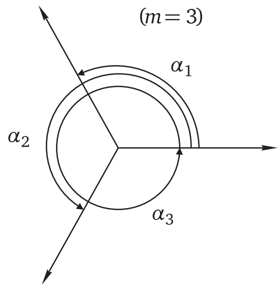

Рис. 6.

Пусть теперь $U = \{1, \ldots, m\}$, $m > 2$. Рассмотрим сначала случай $n \equiv \dim \mathscr{H} = 2$. Для наглядности можно считать, что матрицы плотности $S \in \mathfrak{S}_2$ описывают состояния частицы со спином $\frac{1}{2}$ (см. § 5). Тогда состояние, приготовленное фильтром с направлением $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]$ задается матрицей плотности (I.2.9). В частности, матрица

$$\begin{aligned} S_\alpha &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & e^{-\mathrm{i}\alpha} \\ e^{\mathrm{i}\alpha} & 1 \end{bmatrix} = |\psi_\alpha)(\psi_\alpha|; \\ |\psi_\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{-\mathrm{i}\alpha/2} \\ e^{\mathrm{i}\alpha/2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{I.6.6}$$

описывает состояние, приготовленное фильтром, направление которого $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{in}} = [\cos\alpha, \ \sin\alpha, \ 0]$ лежит в плоскости θ_1, θ_2, и составляет угол α с осью θ_1. Рассмотрим m направлений, соответствующих $\alpha_u = 2\pi u/m$; $u = 1, \ldots, m$, делящих плоскость θ_1, θ_2 на m равных углов (рис. 6), так что

$$\sum_{u=1}^{m} \exp(\mathrm{i}\alpha_u) = 0. \tag{I.6.7}$$

Тогда набор матриц

$$M_u = \frac{2}{m}|\psi_u)(\psi_u| \qquad (\psi_u = \psi_{\alpha_u}), \tag{I.6.8}$$

образует неортогональное разложение единицы; в самом деле, $M_u \geqslant 0$, а тот факт, что $\sum_u M_u = I$, вытекает из (I.6.7), (I.6.6).

Покажем, что при $m = 3$ разложение единицы (I.6.8) является крайней точкой. В самом деле, если

$$M_u = p_0 M_u^0 + p_1 M_u^1; \qquad p_0, p_1 > 0,$$

то $M_u^0 \leqslant p_0^{-1} M_u$, $M_u^1 \leqslant p_1^{-1} M_u$, откуда $M_u^j = \lambda_u^j |\psi_u)(\psi_u|$. Условие нормировки $\sum_u M_u^j = I$ вместе с (I.6.6) приводит к равенствам

$$\sum_{u=1}^{3} \lambda_u^j \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi u}{3}\right) = 0, \qquad \sum_{u=1}^{3} \lambda_u^j = 2.$$

Первое означает, что λ_u^j являются сторонами треугольника, все внешние углы которого равны $2\pi/3$, так что λ_u^j все равны между собой, а в силу второго равенства $\lambda_u^j = \frac{2}{3}$. Таким образом, $M_u^0 = M_u^1 = M_u$ и $\{M_u\}$ является крайней точкой.

Докажем теперь, что для любой размерности $n \geqslant 2$ и любого $m \geqslant 3$ существует неортогональное разложение единицы, являющееся крайней точкой множества $\mathfrak{M}(U)$. Разложим n-мерное пространство $\mathscr{H}_n$ в ортогональную сумму двумерного пространства $\mathscr{H}_2$, и его ортогонального дополнения $\mathscr{H}_{n-2}$ и обозначим через E проектор на $\mathscr{H}_{n-2}$. Построим в $\mathscr{H}_2$ неортогональное разложение единицы $\{M_u; u = 1, 2, 3\}$ по формуле (I.6.8) с $n = 3$. Тогда набор операторов

$$\begin{aligned} &\widetilde{M}_1 = M_1 \oplus 0, \qquad \widetilde{M}_2 = M_2 \oplus 0, \qquad \widetilde{M}_3 = M_3 \oplus E; \\ &\widetilde{M}_u = 0, \quad u \geqslant 3, \end{aligned}$$

образует неортогональное разложение единицы в $\mathscr{H}$. Легко проверить, что оно является крайней точкой множества $\mathfrak{M}(U)$.

Хотя приведенная в доказательстве конструкция может показаться искусственной, эти рассуждения показывают, что, в отличие от классической статистики, где детерминированные измерения образуют остов множества всевозможных измерений, статистическое описание эксперимента в квантовой теории не дает решающих оснований ограничиться ортогональными разложениями единицы. На самом деле мы далее увидим, что существует целый ряд физических измерений, которые естественно описываются неортогональными разложениями единицы. В рамках этой новой концепции получают простое разрешение некоторые «парадоксы» квантовой теории, связанные с измерениями таких физических величин, как время, угол, фаза, с совместными измерениями некоммутирующих наблюдаемых — координаты и импульса и т. п. Неортогональные разложения единицы дают адекватное математическое описание «косвенных» и последовательных измерений (см. комментарии к гл. II и III).Основываясь на сказанном выше, мы назовем *статистической моделью квантовой механики* модель, в которой состояния описываются всевозможными матрицами плотности S, а измерения — всевозможными аффинными отображениями $S \to \mu_S$, матриц плотности в распределения вероятностей на пространстве результатов измерения. В связи с этим определением важно еще раз подчеркнуть, что статистическая модель и основные ее элементы — состояния и измерения — являются математическими объектами. То обстоятельство, что некоторая совокупность результатов реальных экспериментов адекватно описывается данной статистической моделью $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$, означает, что существует вложение надлежащим образом обработанных экспериментальных данных в эту модель, т. е. каждой реальной процедуре приготовления сопоставляется некоторое теоретическое состояние S, а каждому реальному измерению-теоретическое измерение $S \to \mu_S$. Мы дали здесь абстрактное описание статистической модели квантовой теории; в последующих главах будут установлены правила соответствия, по которым физическим величинам сопоставляются те или иные математические объекты. Эти правила (основанные главным образом на идее симметрии и ковариантности) позволяют установить связь между некоторыми теоретическими состояниями, т. е. матрицами плотности, и их физическими прототипами и между теоретическими измерениями, т. е. разложениями единицы, и реальными измерениями физических величин.

Было бы, однако, наивно ожидать, что всякому теоретическому квантовому состоянию, т. е. произвольно взятой матрице плотности, должна автоматически соответствовать в природе некоторая реальная процедура приготовления, а всякому теоретическому квантовому измерению или наблюдаемой — некоторая реальная измерительная процедура, — этот вопрос нуждается в специальном изучении в каждом конкретном случае. Поэтому в принципе не следует исключать возможность, что совокупность экспериментальных данных, адекватно описываемая статистической моделью квантовой теории, может допускать и существенно иную модель, «пересекающуюся» с квантовой (так что «пересечение» охватывает все экспериментальные данные). Впрочем, весь опыт развития квантовой теории, находящей все новые экспериментальные подтверждения, свидетельствует о том, что квантовая статистическая модель дает наиболее адекватное и компактное описание явлений микромира.

Теоретические концепции квантового состояния и измерения являются результатом определенной идеализации и отражают существенные черты реальных физических экспериментов. Любой общий результат, установленный в рамках квантовой теории для всех теоретических состояний и измерений, заведомо будет верен и для «реализуемых» состояний и измерений постольку, поскольку квантовая теория дает правильную модель реальности. В то же время подобные результаты было бы невозможно получить, не опираясь на математические концепции состояния и измерения.

§ 7. Замечания к проблеме скрытых переменных

Рассмотренные в § 5 примеры показывают, что наличие ограничений в распределениях вероятностей возможных измерений в классической модели может привести к возникновению выпуклых множеств состояний, радикально отличающихся от симплекса. Покажем, что на самом деле всякое выпуклое множество состояний можно рассматривать как результат редукции классической модели с надлежащим образом подобранными ограничениями[5]. Для

[5] Более подробное рассмотрение дается в Дополнении.

простоты мы предположим, что рассматриваемое множество состояний конечномерно, а результаты измерений могут принимать конечное число значений, но доказательство может быть обобщено и на общий случай.

Теорема I.7.1. *Всякая отделимая статистическая модель, множество состояний которой является ограниченным замкнутым выпуклым подмножеством конечномерного пространства, а измерения имеют конечное число значений, является редукцией некоторой классической модели с ограничениями на множество измерений.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество состояний, $\mathfrak{M}$ — множество измерений модели. Обозначим через Ω остов множества $\mathfrak{S}$; соответственно крайние точки будут обозначаться буквой ω. Пусть $S \to \mu_S$ — данное измерение; тогда функция $\mu_\omega(u)$; $\omega \in \Omega$, $u \in U$, является переходной вероятностью[6] из Ω в U. Таким образом, всякому измерению $\mathbf{M}: S \to \mu_S$ соответствует переходная вероятность $\widetilde{\mathbf{M}} = \{\mu_\omega(u)\}$, причем соответствие взаимно-однозначно: из теоремы I.2.2 следует, что два аффинных функционала, совпадающие на крайних точках, совпадают на всем выпуклом множестве.

Рассмотрим Ω как фазовое пространство классической модели с ограничениями, в которой состояниями являются всевозможные распределения вероятностей на Ω, а измерения описываются переходными вероятностями вида $\widetilde{\mathbf{M}} = \{\mu_\omega(u)\}$, где $\mathbf{M}$ — всевозможные измерения исходной модели. Обозначим $\widetilde{\mathfrak{M}}$ множество таких классических измерений. Покажем, что редукция модели $(\mathfrak{P}(\Omega), \widetilde{\mathfrak{M}})$ совпадает с исходной $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$.

Прежде всего заметим, что для любого распределения вероятностей P на Ω определен векторнозначный интеграл

$$\int_\Omega \omega P(\mathrm{d}\omega) \tag{I.7.1}$$

как интеграл от функции со значениями в линейном пространстве, содержащем выпуклое множество $\mathfrak{S}$. Если $P = \sum_j p_j \delta_{\omega_j}$, то

$$\int_\Omega \omega P(\mathrm{d}\omega) = \sum_j p_j \omega_j, \tag{I.7.2}$$

так что $\int \omega P(\mathrm{d}\omega)$ представляет собой некоторую точку из $\mathfrak{S}$, т. е. состояние. В общем случае интеграл (I.7.1) является пределом конечных выпуклых комбинаций вида (I.7.2), и так как $\mathfrak{S}$ по предположению ограничено и замкнуто, то этот предел также принадлежит $\mathfrak{S}$. Интеграл (I.7.1) является непрерывным аналогом выпуклой комбинации чистых состояний. Так как всякий аффинный функционал на конечномерном пространстве, очевидно, непрерывен, то для всякого измерения $S \to \mu_S$

$$\mu_S(u) = \int_\Omega \mu_\omega(u) P(\mathrm{d}\omega)$$

[6] В определении переходов вероятности требуется измеримость по аргументу ω; это здесь выполняется, так как $\mu_\omega(u)$, $\omega \in \Omega$ является сужением аффинного функционала $\mu_S(u)$, $S \in \mathfrak{S}$ на множество крайних точек Ω, которое измеримо для любого замкнутого выпуклого множества $\mathfrak{S}$.

если $S = \int \omega P(\mathrm{d}\omega)$.

Пусть теперь P_1 и P_2 — два неразличимых классических состояния на Ω, так что

$$\int_\Omega \mu_\omega(u) P_1(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega \mu_\omega(u) P_2(\mathrm{d}\omega), \qquad u \in U,$$

для всех измерений $\widetilde{\mathbf{M}} = \{\mu_\omega(u)\}$. Согласно сказанному выше, это равенство можно переписать в виде

$$\mu_{S_1}(u) = \mu_{S_2}(u), \qquad u \in U$$

где $S_j = \int \omega P_j(\mathrm{d}\omega)$; $j = 1, 2$. Из отделимости исходной модели вытекает тогда, что

$$S_1 \equiv \int_\Omega \omega P_1(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega \omega P_2(\mathrm{d}\omega) \equiv S_2.$$

Таким образом, классу неразличимых классических состояний $[P]$ взаимно-однозначно соответствует исходное состояние $\int \omega P(\mathrm{d}\omega) \in \mathfrak{S}$, где P -любой представитель класса $[P]$. Это соответствие, очевидно, аффинно; более того, оно отображает множество классов $[P]$ *на* множество состояний $\mathfrak{S}$, так как для любого ω класс, содержащий чистое классическое состояние δ_ω, отображается в ω. Поскольку согласно теореме I.2.2 любое $S \in \mathfrak{S}$ может быть представлено как $S = \sum p_j \omega_j$, мы заключаем, что $S = [\sum p_j \delta_{\omega_j}]$. Таким образом, редукция модели $(\mathfrak{P}(\Omega), \widetilde{\mathfrak{M}})$ приводит к множеству состояний $\mathfrak{S}$ и множеству измерений $\mathfrak{M}$, так что

$$\int_\Omega \mu_\omega(u) P(\mathrm{d}\omega) = \mu_{[P]}(u), \tag{I.7.3}$$

для любого состояния $S = [P]$ и измерения $S \to \mu_S$.

Рассмотрим эту конструкцию в наиболее интересном для нас случае квантовой теории. Пусть $\widehat{\Sigma}_n$ — единичная сфера в n-мерном комплексном пространстве векторов-столбцов $|\psi)$,

$$\widehat{\Sigma}_n = \{\psi : (\psi|\psi) = 1\}.$$

Два вектора ψ, ψ' задают одно и то же состояние $S_\psi = |\psi)(\psi|$, если $\psi = \lambda\psi'$, где $|\lambda| = 1$. Обозначим через Σ_n множество соответствующих классов эквивалентности в $\widehat{\Sigma}_n$. Элементы множества Σ_n находятся во взаимно-однозначном соответствии с чистыми состояниями множества $\mathfrak{S}_n$. Множество Σ_n будет играть роль пространства Ω для классической модели с ограничениями, которую мы сейчас построим.

Пусть $P(\mathrm{d}\psi)$ — распределение вероятностей на Σ_n. Тогда интеграл

$$S_P = \int_{\Sigma_n} |\psi)(\psi| P(\mathrm{d}\psi)$$

определяет матрицу плотности $S_P \in \mathfrak{S}_n$. Покажем, что всякая матрица плотности представима в таком виде. Согласно (I.2.6), $S = \sum \lambda_j S_{\psi_j}$, так что $S = S_P$ где $P = \sum \lambda_j \delta_{\psi_j}$. Таким образом, $P \to S_P$ является аффинным отображением симплекса $\mathfrak{P}(\Sigma_n)$ на множество квантовых состояний $\mathfrak{S}_n$.

Пусть $S \to \mu_S(u)$, $u \in U$ — квантовое измерение. Согласно предложению I.6.1 $\mu_S(u) = \mathrm{Tr}\, SM_u$, $u \in U$, где $\{M_u\}$ — некоторое разложение единицы. Рассмотрим переходную вероятность из Ω в U:

$$M_\psi(u) \equiv \mu_{S_\psi}(u) = (\psi|M_u\psi). \tag{I.7.4}$$

Тогда для любого измерения

$$\int_{\Sigma_n} M_\psi(u)P(\mathrm{d}\psi) = \mu_{S_p}(u), \qquad u \in U.$$

Таким образом, статистическая модель квантовой теории является редукцией классической модели с множеством состояний Σ_n и измерениями, которые задаются переходными вероятностями вида (I.7.4), где $\{M_u\}$ — произвольное разложение единицы.

Отметим, что в случае $n = 2$ эта конструкция совпадает с классической моделью для экспериментов с частицей со спином $\frac{1}{2}$, которая была построена в § 5. В этом случае существует взаимно-однозначное соответствие между чистыми состояниями и точками сферы $\mathbb{S}^2$ (направлениями приготовляющего фильтра), дающими содержательное классическое описание процедуры приготовления состояния. В самом деле, если $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3] \in \mathbb{S}^2$ — направление фильтра, то матрица плотности (I.2.9) является одномерным проектором $S_\psi = |\psi)(\psi|$, т. е. чистым состоянием; таким образом, устанавливается соответствие между множеством чистых состояний Σ_2 и единичной сферой $\mathbb{S}^2$. Следовательно, всякое распределение вероятностей на Σ_2 можно рассматривать как распределение вероятностей на $\mathbb{S}^2$, т. е. как классическое состояние в эксперименте, изображенном на рис. 5.

Возможность подобной содержательной интерпретации классической модели, формальная конструкция которой дается теоремой I.7.1, для других квантовых объектов зависят от того, можно ли интерпретировать элемент $\psi \in \Sigma_n$ как «полный список», дающий классическое описание процедуры приготовления. Мы не будем здесь углубляться в этот вопрос, однако заметим, что уже для частиц со спином $j > \frac{1}{2}$ появляются векторы состояний ψ, для которых затруднительно дать интерпретацию с точки зрения экспериментов с вращающимися поляризующими фильтрами, как это было сделано для случая $j = \frac{1}{2}$ в § 5.

Мы видели, что для всякой достаточно регулярной статистической модели можно, по крайней мере формально, построить классическую модель (с ограничениями на измерения), которая будет статистически эквивалентна исходной в том смысле, что выполняется соотношение (I.7.3) для распределений вероятностей всевозможных измерений. В этом смысле всякая статистическая модель, в том числе модель квантовой теории, формально эквивалентна некоторой модели со «скрытыми переменными». Роль набора «переменных» играет ω, пробегающая фазовое пространство Ω, а эпитет «скрытые» указывает на отсутствие полной наблюдаемости, которая выражается в наличии ограничений на измерения. Это утверждение, конечно, не означает возможность сведения квантовой механики к той или иной форме механики Ньютона, однако оно кажется противоречащим широко известному тезису о невозможности введения «скрытых переменных» в квантовую теорию. В этом положении, высказанном фон Нейманом, речь также идет лишь о статистическом описании результатов квантовых измерений. Первоначальная, довольно спорная аргументация фон Неймана была впоследствии значительно усовершенствована и доведена до уровня весьма нетривиальных теорем (см. Дополнение).

На самом деле здесь, конечно, нет противоречия. Чтобы доказать ту или иную теорему, надо формализовать понятие теории со скрытыми переменными. Конструкция теоремы I.7.1 не обладает некоторыми дополнительными свойствами, которые постулируются при «доказательствах невозможности», из которых решающую роль играет требование «локальности» при описании составных квантовых систем (см. подробное обсуждение в Дополнении).

Сведение к классической модели достигается в конструкции теоремы I.7.1 ценой радикального увеличения размерности множества состояний (от 3 до ∞ в случае спина $\frac{1}{2}$) и очевидно, что оно лишь усложняет описание объекта, вводя массу «несущественных подробностей», не находящих прямого отражения в статистике измерений. Квантовая теория дает наиболее сжатое и при этом адекватное описание всей необходимой статистической информации.

Рассмотрения настоящей главы носят общий характер и применимы в любой ситуации, в которой можно считать выполненным «статистический постулат», гарантирующий саму возможность построения статистической модели. Мы видели, что возникновение «неклассических» моделей обусловливается наличием ограничений на возможные измерения. Квантовая теория является пока что единственным примером неклассической статистической модели реального класса объектов и явлений. Должна ли область применения неклассических моделей ограничиться явлениями микромира? В этой связи мы хотим привлечь внимание к подмеченным Н. Бором, на первый взгляд, быть может, неожиданным, но по существу весьма глубоким аналогиям между закономерностями микромира и явлениями живой природы. Как указывает Бор, требование наблюдаемости функционирующего биологического объекта накладывает принципиальные ограничения на возможные измерения, поскольку каждое из них предполагает какое-то воздействие на наблюдаемый объект. Так же, как в квантовой физике «элементарность» наблюдаемого микрообъекта не позволяет пренебречь результатами воздействия на него измерительных приборов, целостность живых организмов является тем фундаментальным качеством, которое исключает произвольное вмешательство в ход биологических процессов. Полный «классический» анализ биологического объекта может оказаться несовместимым с самими проявлениями жизни. Так, можно представить себе несколько воздействий, каждое из которых в отдельности допустимо, но сочетание их уже не является допустимым; известны ситуации, в которых существенную роль играет порядок воздействий. Подобные соображения показывают, что при создании статистических моделей биологических объектов, например функционирующего нейрона, возможность неклассической модели, в структуре которой заложена информация о принципиальных ограничениях, связанных с наблюдаемостью функционирующего объекта, является достаточно реальной. Как бы то ни было, несомненным является то, что классическая модель, ведущая происхождение от классической механики, a priori не является единственно возможной и наиболее адекватной при статистическом моделировании немеханических объектов; принятие или непринятие той или иной модели должно в конечном счете основываться на данных опыта.

Комментарии

§ 1—§ 3. Ввиду необъятности литературы по основаниям квантовой физики, мы ограничимся здесь только упоминанием источников, которые были использованы при написании этой книги. Это книги Дирака [17], Фока [43], Мандельштама [29], Бома [7], Блохинцева [3]. Последние две знакомят также с историческим развитием квантовой теории. См. также юбилейные сборники [35, 109], в которых представлены различные точки зрения. Отметим здесь статью Фока [44], в которой, в частности, четко проводится разделение эксперимента на стадии, играющее важную роль в нашем изложении.

Описание измерения в квантовой теории может иметь различные степени подробности. Каждому уровню описания соответствует определенный математический объект в гильбертовом пространстве системы $\mathcal{H}$. Подчеркнем, что термин «измерение», используемый в настоящей книге, отвечает наименее детальному описанию, включающему только статистику исходов измерительной процедуры для произвольного приготовленного состояния. Теорема II.2.1 главы II показывает, что это равносильно заданию некоторого разложения единицы в $\mathscr{H}$. В современной литературе этот уровень описания обозначается как «обобщенная наблюдаемая» или просто «наблюдаемая» (в последнем случае ортогональные разложения единицы отвечают «стандартным» или «четким» наблюдаемым). Наиболее полное описание требует динамической картины измерительного процесса, т. е. описания взаимодействия системы с измерительным прибором с последующим наблюдением исхода, что, в частности, полностью определяет статистику исходов. Обратное соответствие: «статистика — измерительный процесс» в высшей степени неоднозначно. Измерение одной и той же наблюдаемой может быть реализовано различными процессами. Более подробно см. [152], §4.1.3.

Понятие статистической модели в значительной мере навеяно исследованиями по основаниям квантовой механики с позиций частично упорядоченных пространств (см. Людвиг [112], Харткемпер [84], Нейман [118]; Дэвис и Льюис [74], Дэвис [71–73]), и восходит к более ранней аксиоматике Макки [26]. Однако Макки вводит дополнительные аксиомы, нацеленные на получение «квантовой логики», что исключает появление неортогональных разложений единицы. Общее определение измерения как аффинного отображения множества состояний в распределения вероятностей было сформулировано в работе автора [48] в рамках алгебраического подхода. Аксиоматический подход к квантовой теории, берущий за исходный элемент выпуклое множество состояний, был предложен Гаддером [81] (см. также Краузе [106]).

Теорема I.2.2 доказана Минковским. Бесконечномерным аналогом этого результата является известная теорема Крейна—Мильмана. Изложение теории выпуклости можно найти в книгах Рокафеллара [40] (конечномерный случай) и Валентайна [20]. Углубленное исследование структуры выпуклых множеств, вопросов разложимости по крайним точкам, теорию симплексов Шоке содержит монография Алфсена [59].

По поводу спектрального разложения эрмитовых матриц, а также других вопросов линейной алгебры см., например, Мальцев [28], Халмош [82].

§ 4. Со времени публикации основополагающей работы Колмогорова [21] появилось немало курсов теории вероятностей. Доступное введение, достаточное для целей настоящего изложения, дает учебник Гнеденко [15]. В математической статистке вместо термина «измерение» используются термины «стратегия» или «решающее правило». Рандомизованные стратегии были введены создателем теории статистических решений Вальдом [143] (см. также Фергюсон [76], Ченцов [53]).

§ 5. Весьма специальным типом ограничений на измерения является рассматриваемая в классической статистике «схема неполных наблюдений», когда доступными наблюдению считаются лишь случайные величины, измеримые относительно σ-подалгебры $\mathcal{A}$. Соответствующая редукция переводит симплекс $\mathfrak{P}(\Omega)$ в симплекс распределений вероятностей на $\mathcal{A}$, «неклассические» множества состояний при этом не возникают.

Элементарное квантовомеханическое рассмотрение экспериментов с фильтрами Штерна—Герлаха дается в фейнмановских лекциях [42]. Другие модели со скрытыми переменными для частицы со спином $\frac{1}{2}$ были предложены Беллом [66] и Кошеном и Шпеккером [103].

§ 6. Основы операторного формализма квантовой механики были изложены в классическом труде Дирака [17]. Идеи дираковского подхода в значительной мере пронизывают оригинальный курс Фейнмана [77], в котором, однако, существенное место занимают конечномерные спиновые модели. Интересно отметить, что Фейнман, по-видимому, одним из первых сделал попытку обратить внимание вероятностников на проблемы взаимоотношений между теорией вероятностей в квантовой механикой [77].

Математически строгое изложение основ квантовой механики, опирающееся на теорию гильбертова пространства, было предпринято фон Нейманом [45]. Им была развита концепция оператора плотности, предложенная Ландау и Вейлем. В книге фон Неймана получила также уточнение и развитие дираковская концепция наблюдаемой как оператора в гильбертовом пространстве. Эта книга послужила отправным пунктом для целого ряда попыток построения аксиоматического базиса квантовой теории, т. е. системы простых, физически интерпретируемых постулатов, из которых как следствие вытекал бы формализм гильбертова пространства. В идеале эта система должна была бы играть здесь ту же роль, что аксиоматика Колмогорова в теории вероятностей. В лекциях Макки [26] была сформулирована система постулатов, которая приводит к рассмотрению «логик высказываний», обобщающих булевы σ-алгебры теории вероятностей. Задача тогда сводится к математической характеризации логики проекторов в гильбертовом пространстве. Эта проблема обсуждалась многими авторами и получила решение в работе Пирона [123]. Подробному изложению оснований квантовой механики, использующему «логики высказываний», посвящена книга Яуха [99], а математические проблемы этого подхода рассматриваются в книге Варадарайана [139]. Обзор попыток аксиоматизации квантовой механики дается в статье Вайтмана [145]. К сожалению, в отличие от булевых алгебр, которые органически вписываются в классическое исчисление вероятностей, «логики высказываний» представляют собой скорее объект самостоятельного исследования, нежели рабочий аппарат физической теории, которая имеет дело непосредственно с операторами. К тому же из постулатов Макки лишь исходные аксиомы 1—6 имеют бесспорное вероятностное толкование (по существу они очень близки к нашему определению статистической модели). В получающемся из них множестве «вопросов» (тестов) $\mathcal{L}$ затем просто постулируется существование ортогонального дополнения, что превращает $\mathcal{L}$ в «логику высказываний». Здесь фактически уже заложено априорное принятие традиционной концепции наблюдаемой. Удовлетворительное рассмотрение в рамках этого подхода вопросов, составляющих содержание настоящей книги, представляется весьма затруднительным или же вообще неосуществимым.

Общие разложения единицы (называемые также положительными операторнозначными мерами, в отличие от проекторнозначных мер — ортогональных разложений единицы) были введены в теорию квантового измерения Дэвисом и Льюисом [74] и Холево [49]. Дэвис и Льюис рассматривали последовательные измерения и показали, что статистика последовательности квантовых измерений допускает простое описание в терминах, вообще говоря, неортогонального разложения единицы на произведении пространств результатов отдельных измерений. Книга Дэвиса [72] содержит обзор результатов об «открытых» квантовых системах и квантовых случайных процессах, в которых существенную роль играет изменение состояния после измерения. Изложение в § 6 следует работам [48–50, 89, 90].

Рассмотрение квантовых систем с бесконечным числом степеней свободы (полей), а также систем с так называемыми правилами суперотбора приводит к существенному алгебраическому обобщению квантовой механики (см., например, Сигал [41], Боголюбов, Логунов, Тодоров [6]), в котором состояния определяются как положительные линейные функционалы на алгебре «наблюдаемых». Большая часть излагаемой здесь теории измерения также допускает соответствующее алгебраическое обобщение.

§ 7. Живое обсуждение результатов о невозможности введения скрытых параметров можно найти в обзоре Вайтмана [145] (см. также Дополнение). Детальный сравнительный анализ теорий со скрытыми параметрами провел Бельинфанте [65].

Подробное обсуждение аналогий между квантовой механикой и некоторыми аспектами поведения живых организмов можно найти в сборнике выступлений Бора [8] (см. также Бом [7]). Знаменитый «принцип дополнительности» Бора проливает свет на природу принципиальных ограничений в экспериментах с микрообъектами.

Глава II
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Операторы в гильбертовом пространстве

В предыдущей главе статистическая модель квантовой теории была введена в ее простейшем конечномерном матричном варианте. Однако для описания многих наиболее интересных свойств квантовых объектов необходим бесконечномерный аналог этой модели, в котором роль матриц играют операторы в гильбертовом пространстве.

Гильбертово пространство — это комплексное линейное пространство $\mathscr{H}$ (векторы которого будут обозначаться буквами $\varphi, \psi, \ldots$) со скалярным произведением $(\varphi|\psi)$, полное относительно метрики $\|\varphi-\psi\| = \sqrt{(\varphi-\psi|\varphi-\psi)}$. Мы будем иметь дело только с сепарабельными пространствами, в которых ортонормированный базис является счетным (или конечным). По некоторым соображениям, которые станут ясными из дальнейшего, нам удобно будет считать скалярное произведение $(\varphi|\psi)$ линейным по второму аргументу ψ и антилинейным[1] по φ. Типичным примером такого гильбертова пространства является $\mathscr{L}^2(a,b)$ - пространство комплексных функций на интервале (a,b), квадратично интегрируемых по Лебегу, со скалярным произведением

$$(\varphi|\psi) = \int_a^b \overline{\varphi(x)}\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Отображение $\varphi \to \hat{\varphi}$ гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в гильбертово пространство $\hat{\mathscr{H}}$ называется *изометричным*, если

$$(\varphi|\psi) = (\hat{\varphi}|\hat{\psi}); \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{H}.$$

Поскольку при этом $\|\varphi\| \equiv \|\hat{\varphi}\|$, то изометричное отображение обязательно взаимно-однозначно. Если существует изометричное отображение $\mathscr{H}$ на $\hat{\mathscr{H}}$, то пространства $\mathscr{H}$ и $\hat{\mathscr{H}}$ называются *изоморфными*. Например, пространство $\mathscr{L}^2(0,2\pi)$ изоморфно пространству l^2 квадратично-суммируемых последовательностей $c=[c_k]$ со скалярным произведением $(c|c') = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty}\bar{c}_k c'_k$. Соответствующее отображение дается формулой

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x; \qquad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

а его изометричность составляет содержание формулы Парсеваля. Различие между изоморфными пространствами несущественно с точки зрения общей

[1] Антилинейность означает, что коэффициенты в линейной комбинации меняются на комплексно-сопряженные.

теории гильбертовых пространств; всякое утверждение для одного из изоморфных пространств может быть в принципе переведено на язык другого. Однако фактически такой перевод может быть очень сложным; кроме того, удачный выбор конкретного гильбертова пространства может существенно упростить изучение того или иного объекта. Например, при изучении оператора дифференцирования в $\mathscr{L}^2(0, 2\pi)$ выгодно перейти к изоморфному пространству l^2 коэффициентов Фурье и т. п.

Принятое выше соглашение о линейности скалярного произведения по второму аргументу связано с удобной символикой для обозначения векторов гильбертова пространства, введенной Дираком. Эта символика широко используется физиками, и мы также будем ее применять.

Согласно фундаментальной *лемме Рисса—Фреше*, всякий непрерывный (относительно нормы $\|\cdot\|$) линейный функционал на $\mathscr{H}$ имеет вид $\varphi \to (\psi|\varphi)$, где ψ — некоторый вектор из $\mathscr{H}$. Поэтому всякий вектор ψ можно рассматривать не только как элемент самого пространства $\mathscr{H}$, но и как элемент сопряженного пространства $\mathscr{H}^*$ непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{H}$. Условимся обозначать ψ, рассматриваемый как элемент $\mathscr{H}$, через $|\psi)$, а тот же ψ, рассматриваемый как элемент сопряженного пространства $\mathscr{H}^*$ — через $(\psi|$. Отображение $|\psi) \to (\psi|$ взаимно-однозначно и антилинейно переводит $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}^*$. В конечномерном случае $|\psi)$ соответствует вектору-столбцу

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

а $(\psi|$ — вектору-строке $[\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots]$. При таком соглашении скалярное произведение трактуется как «внутреннее» произведение $(\varphi|\psi)$ и формально получается графическим соединением символов $(\varphi|$ и $|\psi)$.

Удобство символики Дирака заключается в возможности наглядной записи операторов в виде «внешнего произведения». Напомним, что в конечномерном случае произведение столбца на строку той же размерности дает квадратную матрицу, т. е. оператор. Условимся понимать символ $|\varphi_1)(\varphi_2|$ как оператор, отображающий вектор $|\psi)$ в вектор $|\varphi_1)(\varphi_2|\psi)$, символ которого является результатом графического соединения исходных символов. Операторы такого вида являются операторами ранга 1, отображающими $\mathscr{H}$ на одномерное подпространство. В частности, проектор на единичный вектор ψ записывается в виде

$$S_\psi = |\psi)(\psi|. \tag{II.1.1}$$

Конечные линейные комбинации (или, что то же, конечные суммы) операторов ранга 1

$$T = \sum_j |\varphi_j)(\psi_j| \tag{II.1.2}$$

описывают *операторы конечного ранга*. Любая конечная совокупность операторов конечного ранга может рассматриваться как действующая в конечномерном подпространстве $\mathscr{H}\subset \mathscr{H}$. Поэтому алгебра конечной совокупности операторов конечного ранга сводится к матричной алгебре. Произведение операторов конечного ранга получается графическим соединением соответствующих символов, например

$$\left[\sum_j |\varphi_j)(\psi_j|\right] \cdot \left[\sum_k |\hat{\varphi}_k)(\hat{\psi}_k|\right] = \sum_{j,k} |\varphi_j)(\psi_j|\hat{\varphi}_k)(\hat{\psi}_k|. \tag{II.1.3}$$

В пространстве $\mathscr{L}^2(a, b)$ операторы конечного ранга являются интегральными операторами с вырожденными ядрами; так, оператору (II.1.2) соответствует ядро

$$T(x', x) = \sum_j \varphi_j(x')\overline{\psi_j(x)}. \tag{II.1.4}$$

Ясно, что далеко не все представляющие интерес операторы попадают в этот класс. Одна из трудностей бесконечномерного случая состоит в том, что интересующие нас операторы могут быть не определены (и неопределяемы) на всем пространстве $\mathscr{H}$. Примером может служить оператор дифференцирования в $\mathscr{L}^2(a, b)$. Однако существует важный класс ограниченных операторов, естественной областью определения которых является все пространство. Оператор X называется *ограниченным*, если

$$\|X\psi\| \leqslant c\|\psi\|$$

для некоторой постоянной c и всех $\psi \in \mathscr{H}$. Геометрически это означает, что X переводит ограниченные подмножества пространства $\mathscr{H}$ в ограниченные подмножества. Наименьшее значение постоянной c, равное

$$\|X\| = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\|X\psi\|}{\|\psi\|},$$

называется *нормой* оператора X.

Всякому ограниченному оператору X отвечает полуторалинейная (линейная по ψ, антилинейная по φ) форма на $\mathscr{H}$:

$$X(\varphi, \psi) = (\varphi|X\psi).$$

Это соотношение устанавливает взаимно-однозначное соответствие между ограниченными операторами в $\mathscr{H}$ и полуторалинейными формами, непрерывными по паре переменных φ, $\psi \in \mathscr{H}$. Рассмотрим форму $X^*(\varphi, \psi) = \overline{(\psi|X\varphi)}$. Отвечающий ей оператор называется (эрмитово) *сопряженным* к X и обозначается X^*, так что

$$(X^*\varphi|\psi) = (\varphi|X\psi); \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{H}. \tag{II.1.5}$$

Сопряжение $X \to X^*$ является антилинейным отображением, меняющим порядок сомножителей в произведении

$$(XY)^* = Y^*X^*$$

и сохраняющим норму

$$\|X^*\| = \|X\|. \tag{II.1.6}$$

Кроме того,

$$X^{**} \equiv (X^*)^* = X.$$

Переход к сопряженному оператору аналогичен переходу к эрмитово сопряженной матрице в конечномерном случае. Предоставляем читателю проверить, что для оператора конечного ранга

$$\left[\sum_j |\varphi_j)(\psi_j|\right]^* = \sum_j |\psi_j)(\varphi_j|.$$

Пусть U — *изометричный* оператор в $\mathscr{H}$, т. е.

$$(U\varphi|U\psi) = (\varphi|\psi); \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{H}.$$

тогда U ограничен; в силу (II.1.5) условие изометричности можно записать в виде

$$U^*U = I,$$

где I — единичный оператор. *Унитарным* называется изометричный оператор, отображающий $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}$. Условие унитарности имеет вид

$$U^*U = UU^* = I.$$

(Пример изометричного, но не унитарного оператора будет приведен в § III.10.)

Оператор X называется *эрмитовым*, если отвечающая ему форма эрмитова:

$$(X\varphi|\psi) \equiv \overline{(\psi|X\varphi)} = (\varphi|X\psi); \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{H} \qquad \text{(II.1.7)}$$

т. е. $X^* = X$.

В комплексном гильбертовом пространстве имеет место поляризационное тождество, в силу которого полуторалинейная форма однозначно определяется своими «диагональными» значениями, поэтому ограниченный оператор X однозначно определяется значениями $(\psi|X\psi)$, $\psi \in \mathscr{H}$. Поэтому для проверки какого-либо линейного соотношения между формами или операторами достаточно убедиться в его выполнении для диагональных значений соответствующих форм. Мы будем часто этим пользоваться. Заметим, что норма эрмитова оператора вычисляется через диагональные значения по формуле

$$\|X\| = \sup_{\psi \neq 0} \frac{|(\psi|X\psi)|}{\|\psi\|^2}, \qquad \text{(II.1.8)}$$

откуда видно, что в конечномерном случае норма эрмитова оператора равна максимуму модулей его собственных значений. В общем случае спектр оператора X также лежит в интервале $[-\|X\|, \|X\|]$, хотя само понятие спектра усложняется (см. § 3).

Пусть $\mathscr{H}_1$ замкнутое подпространство $\mathscr{H}$; тогда имеет место разложение в *ортогональную сумму*

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2,$$

где $\mathscr{H}_2=\{\varphi:(\varphi|\psi)=0,\ \psi\in\mathscr{H}_1\}$ — *ортогональное дополнение* к $\mathscr{H}_1$. Для всякого $\psi=\psi_1\oplus\psi_2$ положим $P\psi=\psi_1$. Тогда

$$P^2=P,\qquad P^*=P.$$

Обратно, всякий оператор в $\mathscr{H}$, удовлетворяющий этим условиям, является оператором (ортогонального) проецирования на подпространство $\mathscr{H}_1 = \{\psi : P\psi=\psi\}$. Мы будем называть такие операторы *проекторами.*

Пусть $\mathscr{H}_1$ — конечномерное подпространство; тогда проекция вектора ψ на $\mathscr{H}_1$ запишется в виде

$$|\psi_1)=\sum_j |e_j)(e_j|\psi), \tag{II.1.9}$$

где $\{e_j\}$ — любой ортонормированный базис в $\mathscr{H}_1$. Поэтому проектор на $\mathscr{H}_1$ является оператором конечного ранга вида

$$P=\sum_j |e_j)(e_j|. \tag{II.1.10}$$

Эта формула справедлива и для бесконечномерных подпространств, однако, поскольку здесь возникает бесконечный ряд операторов, необходимо уточнить понятие сходимости. Очевидно, сходимость по операторной норме здесь не подойдет, так как норма слагаемых не стремится к нулю: $\||e_j)(e_j|\|=1$. Полезными оказываются два других типа сходимости. Последовательность операторов $\{X_n\}$ *сходится к X сильно*, если $\lim_{n\to\infty}(\varphi|X_n\psi)=(\varphi|X\psi)$ для любого вектора $\psi\in\mathscr{H}$; *сходится слабо*, если $\lim_{n\to\infty}(\varphi|X_n\psi)=(\varphi|X\psi)$ для любых $\varphi,\ \psi\in\mathscr{H}$. Это равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty}(\psi|X_n\psi)=(\psi|X\psi),\qquad \psi\in\mathscr{H}.$$

Соотношение между этими типами сходимости иллюстрируется диаграммой

$$\begin{matrix}\text{сходимость}\\ \text{по норме}\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\text{сильная}\\ \text{сходимость}\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\text{слабая}\\ \text{сходимость.}\end{matrix}$$

Пусть $\{e_j\}$ — произвольная ортонормированная система в $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_1$ — порождаемое ею замкнутое подпространство. Поскольку для любого ψ ряд векторов (II.1.9) сходится в $\mathscr{H}$, то ряд операторов (II.1.10) сходится сильно и определяет проектор на $\mathscr{H}_1$. В частности, для любого ортонормированного базиса в $\mathscr{H}$

$$I=\sum_j |e_j)(e_j|, \tag{II.1.11}$$

где ряд сходится сильно. Это является равносильной записью векторного соотношения

$$|\psi)=\sum_j |e_j)(e_j|\psi), \tag{II.1.12}$$

выражающего *полноту* системы $\{e_j\}$.

Используя (II.1.11), имеем для любого ограниченного оператора X:

$$X = \left[\sum_j |e_j)(e_j|\right] X \left[\sum_k |e_k)(e_k|\right] = \\ = \sum_j \sum_k |e_j)(e_j|Xe_k)(e_k|, \qquad \text{(II.1.13)}$$

где имеется в виду сильная сходимость. Здесь $(e_j|Xe_k)$ — *матричные элементы* оператора X; эта формула дает разложение ограниченного оператора в линейную комбинацию операторов ранга 1 — *матричных единиц* $\{|e_j)(e_k|\}$. Если X — оператор конечного ранга, то в подходящем базисе он имеет лишь конечное число отличных от нуля матричных элементов.

Эрмитов оператор X называется *положительным* (обозначается $X \geqslant 0$), если

$$(\psi|X\psi) \geqslant 0; \qquad \psi \in \mathscr{H}.$$

Очевидно, что $X^*X \geqslant 0$ и $XX^* \geqslant 0$. Запись $X \geqslant Y$ означает, что $X - Y \geqslant 0$.

Следом положительного оператора X называется величина

$$\operatorname{Tr} X = \sum_j (e_j|Xe_j), \qquad \text{(II.1.14)}$$

где $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Ряд состоит из неотрицательных слагаемых; его сумма не зависит от выбора ортонормированного базиса, однако может быть бесконечной. Таким образом, если $X \geqslant 0$, то $0 \leqslant \operatorname{Tr} X \leqslant +\infty$.

Если X — не-положительный оператор, то определение следа по формуле (II.1.14) может оказаться некорректным; однако существует важный класс ядерных операторов, или операторов с конечным следом, для которых трудностей с определением следа не возникает. Мы рассмотрим этот класс в § I.7, а пока заметим, что формула (II.1.14) дает корректное определение для следа оператора конечного ранга. В самом деле, для любого базиса $\{e_j\}$

$$\sum_j (e_j|\varphi)(\psi|e_j) = (\psi|\varphi), \qquad \text{(II.1.15)}$$

откуда

$$\operatorname{Tr} |\varphi)(\psi| = (\psi|\varphi), \qquad \text{(II.1.16)}$$

так что

$$\operatorname{Tr} \left[\sum_j |\varphi_j)(\psi_j|\right] = \sum_j (\psi_j|\varphi_j). \qquad \text{(II.1.17)}$$

Отсюда, согласно (II.1.14), получаем формулу для следа интегрального оператора в $\mathscr{L}^2(a,b)$ с вырожденным ядром $T(x,y)$:

$$\operatorname{Tr} T = \int_a^b T(x,x)\,\mathrm{d}x.$$

Из формул (II.1.17), (II.1.13) вытекают важные соотношения

$$\operatorname{Tr} T^* = \overline{\operatorname{Tr} T}, \qquad \operatorname{Tr} TX = \operatorname{Tr} XT, \qquad \text{(II.1.18)}$$

которые будут обобщены в § 7 на более широкий класс операторов.

§ 2. Состояния и измерения в квантовой теории

Оператором плотности называется положительный эрмитов оператор с единичным следом:

$$S \geqslant 0, \qquad \operatorname{Tr} S = 1. \tag{II.2.1}$$

Примером оператора плотности является одномерный проектор (II.1.1). Как мы увидим в § 7, для всякого оператора плотности имеет место спектральное разложение

$$S = \sum_j s_j |\psi_j)(\psi_j|, \tag{II.2.2}$$

аналогичное разложению (I.2.8) в конечномерном случае. Ряд здесь сходится по норме операторов. Из (II.2.1) вытекает, что собственные значения оператора плотности удовлетворяют условиям

$$s_j \geqslant 0, \qquad \sum_j s_j = 1.$$

Обозначим через $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ множество всех операторов плотности в $\mathscr{H}$; если $\{S_j\} \subset \mathfrak{S}(\mathscr{H})$ — операторы плотности, а $\{p_j\}$ — конечное распределение вероятностей, то оператор $\sum p_j S_j$ удовлетворяет условиям (II.2.1). Таким образом, $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ — выпуклое множество.

$\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ играет роль множества состояний в квантовой механике. Из (II.2.2) вытекает, что в бесконечномерном случае справедлив аналог предложения I.2.3: *одномерные проекторы* $|\psi)(\psi|, (\psi|\psi) = 1$, *образуют остов множества* $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Состояния, представимые одномерными проекторами, называются *чистыми.*

Перейдем к описанию квантовых измерений. Пусть U — измеримое пространство результатов (например, U — конечное множество или область в $\mathbb{R}^n$ с σ-алгеброй борелевских множеств). Следуя § I.6, назовем *измерением* со значениями в U или, короче, U-измерением, аффинное отображение $S \to \mu_S(\mathrm{d}u)$ выпуклого множества квантовых состояний $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ в множество распределений вероятностей на U. Распределение вероятностей $\mu_S(\mathrm{d}u)$ интерпретируется как распределение вероятностей результатов измерения относительно состояния S. Далее мы установим аналог предложения I.6.1, позволяющий описать измерения в терминах разложений единицы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. *Разложением единицы* на U называется семейство $\mathbf{M} = \{M(B); B \in \mathscr{A}(U)\}$ эрмитовых операторов в $\mathscr{H}$, такое, что

(1) $M(\phi) = 0, \quad M(U) = I$;

(2) $M(B) \geqslant 0, \quad B \in \mathscr{A}(U)$;

(3) для любого не более чем счетного разбиения $\{B_j\}$ множества $B \in \mathscr{A}(U)$, выполняется $M(B) = \sum_j M(B_j)$, где ряд сходится слабо.

Эти условия напоминают определение вероятностной меры (однако не с числовыми, а с операторными значениями), и разложения единицы называются иногда вероятностными операторно-значными мерами или положительными операторно-значными мерами. Если U — конечное множество и $\{M_u; u \in U\}$ — набор эрмитовых операторов, удовлетворяющих условиям (I.6.2), т. е. разложение единицы в смысле § I.6, то формула

$$M(B) = \sum_{u \in B} M_u, \qquad B \subset U,$$

определяет операторно-значную меру на алгебре всех подмножеств U, т. е. разложение единицы в смысле сформулированного выше определения. Обратно, всякое разложение единицы на конечном U имеет такую структуру.

Частным, но весьма важным случаем являются *ортогональные разложения единицы*, удовлетворяющие кроме условий 1)– 3) также требованию

$$M(B_1)M(B_2) = 0 \qquad \text{если} \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

Как и в конечномерном случае (см. § I.6), это равносильно условию

$$M(B)^2 = M(B), \qquad B \in \mathscr{A}(U),$$

т. е. проекторно-значности меры $\{M(B)\}$.

Аналог предложения I.6.1 устанавливает взаимно-однозначное соответствие между U-измерениями $S \to \mu_S$ и разложениями единицы на U.

Теорема II.2.1. *Пусть $S \to \mu_S$ — U-измерение. Тогда существует (единственное) разложение единицы $M = \{M(B); B \in \mathscr{A}(U)\}$ в $\mathscr{H}$ такое, что для любого состояния S*

$$\mu_S(B) = \operatorname{Tr} SM(B), \qquad B \in \mathscr{A}(U). \tag{II.2.3}$$

Обратно, если $M = \{M(B)\}$ — разложение единицы, то (II.2.3) *определяет U-измерение.*

Соотношение (II.2.3) мы будем иногда символически записывать в виде

$$\mu_S(\mathrm{d}u) = \operatorname{Tr} SM(\mathrm{d}u).$$

Заметим, что в правой части формулы (II.2.3) стоит след не-положительного (и не-эрмитова) оператора, который, однако, как мы покажем в § 7, является ядерным. Пока же заметим, что для чистого состояния

$$\mu_{S_\psi}(B) = (\psi|M(B)\psi),$$

так как согласно (II.1.16) $\operatorname{Tr} |\psi)(\psi|X = (\psi|X\psi)$. Измерения, отвечающие ортогональным разложениям единицы, мы условимся называть *простыми.* Всякое простое измерение является крайней точкой выпуклого множества $\mathfrak{M}(U)$ всех U-измерений (доказательство этого совершенно такое же, как в конечномерном случае; см. предложение I.6.5), однако обратное, конечно, неверно.

Наиболее интересным представляется случай, когда результатами измерений являются вещественные числа. В этом случае простые измерения описываются в терминах наблюдаемых, т. е. операторов в $\mathscr{H}$, которые являются аналогом случайных величин в классической теории вероятностей. Следующий параграф посвящен более детальному рассмотрению этой связи.

§ 3. Спектральное разложение ограниченных операторов

В конечномерном пространстве всякий эрмитов оператор X имеет спектральное разложение
$$X = \sum_k \lambda_k E_k, \tag{II.3.1}$$
где λ_k — собственные значения оператора X (без учета кратности), E_k — проекторы на инвариантные подпространства, отвечающие значениям λ_k. Набор проекторов $\{E_k\}$ образует ортогональное разложение единицы, так что
$$\sum_k E_k = I; \qquad E_j E_k = \delta_{jk} E_j. \tag{II.3.2}$$

Бесконечномерный аналог формулы (II.3.1) имеет место для вполне непрерывных эрмитовых операторов (см. § 7). Однако далеко не всякий ограниченный оператор вполне непрерывен и вообще имеет хотя бы один собственный вектор. Примером может служить оператор Q умножения на независимую переменную x в пространстве $\mathscr{L}^2(a, b)$, где (a, b) — ограниченный интервал на прямой. Уравнение
$$x\psi(x) = \xi\psi(x) \tag{II.3.3}$$
имеет континуальный набор формальных решений
$$\psi_\xi(x) \sim \delta(x - \xi); \qquad a < \xi < b, \tag{II.3.4}$$
однако им не соответствуют ненулевые векторы в $\mathscr{H}$.

Тем не менее всякий эрмитов оператор в гильбертовом пространстве имеет спектральное разложение, в котором появляется уже непрерывный аналог суммы (II.3.1). Чтобы пояснить переход от суммы к интегралу, введем ортогональное разложение единицы на прямой, полагая
$$E(B) = \sum_{k:\,\lambda_k \in B} E_k; \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}).$$
($\mathscr{A}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра борелевских множеств[2] в $\mathbb{R}$), или, формально,
$$E(\mathrm{d}\lambda) = \left[\sum_k \delta(\lambda - \lambda_k) E_k\right] \mathrm{d}\lambda. \tag{II.3.5}$$
Тогда соотношение (II.3.1) можно записать в виде
$$X = \int \lambda E(\mathrm{d}\lambda). \tag{II.3.6}$$

Пусть теперь $E(\mathrm{d}\lambda)$ — произвольное ортогональное разложение единицы на $\mathbb{R}$. Предположим, что оно сосредоточено на ограниченном множестве

[2] σ-алгебра борелевских множеств — это наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества.

Λ, т. е. $E(\Lambda) = I$. Тогда для любого $\psi \in \mathscr{H}$ носителем вероятностной меры $\mu_\psi(\mathrm{d}\lambda) = \mathrm{Tr}\, S_\psi E(\mathrm{d}\lambda) = (\psi|E(\mathrm{d}\lambda)\psi)$ будет ограниченное множество Λ, и поэтому интеграл

$$\int \lambda(\psi|E(\mathrm{d}\lambda)\psi) = \int \lambda\mu_\psi(\mathrm{d}\lambda) \tag{II.3.7}$$

сходится. Этот интеграл определяет непрерывную эрмитову форму на $\mathscr{H}$, которой соответствует эрмитов оператор X, так что

$$(\psi|X\psi) = \int \lambda(\psi|E(\mathrm{d}\lambda)\psi), \qquad \psi \in \mathscr{H}. \tag{II.3.8}$$

Таким образом, имеет место равенство (6.3), где интеграл понимается в смысле слабой сходимости. (Более детальный анализ показывает, что интеграл (II.3.6) сходится также в сильном смысле.)

Теорема II.3.1 (Спектральная теорема для ограниченных операторов)**.** *Соотношение* (II.3.6) *устанавливает взаимно-однозначное соответствие между эрмитовыми операторами X и ортогональными разложениями единицы $E(\mathrm{d}\lambda)$ в $\mathscr{H}$, сосредоточенными на ограниченных подмножествах $\mathbb{R}$.*

Разложение единицы $E(\mathrm{d}\lambda)$ называется также *спектральной мерой* оператора X.

Вернемся на время к операторам, отвечающим конечным разложениям единицы (II.3.5). Из (II.3.2) вытекает, что для любого многочлена $p(\lambda)$

$$p(X) = \sum_k p(\lambda_k)E_k = \int p(\lambda)E(\mathrm{d}\lambda).$$

Аппроксимируя в общем случае интегралы суммами, можно показать, что для произвольного эрмитова оператора X выполняется

$$p(X) = \int p(\lambda)E(\mathrm{d}\lambda).$$

Пользуясь этим, определим эрмитов оператор $f(X)$, где f — ограниченная измеримая функция, соотношением

$$(\psi|f(X)\psi) = \int f(\lambda)(\psi|E(\mathrm{d}\lambda)\psi); \qquad \psi \in \mathscr{H}.$$

Отображение $f \to f(X)$ сохраняет алгебраические функциональные соотношения: линейная комбинация и произведение функций переходят соответственно в линейную комбинацию и произведение соответствующих операторов. Обозначая $f(x) = \mathbf{1}_B(x)$ индикатор множества B, имеем

$$E(B) = \mathbf{1}_B(X); \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}).$$

Из равенства

$$X^2 = \int \lambda^2 E(\mathrm{d}\lambda)$$

вытекает, что

$$\|X\psi\|^2 = \int \lambda^2(\psi|E(\mathrm{d}\lambda)\psi).$$

Отображение $f \to f(X)$ сохраняет также отношение упорядоченности. Например, полагая

$$|X| = \int |\lambda| E(\mathrm{d}\lambda), \tag{II.3.9}$$

имеем $\pm X \leqslant |X|$, так как $\pm x \leqslant |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

В качестве примера рассмотрим оператор Q умножения на независимую переменную в пространстве $\mathscr{L}^2(a,b)$, где (a,b) — ограниченный интервал. Имеем

$$Q = \int_a^b \xi E(\mathrm{d}\xi), \tag{II.3.10}$$

где $E(B) = \mathbf{1}_B(x)$. В самом деле, (II.3.10) означает, что

$$(\psi|Q\psi) = \int_a^b \xi \mu_\psi(\mathrm{d}\xi), \tag{II.3.11}$$

где

$$\mu_\psi(B) = (\psi|E(B)\psi) = \\ = \int_a^b \mathbf{1}_B(x)|\psi(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_B |\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

так что $\mu_\psi(\mathrm{d}\xi) = |\psi(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi$ и равенство (II.3.10) очевидно. Таким образом, спектральной мерой оператора умножения на x является семейство проекторов $\{\mathbf{1}_B(\cdot);\ B \in \mathscr{A}((a,b))\}$.

Оператор умножения является типичным примером оператора с «непрерывным спектром». Как мы видели, он не имеет собственных векторов в $\mathscr{L}^2(a,b)$, хотя уравнение (II.3.3) имеет интуитивно понятные формальные решения (II.3.4). В этой связи уместно сказать несколько слов о формализме Дирака применительно к операторам с непрерывным спектром. Следуя Дираку, обозначим через $|\xi)$ формальную собственную функцию (II.3.4). Набор $\{|\xi);\ \xi \in (a,b)\}$ является «ортонормированным» в том смысле, что

$$(\xi'|\xi) = \delta(\xi - \xi'),$$

и удовлетворяет формальному условию полноты

$$\int_a^b |\xi)(\xi| \mathrm{d}\xi = I. \tag{II.3.12}$$

На самом деле (II.3.12) является сокращенной формой записи равенства

$$\int_a^b (\psi|\xi)(\xi|\psi)\mathrm{d}\xi = (\psi|\psi), \qquad \psi \in \mathscr{H},$$

которое становится осмысленным, если понимать символ $(\xi|\psi)$ как

$$(\xi|\psi) = \int_a^b \delta(x-\xi)\psi(x)\mathrm{d}x = \psi(\xi). \tag{II.3.13}$$

Таким образом, семейство $\{|\xi)\}$ является формальным континуальным аналогом ортонормированного базиса, а соотношение (II.3.12) является непрерывным аналогом условия полноты (II.3.11). Спектральное разложение оператора умножения на x в дираковских обозначениях имеет вид

$$Q = \int_a^b \xi|\xi)(\xi|\mathrm{d}\xi \tag{II.3.14}$$

и выглядит как непосредственный континуальный аналог спектрального разложения (I.2.5) с дискретным спектром. Фактически (II.3.14) означает, что

$$(\psi|Q\psi) = \int_a^b \xi(\psi|\xi)(\xi|\psi)\mathrm{d}\xi, \qquad \psi \in \mathscr{H},$$

а это то же самое, что (3.11). Таким образом, мы получаем связь между (II.3.10) и (II.3.14), полагая

$$E(\mathrm{d}\xi) = |\xi)(\xi|\mathrm{d}\xi.$$

Конечно, это соотношение нельзя понимать буквально, так как проекторнозначная мера $E(\mathrm{d}\xi)$ не является дифференцируемой (не имеет плотности) относительно меры Лебега $\mathrm{d}\xi$. Однако скалярные меры $\mu_\psi(\mathrm{d}\xi) = (\psi|E(\mathrm{d}\xi)\psi)$ уже дифференцируемы относительно $\mathrm{d}\xi$, причем

$$\mu_\psi(\mathrm{d}\xi) = |\psi(\xi)|^2\mathrm{d}\xi = (\psi|\xi)(\xi|\psi)\mathrm{d}\xi. \tag{II.3.15}$$

Наглядность формализма Дирака дает определенные методические преимущества в изложении квантовой теории. По существу можно пользоваться этим формализмом в тех рамках, в которых он эквивалентен спектральному разложению.

§ 4. Спектральное разложение неограниченных операторов

Для квантовой механики важно обобщение спектральной теоремы на неограниченные операторы. Неограниченные операторы (за несущественным исключением) не могут быть определены на всем пространстве $\mathscr{H}$. Задание неограниченного оператора всегда подразумевает и описание области его определения. Пусть X — оператор с областью определения $\mathscr{D}(X) \subseteq \mathscr{H}$. Он называется *симметричным*, если соответствующая полуторалинейная форма эрмитова на $\mathscr{D}(X)$:

$$(X\varphi|\psi) = (\varphi|X\psi); \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{D}(X). \tag{II.4.1}$$

Наиболее важным, однако, является понятие самосопряженного оператора. Пусть X — оператор с плотной областью определения $\mathscr{D}(X)$. Обозначим через $\mathscr{D}(X^*)$ множество векторов φ, для которых выражение $\psi \to (\varphi|X\psi)$ является непрерывным функционалом от ψ. Тогда по лемме Рисса—Фреше $(\varphi|X\psi) = (\varphi^*|\psi)$, где φ^* — некоторый вектор, определяемый однозначно, так как ψ пробегает плотное подмножество $\mathscr{D}(X)$. Обозначим X^* оператор $\varphi \to \varphi^*$ с областью определения $\mathscr{D}(X^*)$. Он называется *сопряженным* к X. Таким образом,

$$(X^*\varphi|\psi) = (\varphi|X\psi); \qquad \psi \in \mathscr{D}(X), \quad \varphi \in \mathscr{D}(X^*).$$

В частности, X — *симметричный*, если $X \subseteq X^*$, т. е. $\mathscr{D}(X) \subseteq \mathscr{D}(X^*)$ и $X\psi = X^*\psi$ на $\mathscr{D}(X)$.

Оператор X с плотной областью определения называется *самосопряженным*, если $X = X^*$, т. е. $\mathscr{D}(X^*) = \mathscr{D}(X)$ и выполняется равенство (II.4.1).

Иногда симметричный оператор X можно расширить до самосопряженного. Если это можно сделать и притом единственным способом, то X называется *существенно самосопряженным.* Симметричный оператор, не имеющий симметричных расширений, называется *максимальным.*

Эти понятия иллюстрируются следующими примерами. Пусть Q (неограниченный) оператор умножения на x в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ с областью определения

$$\mathscr{D}(Q) = \left\{\psi : \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Для любых φ, $\psi \in \mathscr{D}(Q)$ имеем

$$(\varphi|Q\psi) = \int x\overline{\varphi(x)}\psi(x)\mathrm{d}x = (Q\varphi|\psi),$$

так что Q симметричен. На самом деле, он является самосопряженным; для доказательства рассмотрим $\varphi \in \mathscr{D}(Q^*)$. Тогда $\int x\overline{\varphi}\psi \, \mathrm{d}x$ — непрерывный функционал от ψ и по лемме Рисса—Фреше $\int x\overline{\varphi}\psi \, \mathrm{d}x = \int \overline{h}\psi \, \mathrm{d}x$, где $h \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что $h = x\varphi$ и $\int |x\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty$, так что $\mathscr{D}(Q^*) = \mathscr{D}(Q)$.

Далее рассмотрим оператор $P = \mathrm{i}^{-1} \, \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ с областью определения

$$\mathscr{D}(P) = \left\{\psi : \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)\right|^2 \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Преобразование Фурье

$$\tilde{\psi}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x} \psi(x) \, \mathrm{d}x$$

изометрично отображает $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ на $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, при этом оператор P переходит в оператор умножения на η, а область $\mathscr{D}(P)$ отображается на подпространство $\{\tilde{\psi} : \int |\eta\hat{\psi}(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta < \infty\}$. Из доказанного выше следует, что оператор P также самосопряженный.

В качестве следующего примера рассмотрим оператор $P_+ = \mathrm{i}^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ в пространстве $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(0, \infty)$ с областью определения

$$\mathscr{D}(P_+) = \left\{\psi : \psi(0) = 0, \int_0^{\infty} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)\right|^2 \mathrm{d}x < \infty \right\}. \qquad \text{(II.4.2)}$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\varphi|P_+\psi) &= \mathrm{i}^{-1}\int_0^\infty \overline{\varphi(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \mathrm{i}^{-1}\overline{\varphi(0)}\psi(0) - \mathrm{i}^{-1}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{\varphi(x)}\psi(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= (P_+^*\varphi|\psi), \qquad \varphi\in\mathscr{D}(P_+^*),\end{aligned}\tag{II.4.3}$$

где $P_+^* = \mathrm{i}^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ с областью определения

$$\mathscr{D}(P_+^*) = \left\{\psi : \int_0^\infty \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)\right|^2 \mathrm{d}x < \infty\right\}.$$

Таким образом, $P_+ \subset P_+^*$, $P_+ \neq P_+^*$ поскольку $\mathscr{D}(P_+) \neq \mathscr{D}(P_+^*)$. Оператор P_+ симметричен, но P_+^* не симметричен, так как для него слагаемое $\mathrm{i}^{-1}\overline{\varphi(0)}\psi(0)$ в формуле типа (II.4.3) уже будет отлично от нуля, откуда

$$(\varphi|P_+^*\psi) \neq (P_+^*\varphi|\psi); \qquad \varphi,\psi\in\mathscr{D}(P_+^*).$$

Можно показать, что P_+ максимален.

Перейдем к спектральному представлению самосопряженных операторов. Рассмотрим интеграл типа (II.3.6), где $E(\mathrm{d}\lambda)$ — произвольное ортогональное разложение единицы на прямой. Теперь нельзя ожидать, чтобы интеграл в правой части (II.3.8) сходился для всех $\psi\in\mathscr{H}$, однако он заведомо сходится, если ψ принадлежит подпространству

$$\mathscr{D} = \left\{\psi : \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2(\psi|E(\mathrm{d}\lambda)\psi) < \infty\right\}.\tag{II.4.4}$$

Можно показать, что $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{H}$ и эрмитова форма (II.3.7) определяет самосопряженный оператор X с $\mathscr{D}(X) = \mathscr{D}$, так что

$$(\psi|X\psi) = \int \lambda(\psi|E(\mathrm{d}\lambda)\psi), \qquad \psi\in\mathscr{D},\tag{II.4.5}$$

$$\|X\psi\|^2 = \int \lambda^2(\psi|E(\mathrm{d}\lambda)\psi), \qquad \psi\in\mathscr{D}.\tag{II.4.6}$$

Последнее равенство показывает, почему должно быть $\mathscr{D}(X) = \mathscr{D}$.

Теорема II.4.1 (Спектральная теорема для самосопряженных операторов)**.** *Соотношения* (II.4.5), (II.4.4) *устанавливают взаимно-однозначное соответствие между самосопряженными операторами и ортогональными разложениями единицы (спектральными мерами) в* $\mathscr{H}$.

Рассмотрим самосопряженный оператор Q умножения на x в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. Рассуждая как в случае конечного интервала в § 3, находим его спектральную меру

$$E(B) = \mathbf{1}_B(x); \qquad B\in\mathscr{A}(\mathbb{R}),\tag{II.4.7}$$

или, формально, $E(\mathrm{d}\xi) = |\xi)(\xi|\mathrm{d}\xi$, где $|\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}$ — формальные собственные векторы оператора умножения, так что, в обозначениях Дирака,

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \xi|\xi)(\xi|\mathrm{d}\xi.$$

В качестве следующего примера рассмотрим самосопряженный оператор $P = \mathrm{i}^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ с областью определения (II.4.3). Этот оператор имеет континуальный набор формальных собственных векторов

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta x}; \qquad \eta \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющий условиям ортогональности и полноты типа (II.3.12). Обозначая формальные собственные векторы через $|\eta)$; $\eta \in \mathbb{R}$, мы можем ожидать, что P имеет спектральное разложение

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \eta|\eta)(\eta|\mathrm{d}\eta.$$

Для того чтобы придать этим рассуждениям точный смысл, рассмотрим преобразование Фурье $\widetilde{\psi}(\eta) = (\eta|\psi)$. В обозначениях Дирака преобразование Фурье соответствует переходу от «базиса» $\{|\xi)\}$ к «базису» $\{|\eta)\}$,

$$(\eta|\psi) = \int (\eta|\xi)(\xi|\psi)\,\mathrm{d}\xi$$

поскольку

$$(\eta|\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\delta(\xi - x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta\xi}.$$

Поскольку оператор P переходит в оператор умножения на η, спектральная мера $F(\mathrm{d}\eta)$ оператора P получается обратным преобразованием Фурье спектральной меры (II.4.7), а именно

$$(\psi|F(B)\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{B} \overline{\psi(x)}\psi(x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta(x-x')}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}x'. \tag{II.4.8}$$

Формально это может быть записано как

$$\begin{aligned}(\psi|F(\mathrm{d}\eta)\psi) &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x)}\psi(x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta(x-x')}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\right]\mathrm{d}\eta = \\ &= (\psi|\eta)(\eta|\psi)\mathrm{d}\eta,\end{aligned} \tag{II.4.9}$$

или $F(\mathrm{d}\eta) = |\eta)(\eta|\mathrm{d}\eta$, что согласуется с формальным спектральным представлением P.

Все сказанное в § 3 о функциях эрмитовых операторов переносится с очевидными изменениями на функции самосопряженных операторов. Рассмотрим, в частности, преобразование Фурье спектральной меры оператора X:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X} = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\lambda}E(\mathrm{d}\lambda). \tag{II.4.10}$$

Непосредственно проверяется, что семейство $\{V_\theta = \exp \mathrm{i}\theta X;\ \theta \in \mathbb{R}\}$ является *группой унитарных операторов*, т. е.

$$V_{\theta_1+\theta_2} = V_{\theta_1}V_{\theta_2}, \qquad V_\theta^* = V_{-\theta}, \qquad V_0 = I. \tag{II.4.11}$$

Можно также показать, что семейство операторов $\{V_\theta\}$ *сильно непрерывно* по θ, т. е. что для любого $\psi \in \mathscr{H}$ формула

$$\psi_\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}\psi; \qquad \theta \in \mathbb{R}, \tag{II.4.12}$$

определяет непрерывную кривую в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Более того, эта кривая дифференцируема в $\mathscr{H}$ тогда и только тогда, когда $\psi \in \mathscr{D}(X)$; при этом $\{\psi_\theta\} \subset \mathscr{D}(X)$ и

$$\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}\theta} = \mathrm{i}X\psi_\theta. \tag{II.4.13}$$

Верно и обратное утверждение, известное как теорема Стоуна.

Теорема II.4.2. *Всякая сильно (слабо) непрерывная группа унитарных операторов имеет вид $V_\theta = \exp \mathrm{i}\theta X$, где X — однозначно определенный самосопряженный оператор.*

Оператор X называется *инфинитезимальным оператором* группы $\{V_\theta\}$. Найдем группу $\{\exp \mathrm{i}\theta P\}$ в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. Используя (II.4.10), (II.4.9), получаем

$$\begin{aligned}(\psi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta P}\psi) &= \frac{1}{2\pi}\iiint \overline{\psi(x)}\psi(x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta(x-x')}\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' \\ &= (\psi|\psi_\theta),\end{aligned}$$

где $\psi_\theta(x) = \psi(x+\theta)$. Таким образом,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta P}\psi(x) = \psi(x+\theta), \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению симметричных, но не обязательно самосопряженных операторов. Имеет место следующее обобщение теоремы II.4.1.

Теорема II.4.3. *Для плотно определенного симметричного оператора X существует, вообще говоря, не единственное разложение единицы (спектральная мера) $M(\mathrm{d}\lambda)$, такое, что*

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(x) &\subseteq \left\{\psi : \int \lambda^2(\psi|M(\mathrm{d}\lambda)\psi) < \infty\right\}; \\ (\psi|X\psi) &= \int \lambda(\psi|M(\mathrm{d}\lambda)\psi), \qquad \psi \in \mathscr{D}(X); \\ \|X\psi\|^2 &= \int \lambda^2(\psi|M(\mathrm{d}\lambda)\psi), \qquad \psi \in \mathscr{D}(X).\end{aligned} \tag{II.4.14}$$

Если же оператор X максимален и включение в первом соотношении заменяется на равенство, то $M(\mathrm{d}\lambda)$ определяется по X однозначно.

В качестве примера рассмотрим оператор P_+ в пространстве $\mathscr{L}^2(0,\infty)$. Мы покажем, что его спектральная мера имеет вид

$$M(\mathrm{d}\eta) = |\eta_+)(\eta_+|\mathrm{d}\eta, \tag{II.4.15}$$

где $|\eta_+)$ — формальные собственные векторы оператора дифференцирования $(1/\sqrt{2\pi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta x}$, $\eta \in \mathbb{R}$, которые отличаются от $|\eta)$ только тем, что аргумент x меняется от 0 до ∞. Система $\{|\eta_+)\}$, очевидно, удовлетворяет формальному условию полноты

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\eta_+)(\eta_+|\mathrm{d}\eta = I, \tag{II.4.16}$$

но не «ортогональна», так как

$$(\eta'_+|\eta_+) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta-\eta')x}\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2}\delta(\eta-\eta') + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}(\eta-\eta')^{-1}. \tag{II.4.17}$$

Поэтому разложение единицы (II.4.15) не является ортогональным. Подобные системы называются в физике «переполненными».

Разложение единицы (II.4.15) можно аккуратно определить с помощью формулы типа (II.4.8):

$$(\psi|M(B)\psi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_B\overline{\psi(x)}\psi(x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta(x-x')}\mathrm{d}x\mathrm{d}x'\mathrm{d}\eta. \tag{II.4.18}$$

Продолжая функции, заданные на $(0,\infty)$, нулем на отрицательную полуось, мы получаем естественное вложение $\mathscr{L}^2(0,\infty)$ в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. При этом $M(\mathrm{d}\eta)$ является ограничением на $\mathscr{L}^2(0,\infty)$ спектральной меры $F(\mathrm{d}\eta)$ оператора P, т. е.

$$(\psi|M(\mathrm{d}\eta)\psi) = (\tilde\psi|F(\mathrm{d}\eta)\tilde\psi),$$

где $\tilde\psi$ — указанное продолжение функции $\psi\in\mathscr{L}^2(0,\infty)$. Если $\psi\in\mathscr{D}(P_+)$, то $\tilde\psi\in\mathscr{D}(P)$, причем $\widetilde{P_+\psi} = P\tilde\psi$. Поэтому

$$(\psi|P_+\psi) = (\tilde\psi|P\tilde\psi) = \int\eta(\tilde\psi|F(\mathrm{d}\eta)\tilde\psi) = \int\eta(\psi|M(\mathrm{d}\eta)\psi),$$

$$\|P_+\psi\|^2 = \|P\tilde\psi\|^2 = \int\eta^2(\tilde\psi|F(\mathrm{d}\eta)\tilde\psi) = \int\eta^2(\psi|M(\mathrm{d}\eta)\psi),$$

откуда видно, что $M(\mathrm{d}\eta)$ удовлетворяет соотношениям (II.4.14), характеризующим спектральную меру оператора P_+.

§ 5. О реализации измерения

В предыдущем параграфе мы видели, что неортогональное разложение единицы $\{M(B)\}$ в $\mathscr{H}$ может возникать как ограничение ортогонального разложения $\{E(B)\}$ в некотором более широком пространстве $\tilde{\mathscr{H}}$:

$$M(B) = \widetilde{E}E(B)\widetilde{E};\qquad B\in\mathscr{A}(U), \tag{II.5.1}$$

где $\widetilde{E}$ — проектор из $\tilde{\mathscr{H}}$ на $\mathscr{H}$. Легко понять, что, проецируя таким образом любое, в частности, ортогональное разложение единицы, мы всегда получим некоторое разложение единицы в $\mathscr{H}$. Как показал Наймарк, верно и обратное утверждение.

Теорема II.5.1. *Всякое разложение единицы $\{M(B)\}$ в $\mathscr{H}$ может быть продолжено до ортогонального разложения единицы $\{E(B)\}$ в более широком пространстве $\tilde{\mathscr{H}}$, так что будет выполняться* (II.5.1).

Мы дадим доказательство этой теоремы лишь для конечных разложений единицы, поскольку этот случай технически прост и дает ясное представление об идее доказательства в общем случае.

Пусть $\mathscr{L}$ линейное пространство; *пред-скалярным произведением* будем называть форму $(\varphi|\psi)$; φ, $\psi \in \mathscr{L}$, обладающую всеми свойствами скалярного произведения, кроме того, что $(\varphi|\varphi)$ может равняться нулю для ненулевых $\varphi \in \mathscr{L}$. Имеется стандартная процедура построения гильбертова пространства по данному пред-скалярному произведению в $\mathscr{L}$: обозначим $\mathscr{N} = \{\psi : (\psi|\psi) = 0\}$, тогда $(\cdot|\cdot)$ однозначно определяет скалярное произведение на фактор-пространстве $\mathscr{L}/\mathscr{N}$. Пополнение $\mathscr{L}/\mathscr{N}$ относительно этого скалярного произведения и будет называться *пополнением* $\mathscr{L}$ *относительно пред-скалярного произведения* $(\cdot|\cdot)$.

Доказательство теоремы II.5.1. Пусть $\mathbf{M} = \{M_u; u = 1, \ldots, m\}$ — конечное разложение единицы в $\mathscr{H}$. Обозначим $\mathscr{L}$ прямую сумму m копий пространства $\mathscr{H}$, так что векторы $\mathscr{L}$ имеют вид $\mathbf{\Psi} = [\psi_u; u = 1, \ldots, m]$. Тогда форма

$$(\mathbf{\Psi}|\mathbf{\Psi}')^{\sim} = \sum_{u=1}^{m} (\psi_u|M_u\psi_u'); \qquad \mathbf{\Psi}, \mathbf{\Psi}' \in \mathscr{L},$$

является пред-скалярным произведением, причем неотрицательность следует из того, что $M_u \geqslant 0$. Пусть $\tilde{\mathscr{H}}$ — пополнение $\mathscr{L}$ относительно $(\cdot|\cdot)^{\sim}$. Отображение $\varphi \to \mathbf{\Psi}_\varphi = [\varphi; u = 1, \ldots, m]$ из $\mathscr{H}$ в $\tilde{\mathscr{H}}$ изометрично, поскольку

$$(\mathbf{\Psi}_\varphi|\mathbf{\Psi}_\varphi')^{\sim} = \sum_{u=1}^{m} (\varphi|M_u\varphi') = (\varphi|\varphi'); \qquad \varphi, \varphi' \in \mathscr{H}.$$

Отождествляя образ $\mathscr{H}$ при этом отображении с $\mathscr{H}$, мы можем предположить, что $\mathscr{H} \subset \tilde{\mathscr{H}}$. Определим оператор E_v в $\mathscr{L}$, который обращает в нуль все компоненты вектора $\mathbf{\Psi} = [\psi_u]$, кроме ψ_v, которая остается неизменной. Тогда нетрудно видеть, что операторы $\{E_v; v = 1, \ldots, m\}$ составляют ортогональное разложение единицы в $\tilde{\mathscr{H}}$. Для $\varphi \in \mathscr{H}$

$$(\varphi|M_u\varphi) = (\mathbf{\Psi}_\varphi|E_u\mathbf{\Psi}_\varphi)^{\sim},$$

откуда следует, что $\{E_u\}$ и является требуемым расширение разложения единицы $\{M_u\}$. Теорема доказана.

Основываясь на теореме II.5.1, мы покажем, что произвольное квантовое измерение $\mathbf{M}$ в определенном смысле сводится к простому измерению $\mathbf{E}$ над некоторой квантовой системой, включающей кроме исходного объекта некоторые дополнительные независимые «степени свободы». Для этого нам понадобится понятие тензорного произведения гильбертовых пространств, служащее для математического описания системы квантовых объектов.

Пусть $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot|\cdot)_1$ и $(\cdot|\cdot)_2$, соответственно. Рассмотрим множество $\mathscr{L}$ формальных конечных линейных комбинаций элементов $\psi_1 \times \psi_2 \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$. Введем в линейном пространстве $\mathscr{L}$ пред-скалярное произведение $(\cdot|\cdot)$, полагая

$$(\varphi_1 \times \varphi_2|\psi_1 \times \psi_2) = (\varphi_1|\psi_1)_1(\varphi_2|\psi_2)_2 \tag{II.5.2}$$

и продолжая на $\mathscr{L}$ по линейности. Пополнение $\mathscr{L}$ и называется тензорным произведением гильбертовых пространств $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, и обозначается $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$.

Вектор пространства $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, соответствующий классу эквивалентности вектора $\psi_1 \times \psi_2 \in \mathscr{L}$, обозначается $\psi_1 \otimes \psi_2$. Из (II.5.2) следует, что

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2) = (\varphi_1|\psi_1)_1 (\varphi_2|\psi_2)_2. \tag{II.5.3}$$

Хорошую иллюстрацию этой абстрактной конструкции дает следующий пример. Пусть $\mathscr{H}_1 = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ — пространство квадратично интегрируемых функций $\psi_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и $\mathscr{H}_2 = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$ — пространство квадратично интегрируемых функций $\psi_2(y)$, $y \in \mathbb{R}^m$. Тогда $\mathscr{L}/\mathscr{N}$ состоит из конечных сумм вида

$$\psi(x, y) = \sum_j \psi_1^j(x) \psi_2^j(y)$$

причем

$$(\varphi|\psi) = \iint \overline{\varphi(x, y)} \psi(x, y) \mathrm{d}^n x \, \mathrm{d}^m y,$$

а $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^{n+m})$ состоит из всех квадратично интегрируемых функций $\varphi(x, y)$; $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ с тем же скалярным произведением. Вектор $\psi_1 \otimes \psi_2$ соответствует функции $\psi_1(x)\psi_2(y)$.

Вернемся к общему случаю. Если $\{e_1^j\}$ — базис в $\mathscr{H}_1$, а $\{e_2^k\}$ — базис в $\mathscr{H}_2$, то система $\{e_1^j \otimes e_2^k\}$ образует базис в $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, (имеются в виду ортонормированные базисы). Отсюда получаем, что $\varphi \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ представляется в виде $\varphi = \sum_k \psi_1^k \otimes e_2^k$, где ψ_1^k — некоторые однозначно определяемые векторы пространства $\mathscr{H}_1$, такие что $\sum_k \|\psi_1^k\|_1^2 < \infty$. Заметим, что подпространства $\mathscr{H}_1 \otimes e_2^k \subset \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, состоящие из векторов вида $\psi_1 \oplus e_2^k$, $\psi_1 \in \mathscr{H}_1$, взаимно-ортогональны. Таким образом, фиксируя базис в $\mathscr{H}_2$, мы получаем разложение $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ в ортогональную сумму подпространств, изоморфных $\mathscr{H}_1$:

$$\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 = \sum_k \oplus [\mathscr{H}_1 \otimes e_2^k]. \tag{II.5.4}$$

Тензорное произведение операторов $X_1 \otimes X_2$, где X_j — ограниченный оператор в $\mathscr{H}_j$, определяется формулой

$$(X_1 \otimes X_2)(\psi_1 \otimes \psi_2) = X_1\psi_1 \otimes X_2\psi_2$$

на элементах вида $\psi_1 \otimes \psi_2$ и однозначно продолжается на $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ по линейности и непрерывности.

Рассмотрим фиксированное разложение (II.5.4). Тогда всякий ограниченный оператор X в $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ задается блочной матрицей $[X_{jk}]$, элементами которой являются операторы в $\mathscr{H}_1$, по формуле

$$X \left(\sum_k \psi_1^k \otimes e_2^k \right) = \sum_j \left(\sum_k X_{jk} \psi_1^k \right) \otimes e_2^j.$$

В частности, оператору $X_1 \otimes X_2$ соответствует матрица $[X_1(e_2^j | X_2 e_2^k)_2]$.

Предложение II.5.2. *Для любого измерения* $\mathbf{M} = \{M(B)\}$ *в* $\mathscr{H}$ *найдутся гильбертово пространство* $\mathscr{H}_0$*, чистое состояние* S_0 *в* $\mathscr{H}_0$ *и простое измерение* $\mathbf{E} = \{E(B)\}$ *в* $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$ *такие, что*

$$\mu_{S \otimes S_0}^{\mathbf{E}}(B) = \mu_S^{\mathbf{M}}(B); \qquad B \in \mathscr{A}(U), \tag{II.5.5}$$

для любого состояния S в $\mathscr{H}$. Обратно, всякая тройка $(\mathscr{H}_0, S_0, \mathbf{E})$ *порождает единственное измерение* $\mathbf{M}$ *в $\mathscr{H}$, удовлетворяющее* (II.5.5).

Здесь $\mu^{\mathbf{E}}_{S\otimes S_0}$ — распределение вероятностей измерения $\mathbf{E}$ относительно состояния $S \otimes S_0$, а $\mu^{\mathbf{M}}_S$ — распределение вероятностей измерения $\mathbf{M}$ относительно состояния S.

Доказательство. Пусть $\mathbf{E}$ — ортогональное разложение единицы в $\widetilde{\mathscr{H}}$, существование которого утверждается в теореме II.5.1. Расширяя дополнительно, если необходимо, пространство $\widetilde{\mathscr{H}}$ и продолжая $\mathbf{E}$, мы можем считать, что $\widetilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H} \oplus \mathscr{H} \oplus \ldots$, причем так, что $\mathscr{H} = \mathscr{H} \oplus [0] \oplus [0] \oplus \ldots$. Тогда $\widetilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$, где $\mathscr{H}_0 = l^2$ — пространство квадратично-суммируемых последовательностей $[c_j : j = 1, 2, \ldots]$. Пусть $S_0 = S_\psi$, где $\psi = [1, 0, 0, \ldots]$; тогда оператор $S \otimes S_0$ имеет матрицу

$$\begin{bmatrix} S & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

и очевидно, что для любого ограниченного оператора X в $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$ выполняется $\operatorname{Tr}(S \otimes S_0)X = \operatorname{Tr} S\widetilde{E}X\widetilde{E}$. Подставляя $X = E(B)$ и учитывая (II.5.1), получаем (II.5.5).

Чтобы доказать обратное утверждение, заметим, что соотношение

$$\mu^{\mathbf{E}}_{S\otimes S_0}(B) = \operatorname{Tr}(S \otimes S_0)E(B); \qquad B \in \mathscr{A}(U),$$

определяет аффинное отображение $S \to \mu^{\mathbf{E}}_{S\otimes S_0}$ множества квантовых состояний в множество распределений вероятностей на U. Согласно теореме II.2.1, найдется $\mathbf{M}$, удовлетворяющее (II.5.5), что доказывает предложение.

Это предложение утверждает, что измерения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{M}$ статистически эквивалентны в том смысле, что имеют одинаковые распределения вероятностей результатов для любого состояния S.

Мы будем называть тройку $(\mathscr{H}_0, S_0, \mathbf{E})$ *реализацией* измерения $\mathbf{M}$. Реализация соответствует простому измерению над системой $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$, состоящей из исходной системы $\mathscr{H}$ и вспомогательных независимых «степеней свободы» $\mathscr{H}_0$ в фиксированном состоянии S_0. В классической статистике это соответствует рандомизированной процедуре, в которой вспомогательная система может рассматриваться как «рулетка», выдающая случайные числа в соответствии с законом распределения S_0. Роль $\mathscr{H}_0$ в квантовом случае будет более ясной в дальнейшем, когда мы рассмотрим некоторые примеры (см. § III.7).

§ 6. Соотношения неопределенностей и совместная измеримость

В квантовой теории наибольший интерес представляют измерения с вещественными значениями. Пусть $\mathbf{M}\colon S \to \mu_S(\mathrm{d}x)$ такое измерение; тогда $\mu_S(\mathrm{d}x)$ есть распределение вероятностей на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Важнейшими характеристиками такого распределения являются *среднее* и *дисперсия*

$$E_S\{\mathbf{M}\} = \int x\mu_S(\mathrm{d}x),$$

$$D_S\{\mathbf{M}\} = \int (x - E_S\{\mathbf{M}\})^2\mu_S(\mathrm{d}x). \qquad \text{(II.6.1)}$$

Эти величины определены и конечны, во всяком случае, если μ_S имеет конечный второй момент. В этом случае мы скажем, что измерение $\mathbf{M}$ имеет конечный второй момент относительно состояния S.

Наблюдаемой в квантовой механике называется самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$; мы, однако, будем применять этот термин к произвольному плотно определенному симметричному оператору, имея в виду теорему II.4.3. Согласно спектральным теоремам, соотношение $X = \int xM(\mathrm{d}x)$ устанавливает соответствие между наблюдаемыми и измерениями. Как мы увидим, величины (II.6.1) одни и те же для всех спектральных мер $M(\mathrm{d}x)$ оператора X; для чистого состояния это следует непосредственно из (II.4.5), (II.4.6) и (II.4.14). *Средним значением* $E_S(X)$ и *дисперсией* $D_S(X)$ наблюдаемой X мы будем называть величины (II.6.1), вычисленные по соответствующему измерению $M(\mathrm{d}x)$. Для чистого состояния $S = S_\psi$ получаем[3]

$$\begin{aligned} &E_{S_\psi}(X) = (\psi|X\psi), \\ &D_{S_\psi}(X) = \|(X - E_{S_\psi}(X))\psi\|^2 = \|X\psi\|^2 - E_{S_\psi}(X)^2. \end{aligned} \tag{II.6.2}$$

Рассмотрим пару наблюдаемых X_1, X_2 и состояние $S = S_\psi$ такое, что $\psi \in \mathscr{D}(X_1) \cap \mathscr{D}(X_2)$, предполагая, что такое $\psi \neq 0$ существует. Для любого вещественного c

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|(X_1 - \overline{X}_1)\psi - \mathrm{i}c(X_2 - \overline{X}_2)\psi\|^2 = \\ = D_{S_\psi}(X_1) + 2c\,\mathrm{Im}(X_1\psi|X_2\psi) + c^2 D_{S_\psi}(X_2), \end{aligned} \tag{II.6.3}$$

откуда

$$D_{S_\psi}(X_1) \cdot D_{S_\psi}(X_2) \geqslant |\,\mathrm{Im}(X_1\psi|X_2\psi)|^2, \tag{II.6.4}$$

причем равенство достигается тогда в только тогда, когда для некоторого c

$$[(X_1 - \overline{X}_1) + \mathrm{i}c(X_2 - \overline{X}_2)]\psi = 0; \tag{II.6.5}$$

(мы не рассматриваем случай $D_{S_\psi}(X_2) = 0$, когда $c = \infty$). Если X_1, X_2 ограничены, то правая часть соотношения (II.6.4) может быть переписана как $\frac{1}{4}|E_{S_\psi}(\mathrm{i}[X_1, X_2])|^2$, где

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 \tag{II.6.6}$$

коммутатор операторов X_1, X_2. Неравенство (II.6.4) называется *соотношением неопределенностей.* В § 9 мы обобщим его на произвольные состояния и измерения с конечным вторым моментом.

Остановимся на интерпретации соотношения (II.6.4). Иногда можно встретить утверждение, что соотношение неопределенностей устанавливает ограничение на точность «совместного измерения» наблюдаемых X_1, X_2. Для того, чтобы разобраться в справедливости подобной интерпретации, необходимо придать точный смысл понятию «совместной измеримости».

В реальных экспериментах довольно часто приходится производить совместное измерение нескольких величин. В таких случаях результатом измерения является набор вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$, могущий принимать

[3]Мы условимся в записи операторов, кратных единичному, опускать иногда символ I, так что $X - E_S(X)$ означает $X - E_S(X) \cdot I$ и т. д.

значения в некоторой области $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Таким образом, математически совместные измерения должны описываться разложениями единицы $M(\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n)$ на $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$.

Обычно говорят об «одновременном» измерении нескольких величин. На самом деле моменты получения данных $x_1, \ldots, x_n$ не играют здесь существенной роли. Измерение может быть одновременным или последовательным, это, конечно, отразится на статистике измерения, но в любом случае она будет описываться некоторым аффинным отображением $S \to \mu_S(\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n)$, и следовательно, в силу теоремы II.2.1, некоторым разложением единицы $M(\mathrm{d}x_1 \ldots \ldots \mathrm{d}x_n)$. Важно лишь то, что все данные получены в одном эксперименте, отнесенном к определенному исходному состоянию S.

Рассмотрим вещественные измерения $M_j(\mathrm{d}x_j)$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j=1,2$. Мы скажем, что эти измерения *совместимы*, если существует измерение $M(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2)$ на $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2 = \mathbb{R}^2$ такое, что

$$M_1(\mathrm{d}x_1) = \int_{\mathbb{R}_2} M(\mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2), \quad M_2(\mathrm{d}x_2) = \int_{\mathbb{R}_1} M(\mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2),$$

точнее, $M_1(B_1) = M(B_1 \times \mathbb{R}_2)$, $B_1 \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_1)$ и аналогично для $M_2(\mathrm{d}x_2)$. По аналогии с теорией вероятностей можно сказать, что $M_j(\mathrm{d}x_j)$; $j = 1, 2$ являются *маргинальными измерениями* для измерения $M(\mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2)$.

Предложение II.6.1. *Простые измерения $E_j(\mathrm{d}x_j)$; $j=1,2$ совместимы тогда и только тогда, когда*

$$[E_1(B_1), E_2(B_2)] = 0; \qquad B_j \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_j); \quad j = 1, 2. \tag{II.6.7}$$

Доказательство. Для доказательства достаточности определим ортогональное разложение единицы $\mathbf{E}$ на $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$, полагая

$$E(B_1 \times B_2) = E_1(B_1) \cdot E_2(B_2),$$

и продолжая $\mathbf{E}$ на $\mathscr{A}(\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2)$ стандартным образом. Тогда $\mathbf{E}_j$ являются маргинальными измерениями для $\mathbf{E}$.

Докажем необходимость. Пусть существует измерение $\mathbf{M}$, для которого $\mathbf{E}_j$, $j = 1, 2$ являются маргинальными измерениями. Пусть $\overline{B}_j$ — дополнение множества $B_j \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_j)$; тогда мы можем изобразить следующую таблицу:

$$\begin{array}{ccccc}
E_1(B_1) & = & M(B_1 \times B_2) & + & M(B_1 \times \overline{B}_2) \\
+ & & + & & + \\
E_1(\overline{B}_1) & = & M(\overline{B}_1 \times B_2) & + & M(\overline{B}_1 \times \overline{B}_2) \\
\| & & \| & & \| \\
I & = & E_2(B_2) & + & E_2(\overline{B}_2),
\end{array}$$

где $E_1(B_1)E_1(\overline{B}_1) = E_2(B_2)E_2(\overline{B}_2) = 0$. Переписывая это соотношение в виде

$$[M(B_1 \times B_2) + M(B_1 \times \overline{B}_2)] \cdot [M(\overline{B}_1 \times B_2) + M(\overline{B}_1 \times \overline{B}_2)] =$$
$$= [M(B_1 \times B_2) + M(\overline{B}_1 \times B_2)] \cdot [M(B_1 \times \overline{B}_2) + M(\overline{B}_1 \times \overline{B}_2)] = 0$$

и применяя несколько раз аналог леммы I.6.4 для гильбертова пространства, получаем, что произведение любых двух из операторов $M(B_1 \times B_2)$, $M(B_1 \times \overline{B}_2)$, $M(\overline{B}_1 \times B_2)$, $M(\overline{B}_1 \times \overline{B}_2)$ равно нулю. Отсюда

$$E_1(B_1)E_2(B_2) = M(B_2 \times B_2)^2 = E_2(B_2)E_1(B_1)$$

и предложение доказано.

Пусть теперь X_j; $j = 1, 2$, наблюдаемые и $\mathbf{E}_j$ их спектральные меры. Назовем их *совместимыми* (или совместно измеримыми), если совместимы измерения, описываемые их спектральными мерами $\mathbf{E}_j$. Мы видим, что это имеет место тогда и только тогда, когда операторы X_j *коммутируют* в том смысле, что их спектральные меры $\mathbf{E}_j$ удовлетворяют условию (II.6.7). Можно показать, что это равносильно условию

$$[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1 X_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2 X_2}] = 0; \qquad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \tag{II.6.8}$$

на унитарные группы, порождаемые X_1, X_2. Если к тому же X_1, X_2 ограничены, то это равносильно условию

$$[X_1, X_2] = 0.$$

Эти рассмотрения обобщаются на произвольное семейство наблюдаемых $X_1, \ldots, X_n$, определяемых коммутирующими самосопряженными операторами. Пусть $E(\mathrm{d}x_1, \ldots \mathrm{d}x_n)$ ортогональное разложение единицы, представляющее совместное измерение $X_1, \ldots, X_m$, а именно $E(\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n) = E_1(\mathrm{d}x_1) \cdot \ldots$ $\ldots \cdot E_n(\mathrm{d}x_n))$, где $E_j(\mathrm{d}x_j)$ спектральные меры для X_j. Тогда можно развить функциональное исчисление $X_1, \ldots X_n$, полагая

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) E(\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n).$$

Возвращаясь к соотношению неопределенностей (II.6.4), заметим, что если правая часть отлична от нуля, то X_1 и X_2 не коммутируют и, следовательно, вообще совместно не измеримы. В самом деле, предполагая, что X_1, X_2 коммутируют, получаем из (II.6.8)

$$(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1 X_1}\psi | \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2 X_2}\psi) \equiv (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1 X_1}\psi | \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2 X_2}\psi).$$

Дифференцируя по θ_1 и θ_2 при $\theta_1 = \theta_2 = 0$, получаем из уравнения (II.4.13) $\mathrm{Im}(X_1\psi | X_2\psi) = 0$ вопреки предположению. Поэтому X_1, X_2 несовместимы и согласно предложению II.6.1 не существует совместного измерения для X_1 и X_2. Поэтому нельзя говорить, что соотношения (II.6.4) устанавливают границы для точности совместного измерения X_1 и X_2.

Для того, чтобы дать правильную интерпретацию, рассмотрим два набора, состоящие из большого числа экземпляров одного и того же объекта, приготовленного в одном и том же состоянии S. Тогда, если в первом наборе измеряется наблюдаемая X_1, а во втором — наблюдаемая X_2, то произведение дисперсий таких, независимо друг от друга произведенных измерений, будет удовлетворять соотношению (II.6.4). Или иначе, предположим, что из самого описания процедуры приготовления известна одна из дисперсий, скажем,

$D_S(X_1)$. Тогда наблюденное значение $D_S(X_2)$ будет удовлетворять соотношению (II.6.4). Обе эти интерпретации весьма близки друг к другу, так как определение величины $D_S(X_1)$ по первому набору можно рассматривать как предварительное определение характеристики приготовленного состояния.

Тем не менее, как мы увидим, соотношение неопределенностей имеет отношение и к точности совместного измерения, хотя эта связь не является столь прямолинейной, как это часто предполагается.

§ 7. Ядерные операторы и операторы Гильберта—Шмидта[4]

Рассмотрим ограниченные операторы, диагональные в данном фиксированном базисе $\{e_j\}$:

$$X = \sum_j x_j |e_j)(e_j|, \tag{II.7.1}$$

где ряд сходится сильно. Любому свойству такого оператора X отвечает некоторое свойство последовательности $\{x_j\}$ его собственных значений. Норма оператора X равна

$$\|X\| = \sup_j |x_j|; \tag{II.7.2}$$

эрмитовость X соответствует вещественности, а положительность — неотрицательности значений x_j. Любому классическому пространству последовательностей соответствует некоторый класс диагональных операторов. Пространство всех диагональных операторов с операторной нормой изоморфно пространству c ограниченных последовательностей с нормой (II.7.2). При этом операторам конечного ранга соответствуют последовательности с конечным числом ненулевых значений $\{x_j\}$. Заметим, что пополнение этого множества по норме (II.7.2) дает не все c, а подпространство c_0 последовательностей $\{x_j\}$, стремящихся к нулю.

Другими важными пространствами последовательностей являются пространства l^1 и l^2, которым отвечают пространства диагональных операторов с нормами соответственно

$$\|X\|_1 = \sum_j |x_j| = \operatorname{Tr} |X|,$$

где $|X| = \sqrt{X^*X} = \sum_j |x_j||e_j)(e_j|$ для операторов X вида (II.7.1), и

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_j |x_j|^2} = \sqrt{\operatorname{Tr} X^*X}.$$

Мы собираемся определить «некоммутативные» аналоги этих пространств, не связанные с требованием диагональности X, пополняя по соответствующим нормам пространство операторов конечного ранга.

[4]Материал, излагаемый в § 7—§ 10 будет существенно использован только в гл. V, VI.

Обозначим это пространство $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$; пространство всех ограниченных операторов будет обозначаться $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Индекс h внизу будет обозначать соответствующие вещественные пространства эрмитовых операторов. Пополнением $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ по операторной норме $\|\cdot\|$ является пространство *вполне непрерывных* операторов. Мы не будем обсуждать здесь свойства этого важного класса и отметим лишь, что для эрмитовых вполне непрерывных операторов справедлив аналог конечномерной спектральной теоремы: *всякий такой оператор допускает спектральное разложение вида* (II.7.1), *где* $\{e_j\}$ *– базис из его собственных векторов, а* $\{x_j\}$ *– собственные значения (стремящиеся к нулю).*

Перейдем к аналогу пространства l^1. Если X — эрмитов оператор, то оператор $|X|$ определяется соотношением (II.3.9); для произвольного ограниченного X положим

$$|X| = \sqrt{X^*X}.$$

Так как $|X|^2 = X^*X$, то для всех $\psi \in \mathscr{H}$ выполняется

$$\||X|\psi\| = \|X\psi\|. \tag{II.7.3}$$

Заметим, что если $T \in \mathfrak{F}(\mathscr{H})$, то $|T| \in \mathfrak{F}(\mathscr{H})$. Положим

$$\|T\|_1 = \operatorname{Tr}|T|. \tag{II.7.4}$$

Докажем, что для любых операторов конечного ранга T, X

$$|\operatorname{Tr} TX| \leqslant \|T\|_1 \cdot \|X\|. \tag{II.7.5}$$

Поскольку $|T|$ — эрмитов оператор конечного ранга, то для него существует базис из собственных векторов $\{e_j\}$. Из (II.7.3) получаем

$$\|Te_j\| = \||T|e_j\| = (e_j||T|e_j),$$

так что

$$|\operatorname{Tr} TX| = \left|\sum_j (X^*e_j|Te_j)\right| \leqslant \|X^*\| \cdot \sum_j \|Te_j\| = \|X\| \cdot \|T\|_1.$$

Полагая в (II.7.5) $X = E$, где E — проектор на подпространство, содержащее все векторы φ_j, ψ_j из представления $T = \sum_j |\varphi_j)(\psi_j|$, имеем $TE = T$, $\|E\| = 1$, так что

$$|\operatorname{Tr} T| \leqslant \|T\|_1.$$

Это неравенство показывает, что естественной областью определения следа должно быть пополнение пространства $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ по норме $\|\cdot\|_1$. Сформулируем конечный результат.

Теорема II.7.1. *Соотношение* (II.7.4) *определяет норму на* $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$; *пополнение* $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ *по этой норме является банаховым пространством* $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$ *ядерных операторов – ограниченных операторов* T *таких, что* $\|T\|_1 = \operatorname{Tr}|T| < \infty$. *Однозначное линейное непрерывное продолжение следа на* $\mathfrak{F}^1(\mathscr{H})$ *дается соотношением*

$$\operatorname{Tr} T = \sum_j (e_j|Te_j),$$

где ряд сходится к одному и тому же значению для любого ортонормированного базиса $\{e_j\}$.

Всякий ядерный оператор является вполне непрерывным. В самом деле, для $T \in \mathfrak{F}(\mathscr{H})$
$$\|T\| \leqslant \|T\|_1$$
так как, согласно (II.7.3) и (II.1.8),
$$\|T\| = \||T|\| = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{(\psi||T|\psi)}{(\psi|\psi)} \leqslant \mathrm{Tr}\,|T|.$$
Поэтому пополнение $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ по норме $\|\cdot\|_1$ содержится в пополнении по норме $\|\cdot\|$.

Отсюда следует, что всякий эрмитов ядерный оператор имеет спектральное разложение
$$T = \sum_j t_j |e_j)(e_j|, \tag{II.7.6}$$
где ряд сходится по норме $\|\cdot\|_1$, так как $\sum_j |t_j| = \mathrm{Tr}\,|T| < \infty$ и $\||e_j)(e_j|\|_1 = 1$; при этом $\mathrm{Tr}\,T = \sum_j t_j$.

Полагая
$$T_+ = \sum_{t_j > 0} t_j |e_j)(e_j|, \qquad T_- = -\sum_{t_j < 0} t_j |e_j)(e_j|,$$
имеем
$$T = T_+ - T_-, \qquad |T| = T_+ + T_-, \tag{II.7.7}$$
так что
$$\|T\|_1 = \mathrm{Tr}\,T_+ + \mathrm{Tr}\,T_- = \|T_+\|_1 + \|T_-\|_1.$$
Всякий положительный оператор с конечным следом является ядерным и, следовательно, допускает спектральное разложение (II.7.6) с $t_j \geqslant 0$. В частности, всякий оператор плотности имеет спектральное разложение (II.2.2).

Сопряженным к пространству последовательностей l^1 является пространство всех ограниченных последовательностей c. Следующая теорема является некоммутативным аналогом этого факта. Мы обозначаем $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ банахово пространство всех ограниченных операторов с операторной нормой $\|\cdot\|$.

Теорема II.7.2. *Если T — ядерный, X — ограниченный операторы, то TX и XT — ядерные операторы и имеют место соотношения* (II.1.18), (II.7.5). *Для любого $X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ соответствие*
$$T \to \mathrm{Tr}\,TX; \qquad T \in \mathfrak{T}^1(\mathscr{H}) \tag{II.7.8}$$
определяет непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$ с нормой, равной $\|X\|$. Обратно, любой непрерывный линейный функционал от $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$ имеет такой вид.

Таким образом, $[\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})]^* = \mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Для вещественных банаховых пространств эрмитовых операторов имеет место аналогичное утверждение: $[\mathfrak{T}^1_{\mathrm{h}}(\mathscr{H})]^* = \mathfrak{B}_{\mathrm{h}}(\mathscr{H})$. Вещественный линейный функционал (II.7.8) положителен, т. е. $\mathrm{Tr}\,TX \geqslant 0$ для всех $T \in \mathfrak{T}^1_{\mathrm{h}}(\mathscr{H})$, $T \geqslant 0$, тогда и только тогда, когда $X \geqslant 0$. Это можно доказать аналогично лемме I.6.3. Отсюда следует, что $T \geqslant 0$ и $X \leqslant Y$ влекут $\mathrm{Tr}\,TX \leqslant \mathrm{Tr}\,TY$.

Доказательство теоремы II.2.1. Пусть $S \to \mu_S$ — некоторое измерение. Рассмотрим вещественную линейную оболочку множества состояний $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Всякая линейная комбинация $T = \sum t_j S_j$ операторов плотности является, очевидно, эрмитовым ядерным оператором. Обратно, пусть $T \in \mathfrak{T}^1_{\mathrm{h}}(\mathscr{H})$; тогда согласно (II.7.7)

$$T = t_+ S_+ - t_- S_-,$$

где $t_\pm = \operatorname{Tr} T_\pm$, $S_\pm = (t_\pm)^{-1} \cdot T_\pm$ — операторы плотности. Таким образом, линейной оболочкой множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ является пространство $\mathfrak{T}^1_{\mathrm{h}}(\mathscr{H})$ эрмитовых ядерных операторов.

Фиксируем измеримое множество B и рассмотрим аффинный функционал $S \to \mu_S(B)$ на $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Продолжим его до линейного функционала на $\mathfrak{T}^1_{\mathrm{h}}(\mathscr{H})$, полагая

$$\mu(T) = \sum_j t_j \mu_{S_j}(B),$$

если $T = \sum_j t_j S_j$. Корректность такого продолжения обосновывается как и в конечномерном случае (см. лемму I.6.2). Этот функционал непрерывен, так как

$$\begin{aligned}|\mu(T)| \leqslant \mu(T_+) + \mu(T_-) = t_+\mu(S_+) + t_-\mu(S_-) \leqslant \\ \leqslant t_+ + t_- = \operatorname{Tr}|T| = \|T\|_1.\end{aligned}$$

Поэтому, согласно второй части теоремы II.7.2, существует ограниченный оператор $M(B)$ такой, что $\mu(T) = \operatorname{Tr} TM(B)$, в частности, $\mu_S(B) = \operatorname{Tr} SM(B)$. Из того, что $0 \leqslant \mu_S(B) \leqslant 1$, $S \in \mathfrak{S}(\mathscr{H})$, следует $0 \leqslant M(B) \leqslant I$, а из $\mu_S(\emptyset) = 0$, $\mu_S(U) = I$; $S \in \mathfrak{S}(\mathscr{H})$, следует $M(\emptyset) = 0$, $M(U) = I$. Доказательство этих фактов совершенно аналогично конечномерному случаю и опирается на аналог леммы I.6.3.

Для доказательства свойства 3) разложения единицы заметим, что для любого S вероятность $\mu_S(B)$ σ-аддитивна по аргументу B. Полагая $S = S_\psi$, имеем

$$(\psi|M(B)\psi) = \sum_j (\psi|M(B_j)\psi)$$

для любого разбиения $\{B_j\}$ множества B, а это и означает выполнение свойства 3).

Обратно, пусть $\{M(B)\}$ — разложение единицы в $\mathscr{H}$. Тогда формула (II.2.3) определяет семейство аффинных функционалов на $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Остается проверить лишь σ-аддитивность функции μ_S, т. е. доказать, что из свойства 3) следует

$$\operatorname{Tr} SM(B) = \sum_j \operatorname{Tr} SM(B_j) \tag{II.7.9}$$

для любого оператора плотности S. Рассмотрим спектральное разложение (II.2.2) оператора S. Тогда

$$\operatorname{Tr} SM(B) = \sum_j s_j (\psi_j|M(B)\psi_j), \tag{II.7.10}$$

где правая часть есть след $SM(B)$, вычисленный в базисе $\{\psi_j\}$ по формуле теоремы II.7.1. С другой стороны, в силу σ-аддитивности $\{M(B)\}$, имеем

$$(\psi_j|M(B)\psi_j) = \sum_k (\psi_j|M(B_k)\psi_j).$$

Умножая это равенство на s_j, суммируя и меняя порядок суммирования, что возможно в силу неотрицательности слагаемых, получаем (II.7.9). Теорема доказана.

Мы можем доказать также полезную формулу

$$\int f(x)\mu_S(\mathrm{d}x) = \operatorname{Tr} Sf(X), \tag{II.7.11}$$

где f ограниченная измеримая функция, X — самосопряженный оператор со спектральной мерой $E(\mathrm{d}x)$, $\mu_S(\mathrm{d}x) = \operatorname{Tr} SE(\mathrm{d}x)$ и $f(X) = \int f(x)E(\mathrm{d}x)$. Используя (II.7.10), получаем

$$\begin{aligned}\int f(x)\mu_S(\mathrm{d}x) &= \sum_j s_j \int f(x)(\psi_j|E(\mathrm{d}x)\psi_j) = \\ &= \sum_j s_j(\psi_j|f(X)\psi_j) = \operatorname{Tr} Sf(X),\end{aligned}$$

в силу ограниченности функции f.

Рассмотрим теперь некоммутативный аналог пространства l^2. На $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ введем скалярное произведение

$$(T_1, T_2) = \operatorname{Tr} T_1^* T_2, \tag{II.7.12}$$

которому соответствует норма $\|T\|_2 = \sqrt{\operatorname{Tr} T^*T}$.

Теорема II.7.3. *Пополнение предгильбертова пространства $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ со скалярным произведением* (II.7.12) *является гильбертовым пространством $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$ операторов Гильберта—Шмидта, состоящим из ограниченных операторов T таких, что $\operatorname{Tr} T^*T \equiv \sum_j \|Te_j\|^2 < \infty$ для любого ортонормированного базиса $\mathscr{H}$. Для любых T_1, $T_2 \in \mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$ произведение $T_1 \cdot T_2$ является ядерным оператором и скалярное произведение T_1 и T_2 определяется формулой* (II.7.12). *При этом*

$$\|T_1 \cdot T_2\|_1 \leqslant \|T_1\|_2 \cdot \|T_2\|_2. \tag{II.7.13}$$

Произведение ограниченного оператора X на оператор Гильберта—Шмидта T (в любом порядке) является оператором Гильберта—Шмидта, причем

$$\|TX\|_2 = \|XT\|_2 \leqslant \|X\| \cdot \|T\|_2. \tag{II.7.14}$$

Введенные выше пространства операторов связаны вложениями

$$\mathfrak{F}(\mathscr{H}) \subset \mathfrak{T}^1(\mathscr{H}) \subset \mathfrak{T}^2(\mathscr{H}) \subset (\text{вполне непрерывные операторы}).$$

Чтобы доказать последнее, достаточно показать

$$\|T\| \leqslant \|T\|_2,$$

поскольку отсюда следует, что пополнение $\mathfrak{F}(\mathscr{H})$ относительно нормы $\|\cdot\|_2$ содержится в пополнении относительно $\|\cdot\|$. Но

$$\|T\|^2 = \||T|\|^2 = \sup_{\psi\neq 0} \frac{\||T|\psi\|^2}{\|\psi\|^2} = \sup_{\psi\neq 0} \frac{\|T\psi\|^2}{\|\psi\|^2} \leqslant \mathrm{Tr}\, T^*T$$

откуда и следует утверждение. В частности, всякий эрмитов оператор Гильберта—Шмидта имеет спектральное разложение (II.7.6) где

$$\|T\|_2 = \sqrt{\sum_j |t_j|^2} < \infty.$$

Далее $\|T\|_2 \leqslant \|T\|_1$, поскольку

$$\mathrm{Tr}\, T^*T = \mathrm{Tr}\, |T|^2 = \sum_j \tau_j^2 \leqslant \left(\sum_j \tau_j\right)^2 = (\mathrm{Tr}\, |T|)^2.$$

Отсюда следует, что всякий ядерный оператор является оператором Гильберта—Шмидта.

В заключение рассмотрим операторы Гильберта—Шмидта в пространстве $\mathscr{L}^2(a, b)$. Пусть, для простоты, T — эрмитов оператор; тогда имеет место спектральное разложение (II.7.6) с $\sum_j t_j^2 < \infty$. Собственные функции $\{e_j(x)\}$ образуют ортонормированный базис в $\mathscr{L}^2(a, b)$. Рассмотрим ядро

$$T(x', x) = \sum_j t_j e_j(x')\overline{e_j(x)}.$$

В силу того, что $\int \bar{e}_j(x)e_k(x)\mathrm{d}x = \delta_{jk}$ и $\sum t_j^2 < \infty$, этот ряд сходится в $\mathscr{L}^2((a, b)\times \times (a, b))$ и определяет квадратично интегрируемую функцию двух переменных x, x', причем

$$\int_a^b \int_a^b |T(x, x')|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x' = \sum_j t_j^2 \equiv \mathrm{Tr}\, T^2.$$

Для любой $\psi \in \mathscr{L}^2(a, b)$

$$T\psi(x') = \int_a^b T(x', x)\psi(x)\mathrm{d}x, \tag{II.7.15}$$

что можно получить, например, вычисляя форму $(\varphi|T\psi)$ в базисе $\{e_j\}$. Если T-- ядерный оператор, то $\sum |t_j| < \infty$, поэтому функция $T(x, x) = \sum t_j |e_j(x)|^2$ является интегрируемой. При этом

$$\int_a^b T(x, x)\mathrm{d}x = \mathrm{Tr}\, T. \tag{II.7.16}$$

В обозначениях Дирака ядро $T(x', x)$ должно записываться символом $(x'|T|x)$. Из соотношения полноты (II.3.12) формально следует

$$T = \iint |x')(x'|T|x)(x|\mathrm{d}x'\mathrm{d}x,$$

откуда получается дираковская форма соотношения (II.7.15):

$$(x'|T\psi) = \int (x'|T|x)(x|\psi)\mathrm{d}x.$$

Если T — оператор Гильберта—Шмидта, то, как мы видели, ядро $(x'|T|x)$ является квадратично интегрируемой функцией x, x' и эти выкладки имеют непосредственное математическое истолкование.

§ 8. Пространства $\mathscr{L}^2$, ассоциированные с квантовым состоянием

Многие важные квантовые наблюдаемые представляются неограниченными операторами. Однако неограниченность является источником определенных технических трудностей, порой весьма серьезных. Если в теории вероятностей определение суммы случайных величин не представляет затруднений, то для некоммутирующих неограниченных операторов сумма может иметь лишь тривиальную область определения. То обстоятельство, что в соотношении неопределенностей (II.6.4) мы рассмотрели лишь чистые состояния, также объясняется желанием избежать трудностей, связанных с неограниченностью. Теперь мы собираемся отбросить подобные ограничения и разработать аппарат, который позволил бы достаточно свободно оперировать неограниченными наблюдаемыми, в частности определить их средние значения и дисперсии относительно состояния, задаваемого любым оператором плотности S.

В теории вероятностей важную роль играет гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом. В этом параграфе вводится некоммутативный аналог этой конструкции для произвольного оператора плотности. Соответствующее гильбертово пространство «квадратично-суммируемых» наблюдаемых оказывается весьма удобным; в частности, сумма таких наблюдаемых всегда определена и является квадратично-суммируемой наблюдаемой.

Пусть S — произвольный оператор плотности и X, Y ограниченные операторы в $\mathscr{H}$. Положим

$$X \circ Y = \tfrac{1}{2}(XY + YX). \tag{II.8.1}$$

Предполагая, что X, Y эрмитовы, введем пред-скалярное произведение в $\mathfrak{B}_h(\mathscr{H})$

$$\langle Y, X\rangle_S = \mathrm{Tr}\, S(Y \circ X) \equiv \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\, SYX, \tag{II.8.2}$$

где

$$\langle X, X\rangle_S = \mathrm{Tr}\, SX^2.$$

Пополнение $\mathfrak{B}_\mathrm{h}(\mathscr{H})$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ является вещественным гильбертовым пространством, которое обозначается $\mathscr{L}^2_\mathrm{h}(S)$. Элементы $\mathscr{L}^2_\mathrm{h}(S)$ могут быть представлены, вообще говоря, неограниченными операторами в $\mathscr{H}$ следующим образом.

Симметричный оператор X назовем *квадратично-суммируемым* относительно оператора плотности S, имеющего спектральное разложение (II.2.2), если $\sum_j s_j\|X\psi_j\|^2 < \infty$ (так что $\psi_j \in \mathscr{D}(X)$, если $s_j \neq 0$). Два таких оператора

X_1, X_2 будем считать *эквивалентными*, если $X_1\psi_j = X_2\psi_j$ при $s_j \neq 0$. Для квадратично-суммируемых X, Y сходится ряд

$$\langle Y, X\rangle_S = \sum_j s_j \frac{1}{2}[(Y\psi_j|X\psi_j) + (X\psi_j|Y\psi_j)] \equiv$$
$$\equiv \operatorname{Re} \sum_j s_j (Y\psi_j|X\psi_j). \tag{II.8.3}$$

Если X, Y ограничены, то они квадратично-суммируемы и сумма ряда (II.8.3) совпадает со значением, даваемым формулой (II.8.2), поскольку совпадает со следом, вычисленном в базисе $\{\psi_j\}$.

Теорема II.8.1. *Элементы пространства* $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$ *являются классами эквивалентности квадратично-суммируемых операторов; именно, если* $\{X_n\}$ — *фундаментальная в смысле скалярного произведения* (II.8.2) *последовательность в* $\mathfrak{B}_{\mathrm{h}}(\mathscr{H})$, *то найдется квадратично-суммируемый* X, *такой, что* $\lim_n \langle X_n - X, X_n - X\rangle_S = 0$, *и, обратно, всякий квадратично-суммируемый оператор является пределом фундаментальной последовательности* $\{X_n\} \subset \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H})$.

Доказательство этой теоремы опускается. Мы будем обозначать одной и той же буквой X и оператор, и соответствующий элемент пространства $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$.

Используя понятие оператора Гильберта—Шмидта, можно дать другое описание квадратично-суммируемых операторов. Рассмотрим оператор

$$\sqrt{S} = \sum_j \sqrt{s_j}|\psi_j)(\psi_j|,$$

который, очевидно, является оператором Гильберта—Шмидта, поскольку $\operatorname{Tr}(\sqrt{S})^2 < \infty$. Обозначая через $\mathscr{R}(T)$ область значений оператора T, имеем

Предложение II.8.2. *Оператор* X *с* $\mathscr{D}(X) \ni \psi_j$ *для* $s_j \neq 0$ *квадратично-суммируем тогда и только тогда, когда* X *продолжается на* $\mathscr{R}(\sqrt{S})$ *так, что* $X\sqrt{S}$ *является оператором Гильберта—Шмидта. При этом*

$$\langle Y, X\rangle_S = \operatorname{Tr} \tfrac{1}{2}[(Y\sqrt{S})^*(X\sqrt{S}) + (X\sqrt{S})^*(Y\sqrt{S})] =$$
$$= \operatorname{Re} \operatorname{Tr}(Y\sqrt{S})^*(X\sqrt{S}). \tag{II.8.4}$$

Доказательство. Если X квадратично-суммируем, то требуемое продолжение задается формулой

$$X\left(\sum_j \sqrt{s_j}c_j\psi_j\right) = \sum_j \sqrt{s_j}c_j X\psi_j, \qquad \sum_j |c_j|^2 < \infty,$$

причем ряд в правой части сходится сильно в силу квадратичной суммируемости. Оператор $X\sqrt{S}$ является оператором Гильберта—Шмидта, так как

$$\operatorname{Tr}(X\sqrt{S})^*(X\sqrt{S}) = \sum_j \|X\sqrt{S}\psi_j\|^2 = \sum_j s_j\|X\psi_j\|^2 < \infty.$$

Формула (II.8.4) получается аналогично (II.8.3). Обратное утверждение очевидно.

Дадим еще одну полезную формулу для скалярного произведения. Так как по теореме II.7.3 произведение операторов Гильберта—Шмидта является ядерным оператором, то выражение

$$X \circ S \equiv \tfrac{1}{2}[(X\sqrt{S}) \cdot \sqrt{S} + \sqrt{S} \cdot (X\sqrt{S})^*]$$

определяет ядерный оператор в $\mathscr{H}$. Используя это обозначение и соотношения (II.1.18), получаем формулу

$$\langle Y, X\rangle_S = \mathrm{Tr}(X \circ S)Y, \tag{II.8.5}$$

справедливую для ограниченного Y и $X \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$.

Специфической чертой некоммутативного случая является наличие дополнительной кососимметричной формы в $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$, связанной с коммутатором операторов. Если X, Y эрмитовы операторы, то $\mathrm{i}[Y, X]$ также эрмитов. Поэтому соотношение

$$[Y, X]_S = \mathrm{i}\ \mathrm{Tr}\, S[Y, X] = 2\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}\, SXY \tag{II.8.6}$$

определяет вещественную билинейную форму на $\mathfrak{B}_{\mathrm{h}}(\mathscr{H})$. Она может быть продолжена на $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$ с помощью эквивалентных соотношений

$$[Y, X]_S = 2\,\mathrm{Im} \sum_j s_j (X\psi_j|Y\psi_j) = 2\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}(X\sqrt{S})^*(Y\sqrt{S}),$$

аналогичных (II.8.3), (II.8.4). Если $X \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$, то соотношение

$$[X, S] \equiv (X\sqrt{S}) \cdot \sqrt{S} - \sqrt{S} \cdot (X\sqrt{S})^*$$

определяет ядерный оператор. Воспользовавшись формулами (II.1.18), мы можем записать для ограниченного Y

$$[Y, X]_S = \mathrm{i}\ \mathrm{Tr}[X, S] \cdot Y. \tag{II.8.7}$$

Эта форма является *кососимметричной*, т. е.

$$[X, Y]_S = -[Y, X]_S; \qquad X, Y \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S).$$

В частности,

$$[X, X]_S = 0, \qquad X \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S). \tag{II.8.8}$$

Из (II.8.7) с $Y = I$ и (II.1.18) очевидно также, что

$$[I, X]_S = 0, \qquad X \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S). \tag{II.8.9}$$

Для дальнейшего будет удобно ввести комплексификацию пространства $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$. Всякий ограниченный X может быть однозначно представлен в виде $X = X_1 + \mathrm{i}X_2$, где X_1, X_2 эрмитовы, а именно

$$X_1 = \frac{1}{2}(X + X^*), \qquad X_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(X - X^*).$$

Рассмотрим комплексное скалярное произведение

$$\langle Y, X\rangle_S = \mathrm{Tr}\, S(Y^* \circ X) = \mathrm{Tr}(S \circ X) \cdot Y^* \tag{II.8.10}$$

на пространстве всех ограниченных операторов $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Легко видеть, что

$$\langle X, X\rangle_S = \langle X_1, X_1\rangle_S + \langle X_2, X_2\rangle_S. \tag{II.8.11}$$

Обозначим $\mathscr{L}^2(S)$ пополнение $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ относительно пред-скалярного произведения (II.8.10). Тогда всякий $X \in \mathscr{L}^2(S)$ также может быть записан в виде $X = X_1 + \mathrm{i}X_2$, где $X_1, X_2 \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$, так что выполняется (II.8.11). Это означает, что $\mathscr{L}^2(S)$ является *комплексификацией* пространства $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$, и записывается в виде

$$\mathscr{L}^2(S) = \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S) \oplus \mathrm{i}\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S).$$

Вещественная билинейная кососимметричная форма (II.8.6) продолжается до комплексной полуторалинейной кососимметричной формы, которая на $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ дается выражениями

$$[Y, X]_S = \mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\, S[Y^*, X] = \mathrm{i}\,\mathrm{Tr}[X, S] \cdot Y^*. \tag{II.8.12}$$

Два других полезных комплексных скалярных произведения на $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ даются формулами

$$\langle Y, X\rangle_S^+ = \mathrm{Tr}\, SXY^*, \qquad \langle Y, X\rangle_S^- = \mathrm{Tr}\, SY^*X. \tag{II.8.13}$$

Так как $\langle Y, X\rangle_S = \frac{1}{2}[\langle Y, X\rangle_S^+ + \langle Y, X\rangle_S^-]$, то $\langle X, X\rangle_S^\pm \leqslant 2\langle X, X\rangle_S$. Поэтому, обозначая через $\mathscr{L}^2_\pm(S)$ пополнения $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ по пред-скалярным произведениям (II.8.13), имеем $\mathscr{L}^2(S) \subseteq \mathscr{L}^2_\pm(S)$. Отметим очевидные формулы

$$\begin{aligned} &\langle X, Y\rangle_S \pm \frac{\mathrm{i}}{2}[X, Y]_S = \langle X, Y\rangle_S^\pm;\\ &[X, Y]_S = \mathrm{i}(\langle X, Y\rangle_S^- - \langle X, Y\rangle_S^+); \qquad X, Y \in \mathscr{L}^2(S). \end{aligned} \tag{II.8.14}$$

Предложение II.8.3. *Формы $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ и $[\cdot,\cdot]_S$ связаны следующими неравенствами:*

(1) $\langle X, X\rangle_S \geqslant \frac{\mathrm{i}}{2}[X, X]_S; \qquad X \in \mathscr{L}^2(S);$

(2) $\langle X, X\rangle_S \geqslant -\frac{\mathrm{i}}{2}[X, X]_S; \qquad X \in \mathscr{L}^2(S);$

(3) $\langle X_1, X_1\rangle_S + \langle X_2, X_2\rangle_S \geqslant [X_1, X_2]_S; \qquad X_1, X_2 \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S);$

(4) $\langle X_1, X_1\rangle_S \cdot \langle X_2, X_2\rangle_S \geqslant \frac{1}{4}[X_1, X_2]_S^2; \qquad X_1, X_2 \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S).$

Доказательство. Для проверки (1), (2) достаточно заметить, что

$$\langle X, X\rangle_S \pm \frac{\mathrm{i}}{2}[X, X]_S = \langle X, X\rangle_S^\pm \geqslant 0, \qquad X \in \mathscr{L}^2(S).$$

Эквивалентность следует из того, что $\langle X, X\rangle_S^+ = \langle X^*, X^*\rangle_S^-$, $X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Полагая $X = X_1 + \mathrm{i}X_2$, где $X_j \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$ и учитывая (II.8.8) и (II.8.13), находим

$$0 \leqslant \langle X, X\rangle_S^- = \langle X_1, X_1\rangle_S + \langle X_2, X_2\rangle_S - [X_1, X_2]_S.$$

откуда вытекает, что (1) равносильно (3). Наконец, подставляя в (3) tX_1 вместо X_1, получаем

$$t^2\langle X_1, X_1\rangle_S - t[X_1, X_2]_S + \langle X_2, X_2\rangle_S \geqslant 0, \qquad t \in \mathbb{R},$$

что равносильно (4).

Из (1), (2) следует, что для любых $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$

$$[\langle X_j, X_k\rangle_S] \geqslant \pm\frac{\mathrm{i}}{2}[[X_j, X_k]_S], \tag{II.8.15}$$

где в левой части вещественная симметричная $n \times n$-матрица, а в правой — $\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}$, умноженное на вещественную кососимметричную $(n \times n)$-матрицу, так что обе части рассматриваются как эрмитовы $(n \times n)$-матрицы.

Далее нам понадобится комплексное обобщение неравенства (4):

$$\langle X_1, X_1\rangle_S \langle X_2, X_2\rangle_S \geqslant \tfrac{1}{4}|[X_1, X_2]_S|^2; \qquad X_1, X_2 \in \mathscr{L}^2(S). \tag{II.8.16}$$

Для доказательства сначала заметим, что из (3) следует

$$\langle X_1, X_1\rangle_S + \langle X_2, X_2\rangle_S \geqslant \mathrm{Re}[X_1, X_2]_S \quad \text{для } X_1, X_2 \in \mathscr{L}^2(S).$$

Тогда, как в доказательстве предложения II.8.3

$$\langle X_1, X_1\rangle_S \langle X_2, X_2\rangle_S \geqslant \tfrac{1}{4}(\mathrm{Re}[X_1 X_2]_S)^2.$$

заменяя X_1 на λX_1 с $\lambda = [X_1, X_2]_S \cdot |[X_1, X_2]_S|^{-1}$, получаем (II.8.16).

§ 9. Соотношения неопределенностей для измерений с конечным вторым моментом

В теории вероятностей элементами пространства $\mathscr{L}^2$ являются случайные величины с конечными вторыми моментами. В некоммутативном случае имеет место аналогичное соответствие между элементами пространства $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$ и вещественными измерениями с конечными вторыми моментами.

Пусть сначала X наблюдаемая с конечным вторым моментом относительно состояния S, которая представляется плотно определенным симметричным оператором. Тогда $X \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$, поскольку величина

$$\sum_j s_j \|X\psi_j\|^2 = \sum_j s_j \int \lambda^2 (\psi_j | M(\mathrm{d}\lambda)\psi_j) = \int \lambda^2 \mu_S(\mathrm{d}\lambda)$$

конечна. Мы использовали теорему II.4.3 в первом равенстве и положительность и соотношение (II.7.10) во втором. Аналогично можно доказать

$$E_S(X) = \langle I, X\rangle_S, \tag{II.9.1}$$

$$D_S(X) = \langle X - E_S(X), X - E_S(X)\rangle_S. \tag{II.9.2}$$

Если X ограничен, то из (II.7.11) получаем

$$E_S(X) = \mathrm{Tr}\, SX, \tag{II.9.3}$$

$$D_S(X) = \mathrm{Tr}\, S(X - E_S(X))^2, \tag{II.9.4}$$

что согласуется с (II.9.1), (II.9.2).

Пусть X_1, X_2 — две наблюдаемые с конечным вторым моментом относительно состояния S. Применяя неравенство (4) предложения II.8.3 к $X_1 - E_S(X_1)$ и $X_2 - E_S(X_2)$ и учитывая (II.8.9) получаем обобщение соотношения неопределенностей (II.6.4) в виде

$$D_S(X_1) \cdot D_S(X_2) \geqslant \tfrac{1}{4}[X_1, X_2]_S^2. \tag{II.9.5}$$

Пусть теперь $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}x)\}$ произвольное вещественно-значное измерение, такое что

$$\int x^2 \mu_S(\mathrm{d}x) < \infty\,,$$

где $\mu_S(\mathrm{d}x) = \mathrm{Tr}\, SM(\mathrm{d}x)$. Определим интеграл

$$X_{\mathbf{M}} = \int xM(\mathrm{d}x),$$

сходящийся в $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$, так что среднее значение и дисперсия измерения $\mathbf{M}$ выражаются через $X_{\mathbf{M}}$ соотношениями

$$E_S\{\mathbf{M}\} = \langle I, X_{\mathbf{M}}\rangle, \tag{II.9.6}$$

$$D_S\{\mathbf{M}\} \geqslant \langle X_{\mathbf{M}} - E_S\{\mathbf{M}\},\ X_{\mathbf{M}} - E_S\{\mathbf{M}\}\rangle_S, \tag{II.9.7}$$

напоминающими (II.9.1), (II.9.2).

Определим интеграл типа (II.9.5) сначала для простых вещественных функций вида

$$f(x) = \sum_j f_j \mathbf{1}_{B_j}(x)$$

как

$$\int f(x)M(\mathrm{d}x) = \sum_j f_j M(B_j).$$

Имеет место неравенство

$$\left[\int f(x)M(\mathrm{d}x)\right]^2 \leqslant \int f(x)^2 M(\mathrm{d}x). \tag{II.9.8}$$

В самом деле, для простой f это означает, что

$$\left[\sum_j f_j M(B_j)\right]^2 \leqslant \sum_j f_j^2 M(B_j),$$

и непосредственно следует из очевидного неравенства

$$\sum_j \left[f_j - \sum_k f_k M(B_k)\right] M(B_j) \left[f_j - \sum_k f_k M(B_k)\right] \geqslant 0.$$

Умножая (II.9.8) на S, беря след и используя (II.8.2), получаем

$$\left\langle \int f(x)M(\mathrm{d}x), \int f(x)M(\mathrm{d}x)\right\rangle_S \leqslant \int f(x)^2 \mu_S(\mathrm{d}x). \tag{II.9.9}$$

Пусть теперь $\{f_n\}$ — последовательность простых функций, которая сходится к некоторой функции f в среднеквадратичном по мере $\mu_S(\mathrm{d}x)$,

$$\int (f_n(x) - f(x))^2 \mu_S(\mathrm{d}x) \to 0.$$

Тогда из неравенства (II.9.9), примененного к простым функциям $f_n - f_m$, вытекает, что последовательность ограниченных операторов $\{\int f_n(x)M(\mathrm{d}x)\}$ является фундаментальной в $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$. Предел этой последовательности является элементом $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$, который обозначается символом $\int f(x)M(\mathrm{d}x)$. Очевидно, что неравенство (II.9.9) сохраняется для любой f, квадратично интегрируемой по мере $\mu_S(\mathrm{d}x)$. Если мы рассматриваем комплексно-значные функции f и скалярные произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\pm}_S$, то интеграл $\int f(x)M(\mathrm{d}x)$ будет элементом пространства $\mathscr{L}^2_{\pm}(S)$ и неравенство (II.9.9) следует заменить на

$$\left\langle \int f(x)\mathbf{M}(\mathrm{d}x), \int f(x)\mathbf{M}(\mathrm{d}x) \right\rangle^{\pm}_S \leqslant \int |f(x)|^2 \mu_S(\mathrm{d}x). \tag{II.9.10}$$

Таким образом, мы доказали

Предложение II.9.1. *Для любой вещественной (комплексной) функции* $f \in \mathscr{L}^2(\mu_S)$ *интеграл* $\int f(x)M(\mathrm{d}x)$ *определен как предел последовательности* $\{\int f_n(x)M(\mathrm{d}x)\}$ *в* $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$ *(соответственно, в* $\mathscr{L}^2_{\pm}(S)$*), где* $\{f_n\}$ *— любая последовательность простых функций, сходящаяся к* f *в* $\mathscr{L}^2(\mu_S)$*. Для любой вещественной* $f \in \mathscr{L}^2(\mu_S)$ *имеет место неравенство* (II.9.9)*; для любой* $f \in \mathscr{L}^2(\mu_S)$ *имеет место неравенство* (II.9.10)*.*

Чтобы доказать (II.9.7), достаточно положить $f(x) = x - E_S\{\mathbf{M}\}$ в (II.9.9). Соотношение (II.9.6) следует из более общей формулы

$$\int f(x)\mu_S(\mathrm{d}x) = \left\langle I, \int f(x)M(\mathrm{d}x) \right\rangle_S,$$

которая очевидна для простых f и получается стандартным предельным переходом для $f \in \mathscr{L}^2(\mu_s)$.

Используя неравенства (II.9.7) и (4) из предложения II.8.3, получаем наиболее общую форму соотношения неопределенностей

$$D_S\{\mathbf{M}_1\} \cdot D_S\{\mathbf{M}_2\} \geqslant \tfrac{1}{4}[X_{\mathbf{M}_1}, X_{\mathbf{M}_2}]^2,$$

справедливую для любых измерений $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ с конечными вторыми моментами. Отметим, что это неравенство, в отличие от (II.6.4) и (II.9.5), уже может быть отнесено и к совместным измерениям, когда $M_1(\mathrm{d}x_1)$ и $M_2(\mathrm{d}x_2)$ суть маргинальные измерения по отношению к совместному измерению $M(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2)$.

§ 10. Матричное представление квадратично-суммируемых операторов. Коммутационный оператор состояния

Элементы пространства $\mathscr{L}^2$ естественно представляются бесконечными матрицами. Для простоты предположим сначала, что оператор плотности S

невырожден, т. е. все его собственные значения $s_j > 0$. Тогда семейство *матричных единиц*

$$E_{jk} = |\psi_j)(\psi_k|$$

где $\{\psi_j\}$ *ортонормированный базис собственных векторов* S *в* $\mathscr{H}$ *образует ортогональный базис в пространствах* $\mathscr{L}^2_{\pm}(S)$, $\mathscr{L}^2(S)$, *причем*

$$\langle E_{jk}, E_{jk}\rangle_S^+ = s_j, \qquad \langle E_{jk}, E_{jk}\rangle_S^- = s_k,$$

$$\langle E_{jk}, E_{jk}\rangle_S = \tfrac{1}{2}(s_j + s_k).$$

Докажем это для $\mathscr{L}^2(S)$. Для любого $X \in \mathscr{L}^2(S)$

$$\langle E_{jk}, X\rangle_S = \tfrac{1}{2}(s_j + s_k)(\psi_j|X\psi_k)$$

согласно (II.8.3). Отсюда следует, что $\langle E_{jk}, E_{j'k'}\rangle_S = \delta_{jj'}\cdot\delta_{kk'}$. Полнота системы $\{E_{jk}\}$ следует из того, что равенство $\langle E_{jk}, X\rangle_S = 0$ для всех j, k влечет $X\psi_k = 0$ для всех k, т. е. $X = 0$ в $\mathscr{L}^2(S)$.

Для любого квадратично-суммируемого оператора X имеет место разложение:

$$X = \sum_{jk} x_{jk}E_{jk} = \sum_{jk} |\psi_j)(\psi_j|X\psi_k)(\psi_k|, \tag{II.10.1}$$

где

$$x_{jk} = (\psi_j|X\psi_k) = \frac{\langle E_{jk}, X\rangle_S}{\langle E_{jk}, E_{jk}\rangle_S},$$

и ряд сходится в $\mathscr{L}^2(S)$. Это является некоторым обобщением матричного представления (II.1.13) на неограниченные операторы.

Рассмотрим вещественное пространство $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$. Поскольку $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S) \subset \mathscr{L}^2(S)$, разложение (II.10.1) имеет место и для $X \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$, однако это не будет разложением в $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$, так как операторы E_{jk} не эрмитовы при $j \neq k$ и коэффициенты x_{jk}, вообще говоря, комплексны. Поэтому введем новую систему

$$C_{jk} = \frac{1}{2}(E_{jk} + E_{kj})^*, \qquad S_{jk} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(E_{jk} - E_{jk}^*).$$

Легко проверяется, что $\{C_{jk}, j \leqslant k;\ S_{jk}, j < k\}$ образуют ортогональный базис в $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$ и для $X \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$ имеет место разложение

$$X = \sum_{j\leqslant k} \alpha_{jk}C_{jk} + \sum_{j<k} \beta_{jk}S_{jk},$$

где α_{jk}, β_{jk} вещественны.

Пусть теперь некоторые собственные значения оператора плотности S равны нулю. Условимся обозначать через J_0 множество индексов j, для которых $s_j = 0$, а через J_1 остальные индексы, и будем считать, что s_j занумерованы так, что сначала идут ненулевые собственные значения. Тогда S представляется диагональной блочной матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc|c} s_1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & \\ & & s_j & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right].$$

Рассмотрим $\mathscr{L}^2_+(S)$. Поскольку $\langle E_{jk}, E_{jk}\rangle^+_S = 0$ при $j \in J_0$, то ортогональный базис в $\mathscr{L}^2_+(S)$ образуют операторы $\{E_{jk};\ j \in J_1,\ k \in J_0 \cup J_1\}$. Следовательно, всякий элемент $\mathscr{L}^2_+(S)$ представляется матрицей вида

$$X = \left[\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{10} \\ \hline \sim & \sim \end{array}\right],$$

где блоки X_{11}, X_{10}, соответствующие строкам с индексом $j \in J_1$, фиксированы, а остальные блоки, обозначенные символом$^\sim$, произвольны (в частности, можно считать их нулевыми). Аналогично, элементы $\mathscr{L}^2_-(S)$ представляются матрицами вида

$$X = \left[\begin{array}{c|c} X_{11} & \sim \\ \hline X_{01} & \sim \end{array}\right].$$

Обращаясь к матричному представлению элементов $\mathscr{L}^2(S)$, заметим, что поскольку $\langle E_{jk}, E_{jk}\rangle_S = 0$ тогда и только тогда, когда $j,\ k \in J_0$, то базис в $\mathscr{L}^2(S)$ образуют операторы $\{E_{jk};\ (j,k) \notin J_0 \times J_0\}$. Следовательно, элементы $\mathscr{L}^2(S)$ представляются матрицами вида

$$X = \left[\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{10} \\ \hline X_{01} & \sim \end{array}\right],$$

Для элементов $X \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$ эта матрица удовлетворяет дополнительному условию эрмитовости $X^*_{11} = X_{11}$, $X^*_{10} = X_{01}$.

Особенно простую структуру имеют эти пространства в случае чистого состояния $S = |\psi_1)(\psi_1|$. Тогда элементы пространства $\mathscr{L}^2_+(S)$ можно рассматривать как векторы-строки:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11}x_{12}\ldots \\ \sim \end{bmatrix}, \qquad \sum_j |x_{1j}|^2 < \infty.$$

Если условиться считать несущественные коэффициенты равными нулю, то получается представление $X = |\psi_1)(\psi|$, $\psi \in \mathscr{H}$, так что $\mathscr{L}^2_+(S)$ оказывается изоморфным пространству $\mathscr{H}^*$ непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{H}$. Аналогично, элементы пространства $\mathscr{L}^2(S)$ можно рассматривать как матрицы вида

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \\ x_{21} & \sim \\ \vdots & \end{bmatrix}$$

т. е. как векторы-столбцы, $X = |\psi)(\psi_1|$, $\psi \in \mathscr{H}$, так что $\mathscr{L}^2_-(S)$ естественно изоморфно $\mathscr{H}$. Наконец, элементы $\mathscr{L}^2(S)$ представляются в виде

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12}\ldots \\ x_{21} & \sim \\ \vdots & \end{bmatrix}. \tag{II.10.2}$$

т. е. $X = |\psi_1)(\varphi| + |\psi)(\psi_1|$, $\varphi,\ \psi \in \mathscr{H}$. Элементы $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$ представляются эрмитовыми матрицами вида (II.10.2), т. е.

$$X = |\psi_1)(\psi| + |\psi)(\psi_1|, \qquad \psi \in \mathscr{H}. \tag{II.10.3}$$

Теперь введем важное понятие коммутационного оператора состояния, которое окажется весьма полезным в статистической теории глав V, VI. Из предложения II.8.3 вытекает, что форма $[\cdot,\cdot]_S$ непрерывна на $\mathscr{L}^2(S)$. Поэтому существует ограниченный комплексно-линейный оператор $\mathfrak{D}$ в $\mathscr{L}^2(S)$ такой, что

$$[Y, X]_S = \langle Y, \mathfrak{D}\cdot X\rangle_S, \tag{II.10.4}$$

Оператор $\mathfrak{D}$ назовем *коммутационным оператором* состояния S. Неравенства (1), (2) предложения II.8.3 в терминах оператора $\mathfrak{D}$ принимают вид

$$1 \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\mathfrak{D} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \mathscr{L}^2(S), \tag{II.10.5}$$

откуда

$$\left(1+\frac{1}{4}\mathfrak{D}^2\right) = \left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\mathfrak{D}\right)\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\mathfrak{D}\right) \geqslant 0.$$

Так как формы $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ и $[\cdot,\cdot]_S$ вещественны на вещественном подпространстве $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$, то это подпространство инвариантно относительно оператора $\mathfrak{D}$. Рассматриваемый в $\mathscr{L}^2_{\mathrm{h}}(S)$, этот оператор является ограниченным вещественно-линейным кососимметричным оператором, удовлетворяющим условию $1+\frac{1}{4}\mathfrak{D}^2 \geqslant 0$. Тождество (II.8.9) в терминах $\mathfrak{D}$ принимает вид

$$\mathfrak{D}\cdot I = 0. \tag{II.10.6}$$

Дадим явное описание действия оператора $\mathfrak{D}$. Из (II.10.4), (II.8.5) и (II.8.7) вытекает, что для любых ограниченных X, Y

$$\mathrm{i}\,\mathrm{Tr}[X,S]Y^* = \mathrm{Tr}((\mathfrak{D}\cdot X)\circ S)Y^*,$$

откуда следует, что элемент $Z=\mathfrak{D}\cdot X\in\mathscr{L}^2(S)$ является решением операторного уравнения

$$Z\circ S = \mathrm{i}[X,S]. \tag{II.10.7}$$

Это уравнение решается с использованием матричного представления (II.10.1). Умножая уравнение (II.10.7) скалярно слева на ψ_j и справа на ψ_k, получаем

$$\tfrac{1}{2}(s_k+s_j)(\psi_j|Z\psi_k) = \mathrm{i}(s_k-s_j)(\psi_j|X\psi_k),$$

откуда находятся матричные элементы оператора $Z=\mathfrak{D}\cdot X$

$$(\psi_j|Z\psi_k) = \frac{2\mathrm{i}(s_k-s_j)}{(s_k+s_j)}(\psi_j|X\psi_k).$$

Следовательно, действие оператора $\mathfrak{D}$ сводится к умножению матричных элементов $x_{jk}=(\psi_j|X\psi_k)$ оператора X на числа $2\mathrm{i}(s_k-s_j)(s_k+s_j)^{-1}$:

$$\mathfrak{D}([x_{jk}]) = \left[\frac{2\mathrm{i}(s_k-s_j)}{(s_k+s_j)}x_{jk}\right]. \tag{II.10.8}$$

так что базис $\{E_{jk}\}$ является базисом из собственных векторов оператора $\mathfrak{D}$ в $\mathscr{L}^2(S)$. Поэтому для любой функции f действие оператора $f(\mathfrak{D})$ задается соотношением

$$f(\mathfrak{D})([x_{jk}]) = \left[f\left(\frac{2\mathrm{i}(s_k-s_j)}{(s_k+s_j)}\right)x_{jk}\right].$$

В частности,

$$\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\mathfrak{D}\right)([x_{jk}])=\left[\frac{2s_j}{s_k+s_j}x_{jk}\right],$$
$$\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\mathfrak{D}\right)([x_{jk}])=\left[\frac{2s_k}{s_k+s_j}x_{jk}\right],$$
$$\left(1+\frac{1}{4}\mathfrak{D}^2\right)([x_{jk}])=\left[\frac{2s_ks_j}{(s_k+s_j)^2}x_{jk}\right]. \qquad (\text{II.10.9})$$

Отсюда вытекает полезное утверждение.

Предложение II.10.1. *Состояние S точное (т, е. все $s_j>0$), тогда и только тогда, когда операторы $1\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}$, $1+\frac{1}{4}\mathfrak{D}^2$ невырождены.*

Отметим также полезную формулу

$$\left(1\pm\frac{\mathrm{i}}{2}\mathfrak{D}\right)^{-1}=\left(1+\frac{1}{4}\mathfrak{D}^2\right)^{-1}\left(1\mp\frac{\mathrm{i}}{2}\mathfrak{D}\right). \qquad (\text{II.10.10})$$

Комментарии

§ 1. Систематическое изложение теории гильбертова пространства см. в книгах: Ахиезер и Глазман [1], Рисс и Секефальви-Надь [39], Стоун [133]). Модернизованное изложение функционального анализа, приспособленное к нуждам математической физики, дается в книге Рида и Саймона [38]. Богатый дополнительный материал можно найти в задачнике Халмоша [83]. Для «внешнего» произведения векторов в математическое литературе используется менее выразительное обозначение $\bar{\varphi}\otimes\psi$.

§ 2. Обобщенные разложения единицы (на прямой) были введены Карлеманом и подробно изучены Наймарком [32, 33]. Теорема II.2.1 доказана в работе автора [90].

§ 3-§ 4. Доказательство спектральных теорем для эрмитовых и самосопряженных операторов, связанных с именами Гильберта, фон Неймана, Стоуна, Рисса и др. можно найти в упомянутых выше книгах. По поводу спектрального разложения симметричных операторов см. Наймарк [32], Ахиезер и Глазман [1]. Дираковское разложение по формальным собственным векторам получает строгое обоснование в теории оснащенных гильбертовых пространств (см. Гельфанд и Виленкин [12], Боголюбов, Логунов, Тодоров [6]).

§ 5. Теорема II.5.1 была доказана Наймарком в работе [33] путем явного построения ортогонального разложения единицы в прямой сумме копий исходного пространства $\mathscr{H}$. Предложенные впоследствии более элегантные доказательства (см., например, Ахиезер и Глазман [1]) являются и более формальными. По поводу тензорного произведения гильбертовых пространств см. Рид и Саймон [38].

Понятие реализации измерения и его связь с рандомизованными процедурами математической статистики обсуждались в работах автора [49, 52, 90]. Другая возможность возникновения неортогональвых разложений и «переполненных» систем векторов связана с так называемыми косвенными измерениями (Мандельштам [29], Гордон и Люиселл [79]). При косвенном измерении объект $\mathscr{H}$ взаимодействует с «измерительным прибором» $\mathscr{H}_1$, который приготовлен в некотором начальном состоянии S_1; затем с прибора «снимаются показания», т. е. производится простое измерение в пространстве $\mathscr{H}_1$. Нетрудно показать (ср. Краус [104]), что распределение вероятностей результатов такой измерительной процедуры также описывается, вообще говоря, неортогональным разложением единицы в пространстве $\mathscr{H}$.

Мы оставляем в стороне вопрос о возможном механизме переноса информации с микроскопического на макроскопический уровень. Этот процесс должен описываться квантово-механически как взаимодействие объекта с измерительным прибором. При этом аппарат должен рассматриваться как «макроскопическая» система, т. е. система с огромным числом степеней свободы. Взаимодействие, рассматриваемое в рамках квантовой статистической механики, приводит к некоторому феноменологическому описанию процесса измерения (см. Данери, Лоингер, Проспери [70]). Интересная точка зрения на этот вопрос развивается в работе Хеппа [88]. Поскольку измерительный прибор является макроскопическим объектом, т. е. системой с практически бесконечным числом степеней свободы, для его описания привлекаются специальные алгебры наблюдаемых. Для таких алгебр существуют так называемые дизъюнктные или «макроскопически различимые» состояния. Взаимодействие микрообъекта с прибором переводит последний в одно из дизъюнктных состояний, отвечающих некоторому значению u результатов эксперимента. В работе Хеппа рассматривается ряд конкретных моделей, убедительно иллюстрирующих эту картину.

§ 6. Формальное соотношение неопределенностей $D(X)D(Y)\geqslant\frac{1}{4}\overline{[X,Y]^2}$ для произвольных наблюдаемых X, Y было установлено Робертсоном [128], который обобщил соотношение неопределенностей Гейзенберга для координаты и импульса (см. § III.3). Предложение II.6.1 доказано в книге Дэвиса [72]. Обсуждение совместной измеримости с других точек зрения можно найти у фон Неймана [45], Урбаника [137], Варадарайана [139] и др. Относительно совместного спектрального разложения и функционального исчисления нескольких коммутирующих операторов см. Рисс и Секефальви-Надь [39].

§ 7. Ядерные операторы и операторы Гильберта-Шмидта рассматриваются в книге Рида и Саймона [38]. Более подробное изложение читатель найдет у Шаттена [129], а также у Гельфанда и Виленкина [12].

§ 8. Пространства $\mathscr{L}^2(S)$ были введены в работах автора [92, 93] для нормальных состояний на алгебре фон Неймана. В последней работе содержится доказательство теоремы II.8.1. Понятие квадратично-суммируемого оператора использовалось ранее в работах Холево [90] и Крауса и Шретера [105].

§ 9. Строгое соотношение неопределенностей для самосопряженных операторов было получено Краусом и Шретером [105]. Конструкция интеграла $\int f(x)M(\mathrm{d}x)$ дается в работе [93].

§ 10. Представление неограниченных операторов матрицами связано с известными трудностями (см., например, Ахиезер и Глазман [1]). Содержание этого параграфа показывает, что в тех вопросах, где важны лишь вторые моменты, эти трудности несущественны и матричное представление имеет место. Коммутационный оператор состояния был введен в работах Холево [92,93], где рассматривались также состояния на алгебре фон Неймана. Существует простое соотношение между коммутационным оператором $\mathfrak{D}$ и модулярным оператором Δ теории Томита—Такесаки [136], а именно, $\Delta = (1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D})(1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D})^{-1}$; для точного состояния S на $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ это следует из (II.10.9) и того факта, что $\Delta \cdot X = SXS^{-1}$.

Глава III
СИММЕТРИИ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

§ 1. Статистическая модель и принцип относительности

Мы переходим к рассмотрению специфики статистического описания квантовомеханических объектов, обусловленной той исключительной ролью, которую играет в нем наличие пространственно-временной структуры. В классической механике движение точечных масс описывается в системе отсчета, состоящей из пространственной декартовой системы координат и часов, осуществляющих отсчет времени. Выделенный класс образуют так называемые инерциальные системы отсчета, которые характеризуются тем, что свободные массы совершают в них прямолинейное равномерное движение. Отсюда следует, что координаты материальной точки в двух инерциальных системах отсчета $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ и $(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\tau}')$ связаны преобразованием Галилея

$$\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{R}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x} + \mathbf{v}\boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{\tau}' + \tau + t, \tag{III.1.1}$$

где $\mathbf{R}$ — ортогональная матрица (вращение), задающая положение осей новой декартовой системы координат относительно старой, $\mathbf{x}$ — вектор пространственного сдвига начала координат, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, с которой движется старая система координат относительно новой, а τ — разность показаний часов в старой и новой системах отсчета.

Совокупность всех преобразований вида (III.1.1) образует полную *группу Галилея*, которая содержит подгруппу *кинематических преобразований*

$$\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{R}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x} + \mathbf{v}\boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{\tau}' = \tau, \tag{III.1.2}$$

и *подгруппу Евклида* пространственных преобразований (движений)

$$\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{R}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}.$$

Фундаментальный принцип относительности Галилея гласит, что законы механики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета, или, математически, уравнения движения инвариантны относительно всех преобразований вида (III.1.1). Это требование относится, конечно, к изолированному объекту; если же рассматривается движение в поле внешних сил, то этот принцип следует заменить ограниченным принципом инвариантности, учитывающим степень симметрии внешнего поля. Так, уравнения движения в потенциальном поле, не зависящем от времени, должны быть инвариантны относительно преобразований

$$\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{v}\boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} + t.$$

Если же поле, например, изотропно, то сюда следует присоединить повороты $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{R}\boldsymbol{\xi}$ и т. п.

Переходя к квантовой механике, примем, что принцип равноправия инерциальных систем отсчета сохраняет свою справедливость и для микрообъектов. Однако мы не можем взять точную формулировку принципа относительности из классической механики, где параметры $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ имеют непосредственный смысл как пространственно-временные координаты материальной точки; в ситуации, описываемой квантовой теорией, непосредственно данными можно считать статистические результаты экспериментов над рассматриваемым микрообъектом. С этой точки зрения подходящей словесной формулировкой принципа относительности представляется следующая: *статистика результатов любого эксперимента не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, в которой проводится эксперимент.*

Дадим математическую формулировку принципа относительности. Предположим, что некоторая установка приготовляет состояние S квантового объекта, над которым затем производится измерение $\mathbf{M}$, в результате чего возникает распределение вероятностей $\mu_S^{\mathbf{M}}$. Как приготовление, так и измерение осуществляются макроскопическими приборами, с которыми можно связать систему отсчета $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ (рис. 1).

Предположим теперь, что система отсчета $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ подвергается галилееву преобразованию g и переходит в новую систему $(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\tau}')$, а экспериментальная установка остается прежней. Приготовление состояния S данной установкой с последующим преобразованием координат установки можно рассматривать как некоторый новый способ приготовления, который приводит к состоянию gS; аналогично, измерение $\mathbf{M}$, проведенное после преобразования g , можно рассматривать как некоторое новое измерение $g\mathbf{M}$. Однако, поскольку относительное положение прибора и установки не изменяется, должно быть

$$\mu_{gS}^{g\mathbf{M}} = \mu_S^{\mathbf{M}}, \tag{III.1.3}$$

для любого состояния S и измерения $\mathbf{M}$.

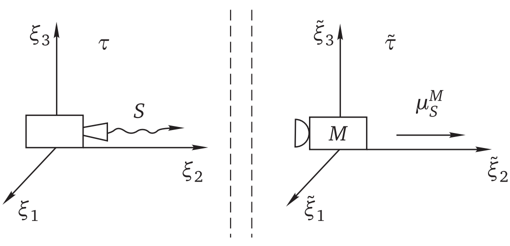

Рис. 1.

Из равноправности всех систем отсчета следует также, что отображение $S \to gS$ (соответственно $\mathbf{M} \to g\mathbf{M}$) должно быть взаимно-однозначным отображением множества состояний $\mathfrak{S}$ (соответственно измерений $\mathfrak{M}$) на себя. Отсюда вытекает, что отображение $S \to gS$ является аффинным: пусть $S = \sum_j p_j S_j$, тогда

$$\mu_{gS}^{g\mathbf{M}} = \mu_S^{\mathbf{M}} = \sum_j p_j \mu_{S_j}^{\mathbf{M}} = \sum_j p_j \mu_{gS_j}^{g\mathbf{M}}.$$

Поскольку $g\mathbf{M}$ пробегает все множество $\mathfrak{M}$, получаем $gS = \sum_j p_j(gS_j)$ в силу отделимости рассматриваемой статистической модели. Это означает аффинность отображения $\mathbf{M} \to g\mathbf{M}$. Взаимно-однозначное аффинное отображение множества состояний $\mathfrak{S}$ на себя называется *автоморфизмом.*

Примем также, что последовательное применение двух преобразований g_1, g_2 положения установки или прибора эквивалентно преобразованию $g_1 g_2$, так что

$$\begin{aligned} g_1(g_2 S) &= (g_1 g_2)S, \\ g_1(g_2\mathbf{M}) &= (g_1 g_2)\mathbf{M}. \end{aligned} \tag{III.1.4}$$

Это означает, что заданы действия группы $G=\{g\}$, с одной стороны, как группы автоморфизмов множества состояний $\mathfrak{S}$ и, с другой стороны, как группы взаимно-однозначных преобразований множества измерений $\mathfrak{M}$, причем действия этих групп связаны условием (III.1.3). В этом и состоит математическая формулировка принципа относительности. В рассматриваемой нами нерелятивистской квантовой механике под группой G подразумевается группа Галилея, а $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ является статистической моделью квантовой теории.

Заметим, однако, что все эти рассуждения применимы и к любой другой группе симметрии G. В частности, если группа Галилея заменяется на группу Пуанкаре, мы получаем (специальный) принцип относительности Эйнштейна.

Пока мы не использовали специфику модели квантовой теории. Следующий результат, восходящий к Вигнеру, раскрывает структуру автоморфизмов множества квантовых состояний $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$.

Теорема III.1.1. *Всякий автоморфизм множества квантовых состояний $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ имеет вид*

$$S \to VSV^*, \tag{III.1.5}$$

где V унитарный или антиунитарный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

(Оператор V, отображающий $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}$, называется *антиунитарным*, если он антилинеен и удовлетворяет условию $(V\varphi|V\psi) = \overline{(\varphi|\psi)}$.)

Важно отметить, что оператор V определяется в (III.1.5) неоднозначно: V можно умножить на произвольное комплексное число, равное по модулю единице, не изменив состояния VSV^*. Рассмотрим произвольную группу автоморфизмов G множества состояний $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. По теореме III.1.1 для любого $g \in G$ найдется унитарный или антиунитарный оператор V_g в $\mathscr{H}$, такой что $gS = V_g S V_g^*$. Более того, согласно (III.1.4)

$$V_{g_2} V_{g_1} S V_{g_1}^* V_{g_2}^* = V_{g_2 g_1} S V_{g_2 g_1}^*; \qquad g_1, g_2 \in G,$$

для всех $S \in \mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Отсюда следует, что найдется комплексно-значная функция $\omega(g_1, g_2)$ с $|\omega(g_1, g_2)| \equiv 1$, такая что

$$V_{g_2} V_{g_1} = \omega(g_2, g_2) V_{g_2 g_1}; \qquad g_1 g_2 \in G. \tag{III.1.6}$$

Рассматриваемые нами группы являются непрерывными: в них естественно определяются понятия близости и сходимости. Практически не ограничивая общности, можно считать, что отображение $g \to V_g$ непрерывно в том смысле, что $(\varphi|V'_g\psi) \to (\varphi|V_g\psi)$ при $g' \to g$ для всех $\varphi,\ \psi \in \mathscr{H}$. Будем считать также, что V_e, где e — единица группы G, всегда выбирается так, что $V_e = I$. Кроме того, предположим, что группа является с в я з н о й, т. е. любые два ее элемента можно соединить непрерывной кривой, лежащей в G. Тогда ни один из операторов V_g не может быть антиунитарным — в противном случае можно было бы перейти непрерывным образом от линейного оператора $V_e = I$ к антилинейному оператору V_g. Итак, в предположении связности группы G, все операторы V_g являются унитарными.

Семейство унитарных операторов $g \to V_g;\ g \in G$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, удовлетворяющее условию (III.1.6), называется *проективным (унитарным) представлением* группы G в $\mathscr{H}$. Если $\omega \equiv 1$, то оно называется просто *унитарным*. Мы будем рассматривать только непрерывные в указанном выше смысле представления.

Одной из основных задач теории представлений является классификация всех представлений данной группы. Из сказанного выше видно, что, имея такую классификацию для некоторой группы симметрии G, мы можем описать все теоретически возможные квантовые объекты с данным типом симметрии. Особую роль играют *неприводимые* представления $g \to V_g$, для которых в пространстве $\mathscr{H}$ не существует нетривиального (замкнутого) подпространства, инвариантного относительно всех операторов $\{V_g;\ g \in G\}$. Неприводимые представления являются в этом смысле минимальными, и при определенных условиях регулярности всякое представление может быть разложено в дискретную или непрерывную сумму (интеграл) неприводимых представлений. Согласно Вигнеру, неприводимое представление описывает «элементарную систему» с данным типом симметрии. Очевидно, что здесь решающую роль играет определение фундаментальной группы симметрии, которая включает в себя все физически значимые симметрии. Если в нерелятивистской квантовой механике эту роль играет группа Галилея, то в релятивистской ее заменяет группа Пуанкаре. Большое место занимают группы симметрии в попытках классификации элементарных частиц[1].

Уравнения для свободных частиц в квантовой механике представляют собой по существу удобный способ описания неприводимых представлений соответствующих групп. Последовательный вывод квантовой динамики, основывающийся на принципе галилеевой относительности, представляет большой методический интерес, однако он требует привлечения ряда результатов теории проективных представлений, которые выходят за рамки настоящей книги. Ограничиваясь достаточно элементарными средствами, мы рассмотрим здесь подробно лишь простейший случай нерелятивистской частицы в одном измерении, чтобы показать, каким образом соображения симметрии позволяют связать с механическими параметрами, такими как координата, скорость, время, энергия, те или иные квантовые измерения, т. е. разложения единицы в гильбертовом пространстве представления.

[1] Элементарная система не совсем то же самое, что «элементарная частица» в квантовой физике. Полностью ответить на вопрос, что же является математическим эквивалентом понятия элементарной частицы, повидимому, сможет лишь будущая теория. Тем не менее, допуская вольность речи, мы иногда будем называть «частицей» элементарный квантовый объект (систему) в определенном здесь смысле.

§ 2. Однопараметрические группы сдвигов и соотношения неопределенностей

Предположим, что установка, приготовляющая квантовое состояние, сдвигается параллельно себе по оси абсцисс ξ на расстояние x, что описывается преобразованием $\xi' = \xi - x$ (см. левую часть рис. 2). Тогда, если исходное состояние объекта описывалось оператором плотности S, новое состояние будет иметь оператор плотности $S_x = V_x S V_x^*$, где $x \to V_x$, $x \in \mathbb{R}$ — непрерывное проективное представление группы сдвигов вещественной прямой $\mathbb{R}$.

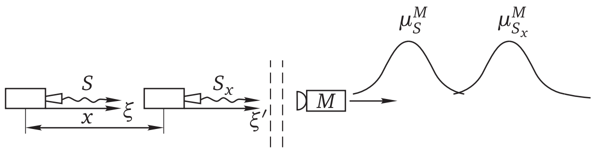

Рис. 2.

Все это относится не только к пространственным сдвигам, но и к любой другой однопараметрической подгруппе преобразований. Рассмотрим преобразование системы отсчета, при котором пространственная система координат остается неизменной, но сдвигается отсчет времени $\tau' = \tau + t$. Это соответствует тому, что процедура приготовления состояния та же, но начинается на время t раньше по сравнению с исходным отсчетом времени. Тогда оператор плотности S_t изменится по формуле $S_t = V_t S V_t^*$, где $t \to V_t$ — также проективное унитарное представление $\mathbb{R}$[2].

Это два наиболее важных примера, когда возникает представление группы $\mathbb{R}$. Рассмотрим их с общей точки зрения, отложив пока обсуждение пространственных и временных сдвигов до соответствующих разделов. Однако при рассмотрении результатов этого раздела полезно иметь в виду случай временных сдвигов. Напомним, что все рассматриваемые представления предполагаются непрерывными.

Предложение III.2.1. *Всякое непрерывное проективное унитарное представление $\theta \to \widetilde{V}_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$ аддитивной группы сдвигов $\mathbb{R}$ может быть сведено к унитарному, т. е. найдется непрерывное унитарное представление $\theta \to V_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, такое, что $V_\theta = \alpha_\theta \widetilde{V}_\theta$, $|\alpha_\theta| \equiv 1$.*

Семейство $\{V_\theta\}$ удовлетворяет соотношению

$$V_{\theta_1} V_{\theta_2} = V_{\theta_1+\theta_2}; \qquad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

и поэтому образует однопараметрическую группу унитарных операторов; по теореме Стоуна (см. § II.4), существует самосопряженный оператор A в $\mathscr{H}$ такой, что

$$V_\theta = \exp(\mathrm{i}\theta A), \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Поэтому действие однопараметрической группы пространственных сдвигов на множестве квантовых состояний описывается формулой

$$S \to S_\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A} S \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A}. \tag{III.2.1}$$

[2] Таким образом, S_t аналогично S_{-x}, а не S_x. При таком выборе S_t описывает временную эволюцию состояния S.

Далее для простоты ограничимся чистыми состояниями. Если $S=|\psi)(\psi|$, где $\psi\in\mathscr{D}(A)$, то $S_\theta=|\psi_\theta)(\psi_\theta|$, где $\psi_\theta=\exp(\mathrm{i}\theta A)\psi\in\mathscr{D}(A)$. Будем снабжать индексом θ величины, относящиеся к состоянию S_θ, так что $E_\theta(X)=(\psi_\theta|X\psi_\theta)$ — это среднее значение наблюдаемой X относительно состояния S_θ. Действуя формально, получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_\theta(x)=\left(\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}\theta}\middle|X\psi_\theta\right)+\left(\psi_\theta|X\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}\theta}\right).$$

Это легко проверяется, если X ограниченный оператор. Согласно уравнению (II.4.13)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_\theta(X)=2\,\mathrm{Im}(A\psi_\theta|X\psi_\theta). \tag{III.2.2}$$

Используя соотношение неопределенностей (II.6.4), получаем важное неравенство Мандельштама—Тамма

$$D_\theta(X)\cdot D_\theta(A)\geqslant\frac{1}{4}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_\theta(X)\right|^2. \tag{III.2.3}$$

В гл. VI мы обобщим это неравенство на произвольные состояния S и измерения M с конечными вторыми моментами. Значение этого результата состоит в том, что он позволяет получить принципиальную нижнюю границу для точности измерения физических параметров, существенно обобщающую обычное соотношение неопределенностей.

Чтобы объяснить это подробнее, мы должны сформулировать *задачу статистического оценивания*. Предположим, что прибор приготовляет исходное состояние S, которое предполагается полностью известным. Затем производится преобразование, отвечающее изменению параметра сдвига θ. Новое приготовленное таким образом состояние S_θ дается уравнением (III.2.1). Истинное значение θ предполагается неизвестным, и задача состоит в том, чтобы дать его статистическую оценку, производя измерение над объектом. Измерение должно быть $\mathbb{R}$-значным и для простоты мы ограничимся здесь наблюдаемыми. Всякая наблюдаемая X дает *статистическую оценку* параметра θ. Качество оценки X может быть выражено среднеквадратичным отклонением $E_\theta((X-\theta)^2)=D_\theta(X)+(E_\theta(X)-\theta)^2$. Тогда неравенство (III.2.3) устанавливает нижнюю границу

$$E_\theta((X-\theta)^2)\geqslant b(\theta)^2+\frac{[1+b'(\theta)]^2}{4D_\theta(A)}, \tag{III.2.4}$$

где $b(\theta)=E_\theta(X)-\theta$ — *смещение* оценки X.

Такие рассуждения характерны для математической статистики и являются новыми лишь в контексте квантовой теории. С этой точки зрения, любому физическому параметру отвечает множество измерений, различающихся, по крайней мере, своей точностью. Однако класс всевозможных оценок слишком велик — неравенство (III.2.4) имеет место и для наблюдаемых X, которые не имеют ничего общего с параметром θ. Следует потребовать для наблюдаемых X некоторых свойств, чтобы связать их с параметром θ. Следуя статистической терминологии, назовем оценку X *несмещенной*, если $b(\theta)=0$ или

$$E_\theta(X)=\theta,\qquad \theta\in\mathbb{R}. \tag{III.2.5}$$

Несмещенность означает отсутствие систематической погрешности в результатах измерения. Для несмещенных оценок неравенство (III.2.4) принимает форму

$$D_\theta(X) \geqslant [4D_\theta(A)]^{-1}. \tag{III.2.6}$$

Отметим, что $D_\theta(A) \equiv D_S(A)$, поскольку A коммутирует с унитарными операторами $\{\exp(\mathrm{i}\theta A)\}$. Таким образом, для любой несмещенной оценки параметра сдвига θ дисперсия ограничена снизу величиной, обратно пропорциональной неопределенности наблюдаемой A в исходном состоянии S. Далее мы применим (III.2.6) к оцениванию пространственных и временных сдвигов, а пока обсудим отношение неравенства (III.2.6) к традиционной форме соотношения неопределенностей.

Наблюдаемая, представленная самосопряженным оператором B, называется *канонически сопряженной* к A, если соответствующие унитарные группы удовлетворяют *каноническому коммутационному соотношению Вейля* (ККС)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\chi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi B}; \qquad \theta, \chi \in \mathbb{R}. \tag{III.2.7}$$

Очевидно, это равносильно тому, что A является канонически сопряженной к -B. Дифференцируя по θ и χ тождество

$$(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi B}\psi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}\psi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\chi}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A}\psi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi B}\psi),$$

которое следует из (III.2.7), получаем с помощью (II.4.13)

$$2\,\mathrm{Im}(A\psi|B\psi) = (\psi|\psi); \qquad \psi \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(B). \tag{III.2.8}$$

Если бы A и B были ограничены, то отсюда вытекало бы *ККС Гейзенберга*

$$[A, B] = \mathrm{i}I. \tag{III.2.9}$$

Однако, как мы увидим, обе канонически сопряженные наблюдаемые с необходимостью являются неограниченными. Поэтому в соотношении (III.2.9) возникают сложности с областями определения, и в лучшем случае (III.2.9) может выполняться лишь на плотной области. Более того, соотношения (III.2.7) и (III.2.9) не эквивалентны, так как имеются пары операторов, удовлетворяющие (III.2.9) на плотной области, которые однако, не удовлетворяют (III.2.7). ККС Вейля относится к более первичным с точки зрения физики объектам, каковыми являются унитарные группы, описывающие преобразования состояний.

Подставляя (III.2.8) в (II.6.4), получаем *соотношение неопределенностей Гейзенберга*

$$D_S(A) \cdot D_S(B) \geqslant \tfrac{1}{4}. \tag{III.2.10}$$

Покажем, что это следует также из (III.2.6). Тогда (III.2.6) может рассматриваться как обобщение соотношения неопределенностей Гейзенберга на ситуации, в которых канонически сопряженная наблюдаемая B может не существовать.

Мы получим (III.2.10) из (III.2.6), показав, что канонически сопряженная наблюдаемая B (если она существует) является, с точностью до константы, несмещенной оценкой параметра сдвига θ. Переписывая (III.2.7) в виде

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A}e^{\mathrm{i}\chi B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(B+\theta)}, \tag{III.2.11}$$

и обозначая $G(\mathrm{d}\lambda)$ спектральную меру B, получаем из (II.4.10)

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi\lambda}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}\psi|G(\mathrm{d}\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}\psi) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(\lambda+\theta)}(\psi|G(\mathrm{d}\lambda)\psi)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех единичных векторов $\psi \in \mathscr{H}$. Обе части этого равенства являются преобразованием Фурье распределений вероятностей. В силу единственности, это равносильно тому, что

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}\psi|G(\Lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}\psi) = (\psi|G(\Lambda_{-\theta})\psi), \tag{III.2.12}$$

для всех борелевских подмножеств $\Lambda \subset \mathbb{R}$, где $\Delta_{-\theta} = \{\lambda - \theta : \lambda \in \Lambda\}$ — сдвиг множества Λ by -θ. Поскольку это выполняется для всех $\psi \in \mathscr{H}$, то

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A}G(\Lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A} = G(\Lambda_{-\theta}); \qquad \theta \in \mathbb{R}, \quad \Lambda \in \mathscr{A}(\mathbb{R}). \tag{III.2.13}$$

Разложение единицы, удовлетворяющее такому соотношению, называется *ковариантным* относительно представления $\theta \to \exp(\mathrm{i}\theta A)$ группы $\mathbb{R}$. Обобщение этого свойства окажется очень важным в статистическом анализе квантовых систем. Обозначая $\mu_\theta^{\mathbf{G}}(\mathrm{d}\lambda)$ распределение вероятностей измерения $\mathbf{G} = \{G(\mathrm{d}\lambda)\}$ относительно состояния $S_\theta = |\psi_\theta)(\psi_\theta|$, получаем из (III.2.12)

$$\mu_\theta^{\mathbf{G}}(\Lambda) = \mu_0^{\mathbf{G}}(\Lambda_{-\theta}); \qquad \theta \in \mathbb{R}, \quad \Lambda \in \mathscr{A}(\mathbb{R}). \tag{III.2.14}$$

Это означает, что преобразование приготовления посредством сдвига θ отражается в соответствующем сдвиге распределения вероятностей измерения. Это дает хорошее основание ассоциировать разложение единицы, удовлетворяющее (III.2.13), с некоторым измерением параметра сдвига θ.

Из свойства ковариантности следует

$$E_\theta(B) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mu_\theta^G(\mathrm{d}\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + \theta)\mu_0^G(\mathrm{d}\lambda) = E_0(B) + \theta,$$

так что B, с точностью до константы, является несмещенной оценкой для θ. Более того, *дисперсия* $D_\theta(B)$ *не зависит от* θ и равна $D_0(B) \equiv D_S(B)$. Подставляя несмещенную оценку $X = B - E_0(B)$ в соотношение (III.2.6), получаем (III.2.10), что и требовалось.

§ 3. Кинематика квантовой частицы с одной степенью свободы

В случае одномерного движения система отсчета описывается парой переменных (ξ, τ), где ξ — пространственная, τ — временная координаты. Рассмотрим преобразование Галилея

$$\xi' = \xi - x - v\tau, \qquad \tau' = \tau. \tag{III.3.1}$$

Оно соответствует изменению положения приготовляющего устройства при сдвиге вдоль оси ξ на расстояние x и его движении со скоростью v относительно исходного положения. (см. левый рис. 3). Такие преобразования описываются парой параметров $g = (x, v)$ с законом композиции

$$(x_1, v_1)(x_2, v_2) = (x_1 + x_2, v_1 + v_2).$$

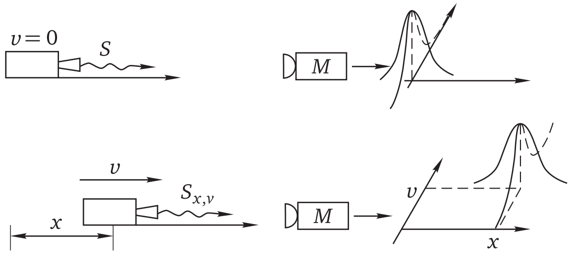

Рис. 3.

Таким образом, группа кинематических преобразований с одной степенью свободы — это аддитивная группа плоскости $\mathbb{R}^2$.

В соответствии с общей схемой, изложенной в § 1, мы будем искать неприводимые проективные представления $(x, v) \to W_{x,v}$ группы $\mathbb{R}^2$. Покажем, что, пользуясь произволом в выборе множителя перед $W_{x,v}$, можно всегда сделать так, что соотношение (III.1.6) будет иметь вид *канонического коммутационного соотношения Вейля—Сигала*

$$W_{x_1,v_1} W_{x_2,v_2} = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}\mu}{2}(x_1 v_2 - x_2 v_1)\right] W_{x_1+x_2, v_1+v_2}. \tag{III.3.2}$$

Положим $V_x = W_{x,0}$, $U_v = W_{0,v}$. Автоморфизмы

$$S \to V_x S V_x^*, \qquad S \to U_v, SU_v^*$$

описывают изменение состояния соответственно при сдвиге x начала координат и при переходе в систему координат, движущуюся со скоростью v. Согласно предложению III.2.1, всегда можно сделать так, чтобы семейства $\{V_x\}$ и $\{U_v\}$ образовывали однопараметрические группы унитарных операторов:

$$V_{x_1} V_{x_2} = V_{x_1+x_2}, \qquad U_{v_1} U_{v_2} = U_{v_1+v_2}.$$

Рассмотрим теперь переход в систему отсчета, сдвинутую на расстояние x и движущуюся со скоростью v. Этот переход может быть совершен двумя различными способами:

$$(x, v) = (x, 0)(0, v) = (0, v)(x, 0),$$

причем результат не должен зависеть от способа перехода, так что

$$S \to U_v V_x S V_x^* U_v^* = V_x U_v S U_v^* V_x^*$$

для любого S, откуда

$$U_v V_x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta(x,v)} V_x U_v, \tag{III.3.3}$$

где $\eta(\cdot,\cdot)$ — вещественная непрерывная функция своих аргументов. При $x=0$ или $v=0$, согласно (III.3.3) получаем $1 \equiv \exp \mathrm{i}\eta(0,v) \equiv \exp \mathrm{i}\eta(x,0)$, так что можно положить $\eta(x,0) \equiv \eta(v,0) \equiv 0$, поскольку $V_0 = U_0 = I$. Умножая (III.3.3) на $U_{v'}$, получаем

$$\eta(x, v+v') = \eta(x, v) + \eta(x, v') (\mathrm{mod} 2\pi).$$

Единственным непрерывным решением этого уравнения, удовлетворяющим условию $\eta(x, 0) = 0$, является $\eta(x, v) = \eta(x) \cdot v$. Аналогично, $\eta(x + x', v) = \eta(x, v) + \eta(x', v) (\mathrm{mod} 2\pi)$, откуда $\eta(x, v) = \mu x v$, где μ — некоторая вещественная постоянная, так что

$$U_v V_x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x v} V_x U_v. \tag{III.3.4}$$

Выбирая множитель так, чтобы выполнялось

$$W_{x,v} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x v/2} V_x U_v. \tag{III.3.5}$$

убеждаемся, что семейство $\{W_{x,v}\}$ удовлетворяет соотношению (III.3.2). Операторы $\{W_{x,v}\}$ иногда называются *операторами смещения.*

Предположим теперь, что представление $(x, v) \to W_{x,v}$ *неприводимо.* Тогда, если $\mu = 0$, то (III.3.4) влечет $[V_x, U_v] \equiv 0$, и можно легко показать, что единственно возможным является одномерное представление $(x, v) \to \exp \mathrm{i}(\alpha x + \beta v)$ с $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Таким образом, имеет место

Предложение III.3.1. *Всякое непрерывное проективное представление группы кинематических преобразований* (III.3.1) *задается семейством унитарных операторов* $\{W_{x,v}\}$*, удовлетворяющим соотношению Вейля—Сигала* (III.3.2)*. Если представление неприводимо и* $\dim \mathscr{H} > 1$*, то* $\mu \neq 0$.

В дальнейшем мы увидим, что параметр μ интерпретируется как *масса*, так что физический смысл имеют представления с $\mu > 0$.

Согласно теореме Стоуна, в пространстве представления $\mathscr{H}$ существуют самосопряженные операторы P и Q такие, что

$$V_x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xP}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{III.3.6}$$

$$U_v = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu v Q}, \qquad v \in \mathbb{R}. \tag{III.3.7}$$

Соотношение (III.3.4) (равносильное (III.3.2)) является ККС Вейля (III.2.7) для $A = -P$, $B = Q$, и означает, что Q и P *канонически сопряженные* наблюдаемые.

Спектральные меры Q и P, определяемые из спектральных разложений

$$Q = \int \xi E(\mathrm{d}\xi), \qquad \mu^{-1} P = \int \eta F(\mathrm{d}\eta),$$

описывают квантовые измерения, удовлетворяющие условиям ковариантности

$$\begin{aligned} V_x^* E(B) V_x &= E(B_{-x}), \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}), \\ U_v^* F(B) U_v &= F(B_{-v}), \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}), \end{aligned} \tag{III.3.8}$$

которые следуют из (III.2.13). Рассмотрим для определенности первое соотношение, чтобы объяснить кинематический смысл наблюдаемой Q.

Рассмотрим семейство состояний

$$S_x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xP} S \mathrm{e}^{\mathrm{i}xP}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

отвечающее различным значениям параметра *координаты* x. Этот параметр задает положение приготавливающего прибора и в этом смысле он отражает информацию о положении микрообъекта. Если производится измерение

наблюдаемой Q, то согласно уравнению (III.2.14), примененному к $A=-P$, $B=Q$, то результирующие распределения вероятностей удовлетворяют соотношению
$$\mu_x^E(B)=\mu_0^E(B_{-x});\qquad x\in\mathbb{R},\quad B\in\mathscr{A}(\mathbb{R}).$$
Это означает, что пространственный сдвиг установки, приготовляющей квантовое состояние S, находит отражение в таком же сдвиге распределения вероятностей наблюдаемой Q, независимо от характера приготовляемого состояния (рис. 2). Поэтому наблюдаемая Q и ее спектральная мера $E=\{E(\mathrm{d}\xi)\}$ естественно ассоциируется с измерением физического параметра координаты x.

Такая связь оказывается возможной благодаря свойству ковариантности (III.3.8) по отношению к представлению группы пространственных сдвигов. Как мы увидим в главе IV, существует бесконечно много ковариантных измерений: параметр x может быть измерен разными способами и с разной точностью. В силу соотношения (III.2.6), точность измерения параметра координаты x ограничена снизу:
$$D_x(X)\geqslant[4D_x(P)]^{-1}$$
для любой несмещенной оценки X параметра x. Мы покажем, что наблюдаемая Q выделяется из них как оптимальная оценка x. Будем называть Q *канонической наблюдаемой координаты*, в согласии с обычной терминологией физической литературы.

Аналогично, наблюдаемая $\mu^{-1}P$ ассоциируется с измерением параметра *относительной скорости* v в семействе состояний
$$S_v=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu vQ}S\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu vQ},\qquad v\in\mathbb{R}.$$
Поэтому будем называть $\mu^{-1}P$ *канонической наблюдаемой скорости*[3].

Поскольку Q и P канонически сопряженны, они удовлетворяют соотношению (III.2.8):
$$2\,\mathrm{Im}(Q\psi|P\psi)=(\psi|\psi),\qquad \psi\in\mathscr{D}(Q)\cap\mathscr{D}(P),$$
и соотношению неопределенностей Гейзенберга
$$D_S(Q)\cdot D_S(P)\geqslant\tfrac{1}{4}.\tag{III.3.9}$$
В физике более удобно вместо наблюдаемой скорости использовать наблюдаемую *импульса*, которая определяется как
$$p=m\cdot(\text{наблюдаемая скорости})=\hbar P,$$
где m — «классическая масса», а $\hbar=m/\mu$ — величина, пропорциональная постоянной Планка. Значение этих коэффициентов будет объяснено в § 7. Переобозначая $q\equiv Q$, запишем (III.3.9) в виде
$$D_S(q)\cdot D_S(p)\geqslant\frac{\hbar^2}{4},\tag{III.3.10}$$

[3] Для заряженных частиц наблюдаемая скорости имеет другой вид, но мы здесь на этом не останавливаемся (см., например, Яух [99]).

что является формальным следствием ККС Гейзенберга

$$[q, p] = \mathrm{i}\hbar. \tag{III.3.11}$$

§ 4. Теорема единственности. Представление Шредингера и импульсное представление

Каноническое коммутационное соотношение (III.3.2) и его обобщения играют фундаментальную роль в квантовой теории. Всякое конкретное семейство унитарных операторов $\{W_{x,v}\}$ в конкретном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, удовлетворяющее соотношению (III.3.2), называется *представлением канонического коммутационного соотношения* Вейля—Сигала. Имеет место важный результат, полученный Стоуном и фон Нейманом. Доказательство теоремы будет дано в § V.3.

Теорема III.4.1 (Единственность). *Всякие два непрерывных неприводимых представления* $(x, v) \to W^{(j)}_{x,v}$*;* $j = 1, 2$ *канонического коммутационного соотношения унитарно эквивалентны, т. е.*

$$W^{(2)}_{x,v} = U^* W^{(1)}_{x,v} U; \qquad (x, v) \in \mathbb{R}^2,$$

где U *— изометрический оператор, отображающий пространство* $\mathscr{H}_2$ *представления* $(x, v) \to W^{(2)}_{x,v}$ *на пространство* $\mathscr{H}_1$ *представления* $(x, v) \to W^{(1)}_{x,v}$*. Всякое непрерывное представление канонического коммутационного соотношения является дискретной прямой суммой неприводимых представлений.*

Из этих утверждений вытекает, что всякое непрерывное представление унитарно эквивалентно представлению вида

$$(x, v) \to \begin{bmatrix} W^{(0)}_{x,v} & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & W^{(0)}_{x,v} \end{bmatrix},$$

где $(x, v) \to W^{(0)}_{x,v}$ — фиксированное неприводимое представление. Таким образом, каноническое коммутационное соотношение по существу однозначно описывает кинематику (нерелятивистского) квантового объекта с одной степенью свободы, для данного значения параметра μ. Чтобы описать все представления, достаточно построить хотя бы одно неприводимое представление.

Рассмотрим пространство $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ комплексных квадратично - интегрируемых функций на $\mathbb{R}$ и семейство унитарных операторов в $\mathscr{H}$, действующих на функцию $\psi \in \mathscr{H}$ по формуле

$$W_{x,v}\psi(\xi) = \exp\left[\mathrm{i}\mu v\left(\xi - \frac{x}{2}\right)\right]\psi(\xi - x). \tag{III.4.1}$$

Легко убедиться, что $(x, v) \to W_{x,v}$ является непрерывным представлением ККС. Чтобы установить неприводимость, рассмотрим однопараметрические подгруппы $V_x = W_{x,0}$ и $U_v = W_{0,v}$, действующие по формулам

$$V_x\psi(\xi) = \psi(\xi - x), \tag{III.4.2}$$

$$U_v\psi(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu v\xi}\psi(\xi). \tag{III.4.3}$$

Пусть $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}$ — инвариантное подпространство всех операторов $\{W_{x,v};\,(x,v) \in \mathbb{R}^2\}$. Из того, что оно является инвариантным относительно подгруппы (III.4.3), следует, что существует подмножество $B \subset \mathbb{R}$, такое, что $\mathscr{L} = \{\psi : \psi(\xi) = 0,\ \xi \in B\}$. Однако такое подпространство может быть инвариантным подпространством группы сдвигов (III.4.2) только если либо B, либо дополнение к B имеет ненулевую лебегову меру. Это соответствует тому, что $\mathscr{L} = \mathscr{H}$ или $\mathscr{L} = [0]$, так что представление неприводимо.

Представление (III.4.1) канонического коммутационного соотношения в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ называется *представлением Шредингера.* Из формул (III.4.3) и (III.3.7) получаем канонические наблюдаемые в этом представлении

$$Q\psi(\xi) = \xi\psi(\xi), \qquad \psi \in \mathscr{D}(Q), \tag{III.4.4}$$

а из (III.4.2) и (III.3.6)

$$P\psi(\xi) = \mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\psi(\xi), \qquad \psi \in \mathscr{D}(P). \tag{III.4.5}$$

Во всяком случае, это заведомо имеет место для функций из пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций, убывающих вместе со всеми производными быстрее любой степени ξ при $|\xi| \to \infty$.

Фиксируем x и v и рассмотрим семейство унитарных операторов $\{W_{\theta x,\theta v};\,\theta \in \mathbb{R}\}$. Из (III.3.2) следует, что оно образует однопараметрическую группу унитарных операторов. Из (III.4.1)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}W_{\theta x,\theta v}\psi(\xi)\Big|_{\theta=0} &= \mu v\xi\psi(\xi) - x\mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\psi(\xi)\\ &= (\mu vQ - xP)\psi(\xi)\end{aligned}$$

для ψ, например, из $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Отсюда следует

$$W_{x,v} = \exp[\mathrm{i}(\mu vQ - xP)], \tag{III.4.6}$$

где $\mu vQ - xP$ обозначает самосопряженное расширение этой суммы с подпространства $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Согласно (III.4.4), оператор Q действует как оператор умножения на независимую переменную ξ в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$; поэтому можно сказать, что представление Шредингера «диагонализует» наблюдаемую координаты Q. Использую дираковские обозначения,

$$Q = \int \xi|\xi)(\xi|\mathrm{d}\xi,$$

где $|\xi)$ — «вектор» физически нереализуемого состояния, в котором объект имеет точно определенную координату ξ.

Распределение вероятностей наблюдаемой координаты $Q = q$ относительно состояния $S = |\psi)(\psi|$, согласно (II.3.15), дается формулой $|\psi(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$. Чем более сконцентрировано это распределение в некоторой точке $\bar{q}$, т. е. чем меньше дисперсия $D_S(q)$, тем сильнее сходство рассматриваемого квантового объекта с классическим объектом, строго локализованным в пространстве (частицей).

С другой стороны, рассмотрим оператор импульса $p = \hbar P = \hbar \mathrm{i}^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$. Его формальные собственные функции $\exp(\mathrm{i}\xi\eta)$; $\eta \in \mathbb{R}$ описывают физически нереализуемые состояния, в которых объект имеет точно определенную скорость η/μ и импульс $\hbar\eta$.

Из соотношения неопределенностей (III.3.10) вытекает, что чем более точно определенной является скорость объекта, т. е. чем меньше $D_S(p)$, тем менее определенной становится локализация объекта в пространстве. Можно сказать, что в состояниях с $D_S(p) \approx 0$ квантовый объект проявляет сходство с классической волной. Таким образом, в зависимости от приготовления исходного состояния, квантовый объект в измерениях может проявлять как черты классической частицы, так и классической волны.

Рассмотрим преобразование Фурье

$$\tilde{\psi}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\eta/\hbar}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{III.4.7}$$

модифицированное множителем $\hbar^{-1}$, которое изометрически отображает $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ на $\tilde{\mathscr{H}} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. Определяя операторы $\widetilde{W}_{x,v}$ в $\tilde{\mathscr{H}}$ соотношением $\widetilde{W}_{xv}\tilde{\psi} = \widetilde{W_{x,v}\psi}$, получаем, используя (III.3.2) и (III.4.7)

$$\widetilde{W}_{x,v}\tilde{\psi}(\eta) = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}x}{\hbar}\left(\eta - \frac{mv}{2}\right)\right]\tilde{\psi}(\eta - mv). \tag{III.4.8}$$

Семейство $(x, v) \to \widetilde{W}_{x,v}$ образует представление ККС в пространстве $\tilde{\mathscr{H}}$, которое называется *импульсным представлением*. Формула (III.4.7) описывает переход от представления Шредингера к импульсному представлению и демонстрирует их унитарную эквивалентность в явном виде. В импульсном представлении «диагонализуется» наблюдаемая импульса

$$\tilde{p}\tilde{\psi}(\eta) \equiv \widetilde{p\psi(\eta)} = \eta\tilde{\psi}(\eta), \qquad \tilde{q}\tilde{\psi}(\eta) = \hbar\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\tilde{\psi}(\eta).$$

§ 5. Состояния минимальной неопределенности. Соотношения полноты и ортогональности

Чистые состояния S_ψ, для которых достигается знак равенства в соотношении неопределенностей (III.3.9), называются *состояниями минимальной неопределенности*. Согласно (II.6.5) это имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого вещественного c

$$[(Q - \overline{Q}) + \mathrm{i}c(P - \overline{P})]\psi = 0. \tag{III.5.1}$$

Покажем, что для каждого $c > 0$ это уравнение имеет единственное с точностью до коэффициента решение $\psi \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. В представлении Шредингера уравнение (III.5.1) принимает вид

$$\left[(\xi - \overline{Q}) + c\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} - \mathrm{i}\overline{P}\right)\right](\xi|\psi) = 0, \tag{III.5.2}$$

Решая его и используя условие нормировки $\int |(\xi|\psi)|^2 \mathrm{d}\xi = 1$, получаем

$$(\xi|\psi) = \frac{k}{\sqrt[4]{\pi c}} \exp\left[\mathrm{i}\overline{P}\xi - \frac{(\xi - \overline{Q})^2}{2c} \right],$$

где $|k| = 1$, $c > 0$. Полагая $k = \exp(-\mathrm{i}\overline{Q}\,\overline{P}/2)$, $c = 2\sigma^2$, и обозначая соответствующий вектор состояния $|\overline{P}, \overline{Q}; \sigma^2)$, имеем

$$(\xi|\overline{P}, \overline{Q}; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\mathrm{i}\overline{P}\left(\xi - \frac{\overline{Q}}{2}\right) - \frac{(\xi - \overline{Q})^2}{2\sigma^2} \right]. \qquad \text{(III.5.3)}$$

Смысл параметров $\overline{P}$, $\overline{Q}$ и σ^2 очевиден; $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ являются средними значениями наблюдаемых P и Q в состоянии S_ψ, а

$$\sigma^2 = D_S(Q) = [4D_S(P)]^{-1}.$$

Состояния минимальной неопределенности называются иногда «волновыми пакетами». При комплексной параметризации они появятся как «когерентные состояния» в § 10. Особую роль играет основное состояние с нулевыми средними значениями $\overline{P} = \overline{Q} = 0$, отвечающее вектору

$$(\xi|0, 0; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\sigma^2}\right). \qquad \text{(III.5.4)}$$

Вектор состояния $|\overline{P}, \overline{Q}; \sigma^2)$ получается из основного действием оператора сдвига

$$|\overline{P}, \overline{Q}; \sigma^2) = W_{\overline{Q}, \overline{P}/\mu}|0, 0; \sigma^2), \qquad \text{(III.5.5)}$$

как видно из (III.4.1) и (III.5.3).

Покажем, что для любого фиксированного σ^2 семейство векторов $\{|\overline{P}, \overline{Q}; \sigma^2); (\overline{P}, \overline{Q}) \in \mathbb{R}^2\}$ удовлетворяет *соотношению полноты*

$$\iint |\overline{P}, \overline{Q}; \sigma^2)(\sigma^2; \overline{Q}, \overline{P}| \frac{\mathrm{d}\overline{P}\,\mathrm{d}\overline{Q}}{2\pi} = I. \qquad \text{(III.5.6)}$$

В отличие от формальных соотношений типа (II.3.12) и (II.4.16), это равенство, если понимать интеграл в смысле слабой сходимости, имеет непосредственное истолкование, так как $|\overline{P}, \overline{Q}; \sigma^2)$ является обычным вектором гильбертова пространства. Однако эти векторы не ортогональны при различных значениях параметров $\overline{P}$, $\overline{Q}$; более того, между ними существуют линейные соотношения. Можно сказать, что семейство $|\overline{P}, \overline{Q}; \sigma^2)$ является «переполненной» системой векторов.

Свойство полноты (III.5.6) вытекает из так называемых соотношений ортогональности для неприводимых представлений канонических коммутационных соотношений. Подобные соотношения имеют общую природу (*ср.* § IV.8), и выполняются для неприводимого представления достаточно произвольной группы. Мы установим эти соотношения, для интересующего нас частного случая элементарными средствами.

Предложение III.5.1. *Пусть* $(x,v)\to W_{x,v}$ — *непрерывное неприводимое представление канонических коммутационных соотношений в пространстве* $\mathscr{H}$. *Матричные элементы* $(\psi|W_{x,v}\varphi)$ *являются квадратично - интегрируемыми функциями от* (x,v). *Если* $\{e_j\}$ — *ортонормированный базис в* $\mathscr{H}$, *то функции*

$$\{\sqrt{\mu/2\pi}(e_j|W_{x,v}e_k)\}$$

образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$ *комплексных квадратично интегрируемых функций от* (x,v), *так что выполняются соотношения ортогональности:*

$$\frac{\mu}{2\pi}\iint\overline{(e_j|W_{x,v}e_k)}(e_l|W_{x,v}e_m)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v=\delta_{jl}\delta_{km}. \tag{III.5.7}$$

Доказательство. В силу теоремы III.4.1 мы можем иметь дело с представлением Шредингера. Согласно (III.4.1),

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\varphi|W_{x,v}\psi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy/2}\int\overline{\varphi(\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\xi}\psi(\xi-x)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy/2}\iint\overline{\varphi(\xi)}\tilde{\psi}(\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta x-y\xi)}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,\end{aligned} \tag{III.5.8}$$

для всех φ, $\psi\in\mathscr{H}$, где $\tilde{\psi}(\eta)$ преобразование Фурье функции $\psi(\xi)$ и $y=\mu v$. Так как φ, ψ квадратично интегрируемы, то $\varphi(\xi)$ $\tilde{\psi}(\eta)\exp(\mathrm{i}\eta\xi)$ также квадратично интегрируемая функция от (ξ,η). Поэтому интеграл в (III.5.2) имеет смысл как преобразование Фурье $\mathscr{F}$ квадратично интегрируемой функции, и функция $(\varphi|W_{x,v}\psi)$ принадлежит $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Если $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, то функции $\overline{e_j(\xi)}\tilde{e}_k(\eta)\exp(\mathrm{i}\eta\xi)$ образуют ортонормированный базис $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Поэтому их преобразования Фурье $\mathscr{F}[\overline{e_j(\xi)}\tilde{e}_k(\eta)\exp(\mathrm{i}\eta\xi)]$ также образуют ортонормированный базис в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, функции

$$(2\pi)^{-1/2}(e_j|W_{x,y/\mu}e_k)=\exp(\mathrm{i}xy/2)\cdot\mathscr{F}[\overline{e_j(\xi)}\tilde{e}_k(\eta)\exp(\mathrm{i}\eta\xi)]$$

образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$ функций от переменных x, $y=\mu v$, откуда, в частности, следует (III.5.7).

Из (III.5.7) получаем

$$\frac{\mu}{2\pi}\iint\overline{(\varphi_1|W_{x,v}\psi_1)}(\varphi_2|W_{x,v}\psi_2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v=\overline{(\varphi_1|\varphi_2)}(\psi_1|\psi_2) \tag{III.5.9}$$

для произвольных φ_j, $\psi_j\in\mathscr{H}$; $j=1,2$. Полагая $\psi_1=\psi_2=\psi$, где $(\psi|\psi)=1$, получаем

$$\frac{\mu}{2\pi}\iint(\varphi_2|W_{x,v}\psi)(\psi|W_{x,v}\varphi_1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v=(\varphi_2|\varphi_2).$$

Поскольку φ_1, φ_2 произвольны, это означает, что

$$\frac{\mu}{2\pi}\iint W_{x,v}|\psi)(\psi|W_{x,v}^*\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v=I. \tag{III.5.10}$$

где интеграл понимается в смысле слабой сходимости. Таким образом, для любого единичного вектора ψ семейство $\{W_{x,v}|\psi);\,(x,v)\in\mathbb{R}^2\}$ является «переполненной» системой векторов, т. е. удовлетворяет соотношению полноты

(III.5.10). Это, в частности, верно и для семейства векторов состояний минимальной неопределенности, порождаемых вектором основного состояния $|\psi) = |0, 0;\, \sigma^2)$, для которых получается (III.5.6).

§ 6. Совместные измерения координаты и скорости

Из соотношения неопределенностей (III.3.9) вытекает, что наблюдаемые скорости $\mu^{-1}P$ и координаты Q несовместимы. Не существует измерения $M(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v)$ такого, чтобы измерения $E(\mathrm{d}x)$ и $F(\mathrm{d}v)$ были по отношению к нему маргинальными, т. е. выполнялось бы

$$E(\mathrm{d}x) = \int_v M(\mathrm{d}x, \mathrm{d}v), \qquad F(\mathrm{d}v) = \int_x M(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v).$$

Можно ли, основываясь на этом, утверждать, что квантовая теория принципиально исключает возможность совместного измерения координаты и скорости объекта? Последовательное проведение такой точки зрения привело бы к выводам, которые находятся в очевидном противоречии с опытом. Поясним это утверждение. Практически в эксперименте измеряется часто не сама скорость, а пропорциональная ей величина — импульс P. Физик, который рассматривает классическую механику как предел квантовой механики при $\hbar \to 0$, сталкивается с неприятным разрывом при $\hbar = 0$; для всех сколь угодно малых $\hbar \neq 0$, не существует совместного измерения для q, p, а при $\hbar = 0$ они оказываются совместно измеримыми. Более того, если классическая механика действительно является лишь аппроксимацией более фундаментальной квантовой теории, приходится сделать вывод о невозможности совместного измерения координаты и скорости и для макроскопических объектов.

В самом деле, рассмотрим «макроскопический объект», состоящий из большого числа N квантовых частиц, канонические наблюдаемые которых q_j, p_j удовлетворяют коммутационным соотношениям для N степеней свободы

$$[q_j, p_k] = \mathrm{i}\hbar\delta_{jk}, \qquad [q_j, q_k] = [p_j, p_k] = 0. \tag{III.6.1}$$

Тогда «макроскопические наблюдаемые» — координата центра масс $q = N^{-1}\sum q_j$ и полный импульс $p = \sum p_j$ удовлетворяют тому же коммутационному соотношению (III.3.11), что и «микроскопические наблюдаемые». Таким образом, соотношения (7.1), (7.2) имеют место и для любой макроскопической степени свободы. Поскольку $\hbar \neq 0$ (хотя оно и очень мало в макроскопическом масштабе, $\hbar \approx 10^{-27}$ g $cm^2\ s^{-1}$), следовало бы признать принципиальную невозможность совместного измерения макроскопических наблюдаемых q и p и в классической механике.

Очевидно, однако, что такой вывод противоречит экспериментальной практике классической физики, которая повсеместно имеет дело с совместными измерениями. Совместные измерения координат и импульсов встречаются и в экспериментах над микрообъектами; например, по траектории заряженной частицы в камере Вильсона определяются и координата, и импульс частицы. По существу, даже в тех случаях, когда измеряется только импульс, экспериментатор располагает и некоторой информацией о локализации «частицы» — например, что она находится в момент измерения в пределах экспериментальной установки. Включая эту информацию в результаты измерения, можно говорить, что здесь также производится некоторое совместное измерение импульса и координаты. Очевидно, однако, что во всех подобных случаях идет речь не о точном, а о каком-то «приближенном» измерении, результаты которого имеют некоторый случайный разброс. Поскольку подобные измерения являются обычными в физике, они должны иметь отражение в математическом формализме теории, претендующей на полное описание явлений микромира.

Вопрос о «приближенных» совместных измерениях координаты и скорости находит естественное решение в рамках новой концепции квантового измерения, развитой в гл. I-II. Согласно этой концепции, совместное измерение параметров координаты x и скорости v, как и измерение любой пары величин, описывается некоторым разложением единицы $M(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v)$ в $\mathscr{H}$, причем совместное распределение вероятностей измерения относительно состояния S дается формулой $\mu_S(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v) = \mathrm{Tr}\, SM(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v)$. Чтобы выделить из разложений единицы те, которые действительно могут соответствовать совместным измерениям координаты и скорости, мы привлечем соображения ковариантности, аналогичные тем, которые использовались в § 3 для выяснения кинематического смысла наблюдаемых Q и P.

Предположим, что состояние S приготовляется некоторой установкой, с которой связана исходная система отсчета. Если теперь такая же установка движется со скоростью v и находится в точке x относительно исходного положения, то приготовляемое ей состояние описывается оператором плотности

$$S_{x,v} = W_{x,v} S V^*_{x,v}.$$

Параметры x и v, таким образом, отражают информацию о состоянии микрообъекта, постольку, поскольку оно приготовлено установкой, положение которой характеризуется величинами x и v. Пусть разложение единицы $M(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v)$ описывает совместное измерение координаты и скорости; тогда естественно потребовать, чтобы распределение вероятностей измерения относительно «сдвинутого» состояния $S_{x,v}$, было сдвигом на вектор (x, v) исходного распределения, т. е.

$$\mu_{S_{x,v}}(B) = \mu_S(B_{-x,-v}); \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^2),$$

где $B_{-x,-v} = \{(\xi - x, \eta - v) : (\xi, \eta) \in B\}$ (Рис. 3).

Это должно выполняться для любого состояния S, откуда

$$W^*_{x,v} M(B) W_{x,v} = M(B_{-x,-v}); \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^2). \tag{III.6.2}$$

Измерения $M(dx\,\mathrm{d}v)$, удовлетворяющие этому условию, называются *ковариантными* по отношению к представлению $(x, v) \to W_{x,v}$ кинематической группы. Условие (III.6.2) аналогично условию (III.2.13) для однопараметрической группы сдвигов.

В гл. IV мы опишем все разложения единицы, удовлетворяющие условию (III.6.2); среди них не окажется ортогональных. Это является еще одним выражением того факта, что совместных измерений координаты и скорости в обычном смысле не существует. Приведем весьма общий пример разложения единицы, удовлетворяющего условию ковариантности (III.6.2):

$$M(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v) = W_{x,v}|\psi)(\psi|W^*_{x,v}\frac{\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v}{2\pi}, \tag{III.6.3}$$

где ψ единичный вектор $\mathscr{H}$ (μ – параметр массы). Это означает, что для любого борелевского множества B мы полагаем

$$(\varphi|M(B)\varphi) = \iint_B (\varphi|W_{x,v}\psi)(\psi|W_{x,v}\varphi)\frac{\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v}{2\pi}, \qquad \varphi\in\mathscr{H}.$$

Интеграл здесь понимается в смысле слабой сходимости; он сходится в силу квадратичной интегрируемости матричных элементов представления (предложение III.5.1). Это соотношение действительно задает измерение: $M(B)\geqslant 0$ в силу положительности подынтегральной функции, аддитивность вытекает из свойств определенного интеграла, а условие нормировки $M(\mathbb{R}^2) = I$ равносильно соотношению полноты (III.5.10). Ковариантность этого измерения (III.6.2) по отношению к представлению ККС является прямым следствием канонического коммутационного соотношения (III.3.2). Распределение вероятностей результатов измерения относительно состояния S имеет вид

$$\mu_S(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v) = (\psi|W^*_{x,v}SV_{x,v}\psi)\frac{\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v}{2\pi}. \tag{III.6.4}$$

Дадим идеализированное описание эксперимента, который можно рассматривать как реализацию измерения (III.6.3) в смысле § II.5. Кроме исходного пространства $\mathscr{H}$ и определенных на нем операторов Q, P, введем идентичное пространство $\mathscr{H}_0$ и операторы Q_0, P_0 в $\mathscr{H}_0$, удовлетворяюшие каноническому коммутационному соотношению. Рассмотрим тензорное произведение $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0$ и действующие в нем операторы

$$\widetilde{P} = P\otimes I_0 + I\otimes P_0, \qquad \widetilde{Q} = Q\otimes I_0 - I\otimes Q_0, \tag{III.6.5}$$

где I_0 — единичный оператор в $\mathscr{H}_0$. Эти операторы являются инфинитезимальными операторами унитарных групп

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\widetilde{Q}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Q}\otimes\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Q_0}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\widetilde{P}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta P}\otimes\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta P_0}, \tag{III.6.6}$$

которые коммутируют в силу ККС Вейля (III.3.4), и поэтому $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ — коммутирующие самосопряженные операторы в смысле § II.6. Следовательно, $\widetilde{Q}$ и $\mu^{-1}\widetilde{P}$ совместимы и допускают совместное измерение $E(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v)$.

Для определенности можно рассматривать представления Шредингера $Q=\xi_1$, $P=\mathrm{i}^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi_1$ в $\mathscr{H}=\mathscr{L}^2(\mathbb{R}_1)$, и $Q_0=\xi_2$, $P_0=\mathrm{i}^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi_2$ в $\mathscr{H}_0=\mathscr{L}^2(\mathbb{R}_2)$. Рассмотрим движение квантовой частицы в плоскости ξ_1, ξ_2. Тогда гильбертовым пространством частицы будет $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0=\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Введем новую систему координат ξ_1', ξ_2', повернутую относительно исходной на угол -$\pi/4$ (рис. 4), тогда канонические наблюдаемые, отвечающие новым координатным осям, суть

$$P'_{\xi_2'} = \mathrm{i}^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi_2'} = (\mathrm{i}\sqrt{2})^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}+\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right) = \sqrt{2}^{-1}(P_{\xi_1}+P_{\xi_2}),$$

$$Q_{\xi_1'} = \xi_1' = \sqrt{2}^{-1}(\xi_1-\xi_2) = \sqrt{2}^{-1}(Q_{\xi_1}-Q_{\xi_2}),$$

так что $\widetilde{P}=\sqrt{2}P_{\xi_2'}$, $\widetilde{Q}=\sqrt{2}Q_{\xi_1'}$. Наблюдаемые $P_{\xi_2'}$ and $Q_{\xi_1'}$ относятся к взаимно перпендикулярным направлениям и поэтому допускают совместное измерение.

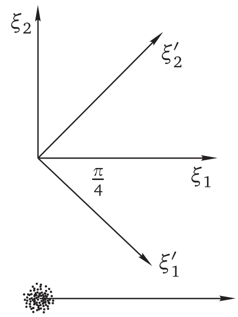

Рис. 4.

Пусть вспомогательная степень свободы ξ_2 описывается состоянием $S_0 = |\bar{\psi})(\bar{\psi}|$, где вектор $\bar{\psi}$ задается в представлении Шредингера функцией $\overline{\psi(\xi_2)} = (\xi_2|\bar{\psi})$, комплексно сопряженной к функции $\psi(\xi) = (\xi|\psi)$. Здесь ψ — вектор, определяющий ковариантное измерение по формуле (III.6.3).

Предложение III.6.1. *Тройка* $(\mathscr{H}_0, S_0, \mathbf{E})$, *где* $\mathbf{E}$ — *совместное спектральное разложение операторов* $\widetilde{Q}$ *и* $\mu^{-1}\widetilde{P}$, *образует реализацию измерения* (III.6.3) *в том смысле, что*

$$\mu^{\mathbf{E}}_{S\otimes S_0}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v) = \mu^{\mathbf{M}}_{S}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v)$$

для любого состояния S *в* $\mathscr{H}$.

Мы отложим доказательство до § V.3, где разработан необходимый математический аппарат. Теперь мы покажем, что описанное выше измерение является в некотором смысле наилучшим среди всех ковариантных измерений координаты — скорости. Мы ограничимся ковариантными измерениями вида (III.6.3) с конечными вторыми моментами и нулевыми средними относительно состояния S. Тогда, как в конце § 2, можно показать, что эти измерения являются несмещенными

$$E_x\{\mathbf{M}\} \equiv \iint \hat{x}\mu^{\mathbf{M}}_{S_{x,v}}(\mathrm{d}\hat{x}\,\mathrm{d}\hat{v}) = x_0 + x,$$
$$E_v\{\mathbf{M}\} \equiv \iint \hat{v}\mu^{\mathbf{M}}_{S_{x,v}}(\mathrm{d}\hat{x}\,\mathrm{d}\hat{v}) = v_0 + v.$$

Из ковариантности также следует, что маргинальные дисперсии

$$D_x\{\mathbf{M}\} \equiv \iint (\hat{x} - E_x\{\mathbf{M}\})^2 \mu_{S_{x,v}}(\mathrm{d}\hat{x}\,\mathrm{d}\hat{v}),$$
$$D_v\{\mathbf{M}\} \equiv \iint (\hat{v} - E_v\{\mathbf{M}\})^2 \mu_{S_{x,v}}(\mathrm{d}\hat{x}\,\mathrm{d}\hat{v})$$

не зависят от параметров x, v и равны своему значению для исходного состояния S.

В качестве меры точности совместного измерения параметров x и v возьмем взвешенную сумму маргинальных дисперсий

$$\mathscr{R}\{\mathbf{M}\} = g_x D_x\{\mathbf{M}\} + g_v D_v\{\mathbf{M}\}, \tag{III.6.7}$$

где g_x, g_v — положительные коэффициенты, определяющие взаимный вес дисперсий. Согласно предложению III.6.1

$$D_x\{\mathbf{M}\} = D_S(Q) + D_{S_0}(Q_0), \qquad D_v\{M\} = \mu^{-2}[D_S(P) + D_{S_0}(P_0)].$$

Учитывая соотношение неопределенностей (III.3.9) и неравенство $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, получаем, что

$$\begin{aligned} g_x D_{S_0}(Q_0) + g_v \mu^{-2} D_{S_0} &\geqslant 2\sqrt{g_x g_v \mu^{-2} D_{S_0}(Q_0) D_{S_0}(P_0)} \\ &\geqslant \mu^{-1}\sqrt{g_x g_v} \end{aligned}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$D_{S_0}(Q_0) = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{g_v}{g_x}}, \qquad D_{S_0}(P_0) = \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{gx}{gv}}, \tag{III.6.8}$$

т. е. S_0 — основное состояние $|0, 0; \sigma^2)(\sigma^2; 0, 0|$, где σ^2 равна $D_{S_0}(Q_0)$ из (III.6.8).

Отсюда следует, что

$$\min_{\mathbf{M}} \mathscr{R}\{\mathbf{M}\} = g_x D_S(Q) + g_v D_S(\mu^{-1}P) + \mu^{-1}\sqrt{g_x g_v}, \tag{III.6.9}$$

причем минимум достигается на единственном оптимальном ковариантном измерении

$$M_*(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v) = |\mu v, x; \sigma^2)(\sigma^2; x, \mu v|\frac{\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v}{2\pi}, \tag{III.6.10}$$

где $\sigma^2 = (2\mu)^{-1}\sqrt{g_x/g_v}$. Назовем его *каноническим измерением.* Здесь мы использовали соотношения (III.6.3) и (III.5.5). В § IV.8 мы обобщим (III.6.9) на все ковариантные измерения координаты-скорости с конечными вторыми моментами. Этот результат демонстрирует роль состояний минимальной неопределенности в проблеме совместных измерений координаты–скорости.

Чтобы рассмотреть классический предел $\hbar \to 0$, $m = \mathrm{const}$, $D_S(p) = \mathrm{const}$, положим $\mu = m/\hbar$, $p = \hbar P$. Оптимальное измерение соответствует совместимым наблюдаемым $q \otimes I_0 - I \otimes q_0$, $m^{-1}(p \otimes I_0 + I \otimes p_0)$, которые отличаются от q, $m^{-1}p$ слагаемыми -q_0, $m^{-1}p_0$, дисперсии которых, согласно (III.6.8), пропорциональны $\hbar$ и значит, стремятся к нулю. Согласно (III.6.9) наилучшая точность совместного измерения

$$\min_{\mathbf{M}} \mathscr{R}\{\mathbf{M}\} = g_x D_S(q) + g_v D_s(m^{-1}p) + \hbar m^{-1}\sqrt{g_x g_v}$$

стремится к классическому выражению $g_x D_S(q) + g_v D_S(m^{-1}p)$ для совместного измерения координаты и скорости. Таким образом, в классическом пределе оптимальное квантовое измерение переходит в классическое измерение наблюдаемых q и $m^{-1}p$, и нефизичная разрывность устраняется.

§ 7. Динамика квантовой частицы с одной степенью свободы

Цель настоящего параграфа состоит в том, чтобы показать, что принцип галилеевой относительности позволяет описать не только кинематику квантовой частицы, но и все возможные динамики, т. е. развитие состояния во времени. При таком подходе «принцип соответствия», устанавливающий связь между некоторыми классическими и квантовыми величинами, который часто рассматривается как эвристическое правило, оказывается логическим следствием галилеевой ковариантности двух теорий.

Чтобы охватить и временную эволюцию квантового состояния, необходимо рассмотреть полную галилееву группу преобразований системы отсчета

$$\xi' = \xi + x + v\tau, \qquad \tau' = \tau + t.$$

Каждое такое преобразование характеризуется тремя параметрами (x, v, t), причем закон композиции дается формулой

$$(x_1, v_1, t_1)(x_2, v_2, t_2) = (x_1 + x_2 + v_1 t_2, v_1 + v_2, t_1 + t_2).$$

Согласно общей схеме § 1, мы должны найти всевозможные неприводимые проективные унитарные представления $(x, v, t) \to W_{x,v,t}$ группы Галилея. Основываясь на обшей теории проективных представлений, можно показать, что за счет выбора несущественных числовых множителей соотношение (III.1.6) для группы Галилея всегда можно привести к виду

$$W_{x_1,v_1,t_1} W_{x_2,v_2,t_2} = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}\mu}{2}(x_1 v_2 - x_2 v_1 + t_2 v_1 v_2)\right] \times W_{x_1+x_2+v_1 t_2, v_1+v_2, t_1+t_2}. \tag{III.7.1}$$

где $\mu \neq 0$. Ограничение этой формулы на группу кинематических преобразований $(x, v, 0)$, как и следовало ожидать, совпадает с каноническим коммутационным соотношением (III.3.2) для операторов $W_{x,v} \equiv W_{-x,-v,0}$. Воспользуемся тем, что мы уже знаем описание представлений кинематической группы и исследуем связь между кинематикой и динамикой, т. е. семейством $\{W_{x,v}\}$ и однопараметрической унитарной группой временных сдвигов $\{V_t\} \equiv \{W_{0,0,t}\}$. Пользуясь формулой (III.7.1), получаем соотношение

$$V_t^* W_{x,v} V_t = W_{x-vt,v}.$$

Полагая здесь поочередно $x = 0$ и $v = 0$, получаем два основных соотношения:

$$V_t^* U_v V_t = W_{-vt,v}, \tag{III.7.2}$$

$$V_t^* V_x V_t = V_x. \tag{III.7.3}$$

Согласно теореме Стоуна, $V_t = \exp(-\mathrm{i}tH)$, где H — самосопряженный оператор, называемый *гамильтонианом.* Приведем аргументы, которые показывают, что соотношения (III.7.2) и (III.7.3) определяют вид H, именно, из соотношения (III.7.2) вытекает, что

$$H = \frac{P^2}{2\mu} + v(Q), \tag{III.7.4}$$

где $v(\cdot)$ — некоторая вещественная функция, а дополнительный учет (III.7.3) приводит к однозначно (с точностью до несущественной аддитивной постоянной) определенному гамильтониану

$$H = \frac{P^2}{2\mu}. \qquad \text{(III.7.5)}$$

Введем наблюдаемые, зависящие от времени

$$Q(t) = V_t^* Q V_t, \qquad P(t) = V_t^* P V_t.$$

Дифференцируя (III.7.2) по v и используя (III.4.3), (III.4.6) и (II.4.13), получаем

$$Q(t) = Q + t\mu^{-1} P. \qquad \text{(III.7.6)}$$

Аналогично, дифференцируя (III.7.3) по x и используя (III.4.2),

$$P(t) = P. \qquad \text{(III.7.7)}$$

Далее мы действуем отчасти формально, т. к. полные доказательства заняли бы слишком много места. Дифференцируя (III.7.6) по t, получаем

$$[H, Q] = \mu^{-1} P.$$

Это соотношение можно рассматривать как линейное неоднородное уравнение относительно H; его общее решение представляется в виде суммы частного решения H_0 и общего решения v однородного уравнения $[v, Q] = 0$. Поскольку представление неприводимо, общее решение последнего имеет вид $v = v(Q)$, в чем можно убедиться, переходя в представление Шредингера. Для доказательства того, что частное решение неоднородного уравнения имеет вид $H_0 = P^2/2\mu$, нам потребуются тождества

$$\mathrm{i}[f(Q), P] = -f'(Q), \qquad \mathrm{i}[Q, f(P)] = -f'(P). \qquad \text{(III.7.8)}$$

Первое следует из того, что в представлении Шредингера

$$[f(x)\mathrm{d}/\mathrm{d}x - \mathrm{d}/\mathrm{d}x f(x)]\psi(x) = -f'(x)\psi(x),$$

а второе получается аналогично в импульсном представлении. Полагая в нем $f(P) = P^2/2\mu$, получаем $\mathrm{i}[Q, P^2/2\mu] = -P/\mu$, что и требовалось. Таким образом, мы получили (III.7.4) из (III.7.2). Дифференцируя (III.7.7) по t, получаем $[H, P] = 0$, откуда, согласно (III.7.8), $v'(Q) = 0$ и получаем (III.7.5) с точностью до постоянной.

Таким образом, требование галилеевой относительности однозначно определяет вид гамильтониана свободной квантовой частицы; если рассматривается движение во внешнем потенциальном поле, не зависящем от времени, то условие пространственной однородности (III.7.3) следует опустить, и требование ограниченной галилеевой относительности (III.7.2) дает общий вид (III.7.4) гамильтониана во внешнем поле.

Установим теперь смысл константы μ и других членов, входящих в гамильтониан. Рассмотрим состояние S_ψ, для которого распределение вероятностей наблюдаемой координаты $|\psi(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi$ концентрируется вблизи среднего значения $E(Q)$. Высокая степень локализации в пространстве позволяет рассматривать квантовый объект в данном оостоянии S_ψ как «частицу» с координатой $E(Q)$. Снабжая математические ожидания, относящиеся к моменту t, соответствующим индексом, получаем из (III.7.6) путем усреднения и дифференцирования

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_t(Q) = E_t(\mu^{-1}P). \qquad \text{(III.7.9)}$$

Это означает, что скорость частицы равна $E_t(\mu^{-1}P)$, как и следует ожидать в силу кинематической интерпретации наблюдаемой $\mu^{-1}P$ (см. § 3). Так как объект проявляет себя как классическая частица, то может быть экспериментально измерена его «классическая масса» m; классический импульс, который определяется как произведение массы на скорость, равен $m(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)E_t(Q) = E_t(\hbar P)$, где $\hbar = m/\mu$. Таким образом, оператор $p = \hbar P$ в классическом пределе представляет наблюдаемую импульса. Дифференцируя последнее соотношение, получаем

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}E_t(Q) = \hbar E_t(\mathrm{i}[H, P]).$$

По формулам (III.7.8), (III.7.4) получаем $\mathrm{i}[H, P] = \mathrm{i}[v(Q), P] = -v'(Q)$, откуда, переобозначая $Q = q$, получаем

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}E_t(q) = -E_t(\hbar v'(q)).$$

Это есть уравнение Ньютона для рассматриваемого «почти классического» объекта с массой m и потенциальной энергией $V(q) = \hbar v(q)$. Полагая $E = \hbar H$, мы можем переписать (III.7.4) в виде

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

что соответствует классическому выражению, представляющему полную энергию частицы в виде суммы кинетической энергии $p^2/2m$ и потенциальной энергии $V(q)$. Таким образом, $E = \hbar H$ отвечает *наблюдаемой энергии*.

В квантовой механике основной интерес представляет временная эволюция наблюдаемых вероятностей или средних значений. Математическое ожидание $E_t(X)$, относящееся к моменту t, может быть записано в двух равносильных формах $E_S(X(t)) = E_{S_t}(X)$, где $X(t) = V_t^* X V_t$, а $S_t = V_t S V_t^*$. Описание, при котором состояния фиксированы, а наблюдаемые зависят от времени, как это обычно для классической механики, называется *картиной Гейзенберга*. Двойственное описание, соответствующее второму виду $E_t(X)$, называется *картиной Шредингера* и широко используется в квантовой механике.

Если исходное состояние чистое, $S = |\psi)(\psi|$, то $S_t = |\psi_t)(\psi_t|$, где $\psi_t = V_t\psi$, также чистое. Предполагая, что $\psi \in \mathscr{D}(H)$, имеем в силу (II.4.13)

$$\hbar\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\psi_t}{\mathrm{d}t} = E\psi_t; \qquad \psi_0 = \psi.$$

Это общее динамическое уравнение, определяющее эволюцию векторов состояний. Принимая во внимание (III.7.4), получаем в представлении Шредингера

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi_t(x)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi_t(x)}{\partial x^2} + \frac{V(x)}{\hbar}\psi_t(x). \qquad \text{(III.7.10)}$$

Отношение $\hbar = m/\mu$ существенным образом входит в это уравнение и, следовательно, может быть определено из экспериментов, в которых обнаруживаются неклассические (волновые) свойства данного квантового объекта. Величина $\hbar$ оказывается универсальной постоянной, пропорциональной постоянной Планка h, а именно $\hbar = h/2\pi$. Наличие такой универсальной постоянной показывает, что существует некоторая естественная единица массы; постоянная $\hbar$ есть коэффициент, связывающий единицу массы, принятую в классической физике, с этой естественной единицей. Если же условиться измерять массу в естественных единицах, то можно считать $\hbar = 1$, и мы часто будем пользоваться этим соглашением.

§ 8. Наблюдаемая времени. Соотношение неопределенностей «время–энергия»

Из теоремы единственности Стоуна-фон Неймана следует, что любая пара канонически сопряженных наблюдаемых в существенном эквивалентна паре в представлении Шредингера (III.4.4), (III.4.5). В частности, оба оператора с необходимостью неограничены сверху и снизу. Однако из уравнения (III.7.4) следует, что если потенциал $v(\cdot)$, как обычно, ограничен снизу, то и наблюдаемая энергии ограничена снизу. Поэтому она не может иметь канонически сопряженной наблюдаемой, представимой самосопряженным оператором. Как объясняется ниже, это означает несуществование самосопряженного оператора, представляющего наблюдаемую времени. Однако, временные измерения столь же обычны в экспериментальной практике, как и измерения координаты, импульса, энергии, и отсутствие их математического эквивалента означало бы серьезный дефект теории. Мы покажем здесь, что измерения времени находят естественное место в квантовой механике, если воспользоваться неортогональными разложениями единицы. Таким образом, упомянутая трудность не является органическим недостатком квантовой теории, а обусловлена узостью традиционной концепции наблюдаемой.

Рассмотрим семейство состояний

$$S_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} S \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{III.8.1}$$

соответствующих различным значениям параметра временной эволюции t. Параметр t задает обратный сдвиг времени в процедуре приготовления состояния. Опираясь на рассмотрение измерений координаты в § 3, рассмотрим условие ковариантности

$$V_t^* M(B) V_t = M(B_{-t}); \qquad t \in \mathbb{R}, \quad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}), \tag{III.8.2}$$

для измерения $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}t)\}$, где $V_t = \exp(-\mathrm{i}tH)$. Обозначая $\mu_t^{\mathbf{M}}$ его распределение вероятностей относительно состояния S_t, получаем

$$\mu_t^{\mathbf{M}}(B) = \mu_0^{\mathbf{M}}(B_{-t}); \qquad t \in \mathbb{R}, \quad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}).$$

Это условие означает, что перенос во времени процедуры приготовления отражается в соответствующем сдвиге распределения вероятностей измерения.

По этой причине измерение $\mathbf{M}$, удовлетворяющее (III.8.2), если таковое вообще существует, может ассоциироваться с измерением параметра времени t.

Если гамильтониан H ограничен снизу, то не существует простого измерения $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}t)\}$, удовлетворяющего условию (III.8.2), так как иначе (III.8.2) означало бы (III.2.13) для $A = -H$, $\mathbf{G} = \mathbf{M}$, и наблюдаемая -H имела бы канонически сопряженную наблюдаемую $B = \int tM(\mathrm{d}t)$. Это и означает несуществование самосопряженного оператора времени. Однако существуют неортогональные разложения единицы, удовлетворяющие условию ковариантности (III.8.2).

Соотношение (III.8.2) удобно рассматривать в «энергетическом» представлении, которое диагонализует оператор энергии E. Для определенности мы подробно рассмотрим случай свободной частицы в одном измерении. Так как энергия и импульс свободной частицы массы m связаны соотношением $E = p^2/2m$, в импульсном представлении оператор энергии будет задаваться умножением на $\epsilon = \eta^2/2m$. Имеем

$$\begin{aligned}(\tilde{\psi}|\tilde{\psi}) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2}}\left[\int_0^{\infty} |\tilde{\psi}(\sqrt{2m\epsilon})|^2 \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} + \int_0^{\infty} |\tilde{\psi}(-\sqrt{2m\epsilon})|^2 \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}\right] = \\ &= \int_0^{\infty} |\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}}|^2 \mathrm{d}\epsilon, \end{aligned} \tag{III.8.3}$$

где

$$\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \sqrt[4]{\frac{m}{2\epsilon}}\begin{bmatrix}\tilde{\psi}(\sqrt{2m\epsilon}) \\ \tilde{\psi}(-\sqrt{2m\epsilon})\end{bmatrix}, \tag{III.8.4}$$

а $|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}}|^2 = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}}^* \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ — квадрат евклидовой нормы двумерного вектора $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}} \in \mathbb{C}^2$. Формула (III.8.4) определяет изометрический переход от импульсного представления к *энергетическому представлению*, в котором гамильтониан задается умножением на переменную ϵ, а группа временных сдвигов $\{V_t\}$ — умножением на $\{\exp(-\mathrm{i}t\boldsymbol{\epsilon}/\hbar)\}$. Пространство энергетического представления есть, таким образом, пространство $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0,\infty)$ функций на $(0,\infty)$ со значениями в $\mathbb{K} = \mathbb{C}^2$ с интегрируемым квадратом нормы (III.8.3). Можно явно выписать представление ККС в $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0,\infty)$, но оно нам не понадобится.

Рассмотрим в пространстве $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0,\infty)$ оператор

$$T = \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}$$

с областью определения

$$\mathscr{D}(T) = \left\{\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\psi}_0 = 0, \int_0^{\infty} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}}\right|^2 \mathrm{d}\epsilon < \infty\right\}.$$

Как и оператор P_+ в $\mathscr{L}^2(0,\infty)$ (см. § II.4), он является максимальным симметричным. Неортогональная спектральная мера $\mathbf{M}(\mathrm{d}\tau)$ оператора T строится аналогично спектральной мере (II.4.18), так что

$$(\psi|M(\mathrm{d}\tau)\psi) = \left[\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}}^* \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\epsilon}'-\boldsymbol{\epsilon})\tau/\hbar} \mathrm{d}\epsilon\, \mathrm{d}\epsilon'\right] \frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi\hbar} \tag{III.8.5}$$

или, формально, в обозначениях Дирака

$$(\boldsymbol{\epsilon}|M(\mathrm{d}\tau)|\epsilon') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\epsilon}'-\boldsymbol{\epsilon})\tau/\hbar}\frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi\hbar}.$$

Отсюда непосредственно вытекает выполнение свойства ковариантности (III.8.2) для $M(\mathrm{d}\tau)$.

Пусть $\psi \in \mathscr{D}(T)$, тогда среднее и дисперсия наблюдаемой T в состоянии S_ψ равны, соответственно,

$$E_{S_\psi}(T) = \hbar\mathrm{i}\int_0^\infty \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}}^* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}}\mathrm{d}\epsilon,$$

$$D_{S_\psi}(T) = \hbar^2\int_0^\infty \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}}\right|^2\mathrm{d}\epsilon - E_{S_\psi}(T)^2,$$

и $\mathscr{D}(T) = \{\psi : D_{S_\psi}(T) < \infty\}$. Переходя по формуле (III.8.3) обратно к импульсному представлению, находим

$$E_{S_\psi}(T) = m\hbar\mathrm{i}\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sgn}\eta\frac{\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\eta)}{\sqrt{|\eta|}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\frac{\tilde{\psi}(\eta)}{\sqrt{|\eta|}}\mathrm{d}\eta,$$

$$D_{S_\psi}(T) = (m\hbar)^2\int_{-\infty}^\infty \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\frac{\tilde{\psi}(\eta)}{\sqrt{|\eta|}}\right|^2\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|} - E_{S_\psi}(T)^2.$$

Отсюда следует, что в импульсном представлении

$$T = m\hbar\mathrm{i}\operatorname{sgn}\eta\frac{1}{\sqrt{|\eta|}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\frac{1}{\sqrt{|\eta|}} = m\operatorname{sgn}p|p|^{-1/2}q|p|^{-1/2} = mp^{-1}\circ q,$$

$$\mathscr{D}(T) = \left\{\tilde{\psi}(\eta) : \int_{-\infty}^\infty\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\frac{\tilde{\psi}(\eta)}{\sqrt{|\eta|}}\right|^2\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|} < \infty\right\}.$$

Обращаясь к общему случаю, предположим, что гамильтониан задается оператором умножения на независимую переменную ϵ в пространстве $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0,\infty)$, где $\mathbb{K}$ — некоторое конечно- или бесконечномерное гильбертово пространство; таким образом, пространство представления состоит из $\mathbb{K}$-значных функций $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ на $(0,\infty)$, удовлетворяющих условию $\int_0^\infty|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}}|^2\mathrm{d}\epsilon < \infty$, где $|\cdot|$ — норма вектора в $\mathbb{K}$. Тогда оператор

$$T = \hbar\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon};$$

$$\mathscr{D}(T) = \left\{\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\psi}_0 = 0, \int_0^\infty|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}}|^2\mathrm{d}\epsilon < \infty\right\} \qquad \text{(III.8.6)}$$

является максимальным симметричным в $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0,\infty)$. Его спектральная мера, удовлетворяющая условию ковариантности (III.8.2), может быть построена аналогично (III.8.5). Назовем (III.8.6) *канонической наблюдаемой времени* в энергетическом представлении. Возможность дать выражение для T в импульсном или шредингеровском представлении зависит от возможности явной диагонализации оператора энергии. Например, для свободной частицы в трех измерениях получается $T = m\sum_{j=1}^{3} \frac{p_j}{|p|^2} \circ q_j$.

Обратимся к проблеме оценивания параметра временной эволюции t в семействе (III.8.1). Предположим, что нас интересует измерение некоторого выделенного момента в истории квантового объекта, который обладает тем свойством, что временной сдвиг процедуры приготовления исходного состояния приводит к аналогичному сдвигу этого момента. Типичным примером являются «моменты достижения» или «моменты прохождения» $\tilde{T}$, связанные с нашей наблюдаемой времени T соотношением $\tilde{T} = \mathrm{const} - T$. Тогда из неравенства (III.2.6) следует, что дисперсия любой несмещенной оценки X такого момента времени ограничена снизу величиной, обратно пропорциональной неопределенности энергии $D_t(E) \equiv D_S(E)$

$$D_t(X) \geqslant [4D_t(H)]^{-1} = \hbar^2[4D_t(E)]^{-1}. \tag{III.8.7}$$

Мы видели, что класс несмещенных оценок t непуст, поскольку содержит наблюдаемую $T - E_S(T)$. В самом деле, в силу § 2, оценка, соответствующая ковариантному измерению, является несмещенной с точностью до константы. Поэтому из (III.8.7) вытекает соотношение неопределенностей типа (III.3.10)

$$D_S(T) \cdot D_S(E) \geqslant \hbar^2/4.$$

Другим интересным примером несмещенной оценки параметра временной эволюции свободной частицы массы m является наблюдаемая $\widehat{T} = (m/\bar{p}) \cdot q$, где средний импульс $\bar{p} = E_S(p)$ предполагается отличным от нуля. Согласно (III.7.9)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_t(\widehat{T}) = \frac{m}{\bar{p}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_t(q) = \frac{1}{\bar{p}} E_t(p) = 1,$$

поскольку средний импульс свободной частицы сохраняется. Чтобы объяснить смысл этой оценки, предположим, что исходное состояние S является состоянием минимальной неопределенности и описывается в импульсном представлении функцией вида

$$\tilde{\psi}(\eta) = (2\pi\sigma_p^2)^{-1/4} \exp\left[-\frac{(\eta - \bar{p})^2}{4\sigma_p^2}\right]. \tag{III.8.8}$$

Тогда (III.8.1) описывает «волновой пакет, движущийся со скоростью $\bar{p}/m$». Очевидно, функция (III.8.8) не принадлежит области определения оператора времени T (поскольку, в частности, $\tilde{\psi}(0) \neq 0$) и поэтому $D_S(T) = \infty$. Однако отсюда не следует делать вывод, что «время прохождения волнового пакета» не может быть измерено с конечной дисперсией; можно использовать оценку $\widehat{T}$, что отвечает измерению t посредством измерения координаты волнового пакета и делению на известную скорость $\bar{p}/m$. Дисперсия этого измерения для волнового пакета (III.8.8) конечна, однако возрастает как $t^2\sigma_p^2/\bar{p}^2$ при $t \to \infty$, тогда как для ковариантного намерения дисперсия не зависела бы от t.

Наконец, покажем, что время и энергия, в модифицированной форме, являются «сопряженными величинами». Очевидно, на плотной области выполняется ККС типа Гейзенберга $[T, H] = \mathrm{i}\hbar I$. Более того, имеет место ККС типа

Вейля. Рассмотрим операторы энергетического сдвига $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0,\infty)$

$$P_e\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{cases} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\epsilon}-e}; & \epsilon \geqslant e, \\ 0; & \epsilon < e \end{cases}$$

(см. рис. 5). Очевидно $P_e^*P_e = I$, $P_eP_e^* \leqslant I$, $e \geqslant 0$. Семейство $\{P_e; e \geqslant 0\}$ образует полугруппу изометрических операторов в $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0,\infty)$. Используя (III.8.5), получаем

$$P_e = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\tau/\hbar} M(\mathrm{d}\tau),$$

где $M(\mathrm{d}\tau)$ спектральная мера оператора $T = \mathrm{i}\hbar\mathrm{d}/\mathrm{d}\epsilon$, и формально $P_e = \exp(\mathrm{i}eT/\hbar)$. Тот факт, что операторы P_e неунитарны, тесно связан с несамосопряженностью T. Из определения P_e получаем соотношения

$$\begin{aligned} &V_t^*P_eV_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}et/\hbar}P_e \\ &P_e^*V_tP_e = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}et/\hbar}V_t; \qquad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant e, \end{aligned} \tag{III.8.9}$$

формально аналогичные соотношениям Вейля (III.2.11).

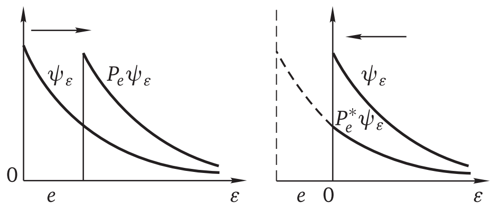

Рис. 5.

Как и с любой наблюдаемой, с наблюдаемой времени можно связать свое, *временное представление*, в котором оператор времени диагонален; подобно тому как импульсное представление является преобразованием Фурье представления Шредингера, временное представление определяется как преобразование Фурье энергетического представления:

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon t/\hbar}\psi_\epsilon \,\mathrm{d}\epsilon.$$

Гильбертово пространство, которое получается таким образом из $\mathscr{L}^2(0,\infty)$, называется классом Харди $\mathscr{H}^2$ для полуплоскости. В нем также имеется представление ККС для случая свободной частицы.

§ 9. Квантовый осциллятор и измерение фазы

Формальное выражение для гамильтониана дается соотношением (III.7.4); однако для того, чтобы это выражение определяло динамику, т. е. унитарную группу $V_t = \exp(-\mathrm{i}tH)$, $t \in \mathbb{R}$, оператор H должен быть существенно самосопряженным. Доказательство этого свойства для различных потенциалов $V(\cdot)$

является одной из основных математических задач квантовой механики. Другой важной задачей является спектральный анализ гамильтониана. Этим задачам посвящена обширная литература, указания на которую можно найти в комментариях. Поскольку их рассмотрение не входит в наши цели, мы ограничимся простейшим, но весьма важным и необходимым для дальнейшего примером квантового гармонического осциллятора.

Рассмотрим оператор энергии

$$E = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2), \tag{III.9.1}$$

В классической механике такое выражение для энергии соответствует осциллятору с массой m и частотой ω. Полагая $m = 1$ для упрощения, получаем формальный гамильтониан

$$H = \frac{1}{2\hbar}\left(-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + \omega^2\xi^2\right) \tag{III.9.2}$$

в представлении Шредингера. Поскольку H представляет собой сумму неограниченных операторов, возникает вопрос, определяет ли выражение (III.9.2) существенно самосопряженный оператор.

Прежде всего отметим, что выражение (III.9.2) определено на пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Это пространство инвариантно относительно операторов p, q и любых полиномов от p и q. Введем на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ операторы

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q + ip), \qquad a^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q - ip).$$

Заметим, что $(\varphi|a\psi) = (a^*\varphi|\psi)$ для φ, $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, что оправдывает обозначение a^* для второго оператора (хотя, если считать областью определения оператора a пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, то область определения a^* будет шире $\mathscr{S}(\mathbb{R})$). В дальнейшем мы построим расширения операторов a и a^*, так что a^* в точности будет сопряженным к a.

Операторы a и a^* удовлетворяют на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ коммутационному соотношению

$$[a, a^*] = I. \tag{III.9.3}$$

Оператор энергии принимает вид

$$E = \hbar\omega(a^*a + \tfrac{1}{2}). \tag{III.9.4}$$

Теперь, следуя Дираку, определим собственные числа и собственные векторы оператора

$$N = a^*a \tag{III.9.5}$$

и построим самосопряженные расширения N и E.

Рассмотрим вектор *основного состояния* осциллятора $|0) \equiv |0, 0; \hbar/2\omega)$, который согласно (III.5.4) представляется функцией

$$(\xi|0) = \left(\frac{\pi\hbar}{\omega}\right)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\omega\xi^2}{2\hbar}\right)$$

в представлении Шредингера. Из (III.5.2) вытекает, что $(\omega q + \mathrm{i}p)|0) = 0$ откуда

$$a|0) = 0, \qquad N|0) = 0,$$

так что $|0)$ является собственным вектором оператора N , отвечающим нулевому собственному значению.

Определим

$$|n) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^*)^n|0); \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{III.9.6}$$

Тогда, согласно (III.9.3)

$$a|n) = \sqrt{n}|n-1), \qquad a^*|n) = \sqrt{n+1}|n+1). \tag{III.9.7}$$

Отсюда следует, что

$$N|n) = n|n); \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

так что $|n)$ является собственным вектором оператора N, отвечающим собственному значению n.

В представлении Шредингера

$$\begin{aligned}(\xi|n) &= \frac{1}{\sqrt{\eta!}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\right]^n \left(\omega\xi - \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^n \left(\frac{\pi\hbar}{\omega}\right)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\omega\xi^2}{2\hbar}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}\frac{1}{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}\xi\right) \exp\left(-\frac{\omega\xi^2}{2\hbar}\right),\end{aligned} \tag{III.9.8}$$

где $H_n(\cdot)$ — многочлены Эрмита. Известно, что функции (III.9.8) образуют полную ортонормированную систему в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, так что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n)(n| = I. \tag{III.9.9}$$

Поэтому всякий вектор ψ может быть представлен как

$$|\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} |n)(n|\psi),$$

где $(n|\psi)$; $n = 0, 1, \ldots$, квадратично-суммируемая последовательность комплексных коэффициентов. Поэтому состояния и наблюдаемые могут быть представлены бесконечными матрицами, действующими в пространстве l^2. В частности, ККС (III.3.2) может быть записано в матричном виде. Это представление называется представлением Фока. Изометрический переход между этим представлением и представлением Шредингера задается формулами

$$(n|\psi) = \int (n|\xi)(\xi|\psi)\mathrm{d}\xi, \qquad (\xi|\psi) = \sum_n (\xi|n)(n|\psi),$$

где ядро $(\xi|n) = \overline{(n|\xi)}$ определяется соотношением (III.9.7).

Самосопряженное расширение оператора N дается соотношением

$$\mathscr{D}(N) = \left\{ \psi : \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |(n|\psi)|^2 < \infty \right\},$$

$$N|\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} n|n)(n|\psi); \qquad \psi \in \mathscr{D}(N),$$

как следует из спектральной теоремы II.4.1. Можно показать, что это единственное самосопряженное расширение оператора (III.9.5) с подпространства $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Полагая

$$\mathscr{D}(a) = \mathscr{D}(a^*) = \left\{ \psi : \sum_{n=0}^{\infty} n |(\psi|n)|^2 < \infty \right\},$$

имеем $(a)^* = a^*$, $(a^*)^* = a$ и $N = a^*a$.

Согласно (III.9.4), мы получаем самосопряженное расширение оператора энергии E. Очевидно, система $|n)$; $n = 0, 1, \ldots$ образует базис из собственных векторов E,

$$E|n) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n); \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Эта формула показывает, что энергия квантового осциллятора может принимать дискретный ряд значений $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$; $n = 0, 1, \ldots$ В физике принято называть n числом квантов, так что вектор $|n)$ описывает «состояние с n квантами». Оператор N представляет наблюдаемую *числа квантов*. Поскольку согласно (III.9.6) a уменьшает число квантов на единицу, он называется *оператором уничтожения* (кванта). По той же причине, a^* называется *оператором рождения*.

Поскольку гамильтониан $H = \hbar^{-1} E$ в представлении Фока диагонален, динамика квантового осциллятора в этом представления описывается особенно просто. Имеем

$$V_t|\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(n+1/2)t} |n)(n|\psi). \tag{III.9.10}$$

Чистые состояния, отвечающие векторам $|n)$, являются стационарными, так как зависимость от t входит в них лишь через несущественный фазовый множитель.

В картине Гейзенберга квантовая динамика принимает вид, аналогичный уравнениям для комплексных амплитуд классического осциллятора. Вводя зависящие от времени операторы

$$a(t) = V_t^* a V_t, \qquad a(t)^* = V_t^* a^* V_t,$$

получаем, используя (III.9.6) и (III.9.9)

$$a(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} a, \qquad a(t)^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} a^*. \tag{III.9.11}$$

Выражая p, q через a, a^* по формулам

$$p = \sqrt{2\hbar\omega} \frac{a - a^*}{2\mathrm{i}}, \qquad q = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \frac{a + a^*}{2}, \tag{III.9.12}$$

получаем для $p(t) = V_t^* p V_t$, $q(t) = V_t^* q V_t$

$$p(t) = p\cos\omega t - \omega q \sin\omega t, \qquad q(t) = q\cos\omega t + p\omega^{-1}\sin\omega t; \tag{III.9.13}$$

эти соотношения формально аналогичны уравнениям движения классического гармонического осциллятора.

Динамика осциллятора периодична в том смысле, что $V_{t+2\pi/\omega} = V_t$ для всех t, как видно из (III.9.10). Поэтому преобразование (III.8.1) состояния S, отвечающее временному сдвигу t, равносильно преобразованию

$$S_\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta N} S \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta N}, \tag{III.9.14}$$

где $\theta = (-\omega t)(\mathrm{mod} 2\pi)$ пробегает интервал $[0, 2\pi)$. Поскольку собственные значения оператора N целые числа, то $\exp(\mathrm{i}\theta N) = \exp\mathrm{i}(\theta + 2\pi k)N$, так что $\theta \to V_\theta = \exp(\mathrm{i}\theta N)$ является унитарным представлением аддитивной группы $[0, 2\pi)$ по модулю 2π. Это группа $\mathbb{T}$ вращений единичного круга. Будем называть θ в (III.9.14) *параметром фазы*.

Чтобы выяснить, какие измерения должны ассоциироваться с параметром фазы, рассмотрим условие ковариантности

$$V_\theta^* M(B) V_\theta = M(B_{-\theta}); \qquad \theta \in [0, 2\pi),$$

где $V_\theta = \exp(\mathrm{i}\theta N)$, а $B_{-\theta}$ — сдвиг по $\mathrm{mod} 2\pi$ множества $B \subset [0, 2\pi)$. Разложение единицы, удовлетворяющее этому условию, определяется символическими матричными элементами в представлении Фока

$$(n|M(\mathrm{d}\theta)|n') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-n')\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}. \tag{III.9.15}$$

В гл. IV будет показано, что это измерение выделяется из всех ковариантных измерений параметра фазы свойством оптимальности. Назовем (III.9.15) *каноническим измерением фазы* в представлении Фока.

Мы также покажем, что не существует простого ковариантного измерения параметра θ. Таким образом, не существует наблюдаемой фазы в обычном смысле. Чтобы доказать неортогональность разложения единицы (III.9.15), рассмотрим операторы

$$P = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} M(\mathrm{d}\theta), \qquad P^* = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} M(\mathrm{d}\theta). \tag{III.9.16}$$

Из (III.9.15), принимая во внимание

$$(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} \exp\mathrm{i}(n-n')\theta\,\mathrm{d}\theta = \delta_{nn'},$$

можно получить матричное представление

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} |n-1)(n|, \qquad P^* = \sum_{n=1}^{\infty} |n)(n-1|. \tag{III.9.17}$$

Отсюда следует, что

$$PP^* = I, \qquad P^*P = I - |0)(0|,$$

так что P^* изометричен, но не унитарен, как должно было бы быть, если бы (III.9.15) было ортогональным разложением единицы.

Из (III.9.7) и (III.9.17) получаем соотношения[4]

$$a = P|a|, \qquad a^* = |a|P^*,$$

где $|a| = \sqrt{a^*a} = \sqrt{N}$, которые являются некоммутативным аналогом определения фазы классического осциллятора: $a = |a| \exp \mathrm{i}\theta$. Также из (III.9.17) следуют соотношения между унитарной группой $\{V_\theta; 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$ и дискретной полугруппой изометрических операторов $\{(P^*)^n; n = 0, 1, \ldots\}$

$$\begin{gathered} V_\theta^*(P^{*n})^n V_\theta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}(P^*)^n; \qquad P^n V_\theta (P^*)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} V_\theta; \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi, \qquad n = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{III.9.18}$$

которые аналогичны соотношениям (III.8.9) для времени и энергии. Таким образом, имеет место обобщенная форма канонической сопряженности между фазой и числом квантов.

Как и с наблюдаемой времени, с наблюдаемой фазы можно связать свое, *фазовое представление*; оно состоит из функций вида

$$\psi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}(n|\psi); \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Полученное таким образом из l^2 гильбертово пространство называется классом Харди $\mathscr{H}^2$ для единичного круга. Оператор P^* действует как умножение на $\exp(-\mathrm{i}\theta)$ в этом пространстве.

§ 10. Представление по когерентным состояниям

Важную роль в изучении квантового осциллятора и связанных с ним вопросов играют состояния минимальной неопределенности, которые могут быть параметризованы введением комплексных переменных $\zeta = (2\hbar\omega)^{-12}(\omega\overline{Q} + i\hbar\overline{P})$. Полагая $W_\zeta = W_{\overline{Q},\hbar\overline{P}}$ и принимая во внимание, что $\hbar = \mu^{-1}$ поскольку $m = 1$, перепишем ККС (III.3.2) в виде

$$W_{\zeta_1} W_{\zeta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\zeta_1\bar{\zeta}_2} W_{\zeta_1+\zeta_2}. \tag{III.10.1}$$

Тогда, обозначая $|\zeta) = |\overline{P}, \overline{Q}; \hbar/2\omega)$, мы можем переписать (III.5.5) как

$$|\zeta) = W_\zeta|0), \tag{III.10.2}$$

где $|0)$–вектор основного состояния. Состояния $|\zeta)(\zeta|$ называются *когерентными состояниями* квантового осциллятора (это название происходит из квантовой оптики, где такие состояния играют большую роль).

Переписывая уравнение (III.5.2) в комплексной форме, получаем

$$a|\zeta) = \zeta|\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{C}, \tag{III.10.3}$$

[4]Эти формулы дают так называемое полярное разложение операторов рождения-уничтожения.

так что векторы $\{|\zeta)\}$ являются собственными векторами оператора уничтожения a. Однако, в отличие от собственных векторов любого самосопряженного оператора, они неортогональны; из (III.10.2) и (III.10.1) можно получить

$$(\zeta_1|\zeta_2) = \exp[-\tfrac{1}{2}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 - 2\bar{\zeta}_1\zeta_2)]. \qquad \text{(III.10.4)}$$

Соотношение полноты (III.5.6) принимает вид

$$\int_{\mathbb{C}} |\zeta)(\zeta| \frac{\mathrm{d}^2\zeta}{2\pi} = I, \qquad \text{(III.10.5)}$$

где $\mathrm{d}^2\zeta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\overline{P}\,\mathrm{d}\overline{Q}$. Применяя это разложение к вектору $\psi \in \mathscr{H}$, получаем

$$|\psi) = \int_{\mathbb{C}} |\zeta)(\zeta|\psi) \frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}.$$

Эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между векторами ψ из гильбертова пространства неприводимого представления ККС и функциями комплексного переменного $\psi(\zeta) = (\zeta|\psi)$. Поскольку согласно (III.10.5)

$$(\psi|\varphi) = \int_{\mathbb{C}} (\psi|\zeta)(\zeta|\varphi) \frac{\mathrm{d}^2\zeta}{2\pi},$$

пространство $\mathscr{H}$ изометрично отображается в пространство $\mathscr{L}^2(\mathbb{C})$ квадратично интегрируемых функций комплексного переменного ζ. Опишем образ пространства $\mathscr{H}$ в $\mathscr{L}^2(\mathbb{C})$ при этом отображении.

Полагая $\zeta_2 = 0$ в (III.10.4), получаем, что вектор основного состояния $|0)$ отображается в функцию $(\zeta|0) = \exp(-|\zeta|^2/2)$. Следовательно, согласно (III.10.3), функции, представляющие векторы состояний (III.9.5) с n квантами имеют вид

$$(\zeta|n) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\zeta|(a^*)^n|0) = \frac{\bar{\zeta}^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-|\zeta|^2/2}; \qquad n = 0, 1, \ldots \qquad \text{(III.10.6)}$$

Поскольку $\psi \in \mathscr{H}$ однозначно представляется в виде

$$|\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = (\psi|\psi) < \infty,$$

то $\psi(\zeta) = (\zeta|\psi)$ имеет вид

$$\psi(\zeta) = \overline{f(\zeta)}\exp(-|\zeta|^2/2), \qquad \text{(III.10.7)}$$

где $f(\zeta) = \sum \bar{c}_n\zeta^n/\sqrt{n!}$ — голоморфная функция $\zeta \in \mathbb{C}$. Кроме того,

$$\int |f(\zeta)|^2 \exp(-|\zeta|^2)\mathrm{d}^2\zeta < \infty.$$

Таким образом, искомое пространство есть гильбертово пространство $\mathscr{E}^2(\mathbb{C})$ комплексно-значных функций вида (III.10.7). Скалярное произведение дается формулой

$$(\psi_1|\psi_2) = \int_C \overline{\psi_1(\zeta)}\psi_2(\zeta)\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi} = \int_{\mathbb{C}} \overline{f_1(\zeta)}f_2(\zeta)\mathrm{e}^{-|\zeta|^2}\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}. \qquad \text{(III.10.8)}$$

Всякий ограниченный оператор X в $\mathscr{E}^2(\mathbb{C})$ является интегральным оператором с ядром $(\zeta_1|X|\zeta_2)$, поскольку согласно (III.10.5)

$$(\zeta_1|X\psi) = \int_{\mathbb{C}} (\zeta_1|X|\zeta_2)(\zeta_2|\psi)\frac{\mathrm{d}^2\zeta_2}{\pi}.$$

В частности, для оператора W_ζ получаем ядро

$$(\zeta_1|W_\zeta|\zeta_2) = \exp[-\tfrac{1}{2}(|\zeta_1|^2 + |\zeta|^2 + |\zeta_2|^2) + \bar{\zeta}_1\zeta_2 + \bar{\zeta}_1\zeta - \bar{\zeta}\zeta_2],$$

из (III.10.1) и (III.10.4). Это определяет представление ККС в $\mathscr{E}^2(\mathbb{C})$, которое называется *представлением по когерентным состояниям.*

Изометрический переход от этого представления к представлению Фока дается ядром (III.10.6); к представлению Шредингера — ядром

$$(\xi|\zeta) = (\pi\hbar/\omega)^{-1/4}\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\xi - \zeta\right)^2 \Big/ 2 - |\zeta|^2/2\right],$$

которое получается из формулы (III.5.3).

Оператор рождения a^* задается в этом представлении умножением на $\bar{\zeta}$, так как $(\zeta|a^*\psi) = \bar{\zeta}(\zeta|\psi)$. Оператор уничтожения a имеет вид $\partial/\partial\bar{\zeta} + \frac{1}{2}\zeta$.

Покажем, что неортогональное разложение единицы

$$M(\mathrm{d}^2\zeta) = |\zeta)(\zeta|\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}$$

в определенном смысле является спектральной мерой оператора a^*. Применяя формально к (III.10.5) операторы a^* и a, получаем

$$a^* = \int_{\mathbb{C}} \bar{\zeta}M(\mathrm{d}^2\zeta), \qquad a = \int_{\mathbb{C}} \zeta M(\mathrm{d}^2\zeta).$$

Этим соотношениям легко придать точный смысл. Заметим, что для $\psi \in \mathscr{D}(a^*)$

$$\|a^*\psi\|^2 = \int |\zeta|^2|(\psi|\zeta)|^2\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}.$$

В самом деле, согласно (III.10.8) и (III.10.3)

$$\|a^*\psi\|^2 = \int |(a^*\psi|\zeta)|^2\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi} = \int |\zeta|^2|(\psi|\zeta)\,{}^2\frac{\mathrm{d}^2}{\pi}\zeta.$$

Таким образом,

$$\mathscr{D}(a^*) = \left\{\psi : \int |\zeta|^2|(\psi|\zeta)|^2\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi} < \infty\right\}.$$

Для $\psi \in \mathscr{D}(a^*)$ сходится интеграл $\int |\zeta|^2(\psi|M(\mathrm{d}^2\zeta)\psi)$, а следовательно, и интегралы $(\varphi|a^*\psi) = \int \bar{\zeta}(\varphi|M(\mathrm{d}^2\zeta)\psi)$, $(\varphi|a\psi) = \int \zeta(\varphi|M(\mathrm{d}^2\zeta)\psi)$. Резюмируя, можно сказать, что оператор a^* и разложение единицы $M(\mathrm{d}^2\zeta)$ связаны соотношениями

$$\mathscr{D}(a^*) = \left\{\psi : \int |\zeta|^2(\psi|M(\mathrm{d}^2\zeta)\psi) < \infty\right\};$$
$$\|a^*\psi\|^2 = \int |\zeta|^2(\psi|M(\mathrm{d}^2\zeta)\psi), \qquad \psi \in \mathscr{D}(a^*);$$
$$(\varphi|a^*\psi) = \int \bar{\zeta}(\varphi|M(\mathrm{d}^2\zeta)\psi), \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{D}(a^*), \tag{III.10.9}$$

подобными тем, которые связывают максимальный симметричный оператор и его спектральную меру (§ II.4).

Применяя к равенству (III.10.5) слева оператор a^m, а справа — оператор $(a^*)^n$, получаем

$$a^m(a^*)^n = \int_{\mathbb{C}} \zeta^m\bar{\zeta}^n M(\mathrm{d}^2\zeta).$$

Важно заметить, что порядок операторов a и a^* в левой части играет существенную роль, так как они не коммутируют! Такой порядок, при котором все операторы a^* следуют за a, называется *нормальным.* Из этого соотношения можно получить формулы типа

$$F(a, a^*) = \int F(\zeta, \bar{\zeta})M(\mathrm{d}^2\zeta),$$

для функций $F(\zeta, \bar{\zeta})$, разлагающихся в достаточно быстро сходящийся степенной ряд по a и a^*, причем под $F(a, a^*)$ понимается нормально упорядоченное выражение.

Далеко не всякий оператор в гильбертовом пространстве обладает спектральным разложением типа (III.10.9). Выясним, благодаря какому свойству оператора a^* такое разложение оказывается возможным. Для этого необходимо напомнить понятие нормального оператора. Ограниченный оператор X в $\mathscr{H}$ называется *нормальным*, если $[X, X^*] = 0$; это равносильно тому, что $\|X\psi\| = \|X^*\psi\|$, $\psi \in \mathscr{H}$. Плотно определенный (неограниченный) оператор X нормален, если $\mathscr{D}(X) = \mathscr{D}(X^*)$ и $\|X\psi\| = \|X^*\psi\|$, $\psi \in \mathscr{D}(X)$. Для нормального оператора X существует единственное ортогональное разложение единицы $E(\mathrm{d}^2\zeta)$ на $\mathbb{C}$ такое, что

$$\mathscr{D}(X) = \left\{\psi : \int |\zeta|^2(\psi|E(\mathrm{d}^2\zeta)\psi) < \infty\right\};$$
$$\|X\psi\|^2 = \int |\zeta|^2(\psi|E(\mathrm{d}^2\zeta)\psi); \qquad \psi \in \mathscr{D}(X);$$
$$(\varphi|X\psi) = \int \zeta(\varphi|E(\mathrm{d}^2\zeta)\psi); \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{D}(X).$$

Таким образом, нормальные операторы, как и самосопряженные, диагонализуемы, но могут иметь комплексный спектр.

Плотно определенный оператор Y в $\mathscr{H}$ назовем *субнормальным*, если он расширяется до нормального оператора X в некотором гильбертовом пространстве $\tilde{\mathscr{H}} \supset \mathscr{H}$, т. е. $Y\psi = X\psi$, $\psi \in \mathscr{D}(Y) \subset \mathscr{D}(X)$. Оператор Y субнормален тогда и только тогда, когда существует разложение единицы $M(\mathrm{d}^2\zeta)$ такое, что

$$\mathscr{D}(Y) \subseteq \left\{\psi : \int |\zeta|^2(\psi|M(\mathrm{d}^2\zeta)\psi) < \infty\right\};$$
$$\|Y\psi\|^2 = \int |\zeta|^2(\psi|M(\mathrm{d}^2\zeta)\psi); \qquad \psi \in \mathscr{D}(Y);$$
$$(\varphi|Y\psi) = \int \zeta(\varphi|M(\mathrm{d}^2\zeta)\psi); \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{D}(Y). \tag{III.10.10}$$

В самом деле, если X — нормальное расширение оператора Y со спектральной мерой $E(\mathrm{d}^2\xi)$, то разложение единицы

$$M(\mathrm{d}^2\zeta) = \widetilde{E}E(\mathrm{d}^2\zeta)\widetilde{E},$$

где $\widetilde{E}$ — проектор из $\widetilde{\mathscr{H}}$ на $\mathscr{H}$, удовлетворяет соотношениям (III.10.10). Обратно, пусть существует разложение единицы $M(\mathrm{d}^2\zeta)$, удовлетворяющее условиям (III.10.10). Пусть $E(\mathrm{d}^2\zeta)$ — построенное по теореме Наймарка (см. § II.5) ортогональное разложение единицы в расширенном пространстве $\widetilde{\mathscr{H}}$. Тогда оператор $X = \int \zeta E(\mathrm{d}^2\zeta)$ с соответствующей областью определения будет нормальным оператором, причем

$$\|X\psi\|^2 = \int |\zeta|^2(\psi|E(\mathrm{d}^2\zeta)\psi) = \int |\zeta|^2(\psi|M(\mathrm{d}^2\zeta)\psi) = \|Y\psi\|^2$$

для $\psi \in \mathscr{D}(Y)$. Из последнего соотношения в (III.10.10) вытекает, что $\widetilde{E}X\psi = Y\psi$, $\psi \in \mathscr{D}(Y)$. Поэтому из второго соотношения вытекает $\|X\psi\|^2 = \|Y\psi\|^2 = \|\widetilde{E}X\psi\|^2$, откуда $X\psi = \widetilde{E}X\psi = Y\psi$, $\psi \in \mathscr{D}(Y)$. Таким образом, X является расширением оператора Y.

Всякий плотно определенный симметричный оператор субнормален, поскольку по теореме II.4.3 он допускает спектральное разложение (III.10.10) с $M(\mathrm{d}^2\zeta)$, сосредоточенной на $\mathbb{R}$. В частности, оператор (III.8.6) в $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0,\infty)$, представляющий наблюдаемую времени, субнормален; его нормальным расширением является самосопряженный оператор $\hbar\mathrm{i}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\epsilon$ в $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$.

Примером ограниченного субнормального оператора является оператор P^*, задаваемый соотношением (III.9.17). Его нормальным расширением является унитарный оператор $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n)(n-1|$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathscr{H}}$, порожденном ортонормированным базисом $\{|n);\ n = 0,\ \pm1, \ldots\}$, который состоит из базиса в пространстве Фока $\mathscr{H}$, отвечающего неотрицательным n и дополнительными ортонормированными векторами, отвечающими отрицательным значениям n.

Поскольку соотношение (III.10.9) является соотношением (III.10.10) для оператора рождения a^*, то a^* субнормален. Построим его нормальное расширение. Для этого рассмотрим коммутирующее расширение (III.6.5) пары операторов Q, P. В терминах операторов a, a^* оно запишется в виде

$$\tilde{a} = a \otimes I_0 + I \otimes a_0^*, \qquad \tilde{a}^* = a^* \otimes I_0 + I \otimes a_0,$$

где $\tilde{a}$, $\tilde{a}^*$ нормальны. Пусть $|0)_{00}(0|$ — оператор плотности основного состояния в $\mathscr{H}_0$. Отождествим $\mathscr{H}$ с подпространством пространства $\widetilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H} \otimes \widetilde{\mathscr{H}}_0$, состоящим из векторов вида $|\psi) \otimes |0)_0$, $\psi \in \mathscr{H}$. Тогда $\mathscr{H} \subseteq \tilde{\mathscr{H}}$, и оператор $\tilde{a}^*$ является нормальным расширением a^*, так как

$$\tilde{a}^*[|\psi) \otimes |0)_0] = a^*|\psi) \otimes |0)_0 + |\psi) \otimes a_0|0)_0 = a^*|\psi).$$

Мы видели, что различным квантовым физическим величинам, в том числе и таким, которые не задаются самосопряженными операторами, отвечают представления, в которых эта величина имеет особенно простой «диагональный» вид. Согласно теореме Стоуна—фон Неймана, все эти представления унитарно эквивалентны; переходы между различными представлениями описываются соответствующими ядрами. В силу этого выбор представления в конечном счете играет вторичную роль; все, что можно получить в одном представлении, переводится на язык другого и в принципе может быть получено чисто алгебраически из канонического коммутационного соотношения (III.10.2). Однако правильный выбор представления, адекватного конкретной задаче, часто позволяет упростить выкладки и получить результат кратчайшим и наиболее естественным путем.

§ 11. Представления группы вращений и угловые моменты

В случае трехмерного координатного пространства роль фундаментальной группы симметрии играет полная галилеева группа преобразований (III.1.1) и речь идет об описании всех неприводимых представлений этой группы. Мы ограничимся здесь кинематическими аспектами квантовой частицы в трех измерениях и рассмотрим преобразования

$$\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{R}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x} + v\tau. \tag{III.11.1}$$

Параметрами этой группы являются вектор переноса $\mathbf{x}$, относительная скорость $\mathbf{v}$ и матрица вращения $\mathbf{R}$, и задача заключается в описании всех неприводимых представлений $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{R}) \to W_{\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{R}}$ этой группы. Существенно новым элементом по сравнению с одномерным случаем являются вращения, так что мы положим $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{v} = 0$ и рассмотрим представления $\mathbf{R} \to W_{\mathbf{R}}$ группы вращений.

По теореме Эйлера, всякое вращение $\mathbf{R}$ является вращением $\mathbf{R}_{\mathbf{n},\varphi}$ вокруг оси $\mathbf{n}$ на угол φ. Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении оси. Для фиксированного $\mathbf{n}$ семейство $\{\mathbf{R}_{\mathbf{n},\varphi}\}$ образует однопараметрическую группу, а операторы $V_\varphi = W_{\mathbf{R}_{\mathbf{n},\varphi}}$ — унитарное представление этой группы. По теореме Стоуна

$$V_\varphi = \exp(-\mathrm{i}\varphi L_n),$$

где L_n — самосопряженный оператор. Пусть $\{\mathbf{e}_j\}$ декартова система координат, так что $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_2\mathbf{e}_3$, где $\sum n_j^2 = 1$. Для малых φ матрица вращения $\mathbf{R}_{\mathbf{n},\varphi}$ приближенно равна

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n},\varphi} \approx \mathbf{I} - \varphi \sum_j n_j \mathbf{D}_j, \tag{III.11.2}$$

где

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{D}_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{D}_2=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{D}_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

в системе $\{\mathbf{e}_j\}$. Матрицы $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2]=-\mathbf{D}_3,\qquad [\mathbf{D}_2,\mathbf{D}_3]=-\mathbf{D}_1,\qquad [\mathbf{D}_3,\mathbf{D}_1]=-\mathbf{D}_2 \tag{III.11.3}$$

образуют *алгебру Ли группы вращений.* Пусть $L_j\equiv L_{\mathbf{e}_j}$ — инфинитезимальный оператор однопараметрической группы вращений вокруг координатной оси $\mathbf{e}_j$; $j=1,2,3$. Из общей теории представлений следует, что операторы $\mathrm{i}L_j$; $j=1,2,3$ образуют представление алгебры Ли, т. е.

$$[L_1,L_2]=\mathrm{i}L_3,\qquad [L_2,L_3]=\mathrm{i}L_1,\qquad [L_3,L_1]=\mathrm{i}L_2. \tag{III.11.4}$$

Кроме того

$$L_n=\sum_{j=1}^{3}n_jL_j, \tag{III.11.5}$$

так что

$$W_{\mathbf{R}_{\mathbf{n},\varphi}}=\exp\left[-\mathrm{i}\sum_{j=1}^{3}\varphi_jL_j\right], \tag{III.11.6}$$

где $\varphi_j=\varphi n_j$; $j=1,2,3$.

Обычная процедура построения представлений группы начинается с нахождения представлений алгебры Ли, т. е. конкретных операторов L_j; $j=1,2,3$, удовлетворяющих (III.11.4), что является более простой задачей. Затем по формуле (III.11.6) строятся представления группы. Таким образом было найдено, что для любой конечной размерности $d\geqslant 2$ имеется ровно одно неприводимое представление J_1, J_2, J_3 алгебры Ли и соответствующее неприводимое проективное унитарное представление группы вращений

$$\mathbf{R}\to U(\mathbf{R})=\exp\left[-\mathrm{i}\sum_{j=1}^{3}\varphi_jJ_j\right] \tag{III.11.7}$$

в d-мерном гильбертовом пространстве. Приведем подробно построение этого представления в простейшем случае $d=2$.

Вводя операторы $\sigma_j=2J_j$, перепишем соотношения коммутации (III.11.4) в виде

$$[\sigma_1,\sigma_2]=2\mathrm{i}\sigma_3,\qquad [\sigma_2,\sigma_3]=2\mathrm{i}\sigma_1,\qquad [\sigma_3,\sigma_1]=2\mathrm{i}\sigma_2.$$

Решение этих уравнений дается матрицами

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},$$

которые называются *матрицами Паули.* Они удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_1\sigma_2 = \mathrm{i}\sigma_3, \qquad \sigma_2\sigma_3 = \mathrm{i}\sigma_1, \qquad \sigma_3\sigma_1 = \mathrm{i}\sigma_2. \tag{III.11.8}$$

Всякая эрмитова (2×2)-матрица однозначно записывается в виде вещественной линейной комбинации единичной матрицы и матриц Паули, в частности, всякая матрица плотности представляется в виде

$$S = \tfrac{1}{2}(I + \theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2 + \theta_3\sigma_3),$$

где θ_j — параметры Стокса (см. § I.2). Наличие соотношений (III.11.8) делает весьма удобными алгебраические вычисления с матрицами, представленными в таком виде. В частности, для операторов представления (III.11.7) получаем

$$\begin{aligned} U(R) &= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\sigma_j\right) \\ &= I\cdot\cos\frac{\varphi}{2} - \mathrm{i}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\sigma_j\varphi^{-1}\sin\frac{\varphi}{2}, \\ \varphi &= \sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2}. \end{aligned} \tag{III.11.9}$$

Построенное двумерное представление является проективным и не может быть сведено к унитарному, так как, например, для вращения с $\varphi_1 = 2\pi$, $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$ уравнение (III.11.9) дает -I, а не I.

В случае произвольной размерности d рассмотрим ортонормированный базис из собственных векторов оператора J_3. Можно показать, что спектр оператора J_3 состоит из чисел -j, -$j+1, \ldots j-1$, j, где $2j+1 = d$, так что

$$J_3 = \sum_{n=-j}^{j} m|m)(m|, \tag{III.11.10}$$

где $|m)$ собственные векторы. Действительно, разности собственных чисел должны быть целыми числами, поскольку поворот на угол 2π приводит к исходному положению, так что $\exp(-2\pi\mathrm{i}J_3) = \gamma I$, где $\gamma = \exp(\mathrm{i}\alpha)$ и α вещественно. Отсюда следует, что собственные значения оператора J_3 имеют вид $\alpha' + n$, где n целые числа. Выражение для $U(\mathbf{R})$ в этом базисе будет дано ниже в § IV.10. Неприводимые представления группы вращений принято нумеровать числом j, принимающим значения 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}, \ldots$ (случаю $j = 0$ отвечает тривиальное одномерное представление).

Теперь можно описать всевозможные неприводимые представления кинематической группы для трехмерной частицы. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}^d$ — d-мерное комплексное унитарное пространство и $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^3)$ пространство вектор-функций $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi})$ на $\mathbb{R}^3$ со значениями в $\mathbb{K}$ и с интегрируемым квадратом нормы

$$\|\psi\|^2 = \iiint \|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi})\|^2 \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_3.$$

Соотношение

$$W_{\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{R}}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \exp[\mathrm{i}\mu\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}/2)]U(\mathbf{R})\psi(\mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x})), \qquad \text{(III.11.11)}$$

где $U(\mathbf{R})$ действует в пространстве $\mathbb{K}$, т. е. на компоненты вектора $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi})$ в каждой точке $\boldsymbol{\xi}$, определяет проективное представление кинематической группы, называемое представлением Шредингера. Заметим, что если не рассматривать вращений, т. е. положить $\mathbf{R} = I$, то мы получим очевидное обобщение представления Шредингера (III.4.1) для одномерного случая. Неприводимость тогда следует из неприводимости (III.4.1) и $\{U(\mathbf{R})\}$. Всякое (непрерывное) проективное унитарное представление кинематической группы унитарно эквивалентно представлению Шредингера для некоторых значений μ и d. Тип представления полностью определяется парой «квантовых чисел»: массой $m = \hbar\mu$ и числом $j = (d-1)/2$, называемым *спином* объекта.

Чтобы объяснить значение числа j, напомним, что оно равно максимальному собственному значению оператора J_3. Поэтому обсудим кинематический смысл операторов L_k, J_k. Пусть сначала $j = 0$. Тогда, полагая $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{v} = 0$ в (III.11.11), получаем представление $\mathbf{R} \to W_{\mathbf{R}}$ группы вращений в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$:

$$W_{\mathbf{R}}\psi(\xi) = \psi(\mathbf{R}^{-1}\xi).$$

Чтобы получить выражение для операторов L_k в представлении Шредингера, рассмотрим инфинитезимальное вращение (III.11.2). Полагая $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, что соответствует поворотам вокруг e_3, получаем

$$\begin{aligned} V_\varphi\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &\approx \psi(\xi_1+\varphi\xi_2, -\xi_2-\varphi\xi_1, \xi_3) \\ &\approx \left[1-\varphi\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_2}-\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)\right]\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \end{aligned}$$

откуда

$$L_3 = \mathrm{i}^{-1}\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_2}-\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right) \qquad \text{(III.11.12)}$$

по крайней мере на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, или $l_3 = q_1p_2 - q_2p_1$, где $l_3 = \hbar L_3$, и $q_j = \xi_j$ — наблюдаемые координат, а $p_j = \hbar\mathrm{i}^{-1}\partial/\partial\xi_j$ — наблюдаемые моментов в представлении Шредингера. Для $l_1 = \hbar L_1$ и $l_2 = \hbar L_2$ имеют место аналогичные соотношения с круговой перестановкой индексов. Вводя векторные обозначения $\mathbf{l} = [l_1, l_2, l_3]$ и т. д., мы можем записать их в виде $\mathbf{l} = \mathbf{q}\times\mathbf{p}$, аналогичном выражениям для углового момента в классической механике. Поэтому операторы l_1, l_2, l_3 называются *наблюдаемыми углового момента* вокруг соответствующих осей.

Обращаясь к случаю произвольного спина, заметим, что операторы J_k возникают из представления группы вращений аналогично операторам L_k и удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям. Можно образно представлять себе операторы $s_k = \hbar J_k$ как «внутренние» угловые моменты квантового объекта. Они называются наблюдаемыми *спинового углового момента.* Из уравнений (III.11.11) получаются инфинитезимальные операторы представления группы вращений $L_k + J_k$; таким образом, полный угловой момент является векторной суммой орбитального и спинового угловых моментов.

Если игнорировать внешние степени свободы, то состояние объекта будет описываться вектором $(2j+1)$-мерного унитарного пространства $\mathbb{K}$ с действующим в нем представлением $\mathbf{R} \to U(\mathbf{R})$ группы вращений в $\mathbb{K}$. В частности, при $j = \frac{1}{2}$ мы приходим к статистической модели частицы со спином $\frac{1}{2}$, подробно рассмотренной в § I.5. Выведем выражение (III.5.3) для вероятности $\Pr\{\boldsymbol{\theta}_{\text{out}}|\boldsymbol{\theta}_{\text{in}}\}$, используя теорию представлений. Пусть $S = |\text{in})(\text{in}|$ — оператор плотности в двумерном унитарном пространстве, описывающий состояние частицы после прохождения первого фильтра, а $X = |\text{out})(\text{out}|$ — тест, описывающий второй фильтр. Если φ — угол между направлениями двух фильтров, то с точностью до несущественного множителя, вектор $|\text{out})$ есть $U(\mathbf{R}_{\mathbf{n},\varphi})|\text{in})$, где $\mathbf{n}$ — соответствующая ось. Принимая, что $(\text{in}| = [1, 0]$ получаем из (III.11.9)

$$\mathbf{Pr}\{\boldsymbol{\theta}_{\text{out}}|\boldsymbol{\theta}_{\text{in}}\} = \operatorname{Tr} SX = |(\text{in}|\text{out})|^2 = \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

что и требовалось.

Квантовая механика позволяет объяснить, почему взаимодействие с внешним магнитным полем приводит к расщеплению пучка частиц в эксперименте Штерна—Герлаха. В отсутствие внешнего поля все пространственные направления равноправны, поэтому любому состоянию в $\mathbb{K}$ отвечает одно и то же значение энергии ϵ_0, определяемое внешними степенями свободы. Поскольку мы условились их игнорировать, то можно принять, что эта энергия равна нулю. Включение внешнего поля нарушает симметрию; гамильтониан, описывающий поведение спина во внешнем магнитном поле $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$, имеет вид

$$H = -\lambda(\sigma_1 B_1 + \sigma_2 B_2 + \sigma_2 B_3).$$

Мы не имеем здесь возможности вывести эту формулу и только заметим, что, как и должно быть, этот гамильтониан инвариантен относительно поворотов вокруг оси $\mathbf{B}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbf{B} = [0, 0, B]$, тогда $H = -\lambda B \sigma_3$ и мы видим, что H имеет два собственных значения $\pm\lambda B$. Таким образом, вместо состояний с одинаковой энергией ϵ_0 получилось два состояния с энергиями $\epsilon_0 \pm \lambda B$. Частицы с разными энергиями по-разному отклоняются неоднородным магнитным полем, что и приводит к расщеплению пучка в эксперименте Штерна—Герлаха.

Это рассуждение дает предельно упрощенное представление о том, каким образом квантовая теория может объяснить структуру энергетических уровней, опираясь по существу лишь на свойства симметрии. Рассмотрение более сложных моделей требует более детального знакомства с теорией представлении и приближенными методами квантовой механики и выходит за рамки этой книги.

§ 12. Измерение угла поворота

Если прибор, приготавливающий квантовое состояние S, поворачивается на угол φ вокруг выделенной оси, то новое состояние дается соотношением

$$S_\varphi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi L} S \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi L}, \tag{III.12.1}$$

где L — инфинитезимальный оператор представления группы поворотов $V_\varphi = \exp(-\mathrm{i}\varphi L)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Поскольку повороты на углы, отличающиеся на $2\pi k$, приводят к начальному положению прибора, можно считать, что параметр φ — угол поворота — изменяется в $[0, 2\pi)$, и группой симметрий является группа $\mathbb{T}$, как и в случае параметра фазы. Нашей целью является описание квантовых измерений угла поворота, поэтому рассмотрим условие ковариантности

$$V_\varphi^* M(B) V_\varphi = M(B_{-\varphi}); \qquad \varphi \in [0, 2\pi), \quad B \in \mathscr{A}([0, 2\pi)), \tag{III.12.2}$$

где $\{M(B)\}$ измерение со значениями в интервале $[0, 2\pi)$, $B_{-\varphi}$ — сдвиг множества B по модулю 2π. Мы построим некоторое каноническое решение этого уравнения.

Рассмотрим сначала случай нулевого спина. Переходя к сферическим координатам

$$\begin{array}{lll} \xi_1 = \rho \sin\theta \cos\varphi, & \xi_2 = \rho \sin\theta \sin\varphi, & \xi_3 = \rho\cos\theta; \\ \rho \geqslant 0, & 0 \leqslant \varphi < 2\pi, & 0 \leqslant \theta < \pi, \end{array}$$

и полагая $\psi(\boldsymbol{\xi}) = \psi(\varphi, \theta, \rho)$, получим

$$\|\psi\|^2 = \iiint |\psi(\varphi, \theta, \rho)|^2 \mathrm{d}\varphi (\sin\theta \, \mathrm{d}\theta)(\rho^2 \, \mathrm{d}\rho).$$

Отсюда видно, что $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\varphi \otimes \mathscr{H}_\theta \otimes \mathscr{H}_\rho$, где $\mathscr{H}_\varphi = \mathscr{L}^2([0, 2\pi))$, а $\mathscr{H}_\theta$, $\mathscr{H}_\rho$ — гильбертовы пространства функций от θ и ρ с соответствующими весами. Оператор $V_{\varphi'}$ действует только на переменную φ

$$V_{\varphi'} \psi(\varphi, \theta, \rho) = \psi(\varphi - \varphi', \theta, \rho), \tag{III.12.3}$$

поэтому мы можем ограничить наши рассмотрения пространством $\mathscr{H}_\varphi = \mathscr{L}^2([0, 2\pi))$. Назовем это *угловым представлением.*

Рассмотрим в $\mathscr{H}_\varphi$ оператор Φ умножения на φ. Согласно § II.3, это эрмитов оператор со спектральным разложением типа (II.3.10)

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \varphi E(\mathrm{d}\varphi),$$

с ортогональной спектральной мерой

$$E(B) = \mathbf{1}_B(\varphi); \qquad B \in \mathscr{A}([0, 2\pi)), \tag{III.12.4}$$

или, символически, $E(\mathrm{d}\varphi) = |\varphi)(\varphi| \mathrm{d}\varphi$. Непосредственно проверяется, что $\{E(B)\}$ удовлетворяет соотношению ковариантности (III.12.2). В главе IV будет показано, что измерение (III.12.4) выделяется из всех ковариантных измерений некоторым свойством оптимальности. Назовем его *каноническим измерением угла поворота*, а оператор Φ — *канонической наблюдаемой угла.* Возвращаясь к декартовым координатам и предполагая, что осью вращения является e_3, мы можем записать разложение единицы (III.12.4) в виде

$$E(B) = \mathbf{1}_{K(B)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

где $K(B)$ — клин в трехмерном пространстве, описываемый соотношениями

$$K(B) = \{[\xi_1, \xi_2, \xi_3] : \xi_1 = \rho\cos\varphi, \quad \xi_2 = \rho\sin\varphi; \quad 0 \leqslant \rho; \quad \varphi \in B\}.$$

Полезно перейти к представлению углового момента, в котором диагонален оператор L. В пространстве $\mathscr{H}_\varphi = \mathscr{L}^2([0, 2\pi))$ рассмотрим ортонормированный базис $\{|m);\ m = 0, \pm 1, \ldots\}$ функций $(2\pi)^{-1/2}\exp(\mathrm{i}m\varphi)$. Тогда действие операторов $V_{\varphi'}$, согласно (III.12.3), дается соотношением

$$V_\varphi|m) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}|m). \tag{III.12.5}$$

Поэтому L — диагональный оператор

$$L|m) = m|m); \qquad m = 0, \pm 1, \ldots$$

с областью определения $\mathscr{D}(L) = \{\psi : |\sum_m m^2|(\psi|m)|^2 < \infty\}$. Измерение угла (III.12.4) имеет матричные элементы

$$(m|E(B)|m') = \int_B \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m'-m)\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}; \qquad B \in \mathscr{A}([0, 2\pi)),$$

или, символически,

$$(m|E(\mathrm{d}\varphi)|m') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m'-m)\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}; \qquad m, m' = 0, \pm 1, \ldots \tag{III.12.6}$$

Это аналогично выражению (III.9.4) для канонического измерения фазы, где роль N играет оператор -L. С математической точки зрения, разница в том, что собственные значения N являются неотрицательными целыми числами, тогда как для L они распространяются на все целые числа. Благодаря этому, каноническое измерение угла, в отличие от фазы, оказывается простым.

Возвращаясь в $\mathscr{H}_\varphi$, находим, что L задается оператором $\mathrm{i}^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi$ (что согласуется с (III.11.12)) с областью определения $\mathscr{D}(L) = \{\psi : \psi(0) = \psi(2\pi),$ $\int|\psi'(\varphi)|^2\mathrm{d}\varphi < \infty\}$. Поэтому L и Φ удовлетворяют коммутационному соотношению типа Гейзенберга $[\Phi, L] = \mathrm{i}I$. Однако несмотря на ограниченность Φ, оно выполняется не на $\mathscr{D}(L)$, а на меньшем подпространстве $\mathscr{D}_0(L) = \{\psi : \psi(0) = \psi(2\pi) = 0,\ \int|\psi'(\varphi)|^2\mathrm{d}\varphi < \infty\}$, поскольку $\mathscr{D}(L)$ не является инвариантным подпространством Φ. Вводя унитарный оператор $U = \exp\mathrm{i}\Phi = \int\exp(\mathrm{i}\varphi)E(\mathrm{d}\varphi)$, получаем из (III.12.6)

$$U = \sum_{m=-\infty}^{\infty}|m)(m-1|, \tag{III.12.7}$$

так что U является аналогом P^* для фазы. Вводя дискретную группу унитарных операторов U^m; $m = 0, \pm 1, \ldots$, получаем из (III.12.5) соотношения

$$\begin{aligned} &V_\varphi^* U^m V_\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}U^m, \quad U^m V_\varphi U^{-m} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}V_\varphi; \\ &0 \leqslant \varphi < 2\pi; \qquad m = 0, \pm 1, \ldots, \end{aligned} \tag{III.12.8}$$

выражающие сопряженность между углом и угловым моментом.

Теперь обратимся к случаю ненулевого спина j и ограничимся случаем, когда существенны только спиновые степени свободы. Так будет, если, например, все компоненты вектора $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi})$ в (III.11.11) являются сферически симметричными функциями ξ. Таким образом, мы принимаем, что состояния описываются матрицами плотности в $(2j+1)$-мерном пространстве $\mathbb{K}$. Поворот на угол φ приводит к изменению состояния

$$S_\varphi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi J} S \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi J}, \tag{III.12.9}$$

где J — спиновый угловой момент относительно оси поворота. Положим $V_{\varphi'} = \exp(-\mathrm{i}\varphi' J)$ и рассмотрим условие ковариантности (III.12.2).

Пусть $\{|m); m = -j, -j+1, \ldots, j\}$ — ортонормированный базис, в котором J имеет диагональный вид (III.11.10), тогда $V_{\varphi'}$ действует на $|m)$ как в уравнении (III.12.5), с той только разницей, что m изменяется в ограниченном диапазоне. Соотношение

$$(m|M(\mathrm{d}\varphi)|m') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-m')\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}; \qquad m,\ m' = -j, -j+1, \ldots, j \tag{III.12.10}$$

определяет ковариантное измерение угла поворота, которое назовем *каноническим измерением угла поворота* для спиновых степеней свободы. В отличие от случая пространственных степеней свободы, оно не является простым. Для доказательства рассмотрим операторы

$$E_\pm = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi} M(\mathrm{d}\varphi). \tag{III.12.11}$$

Если бы $M(\mathrm{d}\varphi)$ было ортогональным разложением единицы, то $E_\pm$ были бы взаимно сопряженными унитарными операторами. Из (III.12.10) получаем

$$E_+ = \sum_{m=-j+1}^{j} |m)(m-1|, \qquad E_- = \sum_{m=-j+1}^{j} |m-1)(m|, \tag{III.12.12}$$

так что E_+ аналогичен оператору $U = \exp(\mathrm{i}\Phi)$ для пространственных степеней свободы. Однако

$$E_-E_+ = I - |j)(j|, \qquad E_+E_- = I - |-j)(-j|, \tag{III.12.13}$$

так что $E_\pm$ не-унитарны, и даже не-изометричны. Из (III.12.5) и (III.12.12) получаем аналог соотношений (III.12.8)

$$\begin{gathered} V_\varphi^* E_+^m V_\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} E_+^m, \quad V_\varphi^* E_-^m V_\varphi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi} E_-^m; \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad m = -j, -j+1, \ldots, j. \end{gathered} \tag{III.12.14}$$

Полагая $m = 1$ и дифференцируя по φ, получаем полезные коммутационные соотношения

$$[E_+, J] = -E_+, \qquad [E_-, J] = E_-. \tag{III.12.15}$$

Комментарии

§ 1. Значение групп симметрии для квантовой теории хорошо известно (см., например, Вейль [10], Вигнер [11]). Идея применения теории представлений для классификации квантовых частиц принадлежит Вигнеру [146], который рассмотрел случай релятивистской группы Пуанкаре (неоднородной группы Лоренца); в этой связи см. также Боголюбов, Логунов, Тодоров [6], Гельфанд, Минлос, Шапиро [13], Широков [54], Варадарайан [140]. Классификацию нерелятивистских квантовых «частиц» в терминах представлений группы Галилея осуществили Иненю и Вигнер [98] и Баргманн [61], который развил общую теорию проективных представлений. Доступное введение в теорию симметрии элементарных частиц можно найти в лекциях Боголюбова 113]. Разложение произвольного непрерывного представления в неприводимые имеет место для групп типа I [19]. Введение в приложения групповых методов в теорию элементарных частиц дано в лекциях Боголюбова [5]. Особо важную роль в квантовой теории играют динамические симметрии, т. е. симметрии гамильтониана, связанные с законами сохранения. О динамических симметриях в квантовой механике см. Малкин и Манько [27].

По поводу теоремы Вигнера см. Баргманн [63], Хунцикер [96], Кэдисон [102], Варадарайан [139], Дэвис [72].

Для описания нестабильных квантовых объектов могут быть привлечены полугруппы Пуанкаре и Галилея, содержащие только положительно-временные сдвиги (см. Цванцигер [149], Ланц и др. [107]). Введение полугруппы вместо группы можно мотивировать тем, что в общем описании эксперимента измерение следует за приготовлением и поэтому не может быть перенесено на произвольный более ранний момент времени.

§ 2. По поводу доказательства предложения III.2.1 см., например, Баргманн [61], Варадарайан [140]. Обзор результатов относительно ККС Вейля и их соотношения с (III.2.14) можно найти у Путнама [126].

Неравенство Мандельштама—Тамма в случае временного параметра t получено в работе [30]. Чтобы получить из него соотношение неопределенностей «время–энергия», авторы вводят «стандартное время» Δt, определяемое соотношением

$$E_{t+\Delta t}(X) - E_t(X) = (\Delta t)^{-1} \int_t^{t+\Delta t} D_\tau(X)\mathrm{d}\tau.$$

Интегрирование неравенства тогда дает $\Delta t \cdot \Delta H \geqslant \frac{1}{2}$, где $\Delta H = \sqrt{D_t(H)}$. Фок и Крылов [24] указали, однако, что такое неравенство не может рассматриваться как аналог обычного соотношения неопределенностей «координата-импульс», поскольку «стандартное время» не является аттрибутом какой-либо измерительной процедуры; в определении Δt величины $E_\tau(X)$, $D_\tau(X)$; $t \leqslant \tau \leqslant t+\Delta t$ не могут быть получены из одного «ансамбля» микрообъектов, так как измерение величины X в момент t меняет состояние и делает непригодным уравнение свободной эволюции. От этих трудностей свободен статистический подход с точки зрения квантовой теории оценивания, использующий понятие несмещенного измерения. Такая интерпретация была предложена Хелстромом [46, 87], который независимо получил неравенство Мандельштама—Тамма в контексте квантовой теории оценивания. Более общее изложение в этой книге следует работе автора [94].

§ 3. Предложение III.3.1 является частным случаем теоремы, описывающей общий вид мультипликатора $\omega(g_1, g_2)$ на аддитивной группе $\mathbb{R}^d$ (см. Баргманн [61], Яух [99], Варадарайан [140]).

§ 4. Теорема единственности была доказана в работе фон Неймана [45]. Ее можно рассматривать как частный случай «теоремы импримитивности» Макки [113] (см. Яух [99]).

§ 5. Состояния минимальной неопределенности были введены Шредингером. Соотношение полноты получено Баргманном [62] и Глаубером [14].

§ 6. Совместные измерения обсуждались с разных точек зрения многими авторами; см. фон Нейман [45], Урбаник [137], Гордон и Люиселл [79], Ше и Хеффнер [130], Пруговечки [125], Дэвис [72] и др. Настоящее изложение следует работам Холево [51, 89] и Хелстрома [46].

§ 7. Уравнение, предложенное первоначально Шредингером, соответствует задаче на собственные значения $H\psi = \lambda\psi$. Шредингер пришел к нему, пытаясь найти дифференциальное уравнение для стационарных «волн материи» де Бройля. Принцип соответствия вводился как формальный постулат, устанавливающий квантовые аналоги классических величин. Связь с фундаментальным принципом относительности Галилея была осознана позже (Иненю и Вигнер [98], Баргманн [61]). В этом параграфе мы в основном следуем книге Яуха [99].

Отметим здесь совсем кратко две темы, связывающие квантовую механику с теорией вероятностей. Формальная замена $\mathrm{i}t$ на t переводит уравнение Шредингера в параболическое уравнение теории диффузионных процессов, а унитарную группу $\{V_t\}$ — в некоторую сжимающую полугруппу в гильбертовом пространстве. Основываясь на этом, можно установить связь между квантовой динамикой и некоторым диффузионным случайным процессом (формула Фейнмана—Каца—Нельсона). Полевой аналог этой формулы является важным аналитическим орудием конструктивной теории поля. В работах Нельсона [116, 117] делается попытка рассмотреть диффузионный процесс как динамическую модель квантовой теории со скрытыми переменными. Использование формулы Фейнмана—Каца в качестве чисто аналитического инструмента открывает интересные возможности как для квантовой механики, так и для случайных процессов (см. Саймон [132]).

Другая связь раскрывается теорией квантовых случайных процессов, позволяющей описывать необратимые (в частности, марковские) эволюции «открытых» квантовых систем. См. по этому поводу Дэвис [72], Аккарди, Фриджерио и Льюис [57], Горини и др. [80].

§ 8. Невозможность введения наблюдаемой времени в рамках традиционной концепции измерения обстоятельно обсуждалась в статье Оллкока [58], где можно найти и соответствующую библиографию. В этой статье, в частности, рассматриваются и восходящие к Паули попытки использовать оператор $\mathrm{i}\hbar\, \mathrm{d}/\mathrm{d}\epsilon$, который, однако, отвергается как несамосопряженный. Материал настоящего параграфа взят из статьи автора [124], где также рассмотрен случай частицы в трех измерениях. По поводу других подходов к соотношению неопределенностей время-энергия см. Экштейн и Зигерт [75], Вигнер [147], Малкин и Манько [27].

§ 9. По поводу математических проблем квантовой динамики см. Рид и Саймон [38], где можно найти дальнейшие ссылки. Осциллятор рассматривается почти во всех учебниках квантовой механики. Мы следуем Дираку [17] (см. также Люиселл [25], где можно найти интересное описание формальной алгебры операторов рождения и уничтожения).

Корректное определение оператора фазы через оператор P^* предложили Сасскинд и Глоговер [135] (см. также Каррутерс и Нието [67], Волкин [141]). Каноническое измерение фазы было введено автором [95]. Относительно классов Харди см., например, Халмош [83].

Наблюдаемая фазы, как и наблюдаемая времени, относятся к числу «вечных» тем в основаниях квантовой механики. Одно из сравнительно новых предложений — «самосопряженный оператор фазы» Пегга—Барнета [191] — интересно тем, что дает пример приближения неортогонального разложения единицы (III.9.15) в бесконечномерном гильбертовом пространстве последовательностью ортогональных разложений. Тот факт, что в бесконечномерном случае ортогональные разложения единицы слабо плотны в множестве всех разложений единицы, отмечался еще в статье Наймарка [32] (подробнее см. в [152], §2.1.3.)

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с ортонормированным базисом $\{|n); \ n=0,1,\ldots\}$, и его конечномерные подпространства $\mathcal{H}_N$, порожденные векторами $\{|n); \ n=0,1,\ldots,N\}$. В $\mathcal{H}_N$ ортонормированный базис «векторов фазы» Пегга—Барнета вводится соотношением

$$|\theta_{N,k}) = \frac{1}{\sqrt{N+1}}\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in\theta_{N,k}}|n), \quad \theta_{N,k} = \frac{2\pi k}{N+1}; \quad k=0,1,\ldots,N,$$

с соответствующим ортогональным разложением единицы

$$M_N(B) = \sum_{\theta_{N,k}\in B} |\theta_{N,k})(\theta_{N,k}|.$$

Тогда в $\mathcal{H}_N$ можно определить самосопряженный «оператор фазы» как

$$\Theta_N = \sum_{k=0}^{N} \theta_{N,k}|\theta_{N,k})(\theta_{N,k}|$$

или, лучше, через унитарный оператор $\mathrm{e}^{i\Theta_N} = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{i\theta_{N,k}}|\theta_{N,k})(\theta_{N,k}|$. Если $|\psi)$ — произвольный вектор в $\mathcal{H}$ с конечным числом ненулевых коэффициентов $(n|\psi)$, то для достаточно больших N соотношения

$$\mu^{(N)}_{S_\psi}(B) = (\psi|M_N(B)|\psi) = \sum_{\theta_{N,k}\in B} |(\theta_{N,k}|\psi)|^2 = \sum_{\theta_{N,k}\in B} \frac{1}{N+1}\left|\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-in\theta_{N,k}}(n|\psi)\right|^2$$

определяют вероятностные меры, которые сходятся слабо к распределению канонического измерения фазы (III.9.15):

$$\mu_{S_\psi}(B) = (\psi|M(B)|\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_B \left|\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-in\theta}(n|\psi)\right|^2 d\theta$$

в чистом состоянии $S_\psi = |\psi)(\psi|$. Напомним, что слабая сходимость вероятностных мер означает сходимость интегралов от всех ограниченных непрерывных функций. Аналогичное утверждение имеет место и для смешанных состояний.

§ 10. Представление по когерентным состояниям для многих степеней свободы рассматривали Баргманн [62], Глаубер [14], Клаудер и Сударшан [20]. Аналогичное представление для случая свободного поля (бесконечное число степеней свободы) рассматривал Березин [2].

Ограниченные субнормальные операторы ввел Халмош (см., например, [83]). См. также Секефальви—Надь [39].

§ 11. О применениях представлений группы вращений в квантовой механике см. Вигнер [11], Яух [99], Макки [26]. Систематическое изучение представлений группы вращений проводятся в книгах Гельфанда, Минлоса, Шапиро [13] и Желобенко [18].

§ 12. Рассмотрение канонической наблюдаемой угла для случая нулевого спина дали Джадж [101], Сасскинд и Глоговер [135] (см. также Каррутерс и Нието [67] и дальнейшие ссылки). Обсуждение случая ненулевого спина в представлении углового момента см. в работах Хелстрома [87] и Холево [95].

Глава IV
КОВАРИАНТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

§ 1. Параметрические группы симметрий и ковариантные измерения

Все рассматривавшиеся нами группы симметрии являются *параметрическими группами* (группами Ли) преобразований. Это означает, что задано некоторое параметрическое множество $\Theta = \{\theta\}$, т. е. непрерывное многообразие в конечномерном пространстве, и элементы группы $G = \{g\}$ действуют как непрерывные взаимно-однозначные отображения множества Θ на себя, $g : \theta \to g\theta$. Более того, группа G также предполагается параметризованной так, что групповое произведение $g_1 g_2$ (композиция преобразований) является по крайней мере локально непрерывным в этой параметризации.

Таковы группа сдвигов вещественной прямой $\mathbb{R}$, группа $\mathbb{T}$ сдвигов интервала $\Theta = [0, 2\pi)$ по модулю 2π, изоморфная группе поворотов единичной окружности, а также группа вращений трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. В последнем примере естественно рассматривать действие группы лишь на единичные векторы (направления) в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, группу вращений можно рассматривать также как группу преобразований (движений) единичной сферы $\Theta = \mathbb{S}^2$.

Пусть G — параметрическая группа преобразований множества Θ и $g \to V_g$ — непрерывное проективное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть $M(\mathrm{d}\theta)$ — измерение со значениями в Θ, т. е. разложение единицы в $\mathscr{H}$ на борелевских подмножествах Θ[1]. Измерение $M(\mathrm{d}\theta)$ назовем *ковариантным* по отношению к представлению $g \to V_g$, если

$$V_g^* M(B) V_g = M(B_{g^{-1}}), \qquad g \in G, \tag{IV.1.1}$$

для любого борелевского $B \in \mathscr{A}(\Theta)$, где

$$B_g = \{\theta : \theta = g\theta', \theta' \in B\}$$

– сдвиг подмножества B под действием преобразования g. В предыдущей главе мы не раз встречались с этим понятием, рассматривая конкретные группы симметрии.

В настоящей главе мы изучим это понятие с общей точки зрения. Его значение для квантовой теории состоит в том, что оно позволяет установить связь между физическими параметрами микрообъекта и разложениями единицы в гильбертовом пространстве. В самом деле, пусть θ — параметр (вообще говоря,

[1] Поскольку Θ — непрерывное многообразие, оно само является борелевским подмножеством конечномерного пространства.

многомерный), который описывает некоторые аспекты процедуры приготовления и пусть S — исходное состояние, отвечающее значению θ_0. Тогда преобразование g приводит к новому состоянию $S_\theta = V_g S V_g^*$, где $\theta = g\theta_0$. Предположим, что над приготовленным таким образом микрообъектом производится измерение, описываемое разложением единицы $M(\mathrm{d}\hat\theta)$, тогда распределение вероятностей результатов измерения $\hat\theta$ дается формулой

$$\mathbf{Pr}\{\hat\theta \in B|\theta\} = \mathrm{Tr}\, S_\theta M(B), \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta).$$

Если $M(\mathrm{d}\hat\theta)$ обладает свойством ковариантности (IV.1.1), то

$$\mathrm{Tr}\, S_\theta M(B) = \mathrm{Tr}\, S V_g^* M(B) V_g = \mathrm{Tr}\, S M(B_{g^{-1}})$$

или, заменяя B на B_g

$$\mathrm{Pr}\{\hat\theta \in B_g | g\theta_0\} = \mathrm{Pr}\{\hat\theta \in B|\theta_0\}.$$

Это означает, что преобразование значения θ находит адекватное отражение в изменении распределения вероятностей результатов ковариантного измерения. Поэтому всякое разложение единицы $M(\mathrm{d}\theta)$, обладающее свойством ковариантности (IV.1.1), дает статистическое описание результатов некоторого теоретически допустимого измерения параметра θ.

Естественно возникает задача описания всех ковариантных измерений данного параметра θ. Мы дадим ее общее решение в § 2 и § 8. Затем мы выделим оптимальные измерения, которые являются «наиболее точными» среди всех ковариантных измерений параметра θ. На этом пути проясняется роль «канонических» наблюдаемых различных физических параметров, введенных в прошлой главе — они оказываются типичными представителями в семействе оптимальных измерений этих параметров.

Нам потребуются некоторые общие сведения о параметрических группах преобразований. Говорят, что группа преобразований G действует *транзитивно* на Θ, если всякая точка θ_0 может быть переведена во всякую другую точку θ некоторым преобразованием $g \in G$. В дальнейшем мы предположим, что параметрическая группа G действует транзитивно на Θ. Для транзитивной параметрической группы непрерывное отображение $g \to g\theta_0 = \theta(g)$ является отображением группы G на все множество Θ. Это отображение взаимно-однозначно тогда и только тогда, когда *стационарная подгруппа* G_0, оставляющая на месте точку θ_0, является тривиальной, т. е. сводится к тождественному преобразованию. В качестве примера рассмотрим группу сдвигов прямой $\mathbb{R}$. Фиксируем «начало отсчета» $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Всякая точка $\theta \in \mathbb{R}$ получается некоторым сдвигом точки θ_0: $\theta = \theta_0 + x$. Отображение $x \to \theta_0 + x = \theta(x)$, очевидно, является взаимно-однозначным. Это же верно и для группы поворотов $\mathbb{T}$. Рассмотрим теперь группу вращений, действующую на $\mathbb{S}^2$. Фиксируем направление («полюс») $\mathbf{n}_0 \in \mathbb{S}^2$. Всякое направление $\mathbf{n}$ может быть получено из $\mathbf{n}_0$ некоторым вращением $R : \mathbf{n} = R\mathbf{n}_0$; отображение $R \to R\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(R)$ не является взаимно-однозначным, так как $n(R) = n(RR_0)$, где R_0 — любое вращение вокруг оси n_0.

Мера $\mu(\mathrm{d}g)$ на σ-алгебре $\mathscr{A}(G)$ борелевских подмножеств G называется *лево-(право-)инвариантной*, если она не изменяется при левых (правых) сдвигах борелевских подмножеств:

$$\mu(gA) = \mu(A) \qquad (\text{соответственно} \quad \mu(Ag) = \mu(A)), \quad g \in G,$$

где $gA = \{g' : g' = gg'', g'' \in A\}$ и $Ag = \{g' : g' = g''g, g'' \in A\}$ $A \in \mathscr{A}(G)$.

Из общей теории непрерывных групп известно, что на всякой параметрической группе существует левоинвариантная мера. Если существует *инвариантная* (т. е. лево- и правоинвариантная) мера, то группа называется *унимодулярной*. Инвариантная мера, вообще говоря, бесконечна, т. е. $\mu(G) \leqslant +\infty$. Если группа компактна (т. е. является ограниченным и замкнутым подмножеством конечномерного пространства), то всякая односторонне инвариантная мера является инвариантной. В этом случае она обязательно конечна и мы всегда будем нормировать ее так, что $\mu(G) = 1$. В дальнейшем мы будем иметь дело только с унимодулярными группами.

Нас будут интересовать меры ν на $\mathscr{A}(\Theta)$, *инвариантные* в том смысле, что

$$\nu(B_g) = \nu(B); \qquad g \in G, \quad B \in \mathscr{A}(\Theta).$$

Если G_0 также унимодулярна, то такая мера ν существует. *Если G_0 компактна*, (что мы и будем далее предполагать), то *эта мера может быть построена как образ инвариантной меры μ*

$$\nu(B) = \mu(\theta^{-1}(B)),$$

где $\theta^{-1}(B) = \{g : g\theta_0 \in B\}$ — прообраз борелевского подмножества $B \in \mathscr{A}(\Theta)$. Другими словами, ν определяется условием

$$\int_G f(g\theta_0)\mu(\mathrm{d}g) = \int_\Theta f(\theta)\nu(\mathrm{d}\theta) \tag{IV.1.2}$$

для любой интегрируемой функции f на Θ. Компактность G_0 обеспечивает конечность меры ν (в противном случае она может быть тождественно бесконечной, как показывает пример $G = \mathbb{R}^2$, $\Theta = \mathbb{R}$, $G_0 = \mathbb{R}$). Инвариантность ν следует из левоинвариантности μ. В силу правоинвариантности μ полученная таким образом мера ν *не зависит от выбора исходной точки* θ_0, так как если $\theta_1 = g_1\theta_0$, то

$$\begin{aligned}\nu(B) = \mu(\{g : g\theta_0 \in B\}) &= \\ = \mu(\{gg_1 : gg_1\theta_0 \in B\}) &= \mu(\{g : g\theta_1 \in B\}).\end{aligned}$$

Классическим примером инвариантной меры является мера Лебега на группе сдвигов $\mathbb{R}$. В случае группы вращений, действующей на $\mathbb{S}^2$, инвариантная мера ν на $\mathbb{S}^2$ с точностью до множителя совпадает с евклидовой площадью на единичной сфере. Выражение для элемента инвариантной меры μ на группе вращений будет приведено в § 10.

§ 2. Структура ковариантного измерения

Следующий простой результат понадобится при изучении структуры ковариантных измерений.

Предложение IV.2.1. *Пусть $M(\mathrm{d}\theta)$ — измерение, ковариантное по отношению к проективному унитарному представлению $g \to V_g$ группы G преобразований множества Θ. Для любого оператора плотности S в гильбертовом пространстве представления и любого борелевского $B \in \mathscr{A}(\Theta)$*

$$\int_G \mathrm{Tr}\, V_g S V_g^* M(B)\mu(\mathrm{d}g) = \nu(B). \tag{IV.2.1}$$

Доказательство. Используя (IV.1.1), получаем

$$\int_G \mathrm{Tr}\, V_g S V_g^* M(B)\mu(\mathrm{d}g) = \int_G \mathrm{Tr}\, SM(B_{g^{-1}})\mu(\mathrm{d}g) = \\ = \int_G \int_\Theta \mathbf{1}_B(g\theta_0)\mu_S(\mathrm{d}\theta_0)\mu(\mathrm{d}g),$$

где $\mu_S(\mathrm{d}\theta) = \mathrm{Tr}\, SM(\mathrm{d}\theta)$ — распределение вероятностей измерения. Используя соотношение (IV.2.1) и тот факт, что мера ν не зависит от выбора θ_0, получаем, что это равно

$$\int_\Theta \mu_S(\mathrm{d}\theta_0) \int_G \mathbf{1}_B(g\theta_0)\mu(\mathrm{d}g) = \nu(B). \tag{IV.2.2}$$

Нам понадобится теорема Радона—Никодима для операторно-значных мер. Доказательство следующего предложения стандартно и поэтому опускается.

Предложение IV.2.2. *Пусть $\{M(B);\, B \in \mathscr{A}(\Theta)\}$ — аддитивная операторно-значная функция множеств, доминированная скалярной мерой $\{m(B);$ $B \in \mathscr{A}(\Theta)\}$ в том смысле, что*

$$|(\varphi|M(B)\psi)| \leqslant m(B)\|\varphi\|\,\|\psi\|, \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta),$$

для всех $\varphi,\, \psi \in \mathscr{H}$. Тогда существует операторно-значная функция $P(\cdot)$, определенная однозначно для m-почти всех $\theta \in \Theta$ (т. е. для всех θ, за возможным исключением множества нулевой меры m), такая что $\|P(\theta)\| \leqslant 1$ и

$$(\varphi|M(B)\psi) = \int_B (\varphi|P(\theta)\psi)m(\mathrm{d}\theta), \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta),$$

для всех $\varphi,\, \psi \in \mathscr{H}$. Если $M(B) \geqslant 0$ для всех $B \in \mathscr{A}(\Theta)$, то $P(\theta) \geqslant 0$ для m-почти всех θ.

Функция $P(\theta)$ называется *операторной плотностью* меры $M(\mathrm{d}\theta)$ относительно $m(\mathrm{d}\theta)$. Мы будем писать кратко $M(B) = \int_B P(\theta)m(\mathrm{d}\theta)$ или $M(\mathrm{d}\theta) =$ $= P(\theta)m(\mathrm{d}\theta)$, подразумевая слабую сходимость интеграла.

Чтобы избежать некоторых технических осложнений, ограничимся теперь конечномерными представлениями $g \to V_g$.

Теорема IV.2.3. *Пусть P_0 эрмитов положительный оператор, коммутирующий со всеми операторами $\{V_g;\, g \in G_0\}$ и удовлетворяющий условию*

$$\int_G V_g P_0 V_g^* \mu(\mathrm{d}g) = I. \tag{IV.2.3}$$

Тогда, полагая

$$P(g\theta_0) = V_g P_0 V_g^*, \tag{IV.2.4}$$

получаем операторно-значную функцию от θ, такую что

$$M(B) = \int_B P(\theta)\nu(\mathrm{d}\theta), \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta), \tag{IV.2.5}$$

является измерением, ковариантным по отношению к представлению $g \to V_g$.

Обратно, для любого ковариантного измерения $M(\mathrm{d}\theta)$ существует единственный оператор P_0, удовлетворяющий сформулированным выше условиям, такой что $M(B)$ выражается через P_0 соотношениями (IV.2.4) *и* (IV.2.5).

Доказательство. В силу условия $[P_0, V_g] = 0$, $g \in G_0$, имеем $P(g_1\theta_0) = P(g_2\theta_0)$ если $g_1\theta_0 = g_2\theta_0$, и поэтому (IV.2.4) однозначно определяет операторно-значную функцию от $\theta \in \Theta$. Положительность P_0 влечет $M(B) \geqslant 0$, а σ-аддитивность является свойством интеграла (IV.2.5). Используя (IV.1.2), получаем

$$\int_\Theta P(\theta)\nu(\mathrm{d}\theta) = \int_G V_g P_0 V_g^* \mu(\mathrm{d}g) = I \tag{IV.2.6}$$

в силу (IV.2.2), откуда $M(\Theta) = I$.

Чтобы доказать обратное утверждение, обозначим $d = \dim\mathscr{H}$.

Полагая $S = d^{-1}I$ в (IV.2.1), получаем $\mathrm{Tr}\, M(B) = d^{-1}\nu(B)$, $B \in \mathscr{A}(\Theta)$. Отсюда следует, что для любого единичного вектора $\varphi \in \mathscr{H}$ выполняется $(\varphi|M(B)\varphi) \leqslant d^{-1}\nu(B)$. В силу положительности $M(B)$ и неравенства Коши—Буняковского

$$|(\varphi|M(B)\psi)| \leqslant \sqrt{(\varphi|M(B)\varphi)(\psi|M(B)\psi)} \leqslant d^{-1}\nu(B)$$

для единичного вектора $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$, так что мера $\{M(B)\}$ доминируется скалярной мерой $\{d^{-1}\nu(B)\}$. Согласно предложению IV.2.2, существует плотность $P(\theta)$, определенная однозначно и положительная для ν-почти всех θ, так что

$$M(B) = \int_B P(\theta)\nu(\mathrm{d}\theta). \tag{IV.2.7}$$

Из условия ковариантности (IV.1.1) вытекает

$$\int_B V_g^* P(\theta) V_g \nu(\mathrm{d}\theta) = \int_{B_{g^{-1}}} P(\theta)\nu(\mathrm{d}\theta) = \int_B P(g^{-1}\theta)\nu(\mathrm{d}\theta),$$

откуда, в силу единственности плотности,

$$V_g^* P(\theta) V_g = P(g^{-1}\theta), \qquad g \in G,$$

для ν-почти всех θ. Стандартные рассуждения показывают, что плотность $P(\theta)$ может быть определена так, что это равенство выполняется для всех

$\theta \in \Theta$. Тогда, полагая $P_0 = P(\theta_0)$, получаем (IV.2.4) и (IV.2.5); соотношение (IV.2.2) следует из нормировки $M(\Theta) = I$.

Таким образом, формула (IV.2.5) устанавливает взаимно-однозначное аффинное соответствие между двумя выпуклыми множествами: множеством всех ковариантных измерений $M(\mathrm{d}\theta)$ и множеством $\mathfrak{P}$ эрмитовых операторов, удовлетворяющих условиям теоремы.

Заметим, что выбирая $\nu(B)$ достаточно малым, что всегда возможно в параметрическом случае, можно достичь неравенства $\|M(B)\| < 1$, а тогда $M(B)$ не может быть проектором. Таким образом, *в случае конечномерного представления параметрической группы симметрий не существует простых ковариантных измерений.*

§ 3. Измерение параметров в ковариантном семействе состояний

Пусть θ — вообще говоря, многомерный параметр, описывающий определенные аспекты приготовления состояния (например, положение экспериментальной установки). Каждому θ из области допустимых значений Θ соответствует свой оператор плотности S_θ в $\mathscr{H}$. Допустим, что на параметрическом множестве Θ транзитивно действует группа преобразований G, которая имеет представление $g \to V_g$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Семейство $\{S_\theta\}$ называется *ковариантным* по отношению к этому представлению, если

$$S_{g\theta} = V_g S_\theta V_g^*; \qquad \theta \in \Theta, \quad g \in G.$$

Фиксируем «начало отсчета» θ_0; состояние $S_{\theta_0} = S$ должно быть инвариантно относительно подпредставления стационарной подгруппы G_0 точки θ_0, так что можно написать

$$S_\theta = V_g S V_g^*, \qquad (\theta = g\theta_0). \tag{IV.3.1}$$

Предположим теперь, что объект находится в одном из состояний S_θ, но истинное значение параметра θ неизвестно и задача заключается в том, чтобы по возможности точно оценить это значение, основываясь на измерениях, допускаемых квантовой теорией. Такая постановка является очевидным обобщением квантовой проблемы оценивания параметра сдвига, рассмотренной в § III.2. Мы рассмотрим этот вопрос, руководствуясь идеями статистической теории оценивания.

Зададимся некоторой *функцией отклонения* $W_\theta(\hat\theta)$, которая дает численную меру отклонения наблюдавшегося значения $\hat\theta$ от истинного θ. Мы предположим, что $W_\theta(\hat\theta)$ — непрерывная функция своих аргументов, причем $W_\theta(\hat\theta) \geqslant W_\theta(\theta)$. Естественно предположить также, что функция отклонения *инвариантна*:

$$W_{g\theta}(g\hat\theta) = W_\theta(\hat\theta); \qquad g \in G; \quad \theta, \hat\theta \in \Theta.$$

Для всех рассматриваемых нами групп существуют «естественные» функции отклонения (например, квадратичное отклонение $(\theta - \hat\theta)^2$ для группы сдвигов $\mathbb{R}$). Примечательно, однако, что, как будет показано, конечный результат —

«наиболее точное» измерение — в значительной мере не зависит от конкретного выбора функции $W_\theta(\hat\theta)$, определяющей точность измерения.

Среднее отклонение результатов измерения $\mathbf{M}=\{M(\mathrm{d}\hat\theta)\}$ при условии, что истинным значением является θ, равно

$$\mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\} = \int W_\theta(\hat\theta)\mu_\theta(\mathrm{d}\hat\theta), \tag{IV.3.2}$$

где $\mu_\theta(\mathrm{d}\hat\theta) = \mathrm{Tr}\, S_\theta M(\mathrm{d}\hat\theta)$ — распределение вероятностей измерения $\mathbf{M}$ относительно состояния S_θ. Желая найти наилучшее измерение параметра θ, следовало бы потребовать, чтобы $\mathbf{M}$ минимизировало среднее отклонение (IV.3.2) при всех возможных значениях θ. Однако из математической статистики хорошо известно, что подобное требование обычно невыполнимо: то, что хорошо для одних значений θ, будет плохо для других. Чтобы ввести разумное понятие оптимальности, следует пойти на компромисс и образовать некоторый функционал от величин $\mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\}$, $\theta\in\Theta$, который служил бы «интегральной» мерой точности.

Следуя классической теории оценивания, можно предложить два разных функционала. При *байесовском* подходе берется среднее величин $\mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\}$ по некоторому *априорному распределению* $\pi(\mathrm{d}\theta)$. Измерение, минимизирующее *среднее байесовское отклонение*

$$\mathscr{R}_\pi\{\mathbf{M}\} = \int \mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\}\pi(\mathrm{d}\theta),$$

называется *байесовским.* Величина $\mathscr{R}_\pi\{\mathbf{M}\}$ дает среднюю ошибку в ситуации, когда θ является случайным параметром с известным распределением $\pi(\mathrm{d}\theta)$. В частности, если Θ компактно и о θ «заранее ничего не известно», то в качестве $\pi(\mathrm{d}\theta)$ принято брать «равномерное распределение» на Θ, т. е. нормированную инвариантную меру $\nu(\mathrm{d}\theta)$.

При минимаксном подходе берется *максимальное отклонение*

$$\widehat{\mathscr{R}}\{\mathbf{M}\} = \max_\theta \mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\}.$$

Минимизирующее его измерение называется *минимаксным.* Измерение, на котором достигается минимум той или иной меры точности, мы будем называть также *оптимальным.*

Ограничившись здесь случаем компактной группы, мы покажем, что для ковариантного семейства состояний как байесовская, так и минимаксная меры точности достигают минимума на ковариантном измерении. Этот факт является некоммутативным аналогом известной теоремы Ханта—Стейна в математической статистике.

Среднее отклонение (IV.3.2), а значит, и байесовская мера точности являются аффинными функционалами измерений $\mathbf{M}$. Если Θ *компактно и функция отклонения $W_\theta(\hat\theta)$ непрерывна, то байесовское измерение существует.* Доказательство этого утверждения, а также подробное обсуждение вопросов интегрируемости в доказательстве следующей теоремы см. в комментариях в конце настоящей главы.

Теорема IV.3.1. *В сформулированной выше квантовой ковариантной проблеме статистического оценивания минимум байесовской меры точности* $\mathscr{R}_\nu\{\mathbf{M}\}$ *и минимаксной меры точности* $\widehat{\mathscr{R}}\{\mathbf{M}\}$ *по всем* Θ*-измерениям достигается на множестве ковариантных измерений. Для ковариантного измерения* $\mathbf{M}$ *среднее отклонение не зависит от* θ*, так что*

$$\mathscr{R}_\nu\{\mathbf{M}\} = \widehat{\mathscr{R}}\{\mathbf{M}\} = \mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\}, \qquad \theta \in \Theta. \tag{IV.3.3}$$

Доказательство. Введем измерение $\mathbf{M}_g$, полагая

$$M_g(B) = V_g^* M(B_g) V_g, \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta),$$

и заметим, что измерение $\mathbf{M}$ ковариантно тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}_g = \mathbf{M}$, $g \in G$. Из ковариантности семейства $\{S_\theta\}$ и инвариантности функции отклонения $W_\theta(\hat{\theta})$ получаем согласно (IV.3.2)

$$\mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}_g\} = \mathscr{R}_{g\theta}\{\mathbf{M}\}. \tag{IV.3.4}$$

В частности, для ковариантного измерения $\mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\}$ не зависит от θ, так что выполняется (IV.3.3).

Рассмотрим байесовское среднее отклонение

$$\mathscr{R}_\nu\{\mathbf{M}\} = \int \mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\}\nu(\mathrm{d}\theta).$$

Используя (IV.3.4), получаем $\mathscr{R}_\nu\{\mathbf{M}\} = \mathscr{R}_\nu\{\mathbf{M}_g\}$. Введем «усредненное» измерение $\overline{\mathbf{M}}$, полагая

$$\overline{M}(B) = \int_G M_{g^{-1}}(B)\mu(\mathrm{d}g).$$

Интеграл существует в смысле слабой сходимости и определяет ковариантное измерение. Используя (IV.3.2) и изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\mathscr{R}_\nu\{\overline{\mathbf{M}}\} = \int \mathscr{R}_\nu\{\mathbf{M}_{g^{-1}}\}\mu(\mathrm{d}g) = \mathscr{R}_\nu\{\mathbf{M}\}$$

и поэтому

$$\max_\theta \mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\} \geqslant \mathscr{R}_\nu\{\mathbf{M}\} = \mathscr{R}_\nu\{\overline{\mathbf{M}}\}.$$

Поскольку $\overline{\mathbf{M}}$ ковариантно, используя (IV.3.3), получаем

$$\mathscr{R}_\nu\{\overline{\mathbf{M}}\} = \mathscr{R}_\theta\{\overline{\mathbf{M}}\} = \max_\theta \mathscr{R}_\theta\{\overline{\mathbf{M}}\}.$$

Таким образом, для любого измерения $\mathbf{M}$ мы построили ковариантное измерение $\overline{\mathbf{M}}$ с тем же значением байесовской меры точности и с возможно меньшим значением минимаксной меры. Поэтому минимум этих функционалов достигается на ковариантном измерении.

Соотношение (IV.3.3) показывает, что минимизация среднего отклонения одновременно для всех значений θ оказывается возможной, если ограничиться ковариантными измерениями. Более того, это эквивалентно и байесовскому и минимаксному подходу, и сводится к минимизации среднего отклонения

$$\mathscr{R}_{\theta_0}\{\mathbf{M}\} = \int W_{\theta_0}(\theta)\mu_{\theta_0}(\mathrm{d}\theta)$$

для некоторого частного значения θ_0.

Рассмотрим этот вопрос, предполагая, что $\dim\mathscr{H} < \infty$. Тогда мы находимся в условиях теоремы IV.2.3 и функционал $\mathscr{R}_{\theta_0}\{\mathbf{M}\}$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_{\theta_0}\{\mathbf{M}\} = \int W_{\theta_0}(\theta)\,\mathrm{Tr}\,V_g^* S V_g P_0 \nu(\mathrm{d}\theta) = \\ = \mathrm{Tr}\,\widehat{W}_0 P_0,\end{aligned}$$

где

$$\widehat{W}_0 = \int_\Theta W_{\theta_0}(\theta) V_g^* S V_g \nu(\mathrm{d}\theta) = \int_G W_{\theta_0}(g\theta_0) V_g^* S V_g \mu(\mathrm{d}g) \tag{IV.3.5}$$

– оператор, коммутирующий с $\{V_g;\, g \in G_0\}$. Основываясь на аналогиях с классической статистикой, можно назвать $\widehat{W}_0$ *оператором апостериорного отклонения.* Таким образом, необходимо найти

$$\min \mathrm{Tr}\,\widehat{W}_0 P_0 \tag{IV.3.6}$$

по всем эрмитовым операторам $P_0 \in \mathfrak{P}$. Эффективное решение этой задачи для конкретных групп симметрий будет дано в следующем разделе.

В заключение мы коротко остановимся на некоммутативном аналоге метода *максимального правдоподобия.* Формально критерий максимального правдоподобия соответствует байесовскому с равномерным априорным распределением и функцией отклонения

$$W_{\theta_0}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \neq \theta_0, \\ -\infty, & \theta = \theta_0. \end{cases}$$

Точнее, определим дельта-функцию на Θ формальным соотношением

$$\int \delta_{\theta_0}(\theta) f(\theta) \nu(\mathrm{d}\theta) = f(\theta_0) \tag{IV.3.7}$$

для любой непрерывной $f(\theta)$. Тогда взятая с обратным знаком байесовская мера отклонения, соответствующая функции $W_\theta(\hat\theta) = -\delta_\theta(\hat\theta)$, имеет вид

$$\int_\Theta \mathrm{Tr}\, S_\theta M(\mathrm{d}\theta). \tag{IV.3.8}$$

Точное определение подобных интегралов со следом является интересной математической задачей, которую мы здесь не рассматриваем. Заметим, однако, что этому выражению можно придать прямой смысл, если Θ — компактное множество и пространство $\mathscr{H}$ конечномерно. В этом случае, рассуждая как и при доказательстве теоремы IV.2.3, можно показать, что операторная мера

$M(\mathrm{d}\theta)$ дифференцируема относительно скалярной меры $m(\mathrm{d}\theta) = \operatorname{Tr} M(\mathrm{d}\theta)$ так что $M(\mathrm{d}\theta) = P(\theta)m(\mathrm{d}\theta)$, и интеграл (IV.3.8) можно определить как

$$\int_{\Theta} (\operatorname{Tr} S_\theta P(\theta))m(\mathrm{d}\theta). \tag{IV.3.9}$$

Измерение, максимизирующее этот функционал, называется *измерением максимального правдоподобия*. Аналогично теореме IV.3.1 можно показать, что для ковариантного семейства состояний $\{S_\theta\}$ максимум достигается на ковариантном измерении. Для ковариантного измерения (IV.2.7) функционал (IV.3.9) принимает вид $\operatorname{Tr} SP_0$. Таким образом, для нахождения ковариантного измерения максимального правдоподобия надо решить задачу

$$\max \operatorname{Tr} SP_0, \qquad P_0 \in \mathfrak{P},$$

что аналогично решению задачи (IV.3.6).

§ 4. Измерения угловых параметров

Рассмотрим применения теории оценивания, развитой в предыдущем разделе, к однопараметрическим группам симметрий. Простейшим примером является оценивание угла поворота по измерениям над спиновыми степенями свободы. Согласно § III.12 семейство состояний, полученное из исходного состояния S поворотами на углы φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, приобретает вид

$$S_\varphi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi J} S \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi J}; \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{IV.4.1}$$

где J — спиновый оператор углового момента относительно оси поворота, задаваемый диагональной матрицей вида (III.11.10) в базисе из своих собственных векторов $\{|m)\}$. Индекс m изменяется от $-j$ до j, где j — величина спина.

Группой симметрий G является группа поворотов или группа сдвигов $\mathbb{T}$ интервала $\Theta = [0, 2\pi)$ по модулю 2π. Операторы $V_\varphi = \exp(-\mathrm{i}\varphi J)$ образуют конечномерное представление группы G; измерения, ковариантные по отношению к этому представлению, можно рассматривать как более или менее точные измерения параметра угла поворота. Стационарная подгруппа G_0 в этом случае тривиальна и согласно теореме IV.2.3, всякое ковариантное измерение угла поворота имеет вид

$$M(\mathrm{d}\varphi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi J} P_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi J} \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi},$$

где P_0 — положительный оператор, удовлетворяющий условию (IV.2.2), т. е.

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi J} P_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi J} \mathrm{d}\varphi = I.$$

В базисе $\{|m)\}$

$$(m|M(\mathrm{d}\varphi)|m') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m'-m)\varphi} p_{mm'} \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}, \tag{IV.4.2}$$

где $p_{mm'} = (m|P_0|m')$, и условие (IV.2.2) сводится к $p_{mm} = 1$. Таким образом, всякое ковариантное измерение угла поворота для спиновых степеней свободы дается матричными элементами (IV.4.2), где матрица $[p_{mm'}]$, с индексами m, m', изменяющимися от $-j$ до j, принадлежит выпуклому множеству

$$\mathfrak{P} = \{[p_{mm'}] : [p_{mm'}] \geqslant 0, p_{mm} = 1\}.$$

Теперь обратимся к ковариантной задаче оценивания, ограничась случаем чистых состояний

$$S_\varphi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi J}|\psi)(\psi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi J}; \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{IV.4.3}$$

Будем искать оптимальное ковариантное измерение, которое минимизирует среднее отклонение, например, для $\varphi_0 = 0$. Согласно теореме IV.3.1, оно также оптимально как в байесовском, так и в минимаксном смысле.

Положим $\gamma_m = (m|\psi)/|(m|\psi)|$, если $(m|\psi) \neq 0$; в противном случае пусть γ_m произвольное комплексное число, по модулю равное единице.

Теорема IV.4.1. *Ковариантное измерение*

$$(m|M_*(\mathrm{d}\varphi)|m') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m'-m)\varphi}\gamma_m\bar{\gamma}_{m'}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} \tag{IV.4.4}$$

является оптимальным измерением угла поворота φ в семействе состояний (IV.4.3) *при любой функции отклонения вида $W_\varphi(\hat{\varphi}) = W(\varphi - \hat{\varphi})$, где $W(\cdot)$ четная 2π-периодическая непрерывная функция на $\mathbb{R}$ такая, что*

$$\int_0^{2\pi} W(\varphi)\cos k\varphi\,\mathrm{d}\varphi \leqslant 0; \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{IV.4.5}$$

Доказательство. Всякая функция, удовлетворяющая условию теоремы, разлагается в ряд Фурье

$$W(\varphi) = w_0 - \sum_{k=1}^{\infty} w_k \cos k\varphi,$$

где $w_k \geqslant 0$; $k = 1, 2, \ldots$ Используя (IV.4.2), получаем распределение вероятностей ковариантного измерения $\mathbf{M}$ относительно состояния $S = |\psi)(\psi|$

$$\mu_0(\mathrm{d}\varphi) = \left[\sum_{m,m'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m'-m)\varphi} p_{mm'}(m'|\psi)(\psi|m)\right]\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} \tag{IV.4.6}$$

где суммирование по $-j \leqslant m$, $m' \leqslant j$. Согласно (IV.3.2) и (IV.4.6)

$$\mathscr{R}_0\{\mathbf{M}\} = w_0 - \sum_{k=1}^{\infty} w_k \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \sum_{m,m'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m'-m)\varphi} p_{mm'}(m'|\psi)(\psi|m)\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}.$$

Коэффициент при w_k равен

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{m,m':\\ |m-m'|=k}} (\psi|m)p_{mm'}(m'|\psi).$$

В силу положительной определенности

$$|p_{mm'}| \leqslant \sqrt{p_{mm} \cdot p_{m'm'}} = 1, \tag{IV.4.7}$$

так что

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{m,m': \\ |m-m'|=k}} (\psi|m) p_{mm'} (m'|\psi) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,m': \\ |m-m'|=k}} |(\psi|m)|\, |(m'|\psi)|,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $p_{mm'} = \gamma_m \bar{\gamma}_{m'}$. Отсюда следует, что $\mathscr{R}_0\{\mathbf{M}\} \geqslant \mathscr{R}_0\{\mathbf{M}_*\}$, где

$$\mathscr{R}_0\{\mathbf{M}_*\} = w_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} w_k \sum_{\substack{m,m' \\ |m-m'|=k}} |(\psi|m)| \cdot |(m'|\psi)|. \tag{IV.4.8}$$

Примерами функций отклонения, удовлетворяющих условиям теоремы, являются (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} &4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 - 2 \cos \varphi, \\ &\min\{\varphi, 2\pi - \varphi\} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{(2k+1)^2}, \\ &\left|\sin \frac{\varphi}{2}\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{4k^2 - 1}. \end{aligned}$$

Квадратичное $(\mathrm{mod} 2\pi)$ отклонение $\min\{(\varphi - \hat{\varphi})^2, (2\pi - \varphi + \hat{\varphi})^2\}$ не удовлетворяет условию (IV.4.5). Формально этому условию удовлетворяет периодическая дельта-функция

$$-\delta(\varphi (\mathrm{mod} 2\pi)) = -\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi,$$

которой соответствует измерение максимального правдоподобия. На самом деле доказательство теоремы распространяется на любые периодические обобщенные функции с $w_k \geqslant 0$, поскольку значение k в сумме ряда $\mathscr{R}_0\{\mathbf{M}\}$ не может превышать $2j$, так что ряд в правой части фактически содержит конечное число членов. Таким образом, (IV.4.4) *задает также ковариантное измерение максимального правдоподобия для семейства* (IV.4.3).

Нетрудно дать абстрактную характеристику функций, удовлетворяющих условию (IV.4.5). Заметим, что $w_0 - W(\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, является преобразованием Фурье четной неотрицательной меры, сосредоточенной в целочисленных точках, и, следовательно, является положительно определенной функцией. Отсюда следует, что 2π-периодическая функция $W(\cdot)$ удовлетворяет условию (IV.4.5) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j,k} W(\varphi_j - \varphi_k) \bar{c}_j c_k \leqslant 0$$

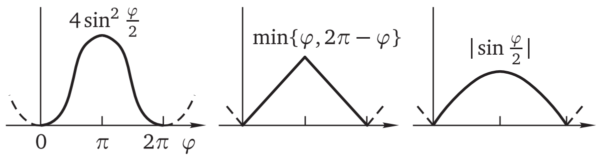

Рис. 1.

для любых комплексных c_j, таких, что $\sum_j c_j = 0$ и любых $\varphi_k \in \mathbb{R}$.

Теорема IV.4.1 показывает, что оптимальное измерение (IV.4.4) обладает весьма желательным свойством: оно нечувствительно к выбору меры отклонения в широком классе функций.

Если исходное состояние таково, что $\arg(m|\psi)$ не зависит от m, в частности, если $(m|\psi) \geqslant 0$ для всех m, то $\gamma_m = \mathrm{const}$ и оптимальное ковариантное измерение совпадает с каноническим измерением угла поворота в представлении углового момента (III.12.10). Однако если $\arg(m|\psi)$ зависит от m, то каноническое измерение уже не оптимально и имеет худшую точность по сравнению с наилучшей возможной (IV.4.8). Оптимальное измерение учитывает априорную информацию, содержащуюся в изменениях фазы комплексных чисел $(m|\psi)$, определяемых исходным состоянием $S = |\psi)(\psi|$.

Заметим, что преобразуя базис $\{|m)\}$ в $|m)' = \gamma_m|m)$, мы приводим оптимальное измерение (IV.4.4) к каноническому виду. Каноническое измерение является равноправным представителем в семействе оптимальных ковариантных измерений, которые связаны друг с другом упомянутыми калибровочными преобразованиями.

Результаты этого раздела применимы и к измерениям фазы гармонического осциллятора (см. § III.9), а также к измерениям угла поворота для пространственных степеней свободы (см. § III.12), с той существенной модификацией, что индекс m должен пробегать диапазон от 0 до ∞ в случае фазы и от $-\infty$ до ∞ во втором случае. Представление ковариантных измерений имеет тот же вид (IV.4.2), где m, m' изменяются в соответствующих диапазонах, и теорема IV.4.1 распространяется на эти случаи с поправками на сходимость соответствующих рядов. Однако при доказательстве (IV.4.2) мы не можем сослаться на теорему IV.2.3, поскольку прстранство представления бесконечномерно в этих случаях. Результаты будут следовать из более общей теории представлений группы $\mathbb{T}$, которая будет рассмотрена в § 6.

§ 5. Соотношения неопределенностей для угловых величин

Для того, чтобы установить соотношение неопределенностей для таких величин, как угол и фаза, следует сначала определить подходящую меру неопределенности. То обстоятельство, что угловые величины изменяются периодически от 0 до 2π, заставляют отказаться от дисперсии, которая служит мерой неопределенности для таких величин, как координата и время, которые пробегают всю вещественную прямую. В самом деле, значения угла $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ следует рассматривать как совпадающие, а значения $\varphi \approx 0$, $\varphi \approx 2\pi$

как «близкие». Так, симметричное относительно точки $\varphi=\pi$ распределение $\mu(\mathrm{d}\varphi)$, сосредоточенное на краях интервала $[0,2\pi)$, будет иметь дисперсию $D(\varphi)=\int_0^{2\pi}(\varphi-E(\varphi))^2\mu(\mathrm{d}\varphi)\approx\pi^2$, тогда как всякая разумная мера неопределенности такого распределения должна быть близка к нулю.

Рассмотрим комплексную случайную величину $\exp(\mathrm{i}\varphi)$, пробегающую единичную окружность. Ее дисперсия равна

$$D(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=\int_0^{2\pi}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|^2\mu(\mathrm{d}\varphi)=1-|E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|^2,$$

где $E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mu(\mathrm{d}\varphi)$, μ — распределение вероятностей угла φ. Введем следующую меру неопределенности

$$\Delta(\varphi)=\frac{D(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{|E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|^2}\equiv|E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|^{-2}-1. \tag{IV.5.1}$$

Заметим, что $|E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|$ равно расстоянию от центра масс распределения $\exp(\mathrm{i}\varphi)$, сосредоточенного на единичной окружности, до центра круга. Поэтому $\Delta(\varphi)=0$ для δ-распределений (полная определенность) и $\Delta(\varphi)=\infty$ для равномерного распределения (полная неопределенность).

Пусть $\mu(\mathrm{d}\varphi)=(\psi|M(\mathrm{d}\varphi)\psi)$ распределение вероятностей измерения $\mathbf{M}=\{M(\mathrm{d}\varphi)\}$ относительно чистого состояния $S=|\psi)(\psi|$. Обозначим соответствующую неопределенность $\Delta_S\{\mathbf{M}\}$. Поскольку состояние S фиксировано, мы будем опускать его в обозначениях. Тогда для всякого ковариантного измерения угла φ

$$\Delta\{\mathbf{M}\}\geqslant\Delta_*(\varphi)=\left[\sum_m|(\psi|m)||(m-1|\psi)|\right]^{-2}-1, \tag{IV.5.2}$$

причем равенство достигается для оптимального измерения (IV.4.4). В самом деле, вычисляя математическое ожидание величины $\exp(\mathrm{i}\varphi)$ относительно распределения (IV.4.6), находим

$$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=\sum_m(\psi|m)p_{m,m-1}(m-1|\psi),$$

откуда, согласно (IV.4.7)

$$|E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\leqslant\sum_m|(\psi|m)||(m-1|\psi)|,$$

и (IV.5.2) следует из (IV.5.1). Заметим, что диапазон значений m здесь произволен, так что результат применим к измерениям угла как для спиновых, так и для пространственных степеней свободы, а также к измерениям фазы.

Отметим, что для ковариантного измерения $\mathbf{M}$ неопределенность $\Delta\{\mathbf{M}\}$ одинакова для всех состояний S_φ, полученных из S с использованием соотношения (IV.4.3). Таким образом, оптимальное ковариантное измерение для семейства (IV.4.3) является измерением минимальной неопределенности для всех состояний этого семейства. Для канонического измерения $p_{mm'}=1$ и

$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \sum(\psi|m)(m-1|\psi)$. Таким образом, оно оптимально тогда и только тогда, когда

$$\left|\sum(\psi|m)(m-1|\psi)\right| = \sum |(\psi|m)(m-1|\psi)|$$

что выполняется, если $\arg(\psi|m)(m-1|\psi) \equiv \varphi_0$ не зависит от m. Это означает, что $\operatorname{Arg}(m|\psi) = -m\varphi_0 + \mathrm{const}$, т. е. состояние принадлежит семейству (IV.4.3), порождаемому исходным состоянием, удовлетворяющим условию $\arg(m|\psi) = {}$ $= \mathrm{const}$. В противном случае найдется ковариантное измерение, имеющее меньшую неопределенность, чем каноническое измерение. Величина $\Delta_*(\varphi)$ в правой части (IV.5.2), таким образом, представляет внутреннюю минимальную неопределенность угла φ в чистом состоянии $S = |\psi)(\psi|$. Теперь мы установим соотношение неопределенностей «угол-угловой момент»,

$$\Delta_*(\varphi) \cdot D(J) > \tfrac{1}{4}, \tag{IV.5.3}$$

для произвольного чистого состояния $S = |\psi)(\psi|$.

Производя калибровочное преобразование $|m)' = \gamma_m|m)$ с $\gamma_m = (m|\psi)/|(m|\psi)|$, получаем $'(m|\psi) \geqslant 0$. Таким образом, можно считать $(m|\psi) \geqslant 0$. Тогда

$$\sum_m |(\psi|m)(m-1|\psi)| = \sum_m (\psi|m)(m-1|\psi) = (\psi|E_+\psi) \equiv \overline{E}_+,$$

где E_+ дается соотношением (III.12.12) и $\overline{X}$ обозначает среднее значение X относительно состояния $|\psi)(\psi|$. Поэтому, согласно (IV.5.2)

$$\Delta_*(\varphi) = \frac{1 - |\overline{E}_+|^2}{|\overline{E}_+|^2} = \frac{1 - (\overline{C}^2 + \overline{S}^2)}{\overline{C}^2 + \overline{S}^2},$$

где C и S операторы «косинуса» и «синуса» $C = \frac{1}{2}(E_+ + E_-)$, $S = \frac{1}{2}\mathrm{i}(E_+ - E_-)$. Из (III.12.13)

$$C^2 + S^2 = I - \tfrac{1}{2}[|-j)(-j| + |j)(j|].$$

Используя тот факт, что $\overline{E}_+ = \overline{C} - \mathrm{i}\overline{S}$ и $D(C) = \overline{C^2} - \overline{C}^2$, $D(S) = \overline{S^2} - \overline{S}^2$, получаем

$$\Delta_*(\varphi) = [D(C) + D(S) + \tfrac{1}{2}(\overline{|-j)(-j|} + \overline{|j)(j|})] \cdot (\overline{C}^2 + \overline{S}^2)^{-1}.$$

Из (III.12.15) получаем

$$[C, J] = \mathrm{i}S, \qquad [S, J] = -\mathrm{i}C.$$

Из соотношения неопределенностей (II.6.4) с правой частью, переписанной в коммутаторной форме (II.6.6), получаем

$$D(C) \cdot D(J) \geqslant \tfrac{1}{4}\overline{S}^2, \qquad D(S) \cdot D(J) \geqslant \tfrac{1}{4}\overline{C}^2. \tag{IV.5.4}$$

Поэтому

$$\Delta_*(\varphi) \geqslant \tfrac{1}{4}D(J)^{-1} + \tfrac{1}{2}[|(\psi|-j)|^2 + |(\psi|j)|^2] \cdot (\overline{C}^2 + \overline{S}^2)^{-1}.$$

Поскольку $(\overline{C}^2+\overline{S}^2)^{-1}=|\overline{E}_+|^{-2}=\Delta_*(\varphi)+1$, то

$$\Delta_*(\varphi)\geqslant[1-\tfrac{1}{2}[|(\psi|-j)|^2+|(\psi|j)|^2]]^{-1}\cdot \\ \cdot[\tfrac{1}{4}D(J)^{-1}+\tfrac{1}{2}[|(\psi|-j)|^2+|(\psi|j)|^2]]. \qquad \text{(IV.5.5)}$$

Опуская неотрицательное слагаемое $\frac{1}{2}[|(\psi|-j)|^2+|(\psi|j)|^2]$, получаем неравенство $\Delta_*(\varphi)\geqslant[4D(J)]^{-1}$.

Покажем, что равенство здесь никогда не достигается. Если бы оно достигалось, то $(\psi|-j)=(\psi|j)=0$, поскольку эти слагаемые опущены в (IV.5.5), и соотношения (IV.5.4) обращаются в равенства. В соответствии с (II.6.5) это выполняется тогда и только тогда, когда

$$[(C-\overline{C})+\mathrm{i}\alpha(J-\overline{J})]\psi=0, \qquad [(S-\overline{S})+\mathrm{i}\beta(J-\overline{J})]\psi=0$$

для некоторых вещественных α и β (мы исключаем случай $D(J)=0$). Обозначая $z=\beta-\mathrm{i}\alpha$, имеем $(E_--\overline{E}_-)\psi=z(J-\overline{J})\psi$, откуда $(m+1|\psi)=c_m(m|\psi)$, где $c_m=zm+\overline{E}_--z\overline{J}$. Поскольку $(-j|\psi)=0$, по индукции получаем $(m|\psi)=0$ для всех m, что невозможно для единичного вектора ψ. Это доказывает строгое неравенство в (IV.5.3).

Аналогично можно доказать соотношение неопределенностей для фазы θ гармонического осциллятора (см. § III.9). Из (IV.5.2) получаем для любого ковариантного измерения M параметра θ и для любого чистого состояния $S=|\psi)(\psi|$

$$\Delta\{M\}\geqslant\Delta_*(\theta)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}|(\psi|n)(n-1|\psi)|\right]^{-2}-1.$$

Используя операторы P^*, P, задаваемые соотношением (III.9.17) вместо E_+, E_-, и вводя соответствующие операторы «косинуса» и «синуса», получаем

$$\Delta_*(\theta)\geqslant[1-\tfrac{1}{2}|(\psi|0)|^2]^{-1}\cdot[\tfrac{1}{4}D(N)^{-1}+\tfrac{1}{2}|(\psi|0)|^2],$$

где N оператор числа квантов. Соотношение неопределенностей «фаза-число квантов» имеет вид

$$\Delta_*(\theta)D(N)\geqslant\tfrac{1}{4}.$$

Наконец, для ковариантного измерения угла поворота в случае пространственных степеней свободы (см. § III.12) получаем неравенство (IV.5.2), где m пробегает от $-\infty$ до ∞, и соотношение неопределенностей (IV.5.3), с оператором орбитального углового момента L вместо J. Для этого следует использовать операторы U, U^*, задаваемые соотношением (III.12.7) вместо E_+, E_-.

В разделе VI.3 мы получим общее неравенство для неопределенности углового параметра, справедливое для произвольных состояний.

§ 6. Ковариантные измерения углового параметра в случае произвольного представления группы $\mathbb{T}$

В этом разделе мы существенно обобщим результаты раздела § 4. Это также поможет нам в изучении ковариантных измерений параметра сдвига в $\mathbb{R}$. Пусть $\varphi\to V_\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ — проективное унитарное представление группы $\mathbb{T}$. Поскольку значение $\varphi = 2\pi$ отвечает тождественному автоморфизму состояний, должно быть $V_{2\pi} = \exp(\mathrm{i}a_0)$, где a_0 вещественно. Полагая $V_{2\pi k+\varphi} = V_{2\pi}^k \cdot V_\varphi$, получаем проективное унитарное представление аддитивной группы $\mathbb{R}$. Согласно предложению III.2.1, оно сводится к унитарному представлению $\varphi \to \exp(-\mathrm{i}\varphi A)$, где A самосопряженный оператор. Условие $V_{2\pi} = \exp(\mathrm{i}a_0)$ влечет, что спектр A сосредоточен в точках вида $m = k + a$, где k — целые числа, т. е. A имеет спектральное разложение

$$A = \sum_m mE_m, \tag{IV.6.1}$$

где E_m — проектор на собственное подпространство $\mathscr{H}_m$, отвечающее собственному значению m. Пространство $\mathscr{H}$ является прямой ортогональной суммой этих подпространств:

$$\mathscr{H} = \bigoplus_m \mathscr{H}_m, \tag{IV.6.2}$$

т. е. для всякого $\psi \in \mathscr{H}$

$$\psi = \sum_m \psi_m, \qquad \|\psi\|^2 = \sum_m \|\psi_m\|^2, \tag{IV.6.3}$$

где $\psi_m = E_m\psi$ — компонента вектора ψ в подпространстве $\mathscr{H}_m$. Мы будем кратко писать $\psi = [\psi_m]$. Тогда

$$\exp(\mathrm{i}\varphi A)\psi = [\exp(\mathrm{i}m\varphi)\psi_m].$$

Мы изучим измерения $M(\mathrm{d}\varphi)$ со значениями в $[0, 2\pi)$, которые ковариантны относительно представления группы $\mathbb{T}$. Если $\dim\mathscr{H}_m \equiv 1$, мы получим как частные случаи, рассмотренные в § 4.

Ядром здесь называется матрица $[K_{mm'}]$, где $K_{mm'}$ — ограниченный оператор из $\mathscr{H}_{m'}$ в $\mathscr{H}_m$. Ограниченному оператору K в $\mathscr{H}$ соответствует ядро $[E_mKE_{m'}]$. В частности, единичный оператор задается ядром $[\delta_{mm'}E_m]$. Ядро является *положительно определенным*, $[K_{mm'}] \geqslant 0$, если

$$\sum_{m,m'} (\psi_m | K_{mm'}\psi_{m'}) \geqslant 0$$

для любого $\psi = [\psi_m]$. Положительному оператору соответствует положительно определенное ядро.

Теорема IV.6.1. *Измерения, ковариантные относительно представления группы $\mathbb{T}$, описываются ядрами*

$$M(B) = \left[K_{mm'} \int_B \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m'-m)\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\right]; \qquad B \in \mathscr{A}([0, 2\pi)),$$

где $[K_{mm'}]$ — произвольное положительно определенное ядро, такое что $K_{mm} = E_m$.

Доказательство. Применяя (IV.2.1) к представлению $\varphi \to \exp(-\mathrm{i}\varphi A)$, имеем

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Tr}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi A} S \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi A} M(B) \mathrm{d}\varphi = \mathrm{mes} B,$$

где mes обозначает меру Лебега на $[0, 2\pi)$. Возьмем в качестве оператора плотности S оператор S_m, действующий в пространстве $\mathscr{H}_m$, т. е. $S_m E_m = E_m S_m = S_m$. Тогда $\exp(-\mathrm{i}\varphi A) S_m \exp(\mathrm{i}\varphi A) = S_m$ и обозначая через Tr_m след в пространстве $\mathscr{H}_m$, имеем

$$\mathrm{Tr}_m\, S_m M_{mm}(B) = (2\pi)^{-1} \mathrm{mes} B,$$

где $M_{mm'}(B) = E_m M(B) E_{m'}$. Поскольку это выполняется для произвольного S_m в $\mathscr{H}_m$, то

$$M_{mm}(B) = E_m \frac{\mathrm{mes} B}{2\pi}. \tag{IV.6.4}$$

Из положительности оператора $M(B)$ и неравенства Коши—Буняковского

$$|(\psi_m | M_{mm'}(B) \psi_{m'})| \leqslant \frac{\mathrm{mes} B}{2\pi} \|\psi_m\| \cdot \|\psi_{m'}\|,$$

для всех ψ_m, $\psi_{m'}$. Согласно предложению IV.2.2

$$M_{mm'}(B) = \int_B P_{mm'}(\varphi) \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi},$$

где $P_{mm'}(\cdot)$ — ограниченная операторнозначная функция, $\|P_{mm'}(\varphi)\| \leqslant 1$ почти всюду. Поскольку $M_{mm'}(B)$ отображает $\mathscr{H}_{m'}$ в $\mathscr{H}_m$, это же верно и для $P_{mm'}(\varphi)$. Из (IV.6.4) $P_{mm}(\varphi) \equiv E_m$; положительность $M(B)$ влечет, что ядро $[P_{mm'}(\varphi)]$ положительно определено для почти всех φ. Как в доказательстве теоремы IV.2.3, ковариантность измерения $\{M(B)\}$ влечет

$$P_{mm'}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m'-m)\varphi} P_{mm'}(0)$$

при надлежащем определении плотностей $P_{mm'}(\cdot)$. Полагая $K_{mm'} = P_{mm'}(0)$, получаем утверждение теоремы.

Обратно, всякое ядро $[K_{mm'}]$, удовлетворяющее условиям теоремы, определяет соответствующее ковариантное измерение.

Рассмотрим теперь задачу *ковариантного оценивания* параметра сдвига (поворота) φ в семействе состояний

$$S_\varphi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi A} S \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi A}, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{IV.6.5}$$

где $S = |\psi)(\psi|$ — чистое состояние. Пусть функция отклонения $W(\varphi - \hat{\varphi})$ непрерывна и удовлетворяет условию (IV.4.5); тогда

$$W(\varphi) = w_0 - \sum_{k=1}^{\infty} w_k \cos k\varphi \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi},$$

где $v_k \leqslant 0$ при $k \neq 0$ и $\sum |v_k| < \infty$. Пусть $\mathbf{M}$ — ковариантное измерение, определяемое ядром $[K_{mm'}]$ в соответствии с теоремой IV.6.1. Рассуждая как при доказательстве теоремы IV.4.1, имеем

$$\mathscr{R}_0\{\mathbf{M}\} = \sum_{m,m'} v_{m-m'}(\psi_m|K_{mm'}\psi_{m'}) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{m,m'} v_{m-m'}\|\psi_m\| \cdot \|\psi_{m'}\|,$$

где ψ_m — компоненты вектора ψ, причем равенство достигается при

$$K_{mm'} = \frac{|\psi_m)(\psi_{m'}|}{\|\psi_m\| \cdot \|\psi_{m'}\|}. \tag{IV.6.6}$$

Аналогичные рассуждения проходят и для функции отклонения $W(\hat{\varphi} - \varphi) = -\delta((\hat{\varphi} - \varphi) \pmod{2\pi})$, если предположить, что $\sum \|\psi_m\| < \infty$.

Положительная операторнозначная мера, отвечающая ядру (IV.6.6),

$$M_0(\mathrm{d}\varphi) = \left[\frac{|\psi_m)(\psi_{m'}|}{\|\psi_m\| \cdot \|\psi_{m'}\|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m'-m)\varphi}\right]\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}$$

является измерением, только если $\dim \mathscr{H}_m \equiv 1$, так как в противном случае

$$E_0 \equiv \int M_0(\mathrm{d}\varphi) = \sum_m \frac{|\psi_m)(\psi_m|}{(\psi_m|\psi_m)} \neq I.$$

Оператор E_0 является проектором на подпространство $\mathscr{H}_0$, порожденное компонентами ψ_m исходного вектора ψ.

В силу этого мера $M_0(\mathrm{d}\varphi)$ может быть продолжена до разложения единицы в $\mathscr{H}$ (без изменения величины меры точности) по формуле

$$M_*(\mathrm{d}\varphi) = M_0(\mathrm{d}\varphi) \oplus M_1(\mathrm{d}\varphi), \tag{IV.6.7}$$

где $M_1(\mathrm{d}\varphi)$ — произвольное разложение единицы в ортогональном дополнении к $\mathscr{H}_0$. Поскольку состояния S_φ сосредоточены на $\mathscr{H}_0$, распределение вероятностей дается соотношением

$$\mu_\varphi(\mathrm{d}\hat{\varphi}) \equiv \mathrm{Tr}\, S_\varphi M_*(\mathrm{d}\hat{\varphi}) = (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi A}\psi|M_0(\mathrm{d}\hat{\varphi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi A}\psi) =$$
$$= \left|\sum_n \|\psi_m\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\hat{\varphi}-\varphi)}\right|^2 \frac{\mathrm{d}\hat{\varphi}}{2\pi},$$

так что добавок $M_1(\mathrm{d}\varphi)$ никак не проявляется в статистике измерения и в значении среднего отклонения. Можно положить, например,

$$M_1(\mathrm{d}\varphi) = (I - E_0)\mu(\mathrm{d}\varphi),$$

где μ — произвольное распределение вероятностей. Конечно, $\mathbf{M}_*$ будет ковариантно лишь если ковариантно $\mathbf{M}_1$, что выполняется для равномерного распределения μ.

Если $\dim\mathscr{H}_m$ равны для всех m, то подпространства $\mathscr{H}_m$ изоморфны между собой. Пусть $U_{mm'}$ — согласованная система изометрических отображений $\mathscr{H}_{m'}$ на $\mathscr{H}_m$, так что $U_{mm} = E_m$, $U_{mm'}U_{m'm''} = U_{mm''}$. Ядро $[U_{mm'}]$ удовлетворяет условиям теоремы IV.6.1. Рассмотрим соответствующее ковариантное измерение

$$M(\mathrm{d}\varphi) = [U_{mm'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m'-m)\varphi}]\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}.$$

Считая, что отображение $U_{mm'}$ «отождествляет» пространства $\mathscr{H}_{m'}$ и $\mathscr{H}_m$, получаем «каноническое» ковариантное измерение

$$M(\mathrm{d}\varphi) = [E_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m'-m)\varphi}]\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}. \tag{IV.6.8}$$

Конечно, оно зависит от способа отождествления пространств $\{\mathscr{H}_m\}$.

Измерение (IV.6.8) будет оптимальным для данного семейства состояний (IV.6.5), если

$$(\psi_m|U_{mm'}|\psi_{m'}) \equiv (\psi_m|\psi_{m'}) = \|\psi_m\|\,\|\psi_{m'}\|.$$

Это выполняется тогда и только тогда, когда $\psi_m = \alpha_m e$ при данном способе отождествления $\{\mathscr{H}_m\}$, где $\alpha_m \geqslant 0$, а e — фиксированный вектор из $\mathscr{H}_m$. В противном случае найдется ковариантное измерение с меньшим средним отклонением.

§ 7. Ковариантные измерения параметра сдвига

Наиболее важными примерами параметров сдвига на всей прямой $\mathbb{R}$ являются координата x и время t. Мы рассмотрим ковариантные измерения параметра сдвига сначала с общей точки зрения.

Рассмотрим произвольное проективное унитарное представление группы сдвигов $\mathbb{R}$. Согласно предложению III.2.1, оно всегда сводится к унитарному представлению

$$\theta \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A}, \tag{IV.7.1}$$

где A — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. В общем случае спектральная теорема фон Неймана позволяет утверждать, что A может быть реализован как оператор умножения на независимую переменную в непрерывной ортогональной сумме гильбертовых пространств. Мы дадим описание этой конструкции в частном случае, когда оператор A имеет «чисто лебегов» спектр. Как и все содержание этого параграфа, построение будет носить формальный характер, так как строгое обоснование заняло бы слишком много места. Полезно рассматривать результаты этого параграфа как непрерывный аналог результатов предыдущего раздела, когда расстояние между собственными значениями оператора A стремится к нулю и они непрерывно заполняют некоторый интервал Λ вещественной прямой.

Пусть для почти любого $\lambda \in \Lambda$ задано гильбертово пространство $\mathscr{H}_\lambda$ со скалярным произведением $(\cdot|\cdot)_\lambda$ и нормой $\|\cdot\|_\lambda$. *Непрерывной ортогональной суммой* пространств $\mathscr{H}_\lambda$ относительно меры Лебега

$$\mathscr{H} = \int_\Lambda \bigoplus \mathscr{H}_\lambda \,\mathrm{d}\lambda \tag{IV.7.2}$$

называется пространство, состоящее из функций $\psi = [\psi_\lambda]$, где $\psi_\lambda \in \mathscr{H}_\lambda$, таких, что

$$\|\psi\|^2 \equiv \int_\Lambda \|\psi_\lambda\|_\lambda^2 \mathrm{d}\lambda < \infty. \tag{IV.7.3}$$

ψ_λ называется *компонентой* вектора ψ в $\mathscr{H}_\lambda$. Скалярное произведение в $\mathscr{H}$ определяется формулой

$$(\varphi|\psi) = \int_\Lambda (\varphi_\lambda|\psi_\lambda)_\lambda \, \mathrm{d}\lambda. \tag{IV.7.4}$$

Таким образом, мы предполагаем, что наше пространство $\mathscr{H}$ разлагается в непрерывную сумму (IV.7.2), а оператор A действует в (IV.7.2) как оператор умножения на λ:

$$A\psi = [\lambda\psi_\lambda]; \qquad \psi = [\psi_\lambda].$$

Отсюда следует, что $\exp(\mathrm{i}\theta A)\psi = [\exp(\mathrm{i}\theta\lambda)\psi_\lambda]$. Формулы ((IV.7.2) и (IV.7.3) являются непрерывным аналогом соотношений (IV.6.2) и (IV.6.3).

Ядром $[K(\lambda, \lambda')]$ называется функция, определенная для почти всех λ, $\lambda' \in \Lambda$ и такая, что $K(\lambda, \lambda')$ является ограниченным оператором из $\mathscr{H}_{\lambda'}$ в $\mathscr{H}_\lambda$. Оператор K в $\mathscr{H}$ *задается ядром* $[K(\lambda, \lambda')]$, если для любого $\psi \in \mathscr{H}$

$$K\psi = \left[\int_\Lambda K(\lambda, \lambda')\psi_{\lambda'} \, \mathrm{d}\lambda'\right]. \tag{IV.7.5}$$

Этому соответствию можно придать непосредственный смысл, если K является оператором Гильберта—Шмидта (*ср.* § II.7); для эрмитова оператора Гильберта—Шмидта $K = \sum \kappa_j |\psi^j)(\psi^j|$, очевидно, $K(\lambda, \lambda') = \sum \kappa_j |\psi^j_\lambda)_{\lambda\lambda'}(\psi^j_{\lambda'}|$, где ψ^j_λ компонента ψ^j в $\mathscr{H}_\lambda$. Таким образом, $K^j(\lambda, \lambda') = |\psi^j_\lambda)_{\lambda\lambda'}(\psi^j_{\lambda'}|$ есть оператор из $\mathscr{H}_{\lambda'}$ в $\mathscr{H}_\lambda$, действующий по формуле

$$K^j(\lambda, \lambda')\psi_{\lambda'} = \psi^j_\lambda(\psi^j_{\lambda'}|\psi_{\lambda'})_{\lambda'}.$$

Однако мы будем пользоваться формальным соответствием между операторами и ядрами и в более широком контексте; например, единичному оператору в $\mathscr{H}$ будем сопоставлять ядро $[\delta(\lambda - \lambda')I_\lambda]$, где I_λ — единичный оператор в $\mathscr{H}_\lambda$.

Положительным операторам K соответствуют *положительно определенные ядра*

$$\iint (\psi_\lambda|K(\lambda, \lambda')\psi_{\lambda'})_\lambda \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\lambda' \geqslant 0; \qquad \psi = [\psi_\lambda]. \tag{IV.7.6}$$

Подставляя вместо ψ_λ выражение $f(\lambda)\psi_\lambda$, где f — произвольная скалярная функция, получаем, что (IV.7.6) выполняется тогда и только тогда, когда для любого $\psi = [\psi_\lambda]$ скалярное ядро $[(\psi_\lambda|K(\lambda, \lambda')\psi_{\lambda'})_\lambda]$ является положительно определенным. Из неравенства Коши—Буняковского следует, что для положительно определенного ядра выполняется

$$|(\psi_\lambda|K(\lambda, \lambda')\psi_{\lambda'})_\lambda|^2 \leqslant (\psi_\lambda|K(\lambda, \lambda)\psi_\lambda)_\lambda(\psi_{\lambda'}|K(\lambda', \lambda')\psi_{\lambda'})_{\lambda'} \tag{IV.7.7}$$

для почти всех λ, $\lambda' \in \Lambda$, где $K(\lambda, \lambda)$ определено надлежащим образом (*ср.* замечание перед (II.7.16)).

Приведем непрерывный аналог теоремы IV.6.1, дающий общий вид измерения, ковариантного относительно представления (IV.7.1) группы сдвигов:

$$M(B) = \left[K(\lambda, \lambda') \int_B \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda'-\lambda)\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right]; \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}), \tag{IV.7.8}$$

где $[K(\lambda, \lambda')]$ — *положительно определенное ядро, удовлетворяющее условию* $K(\lambda, \lambda) = I_\lambda$. Формально легко проверяется, что (IV.7.8) действительно является разложением единицы: $M(\mathrm{d}\theta) \geqslant 0$ в силу положительной определенности ядра

$$[K(\lambda, \lambda') \exp \mathrm{i}(\lambda' - \lambda)\theta]$$

и

$$\int M(\mathrm{d}\theta) = [\delta(\lambda - \lambda')I_\lambda] = I.$$

Рассмотрим случай, когда $\dim \mathscr{H}_\lambda$ совпадают для почти всех $\lambda \in \Lambda$. Пусть $\{U(\lambda, \lambda')\}$ — согласованное семейство изометрических отображений $\mathscr{H}_{\lambda'}$ на $\mathscr{H}_\lambda$. Тогда $[U(\lambda, \lambda')]$ является ядром, определяющим ковариантное измерение согласно (IV.7.8). Отождествляя между собой пространства $\mathscr{H}_\lambda$, получаем «каноническое измерение»

$$M(\mathrm{d}\theta) = [I_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda'-\lambda)\theta}] \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

Пусть $S = |\psi)(\psi|$, где $\psi = [\psi_\lambda]$, — чистое состояние. Обозначая через $\Phi_\psi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}\lambda\theta)(\psi|M(\mathrm{d}\theta)\psi)$ характеристическую функцию распределения вероятностей результатов измерения относительно состояния S, получаем, интегрируя (IV.7.8),

$$\Phi_\psi(\lambda) = \int (\psi_\mu|K(\mu, \mu - \lambda)\psi_{\mu-\lambda})\mathrm{d}\mu. \tag{IV.7.9}$$

Интеграл сходится, поскольку, в силу (IV.7.7) и условия $K(\lambda, \lambda) = I_\lambda$

$$|(\psi_\mu|K(\mu, \mu - \lambda)\psi_{\mu-\lambda})| \leqslant \|\psi_\mu\|_\mu \|\psi_{\mu-\lambda}\|_{\mu-\lambda}, \tag{IV.7.10}$$

и обе функции в правой части квадратично интегрируемы. Если дополнительно предположить, что

$$\int_\Lambda \|\psi_\lambda\|_\lambda \mathrm{d}\lambda < \infty, \tag{IV.7.11}$$

то характеристическая функция оказывается интегрируемой и тогда распределение вероятностей измерения имеет непрерывную плотность

$$\begin{aligned} p_\psi(\theta) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\lambda} \Phi_\psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint (\psi_\lambda|K(\lambda, \lambda')\psi_{\lambda'})_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda'-\lambda)\theta} \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\lambda'. \end{aligned}$$

Это согласуется с выражением для $M(\mathrm{d}\theta)/\mathrm{d}\theta$, которое формально получается непосредственно из (IV.7.8).

Обратимся теперь к проблеме *ковариантного оценивания параметра сдвига* θ в семействе состояний

$$S_\theta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A} S \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}; \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Так как группа симметрий некомпактна, то мы уже не можем применить теорему IV.3.1. Более того, байесовская мера точности с «равномерным распределением» $\mathrm{d}\theta$ вообще не определена. Можно было бы доказать аналог теоремы IV.3.1 для минимаксного критерия, однако мы ограничимся рассмотрением минимума среднего отклонения

$$\mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\} = \int_{-\infty}^{\infty} W(\hat{\theta} - \theta)\mu_\theta(\mathrm{d}\hat{\theta})$$

в классе ковариантных измерений. В силу ковариантности, эта величина фактически не зависит от θ, так что нужно минимизировать

$$\mathscr{R}_0\{\mathbf{M}\} = \int_{-\infty}^{\infty} W(\theta)\mu_0(\mathrm{d}\theta).$$

Как в теореме IV.4.1, мы предположим, что функция отклонения является вещественной непрерывной отрицательно определенной функцией, т. е. имеет вид

$$W(\theta) = -\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\lambda} \widetilde{W}(\mathrm{d}\lambda),$$

где $\widetilde{W}(\mathrm{d}\lambda)$ — положительная симметричная мера на прямой. Тогда для ковариантного измерения (IV.7.8) имеем

$$\mathscr{R}_0\{\mathbf{M}\} = -\int \Phi_\psi(\lambda)\widetilde{W}(\mathrm{d}\lambda).$$

В силу неравенства (IV.7.10)

$$\operatorname{Re}\Phi_\psi(\lambda) \leqslant \Phi_*(\lambda) \equiv \int \|\psi_\mu\|_\mu \|\psi_{\mu-\lambda}\|_{\mu-\lambda}\mathrm{d}\mu,$$

так что

$$\mathscr{R}_0\{\mathbf{M}\} \geqslant -\iint \|\psi_\mu\|_\mu \|\psi_{\mu-\lambda}\|_{\mu-\lambda}\mathrm{d}\mu\widetilde{W}(\mathrm{d}\lambda) = \mathscr{R}_0\{\mathbf{M}_0\},$$

где

$$M_0(\mathrm{d}\theta) = \left[\frac{|\psi_\lambda)_{\lambda\lambda'}(\psi_{\lambda'}|}{\|\psi_\lambda\|_\lambda \cdot \|\psi_{\lambda'}\|_{\lambda'}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda'-\lambda)\theta}\right] \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}. \tag{IV.7.12}$$

Как и в дискретном случае, оптимальная мера $M_0(\mathrm{d}\theta)$, вообще говоря, не является разложением единицы, так как $\int M_0(\mathrm{d}\theta) \equiv E_0$ равно единичному оператору лишь в случае $\dim\mathscr{H}_\lambda \equiv 1$ для почти всех $\lambda \in \Lambda$. Однако ее можно продолжить до разложения единицы, добавляя произвольное разложение единицы в ортогональном дополнении пространства $\mathscr{H}_0 = E_0(\mathscr{H})$:

$$M_*(\mathrm{d}\theta) = M_0(\mathrm{d}\theta) \oplus M_1(\mathrm{d}\theta). \tag{IV.7.13}$$

Добавок $M_1(\mathrm{d}\theta)$ не влияет на статистику измерений относительно состояний S_θ, которая определяется распределениями вероятностей

$$\mu_\theta(\mathrm{d}\hat{\theta}) = \left| \int_\Lambda \|\psi_\lambda\|_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\hat{\theta}-\theta)} \mathrm{d}\lambda \right|^2 \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{2\pi},$$

вытекающими из (IV.7.12). Однако он может повлиять на свойство ковариантности (IV.7.13). В любом случае, $M_*(\mathrm{d}\theta)$ является «существенно ковариантным», т. е. удовлетворяет условию ковариантности на подпространстве $\mathscr{H}_0$, на котором сосредоточено семейство $\{S_\theta\}$. Таким образом, *измерения вида* (IV.7.13) *являются оптимальными для любой функции отклонения указанного выше вида.*

Аналогичный вывод справедлив для метода максимального правдоподобия. Предположим, что исходное состояние $S = |\psi)(\psi|$ удовлетворяет условию (IV.7.11), так что существует непрерывная плотность $p_\psi(\mathrm{d}\hat{\theta})$. Формальная байесовская мера точности с функцией отклонения $W(\theta) = -\delta(\theta)$ и априорным распределением $\pi(\mathrm{d}\theta) = \mathrm{d}\theta$ имеет вид

$$\begin{aligned} -p_\psi(0) &= -\int \Phi_\psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \\ &= -\iint (\psi_\lambda|K(\lambda,\lambda')\psi_{\lambda'})_\lambda \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\lambda'. \end{aligned}$$

Она должна быть минимизирована по всем положительно определенным ядрам $[K(\lambda,\lambda')]$, удовлетворяющим условию $K(\lambda,\lambda) = I_\lambda$. Очевидно, что *решение этой задачи также дается формулами* (IV.7.12) и (IV.7.13).

Рассмотрим, наконец, представляющий наибольший интерес случай квадратичной функции отклонения

$$W(\hat{\theta}-\theta) = (\hat{\theta}-\theta)^2,$$

который отвечает задаче оценивания, рассмотренной в § III.2. Достаточно рассматривать только измерения с конечным вторым моментом, для которых величина

$$\mathscr{R}_0\{\mathbf{M}\} = \int \theta^2 \mu_S(\mathrm{d}\theta)$$

конечна. Как известно из теории вероятностей, конечность второго момента эквивалентна существованию второй производной характеристической функции в нуле, причем

$$\int \theta^2 \mu_S(\mathrm{d}\theta) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\Phi_\psi(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\,\mathrm{Re}\,\Phi_\psi(\lambda)\Big|_{\lambda=0}.$$

Предположим, что исходное состояние таково, что $\int |\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda\|\psi_\lambda\|_\lambda|^2\mathrm{d}\lambda < \infty$, и $\psi_\lambda = 0$ на краях интервала Λ (если интервал бесконечный, то это условие считается выполняющимся автоматически).

Тогда для измерения (IV.7.13) характеристическая функция $\Phi_\psi^*(\lambda)$ дважды дифференцируема в нуле, причем

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\Phi_\psi^*(\lambda)\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\int_\Lambda \|\psi_\mu\|_\mu \|\psi_{\mu-\lambda}\|_{\mu-\lambda}\mathrm{d}\mu$$
$$= -\int_\Lambda \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\|\psi_\lambda\|_\lambda\right|^2 \mathrm{d}\lambda,$$

где были использованы свойства функции $[\psi_\lambda]$. Рассмотрим функции $\operatorname{Re}\Phi_\psi(\lambda)$ и $\Phi_\psi^*(\lambda)$. Они связаны неравенством $\operatorname{Re}\Phi_\psi(\lambda) \leqslant \Phi_\psi^*(\lambda)$, дважды дифференцируемы в нуле, и $\operatorname{Re}\Phi_\psi(0) = \Phi_\psi^*(0)$. Отсюда следует, что $(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}\lambda^2)\Phi_\psi^*(0) \geqslant$ $\geqslant (\mathrm{d}^2/\mathrm{d}\lambda^2)\operatorname{Re}\Phi_\psi(0)$, так что $\mathscr{R}_0\{\mathbf{M}\} \geqslant \mathscr{R}_0\{\mathbf{M}_*\}$. Таким образом, *формулы* (IV.7.12) *и* (IV.7.13) *определяют измерение, которое имеет наименьшее среднеквадратичное отклонение в классе всех ковариантных измерений параметра сдвига* θ.

Измерение $\mathbf{M}=\{M(\mathrm{d}\theta)\}$ с конечными вторыми моментами является *несмещенным измерением* параметра θ, если $E_\theta\{\mathbf{M}\}=\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$, где индекс θ отвечает состоянию S_θ. Как в разделе III.2, всякое ковариантное измерение удовлетворяет соотношению $E_\theta\{\mathbf{M}\}=E_0\{\mathbf{M}\}+\theta$, так что является несмещенным с точностью до постоянной. Предполагая, что $E_0\{\mathbf{M}\}=0$, имеем $D_\theta\{\mathbf{M}\}=\mathscr{R}_0\{\mathbf{M}\}$, $\theta\in\mathbb{R}$. Таким образом, мы получили *границу для дисперсии ковариантного измерения*

$$D\{\mathbf{M}\} \geqslant D_*(\theta) \equiv \int_\Lambda \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\|\psi_\lambda\|_\lambda\right|^2 \mathrm{d}\lambda, \tag{IV.7.14}$$

которая достигается на оптимальном измерении, определяемом соотношениями (IV.7.12) и (IV.7.13). Величина $D_*(\theta)$ является внутренней мерой минимальной неопределенности параметра сдвига $\theta\in\mathbb{R}$ для чистого состояния $S=|\psi)(\psi|$. Она аналогична величине $\Delta_*(\varphi)$ из (IV.5.2), задающей неопределенность углового параметра. Замечая, что

$$\int_\Lambda \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\|\psi_\lambda\|_\lambda\right|^2 \mathrm{d}\lambda \geqslant \frac{1}{4}\left[\int_\Lambda (\lambda-c)^2\|\psi_\lambda\|_\lambda^2\mathrm{d}\lambda\right]^{-1},$$

(что является соотношением неопределенностей Гейзенберга (III.3.9) в импульсном представлении для функции состояния $\psi(\lambda)=\|\psi_\lambda\|_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$ и $\psi(\lambda)=0$, $\lambda\bar{\in}\Lambda$), получаем соотношение неопределенностей

$$D_*(\theta)\cdot D(A) \geqslant \tfrac{1}{4},$$

которое согласуется с (III.2.6). Более общий результат будет получен строго в § VI.3.

В качестве первого примера рассмотрим измерения параметра координаты x в семействе состояний

$$S_x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xP}|\psi)(\psi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}xP};\qquad x\in\mathbb{R}.$$

В этом случае роль оператора A играет оператор импульса P (мы считаем $\hbar = 1$), который диагонализуется в импульсном представлении

$$\psi = [\tilde{\psi}(\eta)], \qquad \|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta;$$

$$P\psi = [\eta\tilde{\psi}(\eta)].$$

Таким образом, пространство $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ разлагается в непрерывную сумму одномерных пространств $\mathscr{H}_\eta$, $\eta \in \Lambda \equiv \mathbb{R}$. Оптимальное ковариантное измерение дается ядром

$$M_*(\mathrm{d}x) = [\gamma_\eta \bar{\gamma}_{\eta'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta' - \eta)x}] \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}, \tag{IV.7.15}$$

которое является непрерывным аналогом (IV.4.4). Здесь $\gamma_\eta = \tilde{\psi}(\eta)/|\tilde{\psi}(\eta)|$. Если $\arg \tilde{\psi}(\eta) = \mathrm{const}$ для почти всех η, то получаем

$$M_*(\mathrm{d}x) = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta' - \eta)x}] \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}, \tag{IV.7.16}$$

что является символической записью уравнения (II.4.9) с точностью до обозначений аргументов. Таким образом, каноническое измерение (IV.7.16) является спектральной мерой самосопряженного оператора $\mathrm{i}\, \mathrm{d}/\mathrm{d}\eta$, отвечающего канонической наблюдаемой координаты Q в импульсном представлении. Оптимальное ковариантное измерение дается формулой (IV.7.15), которая описывает спектральную меру самосопряженного оператора

$$\gamma_\eta \mathrm{i}(\mathrm{d}/\mathrm{d}\eta)\bar{\gamma}_\eta.$$

Оно дает ковариантную оценку координаты x в семействе $\{S_x\}$ с минимальной дисперсией

$$D_*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}|\tilde{\psi}(\eta)|\right)^2 \mathrm{d}\eta.$$

Измерения (IV.7.15), отвечающие разным ψ, получаются друг из друга «калибровочными» преобразованиями $\tilde{\psi}(\eta) \to \gamma_\eta \tilde{\psi}(\eta)$ с $|\gamma_\eta| \equiv 1$.

Рассмотрим теперь ковариантные измерения параметра времени t в семействе состояний

$$S_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tE}|\psi)(\psi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tE}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Оператор энергии E ограничен снизу; мы примем, что он имеет непрерывный спектр, лежащий на положительной полупрямой $\Lambda = (0, \infty)$. Точнее, мы предполагаем, что пространство $\mathscr{H}$ разлагается в непрерывную сумму

$$\mathscr{H} = \int_0^{\infty} \bigoplus \mathscr{H}_{\boldsymbol{\epsilon}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon},$$

так что E действует как оператор умножения на $\boldsymbol{\epsilon}$: $E\psi = [\boldsymbol{\epsilon}\psi_{\boldsymbol{\epsilon}}]$, где $\psi_{\boldsymbol{\epsilon}}$ компонента ψ в $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\epsilon}}$. Оптимальное измерение параметра дается формулой

$$M_*(\mathrm{d}t) = \left[\frac{|\psi_{\boldsymbol{\epsilon}})_{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot {}_{\boldsymbol{\epsilon}'}(\psi_{\boldsymbol{\epsilon}'}|}{\|\psi_{\boldsymbol{\epsilon}}\|_{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \|\psi_{\boldsymbol{\epsilon}'}\|_{\boldsymbol{\epsilon}'}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\epsilon}' - \boldsymbol{\epsilon})t}\right] \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \oplus M_1(\mathrm{d}t). \tag{IV.7.17}$$

Если $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(0,\infty)$ как в § III.8, то можно принять $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{K}$, $\boldsymbol{\epsilon} \in (0,\infty)$. Это задает конкретный способ отождествления пространств $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\boldsymbol{\epsilon} \in (0,\infty)$, которому отвечает каноническое измерение

$$M(\mathrm{d}t) = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\epsilon}'-\boldsymbol{\epsilon})t}]\frac{\mathrm{d}t}{2\pi},$$

где мы опускаем единичный оператор в $\mathbb{K}$ в квадратных скобках. Это является символической формой общего соотношения, аналогичного (III.8.5), представляющего (неортогональную) спектральную меру канонической наблюдаемой времени $T = \mathrm{i}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}$. С другой стороны, первый, существенный член в оптимальном измерении времени (IV.7.17) является спектральной мерой оператора

$$\frac{|\psi_{\boldsymbol{\epsilon}})_{\boldsymbol{\epsilon}}}{\|\psi_{\boldsymbol{\epsilon}}\|_{\boldsymbol{\epsilon}}}\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}}\frac{{}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\psi_{\boldsymbol{\epsilon}}|}{\|\psi_{\boldsymbol{\epsilon}}\|_{\boldsymbol{\epsilon}}}$$

который отличается от T множителями, учитывающими исходное состояние.

§ 8. Случай неприводимого представления

Мы переходим к квантовым задачам оценивания с многомерным параметром θ. Представления группы симметрий в этих задачах будут неприводимыми благодаря некоммутативности группы либо существенной проективности представления. С другой стороны, неприводимость значительно упрощает описание ковариантных измерений.

Пусть $g \to V_g$ — неприводимое представление группы G в пространстве $\mathscr{H}$. Предположим сначала, что группа G компактна; из общей теории представлений вытекает, что всякое неприводимое представление G конечномерно, так что $d = \dim \mathscr{H} < \infty$. Для неприводимого представления имеют место *соотношения ортогональности*

$$\int (\psi_1|V_g\varphi_1)(\varphi_2|V_g^*\psi_2)\mu(\mathrm{d}g) = c(\varphi_2|\varphi_1)(\psi_1|\psi_2), \qquad \text{(IV.8.1)}$$

где c — коэффициент, зависящий от нормировки инвариантной меры μ и равный d^{-1} для принятой нами нормировки $\mu(G) = 1$.

Так как всякий оператор T в конечномерном пространстве является оператором конечного ранга, $T = \sum_i |\varphi_1^i)(\varphi_2^i|$, то из (IV.8.1) и выражения (II.1.17) для следа оператора конечного ранга вытекает

$$\int (\psi_1|V_gTV_g^*\psi_2)\mu(\mathrm{d}g) = d^{-1}(\psi_1|\psi_2)\,\mathrm{Tr}\,T, \qquad \psi_j \in \mathscr{H},$$

или

$$\int V_gTV_g^*\mu(\mathrm{d}g) = d^{-1}\,\mathrm{Tr}\,T \cdot I. \qquad \text{(IV.8.2)}$$

В частности, если S — оператор плотности, то

$$\int V_gSV_g^*\mu(\mathrm{d}g) = d^{-1}I. \qquad \text{(IV.8.3)}$$

Беря след от обеих частей этого равенства и замечая, что $\mathrm{Tr}\, V_g S V_g^* \equiv \mathrm{Tr}\, S = 1$, убеждаемся в правильности соответствия нашей нормировки значению $c = d^{-1}$. Если взять $c = 1$, то это соответствует нормировке

$$\mu(G) = \dim \mathscr{H} = d. \tag{IV.8.4}$$

Обращаясь к теореме IV.2.3, которая дает описание ковариантных измерений, видим, что условие (IV.2.2) в неприводимом случае эквивалентно тому, что $\mathrm{Tr}\, P_0 = d$; в совокупности с положительностью P_0 это означает, что $S_0 = d^{-1} P_0$ является оператором плотности. Таким образом, получаем

Предложение IV.8.1. *Пусть $g \to V_g$ — неприводимое представление компактной группы G преобразований множества Θ. Соотношение*

$$M(\mathrm{d}\theta) = d \cdot V_g S_0 V_g^* \nu(\mathrm{d}\theta) \qquad (\theta = g\theta_0), \tag{IV.8.5}$$

устанавливает взаимно-однозначное аффинное соответствие между ковариантными измерениями $M(\mathrm{d}\theta)$ и операторами плотности S_0, коммутирующими с операторами $\{V_g;\, g \in G_0\}$, где G_0 — стационарная подгруппа точки θ_0.

В частности, если G_0 тривиальна, то S_0 может быть произвольным оператором плотности и крайними точками множества ковариантных измерений являются те, которые отвечают одномерным проекторам $S_0 = |\psi_0)(\psi_0|$:

$$M(\mathrm{d}\theta) = d \cdot V_g |\psi_0)(\psi_0| V_g^* \nu(\mathrm{d}\theta).$$

Рассмотрим теперь *проблему ковариантного оценивания* для семейства состояний (IV.3.1). Согласно § 3, она сводится к решению задачи (IV.3.6), где $\widehat{W}_0$ — оператор апостериорного отклонения, задаваемый формулой (IV.3.5). Эта задача имеет простое решение в случае неприводимого представления, когда $\mathfrak{P}$ состоит из операторов P_0, коммутирующих с $\{V_g;\, g \in G_0\}$ и таких, что

$$P_0 \geqslant 0, \qquad \mathrm{Tr}\, P_0 = d.$$

Обозначим $\hat{w}_{\min}$ наименьшее собственное значение оператора $\widehat{W}_0$, а через $\widehat{E}_{\min}$ — проектор на соответствующее инвариантное подпространство. Тогда $\widehat{W}_0 \geqslant \hat{w}_{\min} \cdot I$, откуда

$$\mathrm{Tr}\, \widehat{W}_0 P_0 \geqslant \hat{w}_{\min}\, \mathrm{Tr}\, P_0 = \hat{w}_{\min} d.$$

Равенство здесь достигается, если

$$P_0 = \widehat{E}_{\min} \frac{d}{d_{\min}}, \tag{IV.8.6}$$

где $d_{\min}$ — размерность инвариантного подпространства, соответствующего минимальному собственному значению. Так как $\widehat{W}_0$ коммутирует с $\{V_g;\, g \in G_0\}$, то это же верно и для $\widehat{E}_{\min}$, так что оператор (IV.8.6) удовлетворяет всем необходимым условиям. Сформулируем полученный результат.

Предложение IV.8.2. *Пусть $g \to V_g$ — неприводимое представление компактной группы G преобразований множества Θ. Тогда оптимальным является ковариантное измерение*

$$M_*(\mathrm{d}\theta) = \frac{d}{d_{\min}} V_g \widehat{E}_{\min} V_g^* \upsilon(\mathrm{d}\theta) \qquad (\theta = g\theta_0),$$

где $\widehat{E}_{\min}$ проектор на инвариантное подпространство оператора апостериорного отклонения (IV.3.5)*, соответствующее минимальному собственному значению $\hat{w}_{\min}$, а $d_{\min}$ — размерность этого подпространства. Минимум среднего отклонения равен $\hat{w}_{\min} d$.*

Аналогичный результат имеет место для метода максимального правдоподобия: ковариантное измерение максимального правдоподобия параметра θ в семействе $\{S_\theta\}$ имеет вид

$$M(\mathrm{d}\theta) = \frac{d}{d_{\max}} V_g E_{\max} V_g^* \nu(\mathrm{d}\theta) \qquad (\theta = g\theta_0),$$

где $E_{\max}$ — проектор на собственное подпространство, отвечающее максимальному собственному числу оператора $S = S_{\theta_0}$, а $d_{\max}$ — размерность этого подпространства.

Эти результаты достаточны для решения конкретных задач оценивания, которые будут рассмотрены в следующих двух разделах. Мы завершим настоящий раздел обсуждением случая некомпактных групп, который имеет приложение к совместным измерениям координаты и скорости, рассмотренным в § III.6.

Соотношения ортогональности (IV.8.1) имеют место и для некомпактных параметрических групп и их неприводимых представлений при условии квадратичной интегрируемости матричных элементов $(\psi_1|V_g\psi_2)$, $g \in G$ для всех $\psi_j \in \mathscr{H}$. Нормируя теперь μ так, что $c = 1$, получаем для любого оператора плотности S

$$\int V_g S V_g^* \mu(\mathrm{d}g) = I \tag{IV.8.7}$$

в смысле слабой сходимости. Опираясь на этот факт, обобщим предложение IV.8.1. Теперь мы предполагаем, что меры μ и ν нормированы так, что выполнено (IV.8.7) (для компактной группы это соответствовало бы нормировке (IV.8.4)).

Теорема IV.8.3. *Соотношение*

$$M(B) = \int_B V_g S_0 V_g^* \nu(\mathrm{d}\theta), \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta) \quad (\theta = g\theta_0), \tag{IV.8.8}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между измерениями $\{M(B)\}$, ковариантными по отношению к неприводимому квадратично интегрируемому представлению $g \to V_g$ группы G, действующей на множестве Θ и операторами плотности S_0, коммутирующими с операторами $\{V_g; g \in G_0\}$. Интеграл понимается в смысле слабой сходимости.[2]

[2]Если $\nu(B) < \infty$, то интеграл можно понимать как интеграл Бохнера функции со значениями в банаховом пространстве ядерных операторов, см. Данфорд и Шварц [16].

Сначала докажем две леммы, касающиеся свойств ядерных операторов из § II.7.

Лемма IV.8.4. *Пусть* M — *положительный эрмитов оператор,* $\{T_n\}$ — *монотонно неубывающая последовательность эрмитовых ядерных операторов, слабо сходящаяся к единичному оператору. Тогда* $\mathrm{Tr}\, T_n M \uparrow \mathrm{Tr}\, M$*; в частности, если* $\sup_n \mathrm{Tr}\, T_n M < \infty$*, то* M — *ядерный.*

Доказательство. Пусть $\{e_j\}$ — некоторый базис в $\mathscr{H}$, тогда

$$\mathrm{Tr}\, T_n M = \mathrm{Tr}\, \sqrt{M} T_n \sqrt{M} = \sum_j (\sqrt{M} e_j | T_n \sqrt{M} e_j).$$

В силу свойств последовательности $\{T_n\}$ имеем

$$(\sqrt{M} e_j | T_n \sqrt{M} e_j) \uparrow (\sqrt{M} e_j | \sqrt{M} e_j) = (e_j | M e_j).$$

По известной теореме о монотонной сходимости

$$\sum_j (\sqrt{M} e_j | T_n \sqrt{M} e_j) \uparrow \sum_j (e_j | M e_j) = \mathrm{Tr}\, M.$$

Лемма IV.8.5. *Пусть* $\{M(B)\}$ — *ковариантное измерение. Тогда* $\mathrm{Tr}\, M(B) = \nu(B)$*. В частности, если* $\nu(B) < \infty$*, то* $M(B)$ — *ядерный оператор.*

Доказательство. Выберем расширяющуюся последовательность компактных множеств $\{B_n\}$, покрывающую Θ. Рассмотрим операторы

$$T_n = \int_{B_n} V_g S V_g^* \mu(\mathrm{d}g), \tag{IV.8.9}$$

где S — произвольный оператор плотности. В силу положительности подынтегральных функций $T_n \geqslant 0$ и

$$\mathrm{Tr}\, T_n \leqslant \int_{B_n} \mathrm{Tr}\, V_g S V_g^* \mu(\mathrm{d}g) = \mu(B_n) < \infty$$

так что T_n — ядерный. Так как $B_n \subseteq B_{n+1}$, то $T_n \leqslant T_{n+1}$. Кроме того, $T_n \to I$ слабо в силу (IV.8.7). Последовательность $\{T_n\}$ удовлетворяет условию леммы IV.8.4, а значит, $\mathrm{Tr}\, M(B) = \lim_n \mathrm{Tr}\, T_n M(B)$. Но в силу (IV.2.1)

$$\lim_n \mathrm{Tr}\, T_n M(B) = \lim_n \int_{B_n} \mathrm{Tr}\, V_g S V_g^* M(B) \mu(\mathrm{d}g) = \nu(B),$$

и лемма доказана.

Доказательство теоремы IV.8.3. Пусть S_0 — оператор плотности, удовлетворяющий условиям теоремы. Определяя $M(B)$ как слабо сходящийся интеграл (IV.8.8), получаем разложение единицы. В самом деле, $M(B) \geqslant 0$, поскольку подынтегральное выражение положительно. Слабая σ-аддитивность является свойством интеграла. Нормировка $M(\Theta) = I$ следует из (IV.8.7), а ковариантность проверяется прямым вычислением.

Обратно, пусть $\{M(B)\}$ ковариантное измерение. По лемме IV.8.5 оно удовлетворяет условию предложения IV.2.2, которое доказывается как в теореме IV.2.3. Поэтому

$$M(B) = \int_b P(\theta)\nu(\mathrm{d}\theta),$$

где $P(\theta)$ — операторно-значная плотность, положительная и удовлетворяющая неравенству $\|P(\theta)\| \leqslant 1$ для ν-почти всех θ. Как в теореме IV.2.3, ковариантность влечет $P(\theta) = V_g P(\theta_0) V_g^*$, $\theta = g\theta_0$, при надлежащем определении плотности. Согласно (IV.8.7), оператор $P(\theta_0)$ должен иметь единичный след, т. е. должен быть оператором плотности. Теорема доказана.

В качестве примера применения этой теоремы рассмотрим группу G сдвигов $(\xi, \eta) \to (\xi + x, \eta + v)$ плоскости $\Theta = \mathbb{R}^2$. Стационарная подгруппа G_0 в этом случае тривиальна. Из теоремы единственности § III.4 следует, что всякое непрерывное неприводимое проективное представление $(x, v) \to W_{x,v}$ этой группы унитарно эквивалентно представлению Шредингера с некоторым значением $\mu \neq 0$. Следовательно, оно является квадратично интегрируемым (предложение III.5.1), причем значению $c = 1$ отвечает инвариантная мера $\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v/2\pi$. Используя доказанную теорему IV.8.3, получаем, что *всякое измерение* $M(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v)$, *ковариантное по отношению к представлению* $(x, v) \to W_{x,v}$, *имеет вид*

$$M(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v) = W_{x,v} S_0 W_{x,v}^* \frac{\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v}{2\pi}.$$

Таким образом, соотношение (III.6.3) описывает в точности все крайние точки выпуклого множества ковариантных измерений.

Обращаясь к вопросу оптимальности, заметим, что $\mathscr{R}\{\mathbf{M}\} = g_x D_x\{\mathbf{M}\} + g_v D_v\{\mathbf{M}\}$ является аффинным функционалом ковариантного измерения $\mathbf{M}$, принимающим конечные значения, если $\mathbf{M}$ имеет конечные вторые моменты; согласно общей теореме выпуклого анализа (см. комментарии к этой главе), он достигает минимума в крайней точке выпуклого множества ковариантных измерений $M(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v)$ с конечными вторыми моментами. Вместе с (III.6.9) это приводит к следующему результату

Предложение IV.8.6. *Каноническое измерение* (III.6.10) *является оптимальным в классе всех ковариантных совместных измерений координаты–скорости в смысле меры точности* $\mathscr{R}\{\mathbf{M}\}$.

§ 9. Оценивание чистого состояния

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство конечной размерности n. Обозначим через Θ единичную сферу в $\mathscr{H}$; элементами Θ являются векторы $|\theta) \in \mathscr{H}$, имеющие единичную длину: $(\theta|\theta) = 1$. Множество Θ является параметрическим: пусть $\{e_j\}$ — базис в $\mathscr{H}$, тогда

$$|\theta) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j |e_j),$$

где $\theta_j = (e_j|\theta)$; $j = 1, \ldots, n$ — комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{n} |\theta_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} [(\operatorname{Re}\theta_j)^2 + (\operatorname{Im}\theta_j)^2] = 1. \tag{IV.9.1}$$

Всякому $\theta \in \Theta$ отвечает чистое состояние

$$S_\theta = |\theta)(\theta|. \tag{IV.9.2}$$

Параметризация здесь не является точной, так как различным векторам, отличающимся на множитель, по модулю равный единице, соответствует одно и то же состояние. Ее можно сделать точной, потребовав, например, чтобы $\operatorname{Im}\theta_1 = 0$, но это нам не понадобится.

Предположим, что рассматриваемый квантовый объект приготовлен в чистом состоянии, относительно которого больше «ничего не известно», и требуется по результатам квантовых измерений с максимальной точностью оценить истинное состояние объекта. Мы можем сформулировать это как задачу оценивания параметра θ в семействе состояний (IV.9.2).

Рассмотрим группу G всех унитарных операторов U в $\mathscr{H}$. Поскольку единичные векторы под действием U переходят в единичные векторы, это компактная группа преобразований множества Θ. Нормированная инвариантная мера $\nu(\mathrm{d}\theta)$ на Θ с точностью до множителя совпадает с евклидовой площадью вещественной $2n$-мерной единичной сферы (IV.9.1). Рассматривая действие унитарных операторов в $\mathscr{H}$ как представление G, мы видим, что семейство (IV.9.2) ковариантно

$$US_\theta U^* = |U\theta)(U\theta| = S_{U\theta}.$$

Представление $U \to U$ очевидно неприводимо.

Опишем измерения параметра θ, ковариантные по отношению к представлению унитарной группы G. Фиксируем $\theta_0 = e_1$ и рассмотрим стационарную подгруппу G_0 точки θ_0. Очевидно, что она состоит из унитарных операторов вида

$$U_0 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & U_0' \end{bmatrix},$$

где $|\lambda| = 1$, а U_0' — произвольный унитарный оператор в ортогональном дополнении к вектору $|\theta_0)$. Эрмитов оператор S_0 коммутирует со всеми $U_0 \in G_0$ тогда и только тогда, когда

$$S_0 = \alpha|\theta_0)(\theta_0| + \beta I,$$

где α, β — вещественные числа, т. е.

$$S_0 = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & & & 0 \\ & \beta & & \\ & & \beta & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Если S_0 оператор плотности: $S_0 \geqslant 0$ и $\operatorname{Tr} S_0 = 1$, то $\alpha + \beta \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и $n\beta + \alpha = 1$, т. е.

$$\beta = (1-\alpha)/n; \qquad -(n-1)^{-1} \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Из предложения IV.8.1 вытекает, что *всякое ковариантное измерение параметра* θ *имеет вид*

$$M(\mathrm{d}\theta) = U[\alpha n|\theta_0)(\theta_0| + (1-\alpha)I]U^*\nu(\mathrm{d}\theta), \qquad (\theta = U\theta_0),$$

где α — *вещественный параметр, пробегающий отрезок* $-(n-1)^{-1} \leqslant \alpha \leqslant 1$. Отсюда следует, что множество ковариантных измерений как выпуклое множество является отрезком. Крайняя точка, отвечающая значению $\alpha = 0$, есть

$$M_*(\mathrm{d}\theta) = nU|\theta_0)(\theta_0|U^*\nu(\mathrm{d}\theta) = n|\theta)(\theta|\nu(\mathrm{d}\theta). \tag{IV.9.3}$$

Это измерение является, очевидно, измерением максимального правдоподобия для семейства (IV.9.2). Другое важное измерение, отвечающее значению $\alpha = 1$, имеет вид

$$M^*(\mathrm{d}\theta) = I \cdot \nu(\mathrm{d}\theta).$$

Такое разложение единицы соответствует измерительной процедуре, при которой результат выбирается наугад в соответствии с равномерным распределением ν на Θ.

Простейшей инвариантной функцией отклонения на Θ является

$$\delta = 1 - |(\theta|\hat{\theta})|^2;$$

мы рассмотрим более общие функции отклонения вида

$$W_\theta(\hat{\theta}) = W(\delta). \tag{IV.9.4}$$

Предложение IV.9.1. *Измерение* (IV.9.3) *является оптимальным для любой функции отклонения вида* (IV.9.4), *где* $W(\cdot)$ — *произвольная неубывающая функция, не равная тождественно постоянной.*

Доказательство. Поскольку мера точности является аффинным функционалом измерения, достаточно показать, что

$$\mathscr{R}\{\mathbf{M}_*\} < \mathscr{R}\{\mathbf{M}^*\},$$

т. е. что

$$\int W_{\theta_0}(\theta) n|(\theta_0|\theta)|^2\nu(\mathrm{d}\theta) < \int W_{\theta_0}(\theta)\nu(\mathrm{d}\theta).$$

Полагая $r = |(\theta_0|\theta)|$, перепишем это в виде

$$n\int W(1-r^2)r^2\nu(\mathrm{d}\theta) < \int W(1-r^2)\nu(\mathrm{d}\theta).$$

В силу доказываемой ниже леммы, это эквивалентно неравенству

$$n\int_0^1 W(1-r^2)r^2\mathrm{d}(1-r^2)^{n-1} > \int_0^1 W(1-r^2)\mathrm{d}(1-r^2)^{n-1},$$

или

$$\int_0^1 W(1-r^2)[(n-1)(1-r^2)^{n-2} - n(1-r^2)^{n-1}]\mathrm{d}r^2 < 0.$$

Переходя к переменной $\delta = 1 - r^2$, имеем

$$\int_0^1 W(\delta)\mathrm{d}(\delta^{n-1} - \delta^n) < 0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^1 (\delta^{n-1} - \delta^n)\mathrm{d}W(\delta) > 0,$$

что, очевидно, выполняется для неубывающей функции $W(\cdot)$, поскольку $\delta^{n-1} - \delta^n > 0$ при $0 < \delta < 1$.

Чтобы проиллюстрировать выигрыш от применения оптимального измерения, приведем значения среднего отклонения для простейшей функции $W(\delta) = \delta$:

$$\mathscr{R}\{\mathbf{M}_*\} = n\int_0^1 \delta(1-\delta)\mathrm{d}\delta^{n-1} = \frac{n-1}{n+1},$$
$$\mathscr{R}\{\mathbf{M}^*\} = \int_0^1 \delta\,\mathrm{d}\delta^{n-1} = \frac{n-1}{n}.$$

Отношение $\mathscr{R}\{\mathbf{M}_*\}/\mathscr{R}\{\mathbf{M}^*\} = n/(n+1)$ минимально и равно $\frac{2}{3}$ для двумерного гильбертова пространства и стремится к 1 при $n \to \infty$. Таким образом, в бесконечномерном гильбертовом пространстве не существует лучшего способа оценить неизвестное чистое состояние, чем простое угадывание.

Лемма IV.9.2. *Для любой функции $F(r)$ вещественного переменного r выполняется тождество*

$$\int_\Theta F(|\theta_0|\theta)|)\nu(\mathrm{d}\theta) = -\int_0^1 F(r)\mathrm{d}(1-r^2)^{n-1}.$$

Доказательство. Выберем базис $\{e_j\}$, так что $e_1 = \theta_0$ и обозначим $(e_j|\theta) = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$. Тогда

$$\Theta = \left\{\alpha_j, \beta_j : \sum_{j=1}^n (\alpha_j^2 + \beta_j^2) = 1\right\}$$

и $r = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$. Мы докажем лемму, если установим, что

$$\int_{\alpha_1^2+\beta_1^2 \geqslant \rho^2} \nu(\mathrm{d}\theta) = (1-\rho^2)^{n-1}. \tag{IV.9.5}$$

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$F_m(\rho, R) = \underset{\substack{x_1^2+x_2^2 \geqslant \rho^2 \\ x_1^2+\ldots+x_m^2 \leqslant R^2}}{\int\cdots\int} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m.$$

Площадь единичной сферы в терминах этого интеграла равна, очевидно, $(\partial F_n(0,R)/\partial R)|_{R=1}$; поэтому нормированная площадь фигуры, вырезаемой на единичной сфере неравенством $x_1^2+x_2^2\geqslant\rho^2$, дается выражением

$$\frac{\partial F_m(\rho,R)}{\partial R}\bigg|_{R=1} : \frac{\partial F_m(0,R)}{\partial R}\bigg|_{R=1}.$$

Но эта нормированная площадь как раз и есть нужный нам интеграл (IV.9.5), если $m=2n$. Имеем

$$F_m(\rho,R)=\int\cdots\int\left\{\iint_{\rho^2\leqslant x_1^2+x_2^2\leqslant R^2-x_3^2-\ldots-x_m^2}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right\}\mathrm{d}x_3\ldots\mathrm{d}x_m=$$
$$=\int\cdots\int\pi(R^2-\rho^2-x_3^2-\ldots-x_m^2)\mathrm{d}x_3\ldots\mathrm{d}x_m,$$

интегрирование ведется по области, где подынтегральное выражение неотрицательно, т. е. $x_3^2+\ldots+x_m^2\leqslant R^2-\rho^2$. Обозначая через $S_{n-2}(r)=cr^{m-3}$ площадь сферы $x_3^2+\ldots+x_m^2=r^2$, имеем

$$F_m(\rho,R)=c\pi\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}(R^2-\rho^2-r^2)S_{m-2}(r)\mathrm{d}r=c_1(R^2-\rho^2)^{n/2},$$

откуда $(\partial/\partial R)F_m(\rho,R)|_{R=1}=c_2(1-\rho^2)^{(m-2)/2}$, так что

$$\frac{\partial F_{2n}(\rho,R)}{\partial R}\bigg|_{R=1} : \frac{\partial F_{2n}(0,R)}{\partial R}\bigg|_{R=1}=(1-\rho^2)^{n-1},$$

и соотношение (IV.9.5) доказано.

§ 10. Измерение параметров ориентации

В этом разделе мы рассмотрим оценивание ориентации квантового объекта по измерениям спиновых степеней свободы. Пусть некоторая установка приготовляет состояние S, инвариантное относительно вращений вокруг некоторой оси $\mathbf{n}_0$:

$$S=\sum_{m=-j}^{j}s_m|m)(m|,$$

где j — величина спина, $\{|m)\}$ — собственные векторы оператора углового момента J_0 относительно оси $\mathbf{n}_0$ (см. § III.11). Если установка затем поворачивается так, что ось $\mathbf{n}_0$ принимает новое положение $\mathbf{n}=g\mathbf{n}_0$, где g — элемент группы вращений, то приготавливаемое ею состояние будет описываться оператором плотности $S_n=V_gSV_g^*$, где $g\to V_g$ — рассматриваемое неприводимое представление группы вращений в $(2j+1)$-мерном гильбертовом пространстве, натянутом на векторы $\{|m)\}$.

Таким образом, мы имеем ковариантное семейство состояний

$$S_n=V_gSV_g^*\qquad(\mathbf{n}=g\mathbf{n}_0),\quad n\in\mathbb{S}^2,$$

где $\mathbb{S}^2$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$.

Ориентация квантового объекта задается в этом случае единичным вектором $\mathbf{n}$, указывающим направление оси симметрии. Предположим, что истинное направление $\mathbf{n}$ неизвестно и производятся измерения $M(\mathrm{d}n)$ с целью оценить это направление. Мы будем пользоваться следующей функцией отклонения:

$$W_n(\hat{\mathbf{n}}) = |\mathbf{n} - \hat{\mathbf{n}}|^2 = 2(1 - \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{n}}), \tag{IV.10.1}$$

которая, очевидно, инвариантна. В качестве априорного распределения в байесовской мере точности возьмем нормированную евклидову площадь $\nu(\mathrm{d}n)$ на сфере $\mathbb{S}^2$.

Согласно предложению IV.8.1 всякое ковариантное измерение направления $\mathbf{n}$ имеет вид

$$M(\mathrm{d}n) = (2j+1)V_g S_0 V_g^* \nu(\mathrm{d}n) \qquad (n = gn_0),$$

где S_0 — оператор плотности, коммутирующий с подгруппой $\{V_g; g \in G_0\}$. Поскольку G_0 состоит из вращений вокруг оси $\mathbf{n}_0$, это означает, что S_0 имеет диагональную матрицу в базисе $\{|m)\}$. Чтобы решить задачу оптимального ковариантного измерения, следует найти оператор апостериорного отклонения

$$\widehat{W}_0 = 2\int_G (1 - \mathbf{n}_0 \cdot g\mathbf{n}_0) V_g^* S V_g \mu(\mathrm{d}g),$$

где $\mu(\mathrm{d}g))$ — нормированная инвариантная мера на группе вращений. Как показано далее, для любого состояния S

$$\widehat{W}_0 = \frac{2}{2j+1}\left[I - \frac{\mathrm{Tr}\, SJ_0}{j(j+1)} J_0\right]. \tag{IV.10.2}$$

Согласно предложению IV.8.2, следует найти минимальное собственное значение и соответствующий собственный вектор оператора (IV.10.2). Поскольку J_0 имеет известное спектральное представление (III.11.10), мы находим собственное значение $\hat{w}_{\min} = 2(1 - |\bar{J}_0|(j+1)^{-1})$, где $\bar{J}_0 = \mathrm{Tr}\, SJ_0$, и соответствующий собственный вектор $|j)$, если $\bar{J}_0 > 0$ или $|-j)$, если $\bar{J}_0 < 0$. Обозначая $|m, \mathbf{n}) \equiv V_g|m)$, где $\mathbf{n} = g\mathbf{n}_0$, мы видим из предложения IV.8.2, что *оптимальное ковариантное измерение направления оси симметрии* $\mathbf{n}$ *имеет вид*

$$\begin{aligned} M_*(\mathrm{d}n) &= (2j+1)V_g|\pm j)(\pm j|V_g^*\nu(\mathrm{d}n) \\ &= (2j+1)|\pm j; \mathbf{n})(\pm j; \mathbf{n}|\nu(\mathrm{d}n) \quad (\mathbf{n} = g\mathbf{n}_0), \end{aligned}$$

причем знак $\pm$ *выбирается в соответствии со знаком среднего углового момента* $\bar{J}_0$. *Минимум средней ошибки равен* $\hat{w}_{\min} = 2(1 - |\bar{J}_0|(j+1)^{-1})$. Отметим, что простое угадывание, которому соответствует разложение единицы $M^*(\mathrm{d}n) = I \cdot \nu(\mathrm{d}n)$ дает среднее отклонение $\mathscr{R}\{\mathbf{M}^*\} = \mathrm{Tr}\, \widehat{W}_0 = 2$, так что

$$\frac{\mathscr{R}\{\mathbf{M}_*\}}{\mathscr{R}\{\mathbf{M}^*\}} = 1 - \frac{|\bar{J}_0|}{j+1}.$$

Это показывает, что выигрыш от применения оптимального измерения тем больше, чем больше отношение $|\bar{J}_0|(j+1)^{-1}$, и равен нулю, если данное состояние имеет нулевой средний момент $\bar{J}_0 = 0$.

Согласно § 3, измерение $M_*(\mathrm{d}n)$ оптимально как в байесовском, так и в минимаксном смысле. Метод максимального правдоподобия дает, вообще говоря, отличный результат. Как следует из замечания после предложения IV.8.2, байесовское измерение совпадает с измерением максимального правдоподобия, лишь если вектор $|\pm j)$ является собственным вектором оператора S с максимальным собственным значением.

Рассмотрим теперь задачу определения ориентации микрообъекта, не предполагая симметрии исходного состояния S. Ориентация установки однозначно описывается репером $\theta = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ в $\mathbb{R}^3$. Фиксируем начальный репер $\theta_0 = \{\mathbf{n}_1^0, \mathbf{n}_2^0, \mathbf{n}_3^0\}$. Вращение g однозначно определяется репером $\theta = g\theta_0 \equiv \equiv \{g\mathbf{n}_1^0, g\mathbf{n}_2^0, g\mathbf{n}_3^0\}$, в который оно переводит начальный репер θ_0. Поэтому множество всех реперов Θ можно отождествить с группой вращений G, и интересующее нас ковариантное семейство состояний есть $S_\theta = V_g S V_g^*$, $\theta = g\theta_0$, где g пробегает группу вращений.

Определим отклонение репера $\hat{\theta} = \{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$ от репера θ формулой

$$W_\theta(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{3} |\mathbf{n}_i - \hat{\mathbf{n}}_i|^2 = 2\sum_{i=1}^{3}(1 - \mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i). \qquad \text{(IV.10.3)}$$

Рассмотрим оператор апостериорного отклонения

$$\widehat{W}_0 = 2\sum_{i=1}^{3} \int [1 - \mathbf{n}_i^0 \cdot g\mathbf{n}_i^0] V_g^* S V_g \mu(\mathrm{d}g).$$

Воспользовавшись формулой (IV.10.2), имеем

$$\widehat{W}_0 = \frac{2}{2j+1}\sum_{i=1}^{3}\left[I - \frac{\bar{J}_i}{j(j+1)}J_i\right] = \frac{2}{2j+1}\left[3 - \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\bar{J}_i^2}}{j(j+1)}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i J\right],$$

где J_i — оператор спинового углового момента вокруг оси $\mathbf{n}_i^0$, $\bar{J}_i = \operatorname{Tr} SJ_i$ и $\alpha_i = \bar{J}_i(\sum_i \bar{J}_i^2)^{-1/2}$. Оператор $\sum_i \alpha_i J_i$ является оператором углового момента вокруг оси $\bar{\mathbf{n}} = \alpha_1\mathbf{n}_1^0 + \alpha_2\mathbf{n}_2^0 + \alpha_3\mathbf{n}_3^0$. Из § III.11 следует, что его максимальное собственное значение равно j; соответствующий собственный вектор $|j;\bar{\mathbf{n}})$.

Из предложения IV.8.2 следует, что *оптимальное ковариантное измерение ориентации* $\theta = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ *дается соотношением*

$$M_*(\mathrm{d}\theta) = (2j+1)V_g|j;\bar{\mathbf{n}})(\bar{\mathbf{n}};j|V_g^*\nu(\mathrm{d}\theta) \qquad (\theta = g\theta_0).$$

Минимум среднего отклонения равен $2[3 - \sqrt{\sum_i \bar{J}_i^2}(j+1)^{-1}]$, так что выигрыш от применения оптимального измерения определяется величиной

$$\frac{\mathscr{R}\{\mathbf{M}_*\}}{\mathscr{R}\{\mathbf{M}^*\}} = 1 - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\bar{J}_i^2}}{j+1},$$

и имеет тот же характер зависимости от параметров, что и в предыдущей задаче.

Для доказательства формулы (IV.10.2) вычислим матричные элементы оператора $\widehat{W}_0$ в базисе $\{|m)\}$. Для этого нам понадобятся матричные элементы операторов представления $\{V_g\}$. Пусть $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ — углы Эйлера, задающие вращение g. Нормированная мера задается в этих параметрах соотношением

$$\mu(\mathrm{d}g) = (8\pi^2)^{-1}\mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Имеем (см. комментарии)

$$\begin{aligned}(n|V_g|m) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\psi - \mathrm{i}n\varphi} P^j_{mn}(\cos\theta),\\ P^j_{mn}(t) &= K(1-t)^{\alpha/2}(1+t)^{\beta/2}P^{\alpha\beta}_s(t),\end{aligned}$$

где $P^{\alpha\beta}_s$ — многочлены Якоби, $\alpha = |n-m|$, $\beta = |n+m|$, $s = j - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Выполняя интегрирование по φ и ψ, и замечая, что $1 - \mathbf{n}_0 \cdot g\mathbf{n}_0 = 1 - \cos\theta$, получаем

$$(m|\widehat{W}_0|m') = \delta_{mm'} \sum_{n=-j}^{j} (n|S|n) \int_{-1}^{1} (1-t)|P^j_{mn}(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Остается вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{1}(1-t)|P^j_{mn}(t)|^2\mathrm{d}t = K^2 \int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta}|P^{\alpha\beta}_s(t)|^2\mathrm{d}t, \qquad \text{(IV.10.4)}$$

где константа K определяется условием нормировки

$$K^2 \cdot \int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}|P^{\alpha\beta}_s(t)|^2\mathrm{d}t = 2(2j+1)^{-1}.$$

Используя рекуррентные соотношения для многочленов Якоби, получаем

$$(1-t)P^{\alpha\beta}_s(t) = \left[1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4j(j+1)}\right] p^{\alpha\beta}_s(t) + AP^{\alpha\beta}_{s+1}(t) + BP^{\alpha\beta}_{s-1}(t),$$

где A и B — некоторые постоянные. Так как многочлены $\{P^{\alpha\beta}_s;\, s = 0, 1, \ldots\}$ образуют ортогональную систему на интервале $(-1, 1)$ с весом $(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$, то в силу условия нормировки искомый интеграл равен коэффициенту при $P^{\alpha\beta}_s$ в формуле (IV.10.4), умноженному на $2(2j+1)^{-1}$, т. е.

$$\frac{2}{2j+1}\left[1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4j(j+1)}\right] = \frac{2}{2j+1}\left[1 - \frac{nm}{j(j+1)}\right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\widehat{W}_0 &= \sum_{m,m'} |m)(m|\widehat{W}_0|m')(m'|\\ &= \frac{2}{2j+1}\left[I - \frac{1}{j(j+1)}\sum_{n=-j}^{j} n(n|S|n) \sum_{m=-j}^{j} m|m)(m|\right]\end{aligned}$$

что и дает формулу (IV.10.2).

Комментарии

§ 1. Теории непрерывных групп посвящена книга Понтрягина [37] . Подробное изложение теории компактных параметрических групп и их представлений, адресованное как математикам, так и физикам, дается в книге Желобенко [18]. Общей теории представлений и связанным вопросам функционального анализа посвящена книга Кириллова [19].

Понятие ковариантного измерения является обобщением на неортогональные разложения единицы важного понятия *системы импримитивности*, введенного Меррэем и фон Нейманом и подробно изученного Макки [113]. Изложение результатов Макки с приложениями к квантовой теории можно найти у Варадарайана [140] и Яуха [99]. Ковариантные измерения возникают также из «ковариантных инструментов», рассмотренных Дэвисом [71].

§ 2. Результаты этого раздела принадлежат Дэвису [71] и Холево [52,90,95]. Относительно интегрирования операторно-значных функций и соответствующей теоремы типа Радона—Никодима см., например, Данфорд и Шварц [16].

§ 3. Математическая статистика (см., например, Крамер [23], Фергюсон [76]) является естественной базой для статистической теории измерений в классических системах. Если неизвестный параметр θ принимает конечное число значений, то говорят о «различении гипотез»; если же он непрерывен– об «оценивании».

На возможность и плодотворность перенесения идей математической статистики в теорию квантового измерения указал Хелстром в работе [85], посвященной задаче различения двух квантовых состояний. Холево [49, 89] ввел общие разложения единицы как некоммутативный аналог рандомизованных статистических процедур и на этой основе развил квантовую теорию статистических решений. Изложение результатов квантовой теории различения гипотез и оценивания на теоретико-физическом уровне содержится в книге Хелстрома [46]. Рассмотрение общей байесовской задачи, с исследованием возникающих здесь проблем интегрирования, провел Холево [52, 90]. Некоммутативный аналог теоремы Ханта—Стейна рассмотрен в [95]. Квантовый аналог метода максимального правдоподобия введен в работе [90]. Связь с классическим методом максимального правдоподобия подробно рассматривается в [52].

§ 4. Измерения угла поворота рассматривал Хелстром [87], доказавший оптимальность измерения (IV.4.4) по критерию максимального правдоподобия и для функции отклонения $4\sin^2(\varphi - \hat{\varphi})/2$. Теорема IV.4.1 получена автором [95].

§ 5. Было предложено несколько подходов к обобщению соотношений неопределенностей на угловые величины. Некоторые из них используют вариационную меру неопределенности, см. Джадж [101], другие сводятся к неравенствам (IV.5.4) для операторов C и S, см. Люиселл [110], Каррутерс и Нието [67]. Неравенство, основанное на ковариантной мере неопределенности (IV.5.1), типа используемых в классической статистике угловых наблюдений (см. например Мардиа [115]), повидимому является новым.

§ 6. Результаты этого и следующих разделов естественно обобщаются на случай параметра со значениями в произвольной абелевой локально-компактной группе, см. § II.3 работы [152].

§ 7. О непрерывных суммах гильбертовых пространств см., например, Гельфанд и Виленкин [12]. Материал этого параграфа взят из работы Холево [94], где рассмотрены также измерения координат трехмерной нерелятивистской частицы и фотона. Исследования Ньютона и Вигнера [119] (см. также Вайтман [144], Варадарайан [140]) показывают, что релятивистские квантовые объекты с нулевой массой (фотон) «нелокализуемы» в том смысле, что на координатном пространстве не существует системы импримитивности, т. е. ортогонального разложения единицы, удовлетворяющего подходящему условию ковариантности. Этот вывод плохо согласуется с экспериментальными доказательствами локализуемости фотонов. Вопрос был рассмотрен далее Яухом и Пироном [100], которые указали на две возможности теоретического описания локализуемости фотона. Первая из них, которой отдают предпочтение Яух и Пирон, использует неаддитивную проекторно-значную «меру», см. Амрейн [60]. Вторая возможность, использующая ковариантное неортогональное разложение единицы, была рассмотрена в работе автора [94], где было также получено строгое соотношение неопределенностей для координат фотона.

§ 8. Описание ковариантных измерений в случае неприводимого представления получено в работах автора [52, 90, 95].

В работе Бауэра [64] доказана теорема: аффинный полунепрерывный снизу функционал на выпуклом компактном подмножестве отделимого локально выпуклого пространства достигает минимума в крайней точке этого подмножества. Применимость этой теоремы к функционалу $\mathscr{R}\{\mathbf{M}\} = g_x D_{(x)}\{\mathbf{M}\} + g_v D_{(v)}\{\mathbf{M}\}$ следует из теоремы 7.1 работы [52].

§ 9. Задача оценивания чистого состояния рассматривалась Хелстромом [46, 87], который заметил, что (IV.9.3) является измерением максимального правдоподобия. Результаты настоящего раздела получены автором. «Полная модель», в которой многомерным параметром является сам оператор плотности, заслуживает особого внимания как в силу важности для приложений, так и с математической точки зрения. Рассматривается аналог повторной выборки независимых наблюдений $S_\theta^{\otimes n} = S_\theta \otimes \ldots \otimes S_\theta$, где S_θ — неизвестное состояние в d-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Наиболее изучен случай чистого состояния $S_\theta = |\theta)(\theta|$, причем особое внимание уделяется состоянию q-бита ($d = 2$). Для функций отклонения типа (IV.9.4) найдено оптимальное разложение единицы в симметризованном тензорном произведении n копий пространства $\mathcal{H}$, которое имеет вид $M_*(d\theta) = S_\theta^{\otimes n}\nu_n(d\theta)$, где $\nu_n(d\theta)$ — унитарно инвариантная мера на многообразии чистых состояний. Эти оценки являются состоятельными при $n \to \infty$. Асимптотическая теория для полной модели в случае чистых состояний, основанная на использовании неравенств типа Рао—Крамера, развита в [167], тогда как в [173], [181] используются оценки больших уклонений.

Фундаментальное отличие квантовой теории оценивания проявляется при рассмотрении асимптотических свойств оценок в повторной независимой выборке. В статье [178], посвященной асимптотическому оцениванию параметра сдвига, было отмечено, что статистическая информация в квантовых моделях с независимыми наблюдениями может быть строго супераддитивна.

Это свойство, аналогичное супераддитивности шенноновской информации в квантовой информатике (см. § 5.1 в [153]), означает, что статистическая информация в составных системах с независимыми компонентами может быть строго больше, чем сумма информаций от подсистем. Физической причиной такого феномена, дуального корреляциям Эйнштейна—Подольского—Розена для сцепленных состояний (см. § II.4 Дополнения), является существование сцепленных измерений в составной системе. Подобная супераддитивность была установлена для оценивания в полной модели [186], [167], [173].

Полная модель также демонстрирует другую особенность квантовых задач оценивания: их сложность резко возрастает с переходом от чистых к смешанным состояниям. (Отметим, что в классической статистике задача оценивания чистых состояний тривиальна, поскольку они описываются распределениями, вырожденными в различных точках фазового пространства). Оценивание произвольного состояния состоит, во-первых, из оценивания спектра, т. е. собственных значений матрицы плотности, и, во-вторых, оценивания собственных векторов. Оценивание спектра требует новых подходов: в работе [181] предложено решение, основанное на теории представлений группы перестановок n элементов. Состоятельные и асимптотически эффективные оценки даются длинами строк в диаграммах Юнга, связанных с неприводимыми представлениями группы перестановок.

Некоммутативный аналог знаменитого принципа Ле Кама локальной асимптотической нормальности в задаче оценивания произвольного смешанного состояния был установлен в работах Гуты и Кана, отталкиваясь от работ Хайаши и Мацумото (см. [171] и цитированную литературу). Доказательства используют разнообразный математический инструментарий, включая теорию представлений группы SU(d) и ее тензорных степеней, а также симметрической группы. Знаменательно, что хотя перестановочная симметрия присутствует уже в классической задаче оценивания с независимыми одинаково распределенными наблюдениями, только квантовый случай требует всего разнообразия продвинутой теории представлений.

§ 10. Измерения параметров ориентации были рассмотрены в работе Холево [95]. Векторы $|j; \mathbf{n})$ являются «когерентными векторами» для представления группы вращений, рассмотренными Радклифом [127] и Переломовым [34,122]. Формулы для матричных элементов представления группы вращений выводятся в книгах Вигнера [11] и Гельфанда, Минлоса, Шапиро [13].

Глава V
ГАУССОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ

§ 1. Квазиклассические состояния квантового осциллятора

Рассмотрим квантовый объект с одной степенью свободы, например осциллятор с каноническими наблюдаемыми $q = Q$, $p = \hbar P$. Основное состояние $|0)(0|$ является состоянием минимальной неопределенности, в котором Q и P имеют нулевые средние значения. Состояние

$$|\overline{P}, \overline{Q})(\overline{Q}, \overline{P}| = W_{\overline{Q}, \hbar\overline{P}}|0)(0|W^*_{\overline{Q}, \hbar\overline{P}} \tag{V.1.1}$$

(где для сокращения обозначений положено $|\overline{P}, \overline{Q}) \equiv |\overline{P}, \overline{Q}; \hbar/2\omega)$, ω частота осциллятора) можно рассматривать как результат внешнего воздействия на основное состояние, «смещающего» средние значения канонических наблюдаемых, но не изменяющего их неопределенностей.

Предположим теперь, что это воздействие носит случайный характер, т. е. параметры воздействия $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ являются случайными величинами с некоторым распределением $\mu(\mathrm{d}\overline{P}\,\mathrm{d}\overline{Q})$. Тогда с точки зрения экспериментатора, которому доступны наблюдения только над данным квантовым объектом, но не над источником воздействия, определяющим значения $\overline{P}$, $\overline{Q}$ в индивидуальном эксперименте, состояние квантового объекта описывается оператором плотности

$$S = \int |\alpha, \beta)(\beta, \alpha|\mu(\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta), \tag{V.1.2}$$

где мы заменили $\overline{P}$, $\overline{Q}$ на α, β. Это состояние представляет собой усреднение операторов плотности (V.1.1), соответствующих индивидуальным значениям случайных величин $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, по их распределению вероятностей. При этом среднее значение любого измерения $\mathbf{M}$ получается усреднением средних значений $E_{\overline{P},\overline{Q}}\{\mathbf{M}\}$, отвечающих состояниям (V.1.1):

$$E_S\{\mathbf{M}\} = \int E_{\alpha,\beta}\{\mathbf{M}\}\mu(\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta).$$

В частности, средние значения канонических наблюдаемых в этом состоянии равны средним значениям классического распределения μ

$$E_S(P) = \int \alpha\mu(\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta), \qquad E_S(Q) = \int \beta\mu(\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta).$$

Состояния вида (V.1.2) называются *квазиклассическими*; формула (V.1.2) определяет аффинное отображение симплекса распределений вероятностей

μ в выпуклое множество квантовых состояний. Можно показать, что это отображение взаимно-однозначно; отсюда вытекает, что не всякое квантовое состояние представимо в виде (V.1.2), где μ — распределение вероятностей; в противном случае квантовые состояния образовывали бы симплекс.

Предположим, что объект подвергается большому числу k независимых одинаковых случайных воздействий, так что результирующее воздействие характеризуется параметрами

$$\overline{P} = \sum_{j=1}^{k} \overline{P}_j, \qquad \overline{Q} = \sum_{j=1}^{k} \overline{Q}_j,$$

где $(\overline{P}_j, \overline{Q}_j))$ — независимые, одинаково распределенные пары случайных величин. Тогда в силу классической центральной предельной теоремы распределение $\mu(\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta)$ величин $(\overline{P}, \overline{Q})$ будет близко к гауссовскому, а в пределе $k \to \infty$ будет равно ему. Получаемые таким образом состояния являются частным случаем гауссовских состояний, которые будут подробно изучены в настоящей главе.

Введем комплексную переменную $\zeta = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\beta + \mathrm{i}\hbar\alpha)$, так что $|\alpha, \beta) = |\zeta)$ является вектором когерентного состояния (см. § III.10) и рассмотрим специальное квазиклассическое гауссовское состояние

$$S = \frac{1}{\pi\overline{N}} \int |\zeta)(\zeta| \mathrm{e}^{-|\zeta|^2/\overline{N}} \mathrm{d}^2\zeta. \tag{V.1.3}$$

Вещественный параметр $\overline{N}$, как мы сейчас покажем, равен среднему значению наблюдаемой числа квантов N. Вычислим матричные элементы оператора S в базисе $\{|n)\}$ из собственных векторов оператора N. Имеем

$$(n|S|m) = \frac{1}{\pi\overline{N}} \int (n|\zeta)(\zeta|m) \mathrm{e}^{-|\zeta|^2/\overline{N}} \mathrm{d}^2\zeta.$$

Учитывая формулу (III.10.6) и полагая $\zeta = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, получаем

$$(n|S|m) = \frac{1}{\pi\overline{N}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\varphi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\infty} r\,\mathrm{d}r \cdot r^{n+m} \mathrm{e}^{-r^2(\overline{N}+1)/\overline{N}} = \\ = \delta_{nm} \frac{1}{\overline{N}+1} \left(\frac{\overline{N}}{\overline{N}+1} \right)^n.$$

Отсюда следует, что оператор S диагонален в представлении Фока, а именно

$$S = \frac{1}{\overline{N}+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\overline{N}}{\overline{N}+1} \right)^n |n)(n|. \tag{V.1.4}$$

Вычисляя среднее значение наблюдаемой числа квантов, получаем

$$\frac{1}{\overline{N}+1} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\overline{N}}{\overline{N}+1} \right)^n = \overline{N},$$

что и требовалось.

В статистической физике большую роль играют гиббсовские состояния, которые определяются следующим образом. Если энергия объекта может принимать дискретный ряд значений $\{E_n\}$, то гиббсовское состояние является смесью чистых состояний S_n с определенными значениями энергии, причем вес состояния, отвечающего значению E_n, пропорционален $\exp(-E_n/kT)$. Здесь T — физический параметр, имеющий смысл температуры, k — коэффициент пропорциональности (постоянная Больцмана). В статистической физике считается, что гиббсовское состояние — это равновесное состояние, к которому приходит объект в результате неограниченно долгого взаимодействия с бесконечной средой (термостатом), поддерживаемой при постоянной температуре T. Учитывая, что для гармонического осциллятора $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, получаем, что состояние (V.1.4) является гиббсовским для гармонического осциллятора с температурой T, если положить

$$\overline{N} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Принято говорить, что состояние (V.1.4) описывает «тепловой шум» квантового осциллятора, находящегося в состоянии теплового равновесия с термостатом при температуре T. Средние значения канонических наблюдаемых в этом состоянии равны нулю, так как гауссовское распределение в (V.1.3) имеет нулевое среднее.

Предположим, что осциллятор, находящийся в состоянии теплового равновесия, подвергается внешнему воздействию, описываемому оператором сдвига $W_{\overline{Q},\hbar\overline{P}} \equiv W_{\bar{a}}$, где $\overline{a} = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\overline{Q} + \mathrm{i}\hbar\overline{P})$, тогда его состоянием будет

$$S_{\bar{a}} = W_{\bar{a}} S W_{\bar{a}}^{*}. \tag{V.1.5}$$

Учитывая (III.10.1), получаем

$$S_{\bar{a}} = \frac{1}{\pi\overline{N}} \int |\zeta)(\zeta| \mathrm{e}^{-|\zeta-\bar{a}|^2/\overline{N}} \mathrm{d}^2\zeta, \tag{V.1.6}$$

так что канонические наблюдаемые принимают ненулевые значения, зависящие от амплитуды воздействия, а именно:

$$E_S(Q) \equiv \overline{Q} = \sqrt{2\hbar/\omega}\,\mathrm{Re}\,\bar{a}, \quad E_S(P) \equiv \overline{P} = \sqrt{2\omega/\hbar}\,\mathrm{Im}\,\bar{a}.$$

Состояния (V.1.6) и их многомерные аналоги используются в квантовой оптике для описания полей излучения, хаотических, таких как естественный свет, и когерентных, производимых лазером.

Известно, что электромагнитное поле математически эквивалентно бесконечному набору осцилляторов. Для наших целей можно ограничиться конечным набором осцилляторов с частотами ω_j; $j = 1, \ldots, s$. Пусть P_j, Q_j; $j = 1, \ldots s$, — канонические наблюдаемые такого «урезанного» поля излучения. Тогда «фоновое» тепловое излучение в отсутствие внешних источников описывается оператором плотности

$$S = \bigotimes_j S^{(j)}, \tag{V.1.7}$$

где $S^{(j)}$ — гиббсовское состояние (V.1.3) j-го осциллятора со средним числом квантов $\overline{N}_j = (\exp(\hbar\omega_j/kT) - 1)^{-1}$. Воздействие источника на поле, находящееся в состоянии S, приводит к изменению состояния излучения. Если принять простейшую модель воздействия (V.1.5), то результирующее состояние излучения будет определяться оператором плотности

$$S_{\bar{a}} = \bigotimes_j S_{\bar{a}_j}^{(j)}, \tag{V.1.8}$$

где $S_{\bar{a}_j}^{(j)}$ — состояния вида (V.1.6) для j-го осциллятора. Многомерный параметр $\bar{\mathbf{a}} = [\bar{a}_j]$ характеризует источник излучения. Подобная модель «сигнал+шум» применяется для описания излучения лазерного источника.

Состояния типа (V.1.7), (V.1.8) обладают привлекательными аналитическими свойствами, представляющими интерес как для физических моделей, так и чисто в математическом плане. Поскольку все эти свойства в конечном счете обусловлены «гауссовостью» состояния, нам будет удобно принять более общую точку зрения и отвлечься от конкретного вида состояний излучения (V.1.7), (V.1.8). В этой главе мы введем и изучим общий класс квантовых гауссовских состояний, обладающих замечательными аналогиями с гауссовскими распределениями теории вероятностей.

§ 2. Каноническое коммутационное соотношение для многих степеней свободы

Преобразуем каноническое коммутационное соотношение (III.3.2) для одной степени свободы, вводя двухкомпонентные векторы $z = [x, y]$, кососимметричную форму

$$\Delta(z, z') = xy' - x'y.$$

и полагая $V(z) = W_{-x, y/\mu}$. Соотношение (III.3.2) примет тогда вид

$$V(z)V(z') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(z,z')/2} V(z + z'). \tag{V.2.1}$$

В случае s степеней свободы поступим аналогично. Пусть x_k, y_k — пара вещественных чисел; положим $z_k = [x_k, y_k]$ и $z = [z_1, \ldots, z_s]$. Таким образом, z — $2s$-мерный вещественный вектор. Введем билинейную кососимметричную форму

$$\Delta(z, z') = \sum_{k=1}^{s} (x_k y'_k - x'_k y_k).$$

По аналогии со случаем $s = 1$ мы называем *представлением канонического коммутационного соотношения* (с s степенями свободы) всякое непрерывное семейство унитарных операторов $z \to V(z)$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, удовлетворяющее соотношению (V.2.1).

Канонические наблюдаемые P_k, Q_k; $k = 1, \ldots, s$, получаются отсюда следующим образом. Учитывая, что в силу кососимметричности

$$\Delta(z, z) \equiv 0, \tag{V.2.2}$$

а также (V.2.1), получаем, что семейство $\{V(tz), t\in\mathbb{R}\}$ при фиксированном z является группой унитарных операторов. По теореме Стоуна

$$V(tz) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tR(z)}, \tag{V.2.3}$$

где $R(z)$ — самосопряженный оператор. Из (V.2.1), (V.2.3) имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tR(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t'R(z')} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}tt'\Delta(z,z')/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}R(tz+t'z')} = \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}tt'\Delta(z,z')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t'R(z')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tR(z)}. \end{aligned} \tag{V.2.4}$$

Дифференцирование этого равенства по t и t' в точке $t=t'=0$ дает формальное соотношение

$$[R(z), R(z')] = -\mathrm{i}\Delta(z, z')I. \tag{V.2.5}$$

Мы получим его строгую версию в § 4. Пусть e_k — s-мерный вещественный вектор $z = [z_1, \ldots, z_s]$, для которого $z_j = 0$ при $j \neq k$ и $z_k = [1, 0]$, а h_k — аналогичный вектор, для которого $z_k = [0, 1]$. Полагая $R(e_k) = P_k$, $R(h_k) = Q_k$ и учитывая, что

$$\Delta(e_k, h_l) = \delta_{kl}, \qquad \Delta(e_k, e_l) = \Delta(h_k, h_l) = 0, \tag{V.2.6}$$

получаем

$$[P_k, Q_l] = -\mathrm{i}\delta_{kl}, \qquad [P_k, P_l] = [Q_k, Q_l] = 0,$$

что эквивалентно коммутационным соотношениям Гейзенберга (III.6.1) для s степеней свободы. Из (V.2.4) формально $R(z + z') = R(z) + R(z')$, так что

$$R(z) = \sum_k (x_k P_k + y_k Q_k),$$

поскольку $z = \sum_k (x_k e_k + y_k h_k)$. Этому выражению можно придать точный смысл, если в правой части имеется в виду самосопряженное расширение соответствующего оператора. Таким образом,

$$V(z) = \exp\left[\mathrm{i}\sum_{k=1}^{s}(x_k P_k + y_k Q_k)\right].$$

Операторы $R(z)$ будем также называть *каноническими наблюдаемыми.*

Полезно рассмотреть «бескоординатную» форму этой конструкции. Пусть Z — вещественное линейное пространство и $\Delta(z, z')$ — кососимметричная билинейная форма на Z. Предположим, что она *невырождена*, т. е. равенство $\Delta(z, z') = 0$ для всех $z \in Z$ влечет $z' = 0$. Такая пара (Z, Δ) называется *симплектическим пространством.* Для любого симплектического пространства можно определить представление канонических коммутационных соотношений как семейство унитарных операторов $\{V(z), z\in Z\}$, удовлетворяющих соотношениям (V.2.1) для всех $z, z'\in Z$ (и соответствующему условию непрерывности). Тогда *канонические наблюдаемые* $\{R(z), z\in Z\}$ могут быть определены как в (V.2.3).

При таком подходе нет даже необходимости требовать конечномерности Z. Однако, если предположить, что Z конечномерно, то его размерность обязательно оказывается четной: $\dim Z = 2s$. Для доказательства введем какое-либо скалярное произведение α на Z и будем обозначать соответствующее евклидово пространство (Z, α). Пусть $\mathscr{D}$ — оператор, ассоциированный с формой Δ в (Z, α), так что

$$\Delta(z, z') = \alpha(z, \mathscr{D} z'); \qquad z, z' \in Z. \tag{V.2.7}$$

В силу свойств формы Δ, оператор $\mathscr{D}$ — невырожденный кососимметричный ($\mathscr{D}^* = -\mathscr{D}$) в (Z, α). По известной теореме линейной алгебры, в (Z, α) существует ортонормированный базис $\tilde{e}_1, \tilde{h}_1; \tilde{e}_2, \tilde{h}_2; \ldots$, в котором $\mathscr{D}$ имеет матрицу вида

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 0 & d_1 & & 0 & \\ -d_1 & 0 & & & \\ \hline & & 0 & d_2 & \\ & 0 & -d_2 & 0 & \\ \hline & & & & \ddots \end{array}\right], \quad d_j > 0. \tag{V.2.8}$$

в частности, поскольку $\mathscr{D}$ невырожден, Z обязательно должно быть четномерным.

Базис $\{e_j, h_j; j=1, \ldots, s\}$ в (Z, Δ) называется *симплектическим*, если для него выполняются соотношения (V.2.6). В симплектическом базисе форма Δ имеет канонический вид $\Delta(z, z') = \sum(x_j y_j' - x_j' y_j)$, где $z = \sum(x_j e_j + y_j h_j)$, $z' = \sum(x_j' e_j + y_j' h_j)$. Симплектический базис играет здесь ту же роль, что ортонормированный базис для евклидова пространства. Для любого симплектического базиса наблюдаемые $P_j = R(e_j)$, $Q_j = R(h_j)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям Гейзенберга.

Примером симплектического базиса может служить построенный в начале этого параграфа базис $\{e_j, h_j\}$ в пространстве $2s$-мерных векторов-строк. Однако в любом симплектическом пространстве существует бесконечно много симплектических базисов. В самом деле, пусть α — любое скалярное произведение в Z; тогда базис $e_j = d_j^{-1/2}\tilde{e}_j$, $h_j = d_j^{-1/2}\tilde{h}_j$; $j = 1, \ldots, s$ является симплектическим в силу (V.2.7) и (V.2.8). Полагая $a_j = d_j^{-1}$, получаем отсюда

Предложение V.2.1. *Симплектическое пространство (Z, Δ) обязательно имеет четную размерность $2s$. Для любого скалярного произведения α существует симплектический базис $\{e_j, h_j; j=1, \ldots, s\}$ в (Z, Δ), в котором α имеет диагональную матрицу вида*

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} a_1 & 0 & & 0 & \\ 0 & a_1 & & & \\ \hline & 0 & a_2 & 0 & \\ & & 0 & a_2 & \\ \hline & & & & \ddots \end{array}\right], \quad a_j > 0.$$

Переход от одного симплектического базиса к другому задается *симплектическим оператором* T, удовлетворяющим условию

$$\Delta(Tz, Tz') = \Delta(z, z'); \qquad z, z' \in Z. \tag{V.2.9}$$

Для всякого симплектического оператора $|\det T| = 1$. В самом деле, пусть α — произвольное скалярное произведение в Z; тогда (V.2.9) принимает вид

$$\alpha(Tz, \mathscr{D} Tz') = \alpha(z, \mathscr{D} z'); \qquad z, z' \in Z,$$

т. е. $T^*\mathscr{D}T = \mathscr{D}$, где T^* — оператор, сопряженный к T в евклидовом пространстве (Z, α). Отсюда, учитывая, что $\det T^* = \det T$ и $\det \mathscr{D} \neq 0$, получаем $(\det T)^2 = 1$. Таким образом, симплектические преобразования сохраняют меру Лебега в симплектическом пространстве.

Пусть $z = \sum(x_j e_j + y_j h_j)$ — разложение элемента z по симплектическому базису. Введем меру Лебега в Z, полагая

$$d^{2s}z = \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}x_s\, \mathrm{d}y_s.$$

Из сказанного выше вытекает, что это определение не зависит от выбора симплектического базиса в Z.

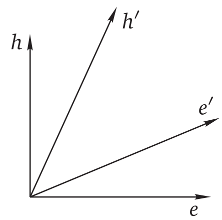

Рис. 1.

Для иллюстрации рассмотрим простейший случай $\dim Z = 2$ (одна степень свободы). Пусть $\{e, h\}$ — симплектический базис в (Z, Δ), т. е. $\Delta(e, h) = 1$ и x, y — координаты вектора z. Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Тогда базис $\{e, h\}$ изобразится в виде двух взаимно перпендикулярных ортов (Рис. 1), однако это отражает лишь произвол в выборе системы координат и не соответствует каким-либо реальным свойствам симплектического базиса (угол и длина в симплектическом пространстве не определены). По существу это означает, что мы вводим в Z скалярное произведение $\alpha(z, z') = xx' + yy'$, связанное с данным базисом, как в предложении V.2.1. Другой базис $\{e', h'\}$ будет симплектическим тогда и только тогда, когда построенный на нем ориентированный параллелограмм имеет площадь $+1$.

§ 3. Доказательство теоремы единственности Стоуна—фон Неймана. Преобразование Вейля

Пусть $z \to V(z)$ непрерывное представление канонического коммутационного соотношения, $f(z)$ — интегрируемая по мере Лебега комплекснозначная функция на симплектическом пространстве (Z, Δ). Сопоставим ей ограниченный оператор в пространстве представления

$$V(f) = (2\pi)^{-s} \int f(z) V(-z) \mathrm{d}^{2s} z \qquad \text{(V.3.1)}$$

(нетрудно показать, что интеграл определен в смысле Бохнера, как интеграл от функции со значениями в банаховом пространстве всех ограниченных операторов). Соответствие $f \to V(f)$ называется *преобразованием Вейля.* Легко проверяются следующие свойства:

(1) $$V(f(z))^* = V\overline{(f(-z))};$$

(2) $$V(f_1)V(f_2) = V(f_1 \times f_2)\qquad,$$

где

$$f_1 \times f_2(z) = (2\pi)^{-s}\int f_1(w)f_2(z-w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(w,z)/2}\mathrm{d}^{2s}w$$

(3) $$V(f(z))V(w) = V(f(z+w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(w,z)/2}),$$

$$V(w)^*V(f(z))V(w) = V(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(w,z)}).$$

Кроме того, соответствие $f \to V(f)$ является взаимно-однозначным: $V(f) = 0$ влечет $f(z) = 0$ почти всюду. В самом деле, из (3) получаем

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(w,z)}f(z)(\varphi|V(-z)\psi)\mathrm{d}^{2s}z = 0;\quad w \in Z;\ \varphi,\psi \in \mathscr{H},$$

откуда, в силу взаимной однозначности обычного преобразования Фурье, $f(z)(\varphi|V(-z)\psi) = 0$ и $f(z) = 0$ почти всюду.

Отсюда вытекает, что если $z \to V_j(z)$, $j = 1, 2$ — два представления канонического коммутационного соотношения, то можно установить взаимно-однозначное соответствие $V_1(f) \leftrightarrow V_2(f)$, которое, в силу свойств (1), (2), сохраняет алгебраические операции и эрмитово сопряжение. Фактически имеет место более сильное утверждение, а именно теорема единственности Стоуна—фон Неймана для конечного числа степеней свободы.

Теорема V.3.1. *Всякие два (непрерывных) неприводимых представления канонического коммутационного соотношения унитарно эквивалентны. Всякое (непрерывное) представление является дискретной прямой суммой неприводимых представлений.*

Доказательство. Введем скалярное произведение на Z

$$j(z,z') = \sum_{k=1}^{s}(x_k x'_k + y_k y'_k)$$

где $[x_k, y_k]$, $[x'_k, y'_k]$ — компоненты векторов z, z' в каком-либо симплектическом базисе, и рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \mathrm{e}^{-j(z,z)/4}.$$

Положим $P = V(f_0)$. Так как $f_0(z) > 0$, то $P \neq 0$. Используя свойства (2), (3), после некоторых вычислений получаем важное равенство

$$PV(w)P = f_0(w)P;\qquad w \in Z. \tag{V.3.2}$$

Отсюда $P^2 = P$. Кроме того, из вещественности f_0 и свойства (1) вытекает, что $P^* = P$. Таким образом, P является ортогональным проектором на некоторое подпространство $\mathscr{M}$ пространства представления $\mathscr{H}$.

Если $\varphi, \psi \in \mathscr{M}$, то, используя (V.2.1) и (V.3.2), получаем

$$\begin{aligned}(V(z)\varphi|V(w)\psi) &= (V(z)P\varphi|V(w)P\psi) = \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(w,z)/2}(\varphi|PV(w-z)P\psi) = \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(w,z)/2} f_0(w-z)(\varphi|\psi).\end{aligned} \tag{V.3.3}$$

Пусть $\{e_\alpha\}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{M}$. Тогда из (V.3.3) вытекает, что подпространства $\mathscr{M}_\alpha = [V(z)e_\alpha]$, порожденные векторами вида $V(z)E_\alpha$, $z \in Z$ взаимно ортогональны для разных α. По построению, $\mathscr{M}_\alpha$ являются инвариантными подпространствами представления $V(z)$, $z \in Z$; поэтому, если представление неприводимо, то $\dim\mathscr{M} = 1$. Верно и обратное — если представление $z \to V(z)$ приводимо, то $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$, где $\mathscr{H}_j$ инвариантные подпространства; тогда, применяя изложенную выше конструкцию к каждому из подпространств $\mathscr{H}_j$ вместо $\mathscr{H}$, мы получили бы в каждом $\mathscr{H}_j$ проектор P_j, причем $P = P_1 \oplus P_2$, так что $\dim\mathscr{M} > 1$.

Заметим теперь, что согласно (V.3.2)

$$PV(z)e_\alpha = PV(z)Pe_\alpha = f_0(z)e_\alpha;$$

так что P действует как оператор ранга 1 в $\mathscr{M}_\alpha$:

$$P\psi = c(\psi)e_\alpha, \qquad \psi \in \mathscr{M}_\alpha,$$

поэтому $z \to V(z)$ действует неприводимо в $\mathscr{M}_\alpha$.

Докажем, что $\mathscr{H} = \bigoplus_\alpha \mathscr{M}_\alpha$. Обозначим $\mathscr{H}_0$ — ортогональное дополнение суммы $\bigoplus_\alpha \mathscr{M}_\alpha$ в $\mathscr{H}$. Тогда $\mathscr{H}_0$ инвариантно относительно $\{V(z)\}$; кроме того, $P\mathscr{H}_0 = 0$. Отсюда следует, что $\mathscr{H}_0 = 0$. В противном случае, применяя всю конструкцию к $\mathscr{H}_0$ вместо $\mathscr{H}$ мы получили бы $P = 0$ в противоречие с тем, что $f_0 \not\equiv 0$. Это доказывает, что всякое представление разлагается в прямую ортогональную сумму неприводимых представлений, действующих в подпространствах $\mathscr{M}_\alpha$.

Пусть $z \to V_j(z)$ — неприводимые представления в пространствах $\mathscr{H}_j$, $j = 1, 2$. Операторы $P_j = V_j(f_0)$ являются одномерными проекторами на векторы $e_j \in \mathscr{H}_j$, причем $\mathscr{H}_j = [V(z)e_j]$. Определим оператор U из $\mathscr{H}_2$ в $\mathscr{H}_1$, полагая $UV_2(z)e_2 = V_1(z)e_1$. Оператор U отображает плотное множество в $\mathscr{H}_2$ на плотное множество в $\mathscr{H}_1$, сохраняя скалярное произведение, так как по формуле (V.3.3)

$$\begin{aligned}(V_1(z)e_1|V_1(w)e_1) &= \exp\left[\frac{1}{2}\mathrm{i}\Delta(w,z)\right] f_0(z-w) = \\ &= (V_2(z)e_2|V_2(w)e_2).\end{aligned}$$

Следовательно, он продолжается до изометричного оператора из $\mathscr{H}_2$ на $\mathscr{H}_1$. По построению

$$U^* V_1(z) U = V_2(z); \qquad z \in Z,$$

и теорема доказана.

Ограничимся теперь неприводимыми представлениями. Сформулируем многомерную версию предложения III.5.1, которая доказывается совершенно аналогично случаю $s = 1$.

Предложение V.3.2. *Пусть $z \to V(z)$ — неприводимое представление канонического коммутационного соотношения в пространстве $\mathscr{H}$. Матричные элементы $(\varphi|V(z)\psi)$ являются квадратично интегрируемыми функциями от z. Если $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$, то функции $\{(2\pi)^{-1/2}(e_j|V(z)e_k)\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{L}^2(Z)$ комплексных квадратично интегрируемых функций от Z.*

Пусть T — ядерный оператор в пространстве представления. Сопоставим ему функцию

$$\mathscr{F}_z[T] = \mathrm{Tr}\, TV(z); \qquad z \in Z. \tag{V.3.4}$$

Как мы увидим, отображение $T \to \mathscr{F}_z[T]$ является своеобразным некоммутативным аналогом преобразования Фурье, обратным к преобразованию Вейля (V.3.1). Следующие свойства непосредственно вытекают из общих свойств следа и канонического коммутационного соотношения (см. § II.7):

(1) $\mathscr{F}_0[T] = \mathrm{Tr}\, T; \qquad |\mathscr{F}_z[T]| \leqslant \|T\|_1;$

(2) $\mathscr{F}_z[T^*] = \overline{\mathscr{F}_{-z}[T]};$

(3) $\mathscr{F}_z[TV(w)] = \mathscr{F}_{z+w}[T] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(z,w)/2},$

$\mathscr{F}_z[V(w)^*TV(w)] = \mathscr{F}_z[T] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(z,w)}.$

Имеет место «некоммутативная формула Парсеваля».

Теорема V.3.3. *Соответствие $T \to \mathscr{F}_z[T]$ продолжается до изометрического отображения пространства операторов Гильберта—Шмидта $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$ на пространство $\mathscr{L}^2(Z)$, так что*

$$\mathrm{Tr}\, T_1^* T_2 = (2\pi)^{-s} \int \overline{\mathscr{F}_z[T_1]}\mathscr{F}_z[T_2]\mathrm{d}^{2s}z; \qquad T_j \in \mathfrak{T}^2(\mathscr{H}). \tag{V.3.5}$$

Доказательство. Если мы докажем, что для эрмитова ядерного оператора выполняется

$$\mathrm{Tr}\, T^2 = (2\pi)^{-s} \int |\mathscr{F}_z[T]|^2 \mathrm{d}^{2s}z,$$

то формула (V.3.5) для ядерных операторов получится отсюда по линейности. Пусть $\{t_j\}$ собственные значения и $\{e_j\}$ — ортонормированный базис из собственных векторов оператора T. По теореме II.7.1 след оператора $TV(z)$ равен

$$\mathscr{F}_z[T] = \sum_j t_j (e_j|V(z)e_j), \tag{V.3.6}$$

где $\sum |t_j| < \infty$. Используя предложение V.3.2, получаем, что функциональный ряд (V.3.6) сходится в среднеквадратичном в $\mathscr{L}^2(Z)$ и

$$(2\pi)^{-s} \int |\mathscr{F}_z[T]|^2 \mathrm{d}^{2s}z = \sum_j t_j^2 |(e_j|e_j)|^2 = \mathrm{Tr}\, T^2.$$

Таким образом, соответствие $T \to \mathscr{F}_z[T]$ изометрично отображает множество ядерных операторов, как плотное подпространство гильбертова пространства $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$, в гильбертово пространство $\mathscr{L}^2(Z)$. Так как функции

$\mathscr{F}_z[|e_j)(e_k|] = (e_k|V(z)e_j)$ являются базисными в $\mathscr{L}^2(Z)$, то образ этого отображения плотен в $\mathscr{L}^2(Z)$. Поэтому соответствие $T \to \mathscr{F}_z[T]$ продолжается по непрерывности до изометричного отображения $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$ на $\mathscr{L}^2(Z)$, так что (V.3.5) выполняется для операторов Гильберта—Шмидта.

Следствие V.3.4. *Состояние S является чистым тогда и только тогда, когда*

$$(2\pi)^{-s}\int |\mathscr{F}_z[S]|^2 \mathrm{d}^{2s}z = 1.$$

Доказательство. По теореме V.3.3

$$(2\pi)^{-s}\int |\mathscr{F}_z[S]|^2 \mathrm{d}^{2s}z = \operatorname{Tr} S^2 = \sum_j s_j^2,$$

где s_j — собственные значения оператора плотности S. Но $s_j \geqslant 0$, $\sum s_j = 1$ откуда следует, что $\sum s_j^2 \leqslant 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда одно из s_j равно единице, а остальные — нули. Это означает, что S — одномерный проектор, т. е. оператор плотности чистого состояния.

Следствие V.3.5. *(формула обращения). Для любого оператора Гильберта — Шмидта T*

$$T = (2\pi)^{-s}\int \mathscr{F}_z[T]V(-z)\mathrm{d}^{2s}z, \tag{V.3.7}$$

где интеграл сходится в слабом смысле.

Доказательство. Полагая в (V.3.5) $T_1 = |\varphi)(\psi|$ и учитывая, что

$$(\psi|V(z)\varphi) = (\varphi|V(z)^*\psi) = (\varphi|V(-z)\psi)$$

получаем

$$(2\pi)^{-s}\int \mathscr{F}_z[T](\varphi|V(-z)\psi)\mathrm{d}^{2s}z = \operatorname{Tr}|\psi)(\varphi|T = (\varphi|T\psi), \tag{V.3.8}$$

а это и означает выполнение (V.3.7) в смысле слабой сходимости.

Это следствие показывает, что преобразования $T \to f(z) = \mathscr{F}_z[T]$ и $f \to T = V(f)$ являются взаимно обратными, так что

$$T = V(\mathscr{F}_z[T]).$$

В частности, соответствие $T \to \mathscr{F}_z[T]$ является взаимно-однозначным.

Из (V.3.7) можно получить связь между ядром оператора T в любом неприводимом представлении и функцией $\mathscr{F}_z[T]$. Для иллюстрации рассмотрим представление Шредингера в случае $s = 1$. Установим формулу для ядра оператора Гильберта—Шмидта T в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$:

$$(\xi|T|\xi') = (2\pi)^{-1}\int \mathscr{F}_{\xi-\xi',y}[T]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi+\xi')y/2}\mathrm{d}y, \tag{V.3.9}$$

где

$$\mathscr{F}_{x,y}[T] = \operatorname{Tr} TV(x,y) \equiv \operatorname{Tr} TW_{-x,y/\mu}.$$

В самом деле, из (III.4.1)

$$(\varphi|V(-x,-y)\psi) = \int (\varphi|\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y(\xi-x/2)}(\xi-x|\psi)\mathrm{d}\xi \tag{V.3.10}$$

для любых φ, $\psi \in \mathscr{H}$. Поэтому в силу (V.3.8)

$$\begin{aligned}&\iint (\varphi|\xi)(\xi|T|\xi')(\xi'|\psi)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\xi' = \\ &= (2\pi)^{-1}\iiint \mathscr{F}_{x,y}[T](\varphi|\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y(\xi-x/2)}(\xi-x|\psi)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

причем все функции квадратично интегрируемы, так что возможна перемена порядка интегрирования. Полагая $\xi'=\xi-x$ и пользуясь произволом в выборе φ, ψ, получаем (V.3.9).

Аналогично, используя (V.3.4) и (II.7.16), можно получить, что

$$\mathscr{F}_{x,y}[T] = \int (\xi+x|T|\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}y(\xi+x/2)}\mathrm{d}\xi.$$

Используя это соотношение и (III.5.3), получаем преобразование Вейля оператора плотности (V.1.1):

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}_{x,y}[|\overline{P},\overline{Q})(\overline{P},\overline{Q}|] = \\ &= \exp\left[\mathrm{i}(x\overline{P}+y\overline{Q}) - \frac{1}{4}\left(\frac{\hbar}{\omega}x^2+\frac{\omega}{\hbar}y^2\right)\right].\end{aligned} \tag{V.3.11}$$

Мы также получили инструмент, позволяющий дать

Доказательство предложения III.6.1. Рассмотрим классическую характеристическую функцию (преобразование Фурье) распределения вероятностей измерения $E(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v)$ относительно состояния $S\otimes S_\psi$. Согласно формуле (II.7.11), оно равно

$$\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x+\eta\mu v)}\mu^{\mathbf{E}}_{S\otimes S_\psi}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v) = \mathrm{Tr}\, S\otimes S_\psi \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi\tilde{Q}+\eta\tilde{P})}$$

Учитывая (III.6.5), получаем

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi\tilde{Q}+\eta\tilde{P})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi Q+\eta P)}\otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\xi Q_0+\eta P_0)},$$

так что характеристическая функция

$$\mathrm{Tr}\, S\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi Q+\eta P)}\cdot(\overline{\psi}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\xi Q_0+\eta P_0)}\overline{\psi}).$$

Преобразуем второй сомножитель, используя (III.4.1), (III.4.6). Имеем

$$\begin{aligned}(\overline{\psi}|W_{-\eta,-\xi/\mu}\overline{\psi}) &= \int \psi(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(\lambda+\eta/2)}\overline{\psi(\lambda+\eta)}\mathrm{d}\lambda = \\ &= \overline{(\psi|W_{-\eta,\xi/\mu}\psi)} = \overline{\mathrm{Tr}\, S_\psi \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi Q_0+\eta P_0)}}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\operatorname{Tr} S\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta P+\xi Q)} = \mathscr{F}_{\eta,\xi}[S],$$

мы можем записать характеристическую функцию распределения $\mu^{\mathbf{E}}_{S\otimes S_\psi}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v)$ в виде

$$\mathscr{F}_{\eta,\xi}[S]\cdot\overline{\mathscr{F}_{\eta,\xi}[S_\psi]}.$$

Поскольку в силу теоремы V.3.3 оба множителя квадратично интегрируемы, их произведение интегрируемо. Поэтому определено обратное (обычное) преобразование Фурье

$$\frac{\mu}{(2\pi)^2}\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi x+\eta\mu v)}\mathscr{F}_{\eta,\xi}[S]\cdot\overline{\mathscr{F}_{\eta,\xi}[S_\psi]}\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi$$

которое дает плотность распределения вероятностей $\mu^{\mathbf{E}}_{S\otimes S_\psi}$. Используя свойство (3) некоммутативного преобразования Фурье, имеем

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x+\eta\mu v)}\mathscr{F}_{\eta,\xi}[S_\psi] = \mathscr{F}_{\eta,\xi}[W_{x,v}S_\psi W^*_{x,v}].$$

Согласно равенству Парсеваля (V.3.5) плотность распределения вероятностей $\mu^{\mathbf{E}}_{S\otimes S_\psi}$ равна

$$\begin{aligned}&\frac{\mu}{(2\pi)^2}\iint \mathscr{F}_{\eta,\xi}[S]\cdot\overline{\mathscr{F}_{\eta,\xi}[W_{x,v}S_\psi W^*_{x,v}]}\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi\\&= \frac{\mu}{2\pi}\operatorname{Tr} SW_{x,v}S_\psi W^*_{x,v} = (\psi|W^*_{x,v}SW_{x,v}\psi)\frac{\mu}{2\pi},\end{aligned}$$

что совпадает с плотностью распределения (V.6.4) измерения $\mathbf{M}$. Предложение доказано.

§ 4. Характеристическая функция и моменты состояния

Рассмотрим преобразование $\mathscr{F}_z[T]$ эрмитова ядерного оператора T. Если $T\geqslant 0$, то $\mathscr{F}_z[T]$ обладает следующим свойством Δ-*положительной определенности*: для любого n; $z_1,\dots z_n\in Z$, любых $z_1,\dots z_n\in Z$ и $c_1,\dots c_n\in\mathbb{C}$

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j\bar{c}_k\mathscr{F}_{z_j-z_k}[T]\exp\left[\frac{1}{2}\mathrm{i}\Delta(z_j,z_k)\right]\geqslant 0. \qquad \text{(V.4.1)}$$

В самом деле, в силу (V.2.1) и (V.3.5) эта сумма есть не что иное, как

$$\operatorname{Tr} T[\sum_k c_kV(z_k)]^*[\sum_j c_jV(z_j)],$$

что, очевидно, всегда неотрицательно, если $T\geqslant 0$.

Преобразование $\mathscr{F}_z[S]$ оператора плотности S назовем *характеристической функцией* оператора плотности S по аналогии с характеристическими функциями распределений вероятностей. Следующая теорема является некоммутативным аналогом известной теоремы Бохнера–Хинчина.

Теорема V.4.1. *Для того чтобы функция $\mathscr{F}(z)$ была характеристической функцией квантового состояния, необходимо и достаточно выполнения условий:*

(1) *$\mathscr{F}(0)=1$, $\mathscr{F}(z)$ непрерывна при $z=0$;*

(2) *$\mathscr{F}(z)$ является Δ-положительно определенной.*

Доказательство. Пусть S — оператор плотности; тогда $\mathscr{F}_0[S]=\mathrm{Tr}\,S=1$. Условие (2) следует из положительности S. Для доказательства непрерывности заметим, что
$$\mathscr{F}_z[S]=\sum_j s_j(e_j|V(x)e_j),$$
где s_j — собственные значения, e_j — собственные векторы оператора S. В силу непрерывности представления $z\to V(z)$, каждое слагаемое ряда является непрерывной функцией z, кроме того, ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как $|(e_j|V(z)e_j)|\leqslant 1$ и $\sum s_j<\infty$. Таким образом, $\mathscr{F}(z)$ непрерывна при всех $z\in Z$, и необходимость доказана.

Докажем достаточность. Прежде всего покажем, что непрерывность в нуле и Δ-положительная определенность влекут равномерную непрерывность функции $\mathscr{F}(z)$ при всех z (аналогичный факт имеет место в теории вероятностей для характеристических функций). Для этого рассмотрим условие (V.4.1) для $n=3$ и значений z, равных 0, z_1, z_2. Тогда условие (V.4.1) означает положительную определенность эрмитовой формы от переменных c_1, c_2, c_3 с матрицей
$$\begin{bmatrix} 1 & \mathscr{F}(-z_1) & \mathscr{F}(-z_2)\\ \mathscr{F}(z_1) & 1 & \mathscr{F}(z_1-z_2)e^{i\Delta(z_1,z_2)/2}\\ \mathscr{F}(z_2) & \mathscr{F}(z_2-z_1)e^{i\Delta(z_2,z_1)/2} & 1\end{bmatrix}.$$
По критерию Сильвестра получаем
$$\begin{gathered}1-\mathscr{F}(z_1)\mathscr{F}(-z_1)\geqslant 0,\\ 1+2\,\mathrm{Re}\,\overline{\mathscr{F}(z_1)}\mathscr{F}(z_2)\overline{\mathscr{F}(z_2-z_1)}e^{i\Delta(z_1,z_2)/2}-\\ -|\mathscr{F}(z_2)|^2-|\mathscr{F}(z_1)|^2-|\mathscr{F}(z_1-z_2)|^2\geqslant 0.\end{gathered}$$
Из первого неравенства следует, что
$$\mathscr{F}(-z)=\overline{\mathscr{F}(z)} \tag{V.4.2}$$
и
$$|\mathscr{F}(z)|^2\leqslant 1. \tag{V.4.3}$$
Преобразуя второе неравенство, получаем
$$\begin{aligned}&|\mathscr{F}(z_2)-\mathscr{F}(z_1)|^2\leqslant\\ &\leqslant 1-|\mathscr{F}(z_2-z_1)|^2-2\,\mathrm{Re}\,\overline{\mathscr{F}(z_1)}\mathscr{F}(z_2)[1-\overline{\mathscr{F}(z_2-z_1)}e^{i\Delta(z_2,z_1)/2}].\end{aligned}$$
Учитывая (V.4.2), (V.4.3), находим окончательно
$$|\mathscr{F}(z_2)-\mathscr{F}(z_1)|^2\leqslant 4|1-\overline{\mathscr{F}(z_2-z_1)}e^{i\Delta(z_2,z_1)/2}|,$$

откуда и следует высказанное утверждение.

Мы построим некоторое гильбертово пространство и состояние в нем, для которого $\mathscr{F}(z)$ является характеристической функцией. Рассмотрим оператор $\widehat{V}_0(z)$, действующий на функцию $\psi(w)$, $w \in Z$, по формуле

$$\widehat{V}_0(z)\psi(w) = \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{i}\Delta(z, w)\right]\psi(z+w).$$

Непосредственно проверяется, что операторы $\{\widehat{V}_0(z); z \in Z\}$ удовлетворяют каноническому коммутационному соотношению (V.2.1). Теперь мы определим скалярное произведение, относительно которого эти операторы унитарны. Рассмотрим линейное пространство $\mathscr{H}_0$ функций вида

$$\psi(w) = \left[\sum_k c_k V(z_k)\right] 1(w) \equiv \sum_k c_k \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{i}\Delta(z_k, w)\right], \quad w \in Z,$$

где $1(w)$ — функция, тождественно равная единице. Введем в $\mathscr{H}_0$ полуторалинейную форму

$$(\psi^{(1)}|\psi^{(2)}) = \sum_{j,k} c_j^{(2)}\bar{c}_k^{(1)}\mathscr{F}(z_j^{(2)} - z_k^{(1)}) \exp\left[\frac{1}{2}\mathrm{i}\Delta(z_j^{(2)}, z_k^{(1)})\right],$$

где $\psi^{(\alpha)} = [\sum_j c_j^{(\alpha)} V(z_j^{(\alpha)})]1$; $\alpha = 1, 2$. В силу Δ-положительной определенности

$$(\psi|\psi) \geqslant 0, \qquad \psi \in \mathscr{H}_0.$$

Кроме того, непосредственно проверяется, что

$$(\widehat{V}_0(z)\psi_1|\widehat{V}_0(z)\psi_2) = (\psi_1|\psi_2); \qquad \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{H}_0 \tag{V.4.4}$$

для любого $z \in Z$.

Обозначим через $\mathscr{H}$ пополнение фактор-пространства $\mathscr{H}_0$. В силу (V.4.4) операторы $\widehat{V}_0(z)$ продолжаются до унитарных операторов $\widehat{V}(z)$ в $\mathscr{H}$. Таким образом, $z \to V(z)$ является проективным унитарным представлением канонического коммутационного соотношения в $\mathscr{H}$. Установим его непрерывность.

Для этого достаточно проверить непрерывность функций $(\psi^{(1)}|\widehat{V}(\cdot)\psi^{(2)}) = (\psi^{(1)}|\widehat{V}_0(\cdot)\psi^{(2)})$ для $\psi^{(\alpha)}$, лежащих в $\mathscr{H}_0$. Но для таких ψ

$$(\psi^{(1)}|\widehat{V}_0(z)\psi^{(2)}) = \\ = \sum_{j,k} c_j^{(z)}\bar{c}_k^{(1)} \exp\left[\frac{1}{2}\mathrm{i}\Delta(z_j^{(2)} + z, z^{(1)}z_k - z)\right]\mathscr{F}(z_j^{(2)} + z - z_k^{(1)}),$$

и непрерывность вытекает из непрерывности функции $\mathscr{F}(z)$.

Из определения $\widehat{V}(z)$ и скалярного произведения

$$(1|\widehat{V}(z)1) = \mathscr{F}(z). \tag{V.4.5}$$

По теореме (V.3.1) построенное представление унитарно эквивалентно прямой сумме копий некоторого неприводимого представления $z \to V(z)$ в пространстве $\mathscr{H}$:

$$\widehat{V}(z) = U^{-1} \begin{bmatrix} V(z) & & 0 \\ & V(z) & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} U.$$

Оператор U изометрически отображает $\hat{\mathscr{H}}$ на $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H} \oplus \ldots$. Положим

$$U1 = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \ldots \tag{V.4.6}$$

и определим $S = \sum_j |\psi_j)(\psi_j|$ в $\mathscr{H}$. Очевидно, что $S \geqslant 0$ и

$$\mathrm{Tr}\, S = \sum_j (\psi_j|\psi_j) = (U1|U1) = (1|1) = 1.$$

Таким образом, S — оператор плотности. Из (V.4.5) и (V.4.6) получаем

$$\mathscr{F}(z) = (1|\widehat{V}(z)1) = \sum_j (\psi_j|V(z)\psi_j) = \mathrm{Tr}\, SV(z),$$

так что $\mathscr{F}(z)$ является характеристической функцией S. Теорема доказана.

Отметим интересный факт, не имеющий аналога в классической теории вероятностей. Так как всякий оператор плотности является оператором Гильберта–Шмидта, то по теореме V.3.3 функция $\mathscr{F}_z[S]$ квадратично интегрируема. В сочетании с доказанной теоремой это означает, что непрерывность и Δ-положительная определенность функции $\mathscr{F}(z)$ влекут квадратичную интегрируемость. Заметим, что если сразу наложить условие квадратичной интегрируемости, то доказательство достаточности значительно упрощается. Пользуясь теоремой V.3.3, введем оператор Гильберта—Шмидта $S = V(\mathscr{F})$. Из условий (1), (2) вытекает, что $S \geqslant 0$ и $\mathrm{Tr}\, S = 1$, т. е. S — оператор плотности, и по формуле обращения $\mathscr{F}(z) = \mathscr{F}_z[S]$.

В теории вероятностей известны соотношения, связывающие моменты распределения с производными его характеристической функции. Аналогичные соотношения имеют место и здесь. Пусть

$$R(z) = \int \lambda E_z(\mathrm{d}\lambda)$$

– спектральное разложение самосопряженного оператора $R(z)$. Рассмотрим распределение вероятностей на прямой

$$\mu_S^z(B) = \mathrm{Tr}\, SE_z(B); \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}).$$

Функция $\mathscr{F}_{tz}[S]$, $t \in \mathbb{R}$ является классической характеристической функцией распределения $\mu_S^z(\mathrm{d}\lambda)$, так как в силу соотношения (II.7.11)

$$\mathscr{F}_{tz}[S] = \mathrm{Tr}\, S\mathrm{e}^{\mathrm{i}tR(z)} = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda} \mu_S^z(\mathrm{d}\lambda).$$

Предположим, что n-й абсолютный момент распределения μ_S^z конечен; тогда, как известно из теории вероятностей, $\mathscr{F}_{tz}[S]$ n раз дифференцируема и n-й момент распределения вероятностей μ_s^z равен

$$m_n(z) = \mathrm{i}^{-n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \mathscr{F}_{tz}[S]\bigg|_{t=0}. \tag{V.4.7}$$

Если n четно, то, обратно, из существования производной n-го порядка в нуле следует конечность n-го момента. Из (V.4.7) видно, что $m_n(z)$ является однородным полиномом от z степени n. Для нас наибольший интерес представляет *среднее значение* состояния

$$m_1(z) \equiv m(z) = E_S(R(z)) = \int \lambda \mu_S^z(\mathrm{d}\lambda),$$

которое является линейной функцией от z и *второй момент* $m_2(z) = \int \lambda^2 \mu_S^z(\mathrm{d}\lambda)$, который является квадратичной формой от z. Вводя соответствующую вещественную симметричную билинейную форму

$$m_2(z, z') = -\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \mathscr{F}_{tz+sz'}[S]\bigg|_{t=s=0}$$

определим *корреляционную функцию* состояния формулой

$$\alpha(z, z') = m_2(z, z') - m(z)m(z'), \tag{V.4.8}$$

так что

$$\alpha(z, z) = D_S(R(z)) = \int (\lambda - m(z))^2 \mu_S^z(\mathrm{d}\lambda).$$

Мы скажем, что S — *состояние с конечными вторыми моментами*, если $m_2(z) < \infty$ для всех $z \in Z$. Напомним, что $\mathscr{L}_h^2(S)$ является вещественным гильбертовым пространством квадратично-суммируемых операторов относительно S. Согласно § II.9, условие $m_2(z) < \infty$ влечет $R(z) \in \mathscr{L}_h^2(S)$, и соотношения (II.9.1), (II.9.2) показывают, что

$$m(z) = \langle I, R(z) \rangle_S, \qquad \alpha(z, z) = \langle R(z) - m(z), R(z) - m(z) \rangle_S.$$

Корреляционная функция тогда равна

$$\alpha(z, z') = \langle R(z) - m(z), R(z') - m(z') \rangle_S. \tag{V.4.9}$$

Теперь установим строгую версию коммутационного соотношения Гейзенберга (V.2.5):

$$[R(z), R(z')]_S = \Delta(z, z'); \qquad z, z' \in Z. \tag{V.4.10}$$

Для доказательства понадобится

Лемма V.4.2. *Пусть $M(\mathrm{d}\lambda)$ — измерение с конечными вторыми моментами относительно состояния S и $X_{\mathbf{M}} = \int \lambda M(\mathrm{d}\lambda)$ определено как в § II.9. Рассмотрим семейство ограниченных операторов*

$$V_t = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda} M(\mathrm{d}\lambda)$$

как функцию t со значениями в $\mathscr{L}^2_\pm(S)$. Тогда

$$X_{\mathbf{M}} = \mathrm{i}^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_t \Big|_{t=0},$$

где производная берется в $\mathscr{L}^2_\pm(S)$.

Доказательство. Нужно показать, что

$$\frac{V_t - I}{\mathrm{i}t} \to X_M \qquad \text{в } \mathscr{L}^2_\pm(S) \qquad \text{при } t \to 0.$$

В силу неравенства (II.9.10) для этого достаточно установить, что

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} - 1}{\mathrm{i}t} \to \lambda \qquad \text{в} \qquad \mathscr{L}^2(\mu_S).$$

Очевидно, что имеет место поточечная сходимость; кроме того,

$$\left| \lambda - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} - 1}{\mathrm{i}t} \right|^2 \leqslant 4\lambda^2,$$

так как

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} - 1}{\mathrm{i}t} \right| = \left| \frac{\sin \lambda t/2}{t/2} \right| \leqslant \lambda.$$

По теореме Лебега о мажорированной сходимости и в силу конечности второго момента, $\int \lambda^2 \mu_S(\mathrm{d}\lambda) < \infty$,

$$\int \left| \lambda - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} - 1}{\mathrm{i}t} \right|^2 \mu_S(\mathrm{d}\lambda) \to 0,$$

что и требовалось установить.

Из этой леммы вытекает, что если $m_2(z) < \infty$, то

$$R(z) = \mathrm{i}^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(tz) \Big|_{t=0} \qquad \text{в} \qquad \mathscr{L}^2_\pm(S). \tag{V.4.11}$$

Беря след обеих частей равенства (V.2.4) с оператором плотности S и учитывая, что $V(z)^* = V(-z)$, получаем

$$\langle V(-tz), V(sz') \rangle_S^- = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ts\Delta(z,z')} \langle V(-tz), V(sz') \rangle_S^+.$$

Отсюда, в силу (V.4.11),

$$-\langle R(z), R(z') \rangle_S^- = \mathrm{i}\Delta(z, z') - \langle R(z), R(z') \rangle_S^+.$$

Учитывая второе соотношение в (II.8.14), получаем (V.4.10). Принимая во внимание (II.8.9), можно также написать

$$[R(z) - m(z), R(z') - m(z')]_S = \Delta(z, z'). \tag{V.4.12}$$

Из формул (V.4.9), (V.4.12) и предложения II.8.3 вытекает, что корреляционная функция состояния с конечными вторыми моментами удовлетворяет эквивалентным неравенствам

$$\begin{aligned}&\alpha(z,z)\alpha(z',z')\geqslant\tfrac14\Delta(z,z')^2,\\&\alpha(z,z)+\alpha(z',z')\geqslant\Delta(z,z');\quad z,z'\in Z.\end{aligned}\tag{V.4.13}$$

Первое из этих неравенств есть, конечно, соотношение неопределенностей для наблюдаемых $R(z)$, $R(z')$. Кроме того, из (II.8.15) следует, что для любых n и $z_1,\dots z_n\in Z$

$$[\alpha(z_j,z_k)\pm\tfrac12\mathrm{i}\Delta(z_j,z_k)]\geqslant 0.\tag{V.4.14}$$

Лемма V.4.3. *Если S - оператор плотности состояния с конечными вторыми моментами, то*

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}_z[SR(z_1)]=[-\tfrac12\Delta(z,z_1)-\mathrm{i}\nabla_{z_1}]\mathscr{F}_z[S],\\&\mathscr{F}_z[R(z_1)S]=[\tfrac12\Delta(z,z_1)-\mathrm{i}\nabla_{z_1}]\mathscr{F}_z[S],\\&\mathscr{F}_z[S\circ R(z_1)]=-\mathrm{i}\nabla_{z_1}\mathscr{F}_z[S],\end{aligned}\tag{V.4.15}$$

$$\mathscr{F}_z[[R(z_1),S]]=\Delta(z,z_1)\mathscr{F}_z[S],\tag{V.4.16}$$

где ∇_{z_1} — производная по направлению z_1:

$$\nabla_{z_1}\mathscr{F}(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{F}(z+tz_1)\Big|_{t=0}.$$

Доказательство. Так как $R(z_1)\in\mathscr{L}^2(S)$, то по предложению II.8.2 операторы $SR(z_1),\dots$ в левой части доказываемых равенств являются ядерными и имеют квадратично интегрируемые преобразования $\mathscr{F}_z[SR(z_1)],\dots$. Достаточно проверить первую формулу. Имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_z[SR(z_1)]&=\mathrm{Tr}(SR(z_1))V(z)=\\&=\langle V(-z),R(z_1)\rangle_S^0.\end{aligned}$$

Согласно (V.4.11)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_z[SR(z_1)]&=\mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V(-z),V(tz_1)\rangle_S^-\Big|_{t=0}=\\&=\mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{Tr}\,SV(tz_1)V(z)\Big|_{t=0}.\end{aligned}$$

Используя каноническое коммутационное соотношение, получаем

$$\mathscr{F}_z[SR(z_1)]=\mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{F}_{z+tz_1}[S]\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta(z_1,z)/2}\Big|_{t=0},$$

что и требовалось.

Было бы нетрудно распространить эти формулы на более широкий класс операторов S, однако это нам не понадобится.

§ 5. Структура общего гауссовского состояния

Найдем характеристическую функцию квазиклассического состояния (V.1.2). Используя (V.3.11), получаем

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{x,y}[S] &= \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\hbar}{\omega}x^2 + \frac{\omega}{\hbar}y^2\right)\right]\int \exp[\mathrm{i}(\alpha x + \beta y)]\mu(\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta) = \\ &= \mathscr{F}_0(x,y)\cdot\bar{\mu}(x,y),\end{aligned} \tag{V.5.1}$$

где $\mathscr{F}_0(x,y)$ — характеристическая функция основного состояния $|0)(0|$, а $\tilde{\mu}(x,y)$ — классическая характеристическая функция распределения вероятностей μ. Рассмотрим квазиклассическое гауссовское состояние (V.1.7). Возвращаясь к вещественным переменным согласно формулам

$$\zeta = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\beta + \mathrm{i}\hbar\alpha), \qquad \bar{a} = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\overline{Q} + \mathrm{i}\hbar\overline{P}),$$

мы можем записать оператор плотности этого состояния в виде

$$\begin{aligned}S_{\overline{P},\overline{Q}} = \frac{1}{2\pi\overline{N}}\iint |\alpha,\beta)(\beta,\alpha|\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2\overline{N}}\left[\frac{\hbar}{\omega}(\alpha-\overline{P})^2 + \frac{\omega}{\hbar}(\beta-\overline{Q})^2\right]\right\}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta.\end{aligned} \tag{V.5.2}$$

Характеристическая функция гауссовского распределения имеет вид

$$\bar{\mu}(x,y) = \exp\left[\mathrm{i}(\overline{P}x + \overline{Q}y) - \frac{\overline{N}}{2}\left(\frac{\omega}{\hbar}x^2 + \frac{\hbar}{\omega}y^2\right)\right]$$

так что, согласно (V.5.1),

$$\mathscr{F}_{x,y}[S_{\overline{P},\overline{Q}}] = \exp[\mathrm{i}(\overline{P}x + \overline{Q}y) - \tfrac{1}{2}(\sigma_P^2x^2 + \sigma_Q^2y^2)], \tag{V.5.3}$$

где

$$\sigma_P^2 = \frac{\omega}{\hbar}\left(\overline{N} + \frac{1}{2}\right), \qquad \sigma_Q^2 = \frac{\hbar}{\omega}\left(\overline{N} + \frac{1}{2}\right),$$

причем $\overline{N} = \sigma_P\sigma_Q - \frac{1}{2}$.

В случае нескольких степеней свободы характеристическая функция состояния (V.1.8), очевидно, является произведением множителей вида (V.5.2):

$$\prod_k \exp\left[\mathrm{i}(\overline{P}_kx_k + \overline{Q}_ky_k) - \frac{1}{2}(\sigma_{Pk}^2x_k^2 + \sigma_{Qk}^2y_k^2)\right]. \tag{V.5.4}$$

Таким образом, мы видим, что характеристическая функция квантового состояния (V.5.2) имеет тот же вид, что и характеристическая функция гауссовского распределения, однако дисперсии не произвольны, а подчиняются соотношению неопределенностей $\sigma_P^2\sigma_Q^2 \geqslant \frac{1}{4}$.

Опираясь на эту аналогию, дадим следующее общее определение. Пусть $z \to V(z)$ — неприводимое представление ККС на симплектическом пространстве (Z,Δ). Состояние S в пространстве представления $\mathscr{H}$ назовем *гауссовским*, если его характеристическая функция имеет вид

$$\mathscr{F}_z[S] = \exp[\mathrm{i}m(z) - \tfrac{1}{2}\alpha(z,z)], \tag{V.5.5}$$

где $m(z)$ — линейная функция, $\alpha(z, z')$ — билинейная симметричная форма на Z. Функция (V.5.5) бесконечно дифференцируема, и поэтому все моменты гауссовского состояния конечны. Из (V.4.7) и (V.4.8) следует, что $m(z)$ совпадает со средним значением, а $\alpha(z, z')$ с корреляционной функцией состояния S, что уже отражено в обозначениях.

Теорема V.5.1. *Для того чтобы функция вида* (V.5.5) *была характеристической функцией состояния, необходимо и достаточно, чтобы билинейная форма $\alpha(z, z')$ удовлетворяла одному из эквивалентных соотношений* (V.4.13), (V.4.14).

Доказательство. Необходимость вытекает из того, что α является корреляционной функцией состояния. Для доказательства достаточности нужно лишь проверить Δ-положительную определенность функции (V.5.5), т. е.

$$\sum_{j,k} c_j \bar{c}_k \exp\left[\mathrm{i}m(z_j) - \mathrm{i}m(z_k) - \frac{1}{2}\alpha(z_j - z_k, z_j - z_k) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{i}\Delta(z_j, z_k)\right] \geqslant 0$$

для любых $z_j \in Z$, $c_j \in \mathbb{C}$. Полагая $b_j = c_j \exp[\mathrm{i}m(z_j) - \frac{1}{2}\alpha(z_j, z_j)]$, перепишем это в виде

$$\sum_{j,k} b_j \bar{b}_k \exp\left[\alpha(z_j, z_k) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\Delta(z_j, z_k)\right] \geqslant 0.$$

Заметим, что матрица

$$[\alpha(z_j, z_k) + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\Delta(z_j, z_k)]$$

положительно определена согласно (V.4.14); остается сослаться на один результат Шура, утверждающий, что положительная определенность матрицы $[a_{jk}]$ влечет положительную определенность матрицы $[\exp a_{jk}]$.

Обозначим S_m гауссовское состояние со средним $m(z)$ и корреляционной функцией $\alpha(z, z')$. Мы покажем, что S_m можно рассматривать как результат «воздействия» на состояние $S = S_0$, описываемого некоторым унитарным «оператором сдвига». Так как форма Δ невырождена, то существует вектор $m_\Delta \in Z$ такой, что

$$m(z) = \Delta(m_\Delta, z), \qquad z \in Z$$

(это легко получить в координатном представлении). Тогда

$$S_m = V(m_\Delta)^* S V(m_\Delta).$$

Для этого достаточно проверить, что характеристические функции состояний в обеих частях совпадают. Используя свойство (3) преобразования $T \to \mathscr{F}_z[T]$ (см. § 3), имеем

$$\mathscr{F}_z[V(m_\Delta)^* S V(m_\Delta)] = \mathscr{F}_z[S]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(m_\Delta, z)} = \mathscr{F}_z[S_m],$$

что и требовалось.

Теперь рассмотрим евклидово пространство (Z, α). Согласно лемме Рисса-Фреше, существует единственный вектор $m_\alpha \in Z$, удовлетворяющий условию

$$m(z) = \alpha(m_\alpha, z), \qquad z \in Z$$

(в конечномерном случае это легко получается из координатного представления). Обозначим $\mathscr{D}$ оператор, ассоциированный с формой Δ, т. е. оператор, удовлетворяющий соотношению (V.2.7), где α — корреляционная функция. Тогда $m_\alpha = -\mathscr{D} m_\Delta$, так что

$$S_m = V(\mathscr{D}^{-1} m_\alpha) S V(\mathscr{D}^{-1} m_\alpha)^*. \tag{V.5.6}$$

Условие (V.4.13) налагает определенное ограничение на оператор $\mathscr{D}$. Полагая $z' = -\frac{1}{2}\mathscr{D} z$ в (V.4.13), получаем

$$I + \tfrac{1}{4}\mathscr{D}^2 \geqslant 0 \qquad \text{в} \qquad (Z, \alpha). \tag{V.5.7}$$

Пусть $\{e_j, h_j\}$ — симплектический базис, в котором $\mathscr{D}$ имеет матрицу (V.2.7). Тогда из (V.5.7) получаем

$$a_j \equiv d_j^{-1} \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

Так как

$$\alpha(z, z) = \sum_j a_j (x_j^2 + y_j^2),$$

где $[x_j, y_j]$ — координаты вектора z в этом базисе, то характеристическая функция состояния S_m принимает вид

$$\prod_j \exp\left[\mathrm{i}(\overline{P}'_j x_j + \overline{Q}'_j y_j) - \frac{a_j}{2}(x_j^2 + y_j^2)\right]. \tag{V.5.8}$$

Здесь

$$\overline{P}'_j = E_{S_m}(P'_j), \qquad \overline{Q}'_j = E_{S_m}(Q'_j), \qquad a_j = D_{S_m}(Q'_j) = D_{S_m}(P'_j),$$

где $P'_j = R(e_j)$, $Q'_j = R(h_j)$.

Заметим, что если мы с самого начала исходим из коммутационных соотношений для данного набора канонических наблюдаемых P_k, Q_k как в § 2, то симплектический базис, в котором характеристическая функция гауссовского состояния имеет простейшую форму (V.5.8), может быть произвольным. Новые канонические наблюдаемые P'_j, Q'_j вообще говоря, не совпадают с исходными P_k, Q_k и получаются из них линейным каноническим (т. е. сохраняющим коммутационные соотношения) преобразованием. Так, например, чтобы привести к виду (V.5.8) характеристическую функцию (V.5.4), необходимо произвести симплектическое преобразование

$$\begin{aligned} x_j &\to (\sigma_{Pj}/\sigma_{Qj})^{1/2} x_j = (\omega_j/\hbar)^{1/2} x_j, \\ y_j &\to (\sigma_{Qj}/\sigma_{Pj})^{1/2} y_j = (\hbar/\omega_j)^{1/2} y_j, \end{aligned}$$

которому соответствует каноническое преобразование

$$P'_j = (\hbar/\omega_j)^{1/2} P_j, \qquad Q'_j = (\omega_j/\hbar)^{1/2} Q_j.$$

В этих канонических наблюдаемых характеристическая функция

$$\operatorname{Tr} S \exp \mathrm{i}[\sum_j (P'_j x_j + Q'_j y_j)]$$

будет иметь вид (V.5.8) с $a_j = \sigma_{Pj}\sigma_{Qj} = \overline{N}_j + \frac{1}{2}$. В общем случае преобразование к новым переменным будет более сложным.

Тот факт, что характеристическая функция (V.5.5) разбивается на произведение сомножителей, отвечающих коммутирующим парам новых канонических наблюдаемых $\{P_j', Q_j'\}$, означает, что пространство $\mathscr{H}$ неприводимого представления $z \to V(z)$ можно представить в виде тензорного произведения

$$\mathscr{H} = \bigotimes_j \mathscr{H}'_j, \tag{V.5.9}$$

так что $V(z) = \bigotimes_j V_j(z_j, y_j)$ с $V_j(x_j, y_j) = \exp \mathrm{i}(P_j' x_j + Q_j' y_j)$ действует неприводимо в $\mathscr{H}'_j$; более того,

$$S_m = \bigotimes_j S_j',$$

где S_j' — гауссовские состояния в пространствах $\mathscr{H}'_j$ с характеристическими функциями простейшего вида

$$\exp\left[\mathrm{i}(\overline{P}'_j x_j + \overline{Q}'_j y_j) - \frac{a_j}{2}(x_j^2 + y_j^2)\right].$$

Еще раз подчеркнем, что разложение (V.5.9) определяется самим гауссовским состоянием (его корреляционной функцией) и не обязано совпадать с разложением, порождаемым исходными каноническими наблюдаемыми.

Найдем собственные значения оператора S_m. Поскольку преобразование (V.5.6) не изменяет собственных значений S, мы можем положить $m(z) \equiv 0$. Согласно (V.1.4) оператор плотности S_j' для j-й степени свободы имеет собственные значения вида

$$\frac{1}{\overline{N}_j + 1}\left(\frac{\overline{N}_j}{\overline{N}_j + 1}\right)^n; \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{V.5.10}$$

где $\overline{N}_j = \sigma_{Pj}\sigma_{Qj} - \frac{1}{2} = a_j - \frac{1}{2}$. Тензорное произведение таких состояния будет иметь в качестве собственных чисел всевозможные произведения вида

$$\prod_{j=1}^{s} \frac{1}{\overline{N}_j + 1}\left(\frac{\overline{N}_j}{\overline{N}_j + 1}\right)^{n_j},$$

соответствующие всевозможным комбинациям $n_j = 0, 1, \ldots$ В частности, максимальное собственное значение равно

$$\prod_{j=1}^{s} \frac{1}{\overline{N}_j + 1} = \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{a_j + \frac{1}{2}}.$$

Состояние является чистым тогда и только тогда, когда это произведение равно единице. Так как $a_j \geqslant \frac{1}{2}$, то это выполняется только, если все $a_j = \frac{1}{2}$ или

$$\det \tfrac{1}{2}\mathscr{D} = 1.$$

§ 6. Характеристическое свойство гауссовских состояний

Пусть $z \to V(z)$ — неприводимое представление канонического коммутационного соотношения в пространстве $\mathscr{H}$ и S — состояние в $\mathscr{H}$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathscr{L}^2(S)$, ассоциированное с состоянием S.

Лемма V.6.1. *Линейная оболочка операторов* $\{V(z), z \in Z\}$ *плотна в* $\mathscr{L}^2(S)$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathscr{L}^2(S)$ таков, что

$$\langle V(z), X\rangle_S = 0, \qquad z \in Z. \tag{V.6.1}$$

Так как $\mathscr{L}^2(S)$ является комплексификацией вещественного пространства $\mathscr{L}^2_h(S)$, то $X = X_1 + \mathrm{i}X_2$, где $X_j \in \mathscr{L}^2_h(S)$. Поэтому, используя (II.8.5), получаем

$$\operatorname{Tr}(X \circ S)V(z) = 0, \qquad z \in Z.$$

Таким образом, $\mathscr{F}_z[X \circ S] = 0$; по формуле обращения получаем $X \circ S = 0$. Поэтому для любого ограниченного Y, согласно формуле (II.8.5)

$$\langle Y, X\rangle_S = \operatorname{Tr} Y^*(S \circ X) = 0,$$

так что $X = 0$ в $\mathscr{L}^2(S)$ и лемма доказана.

Если состояние S имеет конечные вторые моменты, то $R(z) \in \mathscr{L}^2_h(S)$ для всех $z \in Z$. Обозначим через $\mathfrak{R}$ подпространство $\mathscr{L}^2_h(S)$, порождаемое операторами вида

$$c + R(z); \qquad c \in \mathbb{R}, \quad z \in Z.$$

Если $\mathfrak{R}_0$ — одномерное подпространство $\mathfrak{R}$, натянутое на единичный оператор, то $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 \oplus \mathfrak{R}_1$, где $\mathfrak{R}_1$ — подпространство операторов вида

$$R(z) - m(z), \qquad z \in Z,$$

где $m(z)$ — среднее значение состояния S. Это видно из того, что

$$\langle R(z) - m(z), I\rangle_S = m(z) - m(z) \equiv 0.$$

В силу (V.4.9) отображение

$$z \to R(z) - m(z) \tag{V.6.2}$$

является изометрией евклидова пространства (Z, α) на подпространство $\mathfrak{R}_1 \subset \subset \mathscr{L}^2_h(S)$. Рассмотрим коммутационный оператор $\mathscr{D}$ состояния S, определяемый формулой (II.10.4), и обозначим $\mathfrak{D}_1$ его ограничение на подпространство $\mathfrak{R}_1$, так что

$$[Y, X]_S = \langle Y, \mathfrak{D}_1 X\rangle_S; \qquad X, Y \in \mathfrak{R}_1.$$

Пусть теперь $\mathscr{D}$ — оператор, определяемый через корреляционную функцию α состояния согласно (V.2.7). Тогда соотношение (V.4.12) может быть переписано в виде

$$\alpha(z, \mathscr{D} z') = \langle R(z) - m(z), \mathfrak{D}(R(z') - m(z'))\rangle_S; \qquad z, z' \in Z.$$

Это означает, что при изометрии (V.6.2) оператор $\mathscr{D}$ переходит в $\mathfrak{D}_1$, т. е.

$$R(\mathscr{D} z) - m(\mathscr{D} z) = \mathfrak{D}_1(R(z) - m(z)). \tag{V.6.3}$$

Теорема V.6.2. *Состояние S с конечными вторыми моментами является гауссовским тогда и только тогда, когда подпространство $\mathfrak{R}$ (или $\mathfrak{R}_1$) является инвариантным подпространством коммутационного оператора $\mathfrak{D}$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_0) = [0]$ в силу (II.10.6), поэтому инвариантность подпространства $\mathfrak{R}_1$ эквивалентна инвариантности $\mathfrak{R}$.

Пусть S — гауссовское состояние. Мы покажем, что $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1$ на $\mathfrak{R}_1$ и, таким образом, $\mathfrak{R}_1$ является инвариантным подпространством оператора $\mathfrak{D}$. Согласно (V.6.3), нам нужно показать, что

$$\mathfrak{D}(R(z) - m(z)) = R(\mathscr{D} z) - m(\mathscr{D} z), \qquad z \in Z. \tag{V.6.4}$$

В силу определения коммутационного оператора и того факта, что $\mathfrak{D} I = 0$, это равносильно равенству

$$[X, R(z)]_S = \langle X, R(\mathscr{D} z) - m(\mathscr{D} z)\rangle_S, \qquad X \in \mathscr{L}^2(S). \tag{V.6.5}$$

В силу леммы V.5.1, достаточно проверить это равенство для $X = V(-w)$, $w \in Z$. Но из (V.4.16) и (II.8.7) следует

$$[V(-w), R(z)]_S = \mathrm{i}\Delta(w, z)\mathscr{F}_w[S],$$

а (V.4.15) и (II.8.5) влекут

$$\langle V(-w), R(z)\rangle_S = -\mathrm{i}\nabla_z \mathscr{F}_w[S].$$

Таким образом, достаточно проверить, что характеристическая функция гауссовского состояния $\mathscr{F}_w[S]$, задаваемого формулой (V.5.5), удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{i}\Delta(w, z)\mathscr{F}_w[S] = -[\mathrm{i}\nabla_{\mathscr{D} z} + m(\mathscr{D} z)]\mathscr{F}_w[S], \tag{V.6.6}$$

что легко устанавливается непосредственным вычислением.

Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1) \subset \mathfrak{R}_1$. Тогда $\mathfrak{D}(R(z) - m(z)) = R(\mathscr{D}_1 z) - m(\mathscr{D}_1 z)$, где $\mathscr{D}_1$ - некоторый линейный оператор в Z. Обозначая через α корреляционную функцию состояния S, имеем

$$\begin{aligned} \alpha(z, \mathscr{D}_1, w) &= \langle R(z) - m(z), \mathscr{D}(R(w) - m(w))\rangle_S = \\ &= [R(z) - m(z), R(w) - m(w)]_S = \Delta(z, w), \end{aligned}$$

так что $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}$, где $\mathscr{D}$ определяется соотношением (V.2.7). Таким образом, выполняется (V.6.4) и, следовательно, характеристическая функция состояния S удовлетворяет дифференциальному уравнению (V.6.6). Оператор $\mathscr{D}$ невырожден, так что, заменяя z на $\mathscr{D}^{-1}z$ в (V.6.6), мы получим

$$-\alpha(w, z)\mathscr{F}_w[S] = [\nabla_z - \mathrm{i}m(z)]\mathscr{F}_w[S]. \tag{V.6.7}$$

Пусть $\{z_j\}$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве (Z, α) и w_j — компоненты вектора w в этом базисе. Уравнение (V.6.7) в координатной форме имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial w_j} - \mathrm{i}m(z_j)\right] \mathscr{F}_w[S] = -w_j \mathscr{F}_w[S], \qquad j = 1, \ldots, 2s.$$

Единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим условию $\mathscr{F}_0[S] = 1$, является

$$\exp\left[\mathrm{i}\sum_j w_j m(z_j) - \frac{1}{2}\sum_j w_j^2\right] = \exp\left[\mathrm{i}m(w) - \frac{1}{2}\alpha(w, w)\right].$$

Теорема доказана.

Примечание. Рассмотрим соотношение (V.6.5) для ограниченных X. Используя (II.8.5) и (II.8.7), получаем полезное равенство

$$\mathrm{i}[R(z), S_m] = (R(\mathscr{D} z) - m(\mathscr{D} z)) \circ S_m \tag{V.6.8}$$

для гауссовского оператора плотности со средним $m(z)$ и корреляционной функцией $\alpha(z, z') = \Delta(z, \mathscr{D}^{-1} z')$.

Пусть $\{S_{\boldsymbol{\theta}}\}$ — семейство гауссовских состояний с фиксированной корреляционной функцией α и средним значением вида

$$m(z) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j m_j(z),$$

где $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \ldots, \theta_n] \in \mathbb{R}^n$, а $m_j(z)$ — фиксированные линейные функции на Z. Введем элементы $m_j \in Z$, определяемые соотношением

$$m_j(z) = \alpha(m_j, z), \qquad z \in Z,$$

в соответствии с леммой Рисса-Фреше.

Предложение V.6.3. *Семейство $\{S_{\boldsymbol{\theta}}\}$ дифференцируемо*[1] *как функция переменной $\boldsymbol{\theta}$ со значениями в пространстве $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$ ядерных операторов, и*

$$\frac{\partial S_{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta_j} = \mathrm{i}[R(\mathscr{D}^{-1} m_j), S_{\boldsymbol{\theta}}] = (R(m_j) - m(m_j)) \circ S_\theta. \tag{V.6.9}$$

Доказательство. Используя (V.5.6), можем написать

$$S_{\boldsymbol{\theta}} = V\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j \mathscr{D}^{-1} m_j\right) S_0 V\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j \mathscr{D}^{-1} m_j\right)^*.$$

Давая параметру θ_j приращение t, имеем

$$S_{\boldsymbol{\theta}+t\boldsymbol{\delta}_j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tR(\mathscr{D}^{-1} m_j)} S_{\boldsymbol{\theta}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tR(\mathscr{D}^{-1} m_j)},$$

[1] Под дифференцируемостью функции со значениями в банаховом пространстве мы всегда понимаем сильную дифференцируемость.

где $\boldsymbol{\delta}_j$ — вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме j-й, равной единице. Таким образом, полагая $S_t = S_{\theta+t\delta_j}$, получаем однопараметрическое семейство состояний $\{S_t; t \in \mathbb{R}\}$ вида (III.2.1), причем инфинитезимальный оператор $R(\mathscr{D}^{-1}m_j)$ унитарной группы $\{\exp \mathrm{i}tR(\mathscr{D}^{-1}m_j); t\in\mathbb{R}\}$ принадлежит $\mathscr{L}_h^2(S)$. Поэтому семейство $\{S_t\}$ удовлетворяет условиям предложения VI.3.1, которое будет доказано в следующей главе. Из него вытекает сильная дифференцируемость семейства $\{S_t\}$ и равенство (VI.3.3) для производной, что дает первое из равенств (V.6.9). Второе получается из формулы (V.6.8).

В качестве примера рассмотрим квазиклассические состояния осциллятора (V.5.2) с характеристической функцией (V.5.3), где роль параметров $[\theta_j]$ играют средние значения $\overline{P}$, $\overline{Q}$. Тогда z является двумерным вектором с компонентами x, y так что

$$\Delta(z, z') = xy' - x'y.$$

Среднее значение и корреляционная функция даются формулами

$$m(z) = \overline{P}x + \overline{Q}y, \qquad \alpha(z, z) = \sigma_P^2 x^2 + \sigma_Q^2 y^2,$$

откуда $m(z) = \overline{P}\alpha(m_P, z) + \overline{Q}\alpha(m_Q, z)$ с

$$m_P = \sigma_P^{-2}[1, 0], \qquad m_Q = \sigma_Q^{-1}[0, 1].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R(m_P) - m(m_P) &= \sigma_P^{-2}(P - \overline{P}),\\ R(m_Q) - m(m_Q) &= \sigma_Q^{-2}(Q - \overline{Q}). \end{aligned}$$

Далее,

$$\mathscr{D} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_Q^{-2} \\ \sigma_P^{-2} & 0 \end{bmatrix},$$

и соотношения (V.6.9) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{\overline{P},\overline{Q}}}{\partial \overline{P}} &= \mathrm{i}[Q, S_{\overline{P},\overline{Q}}] = \sigma_P^{-2}(P - \overline{P}) \circ S_{\overline{P},\overline{Q}},\\ \frac{\partial S_{\overline{P},\overline{Q}}}{\partial \overline{Q}} &= -\mathrm{i}[P, S_{\overline{P},\overline{Q}}] = \sigma_Q^{-2}(Q - \overline{Q}) \circ S_{\overline{P},\overline{Q}}. \end{aligned} \tag{V.6.10}$$

Поскольку $R(z) = Px + Qy$, соотношение (V.6.4) переходит в

$$\mathscr{D}(P) = -\sigma_Q^{-2}(Q - \overline{Q}), \qquad \mathscr{D}(Q) = \sigma_P^{-2}(P - \overline{P}). \tag{V.6.11}$$

Комментарии

§ 1. Формула (V.1.2) дает так называемое P-представление Глаубера [14] (см. также Клаудер в Сударшан [20]). Квантование электромагнитного поля, т. е. представление его в виде бесконечного набора квантовых осцилляторов в форме, удобной для применений в квантовой оптике, описывается в книгах Люиселла [25], Клаудера и Сударшана [20], Хелстрома [46]. Там же можно найти обсуждение равновесного состояния поля и состояния «сигнал плюс шум».

§ 2. Бескоординатный подход к каноническим коммутационным соотношениям для полей разработан Сигалом [41] (случай конечного числа степеней свободы подробно рассмотрен Кастлером [68]). По поводу симплектических пространств и приведения к каноническому виду кососимметричной матрицы, см. например Мальцев [28].

§ 3. В случае бесконечного числа степеней свободы аналог теоремы Стоуна—фон Неймана уже не имеет места (см. например Сигал [41]). С этим связаны некоторые расходимости в теории квантовых полей. Математически строгое изложение проблематики этой теории дается в книге Боголюбова, Логунова и Тодорова [6]. Преобразование Вейля, введенное в [10], изучали Лупиас и Миракль-Соль [111], Пул [124], Холево [47] и др. Применение преобразования Вейля позволяет наиболее выпукло выявить аналогии и различия между классической в квантовой механиками (см. например Широков [55]).

§ 4. Характеристическая функция состояния (для полей) была введена Сигалом [131], который обобщил частную конструкцию Мойала [31].

Тот факт, что характеристическая функция определяет оператор плотности однозначно, лежит в основе метода гомодинной томографии в квантовой оптике [182]. В случае одной моды

$$\mathrm{T}rS\mathrm{e}^{i(Px+Qy)} = \mathrm{T}rS\mathrm{e}^{irR(\phi)} = \int \mathrm{e}^{irt} p_\phi(t)dt,$$

где $R(\phi) = P\sin\phi + Q\cos\phi$ так называемая квадратура поля, отвечающая фазе ϕ. Для каждого фиксированного значения ϕ измерение квадратуры $R(\phi)$ может быть реализовано с помощью оптического гомодинирования: поле моды с данной частотой комбинируется с интенсивным излучением лазера (локального осциллятора) той же частоты с помощью сбалансированного 50:50 светоделителя, а затем измеряется разность интенсивностей выходных полей. В пределе бесконечной интенсивности излучения локального осциллятора эта разность оказывается пропорциональной квадратуре $R(\phi)$ [198]. Значение ϕ определяется параметрами локального осциллятора. Знание плотностей распределения вероятностей $p_\phi(t)$ для всех значений $\phi \in [0, \pi]$ равносильно знанию характеристической функции оператора плотности ($p_\phi(t)$ есть преобразование Радона функции Вигнера состояния, откуда термин «томография»). Соответствующие преобразования могут быть получены из формул обращения, см. [164]. Производя измерения распределений квадратур для достаточно большого числа значений ϕ, можно получить состоятельные оценки оператора плотности. Подчеркнем, что в этом случае речь идет об измерениях несовместимых наблюдаемых $R(\phi)$, которые производятся над непересекающимися подансамблями всего статистического ансамбля.

Обсуждение математических аспектов этой проблемы как обратной задачи непараметрического оценивания см. [168].

§ 5. Общее определение гауссовского состояния (для полей) было дано Манюсо и Вербером [114]. В теории поля такие состояния называются квази- или обобщенно- свободными. В квантовой статистике имеет место некоммутативный аналог центральной предельной теоремы, в котором роль предельных законов играют гауссовские состояния (см. Кашен и Хадсон [69])

Доказательство упомянутого результата Шура см. например в задачнике Полиа и Сеге [36, Раздел VII, Задача 36].

§ 6. Характеристическое свойство гауссовских состояний установлено автором [93].

Глава VI
НЕСМЕЩЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 1. Квантовый канал связи

Рассмотрим идеализированную схему передачи сообщении, изображенную на рис. 1. В отсутствие сигнала носитель информации $\mathscr{C}$ (например, электромагнитное поле) находится в некотором состоянии S. Обычно принимается, что S равновесное (гиббсовское) состояние при данной температуре. Передача сигнала осуществляется воздействием источника сообщений $\mathscr{T}$ на систему $\mathscr{C}$, что приводит к изменению ее состояния. Если имеется возможность варьировать какой-либо параметр (совокупность параметров) источника $\mathscr{T}$, то результирующее состояние S_θ носителя информации будет функцией этого параметра θ.

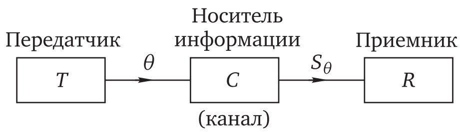

Рис. 1.

Если носитель информации описывается классически, то его состояния суть распределения вероятностей $P_\theta(\mathrm{d}\omega)$ на фазовом пространстве Ω системы $\mathscr{C}$. Подобные каналы связи рассматриваются в классической теории информации. Если же носитель информации является квантово-механической системой, то его состояния описываются операторами плотности S_θ в соответствующем гильбертовом пространстве, и тогда говорят о квантовом канале связи. С созданием источников когерентного излучения — лазеров появилась принципиальная возможность создания систем связи, работающих в оптическом диапазоне. Если в радиотехническом диапазоне частот «энергия фотона» $\hbar\omega$ пренебрежимо меньше средней тепловой энергии kT и поле излучения может описываться классически, то в оптическом диапазоне квантовые эффекты приобретают значительную роль и последовательное описание носителя информации — поля излучения — требует привлечения квантовой теории. Принимая упрощенное описание поля как конечного набора квантовых осцилляторов (что обычно оправдано в рассматриваемых вопросах), мы видим, что в отсутствие сигнала поле описывается гауссовским состоянием (V.1.7) с нулевым средним значением, а воздействие источника отражается в появлении ненулевого среднего $\bar{\mathbf{a}}$, которое играет роль передаваемого сигнала. Это является квантовым аналогом широко используемой в теории информации модели сигнала на фоне аддитивного гауссовского шума.

Заключительным звеном в системе связи является приемник $\mathscr{R}$, назначением которого является получение оценки $\hat{\theta}$ истинного значения сигнала θ, по наблюдениям за системой $\mathscr{C}$. Отвлекаясь от подробностей реализации процедуры оценки, можно сказать, что приемник осуществляет некоторое измерение параметра θ в семействе состояний $\{S_\theta\}$. Весьма важным является вопрос о наилучшем возможном способе приема, т. е. об оптимальном в каком-то смысле измерении параметра, а также о принципиальных границах точности его измерения.

В гл. IV мы рассмотрели аналогичные вопросы для кинематических параметров ковариантных семейств квантовых состояний, используя байесовский и минимаксный критерии оптимальности. Здесь мы рассмотрим иной подход, основанный на понятии несмещенности. Этот подход не предполагает существования априорного распределения и годится для семейств состояний, не обладающих какой-либо симметрией. Наиболее полные результаты при этом получаются для гауссовских состояний.

Пусть $\{S_{\boldsymbol{\theta}}\}$ — семейство квантовых состояний, где параметр $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1, \ldots, \theta_n]$ пробегает некоторую область $\Theta \subset \mathbb{R}^n$, и $M(\mathrm{d}^n\theta)$ — измерение со значениями в Θ, где $\mathrm{d}^n\theta = \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_n$. Мы будем всегда предполагать, что вторые моменты измерения конечны, т. е.

$$\int \hat{\theta}_j^2 \mu_\theta(\mathrm{d}^n\hat{\theta}) < \infty; \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{VI.1.1}$$

где $\mu_{\boldsymbol{\theta}}$ — распределение вероятностей измерения относительно состояния $S_{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\mu_{\boldsymbol{\theta}}(B) = \mathrm{Tr}\, S_{\boldsymbol{\theta}} M(B), \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta).$$

Измерение называется *несмещенным*, если

$$\int \hat{\theta}_j \mu_{\boldsymbol{\theta}}(\mathrm{d}^n\hat{\theta}) = \theta_j; \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{VI.1.2}$$

для всех $\theta \in \Theta$. Это означает, что измерение не имеет систематической погрешности. Дифференцируя формально это соотношение, получаем

$$\int \hat{\theta}_j \frac{\partial \mu_{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta_k}(\mathrm{d}^n\hat{\theta}) = \delta_{jk}; \qquad j, k = 1, \ldots, n. \tag{VI.1.3}$$

Точный смысл этого условия будет установлен позже. В большей части этого раздела мы потребуем выполнения условий (VI.1.1)-(VI.1.3) в фиксированной точке $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$. Это называется *локальной несмещенностью* в точке $\boldsymbol{\theta}$.

В качестве функции отклонения будет использоваться квадратичная форма

$$W_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{j,k} g_{jk}(\theta_j - \hat{\theta}_j)(\theta_k - \hat{\theta}_k),$$

где $\mathbf{G} = [g_{jk}]$ — некоторая вещественная невырожденная положительно определенная весовая матрица. Точность несмещенного измерения $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}^n\theta)\}$ будет определяться *полным среднеквадратичным отклонением*

$$\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\} = \int W_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mu_{\boldsymbol{\theta}}(\mathrm{d}^n\hat{\theta}).$$

Для одномерного параметра, G — положительное число и $\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\} = GD_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\}$, где $D_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\}$ дисперсия измерения $\mathbf{M}$ относительно состояния S_θ. Для многомерного параметра, вводя матрицу ковариаций несмещенного измерения

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\} = \left[\int(\hat{\theta}_j - \theta_j)(\hat{\theta}_k - \theta_k)\mu_\theta(\mathrm{d}^n\hat{\theta})\right] \equiv [b_{jk}\{\mathbf{M}\}], \tag{VI.1.4}$$

имеем

$$\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\} = \mathbf{Tr}\,\mathbf{G}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\} = \sum_{j,k} g_{jk}b_{jk}\{\mathbf{M}\},$$

где $\mathbf{Tr}$ обозначает след $(n \times n)$-матрицы. Таким образом, при $n > 1$ среднеквадратичное отклонение существенно зависит от выбора весовой матрицы.

Несмещенное измерение называется *наилучшим* (несмещенным или локально несмещенным) измерением параметра $\boldsymbol{\theta}$, если оно минимизирует $\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\}$. Если существует измерение, минимизирующее $\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\}$ одновременно для всех значений параметра $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, то оно называется *равномерно наилучшим*. В этой главе мы получим ряд общих границ для среднеквадратичного отклонения несмещенного измерения и применим их в задаче оценивания параметров среднего значения гауссовского состояния.

§ 2. Нижняя граница для дисперсии измерения одномерного параметра

Пусть $\{S_\theta\}$ — семейство состояний, параметризованное одномерным параметром θ. Мы установим здесь общую границу для дисперсии несмещенного измерения, которая является некоммутативным аналогом неравенства Рао—Крамера, хорошо известного в математической статистике.

Относительно семейства $\{S_\theta\}$ мы предположим следующее:

(1) *Семейство $\{S_\theta\}$ дифференцируемо по θ как функция со значениями в банаховом пространстве ядерных операторов.*

При этом условии для любой ограниченной наблюдаемой X

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_\theta(X) = \mathrm{Tr}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}S_\theta \cdot X, \tag{VI.2.1}$$

где $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta)S_\theta$ — производная семейства. Возможность дифференцирования под знаком следа вытекает из обобщения неравенства (II.7.5) в теореме II.7.2. Далее, предположим:

(2) *Линейный функционал от X, определяемый формулой* (VI.2.1) *продолжается до непрерывного функционала на гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2_h(S_\theta)$, т. е.*

$$\left|\mathrm{Tr}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}S_\theta \cdot X\right|^2 \leqslant c\,\mathrm{Tr}\,S_\theta X^2, \qquad X \in \mathfrak{B}_h(\mathscr{H}),$$

где c — некоторая постоянная.

Из леммы Рисса—Фреше следует, что найдется $L_\theta \in \mathscr{L}^2_h(S_\theta)$, такой что $\mathrm{Tr}(\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta)S_\theta \cdot X = \langle L_\theta, X\rangle_\theta$ для всех ограниченных X, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_\theta \equiv \langle\cdot,\cdot\rangle_{S_\theta}$. В силу (II.8.5) это равносильно соотношению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}S_\theta = S_\theta \circ L_\theta \equiv \frac{1}{2}(S_\theta L_\theta + L_\theta S_\theta). \tag{VI.2.2}$$

Оператор $L_\theta \in \mathscr{L}^2_h(S_\theta)$, удовлетворяющий (VI.2.2), называется *симметричной логарифмической производной* семейства $\{S_\theta\}$ в точке θ. Для будущего отметим, что

$$\langle I, L_\theta\rangle_\theta = E_\theta(L_\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_\theta(I) = 0. \tag{VI.2.3}$$

Рассмотрим измерение $M(\mathrm{d}\theta)$ с распределением вероятностей $\mu_\theta(\mathrm{d}\hat\theta) = \mathrm{Tr}\, S_\theta M(\mathrm{d}\hat\theta)$. Как было условлено в § 1, мы предполагаем, что измерение имеет конечные вторые моменты; более того, предположим, что выполнены условия:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int \hat\theta\mu_\theta(\mathrm{d}\hat\theta) = \int \hat\theta\frac{\mathrm{d}\mu_\theta}{\mathrm{d}\theta}(\mathrm{d}\hat\theta), \tag{VI.2.4}$$

где $\mathrm{d}\mu_\theta/\mathrm{d}\theta$ вещественная σ-аддитивная функция множеств (конечной вариации), определенная соотношением

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\theta}{\mathrm{d}\theta}(B) = \mathrm{Tr}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}S_\theta M(B), \quad B \in \mathscr{A}(\Theta).$$

Предложение VI.2.1. *Предположим, что семейство* $\{S_\theta\}$ *удовлетворяет условиям* (1) *и* (2), *а измерение* $\mathbf{M}=\{M(\mathrm{d}\hat\theta)\}$ *удовлетворяет* (VI.2.4) *в точке* θ. *Тогда*

$$D_\theta\{\mathbf{M}\}D_\theta(L_\theta) \geqslant \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\}\right]^2. \tag{VI.2.5}$$

Доказательство. Из (VI.2.1) и определения L_θ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_\theta(X) = \langle L_\theta, X\rangle_\theta$$

для всех ограниченных X. Сначала распространим это соотношение на измерения $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}\theta)\}$ с конечными вторыми моментами. Полагая $X = M(B)$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\theta}{\mathrm{d}\theta}(B) = \langle L_\theta, M(B)\rangle_\theta. \tag{VI.2.6}$$

Рассмотрим оператор

$$X_M = \int \hat\theta M(\mathrm{d}\hat\theta) \in \mathscr{L}^2_h(S_\theta),$$

определенный как в разделе § II.8. Так как интеграл определяется как предел интегральных сумм в $\mathscr{L}^2_h(S_\theta)$, то из (VI.2.6)

$$\langle X_M, L_\theta\rangle_\theta = \left\langle \int \hat\theta M(\mathrm{d}\hat\theta), L_\theta\right\rangle_\theta = $$
$$= \int \hat\theta\langle M(\mathrm{d}\hat\theta), L_\theta\rangle_\theta = \int \hat\theta\frac{\mathrm{d}\mu_\theta}{\mathrm{d}\theta}(\mathrm{d}\hat\theta). \tag{VI.2.7}$$

Используя (VI.2.4), получаем

$$\langle L_\theta, X_M\rangle_\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_\theta\{\mathbf{M}\}. \tag{VI.2.8}$$

Согласно (II.9.7)

$$D_\theta\{\mathbf{M}\} \geqslant \langle X_{\mathbf{M}} - E_\theta\{\mathbf{M}\}, X_{\mathbf{M}} - E_\theta\{\mathbf{M}\}\rangle_\theta.$$

По формуле Коши—Буняковского, учитывая (VI.2.3), получаем

$$\langle X_{\mathbf{M}} - E_\theta\{\mathbf{M}\}, X_{\mathbf{M}} - E_\theta\{\mathbf{M}\}\rangle_\theta \cdot \langle L_\theta, L_\theta\rangle_\theta \geqslant$$
$$\geqslant \langle X_{\mathbf{M}} - E_\theta\{\mathbf{M}\}, L_\theta\rangle_\theta^2 = \langle X_{\mathbf{M}}, L_\theta\rangle_\theta^2.$$

Подставляя (VI.2.8), получаем неравенство (VI.2.5).

Для несмещенного измерения $\mathbf{M}$ (VI.2.5) переходит в

$$D_\theta\{\mathbf{M}\} \geqslant D_\theta(L_\theta)^{-1}. \tag{VI.2.9}$$

По существу, для доказательства (VI.2.9) нужно лишь, чтобы выполнялось условие (VI.1.3), которое принимает вид

$$\int \hat\theta \frac{\mathrm{d}\mu_\theta}{\mathrm{d}\theta}(\mathrm{d}\hat\theta) = 1$$

или, благодаря (VI.2.7),

$$\langle L_\theta, X_{\mathbf{M}}\rangle_\theta = 1. \tag{VI.2.10}$$

Таким образом, получаем

Следствие VI.2.2. *Неравенство* (VI.2.9) *выполняется для любого семейства состояний $\{S_\theta\}$, удовлетворяющего условиям* (1) *и* (2) *и любого измерения $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}\hat\theta)\}$, удовлетворяющего условию* (VI.2.10), *в частности, для измерения, локально несмещенного в точке θ.*

Величина $J_\theta = D_\theta(L_\theta)$ в правой части соотношения (VI.2.9) является некоммутативным аналогом информации Фишера в математической статистике. Она является мерой информации о параметре θ, содержащейся в семействе состояний $\{S_\theta\}$.

В дальнейшем мы будем использовать условия типа (VI.2.10), которые обычно гораздо легче проверяемы и имеют прямое отношение к интересующим нас неравенствам. Однако для полноты изложения дадим достаточное условие для (VI.2.4), которое позволяет вывести локальную несмещенность из несмещенности.

Предложение VI.2.3. *Пусть семейство $\{S_\theta\}$ удовлетворяет условию* (1) *в интервале значений θ и $-T \leqslant \mathrm{d}S_\theta/\mathrm{d}\theta \leqslant T$, где T — положительный ядерный оператор. Пусть измерение $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}\hat\theta)\}$ таково, что $\int |\hat\theta|\mu(\mathrm{d}\hat\theta) < \infty$, где $\mu(\mathrm{d}\hat\theta) = \mathrm{Tr}\, TM(\mathrm{d}\hat\theta)$. Тогда имеет место соотношение* (VI.2.4) *для любого θ в данном интервале.*

Доказательство. По формуле конечных приращений

$$\frac{\mu_{\theta+\Delta\theta}(B) - \mu_\theta(B)}{\Delta\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mu_{\theta+h\Delta\theta}(B) =$$
$$= \mathrm{Tr}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}S_{\theta+h\Delta\theta}M(B), \quad 0 < h < 1,$$

откуда

$$\left|\frac{\mu_{\theta+\Delta\theta}(B)-\mu_\theta(B)}{\Delta\theta}\right| \leqslant \operatorname{Tr} TM(B)=\mu(B), \quad B\in\mathscr{A}(\Theta),$$

и значит, $|\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta\mu_\theta(B)|\leqslant\mu(B)$. Поэтому интеграл $\int\hat\theta(\mathrm{d}\mu_\theta/\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}\hat\theta)$ определен и конечен. Для любого конечного c,

$$\int_{|\hat\theta|\leqslant c}\hat\theta\frac{\mathrm{d}\mu_\theta}{\mathrm{d}\theta}(\mathrm{d}\hat\theta)=\operatorname{Tr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_{|\hat\theta|\leqslant c}\hat\theta M(\mathrm{d}\hat\theta)= \\ =\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_{|\hat\theta|\leqslant c}\hat\theta\mu_\theta(\mathrm{d}\hat\theta).$$

С другой стороны,

$$\left|\frac{1}{\Delta\theta}\left[\int_{|\hat\theta|>c}\hat\theta\mu_{\theta+\Delta\theta}(\mathrm{d}\hat\theta)-\int_{|\hat\theta|>c}\hat\theta\mu_\theta(\mathrm{d}\hat\theta)\right]-\int_{|\hat\theta|>c}\hat\theta\frac{\mathrm{d}\mu_\theta}{\mathrm{d}\theta}(\mathrm{d}\hat\theta)\right|\leqslant \\ \leqslant 2\int_{|\hat\theta|>c}|\hat\theta|\mu(\mathrm{d}\theta).$$

Таким образом, левая часть равномерно стремится к нулю при $c\to\infty$, что и доказывает (VI.2.4).

В заключение рассмотрим пример оценивания параметра $\overline{Q}$ в семействе гауссовских квазиклассических состояний (V.5.2) (параметр $\overline{P}$ может при этом иметь любое фиксированное значение). В силу предложения V.6.3 это семейство удовлетворяет условиям (1) и (2) с симметричной логарифмической производной

$$L_{\overline{Q}}=\sigma_Q^{-1}(Q-\overline{Q}),$$

которая находится из второго соотношения (V.6.10). Поэтому $D_{\overline{Q}}(L_{\overline{Q}})=\sigma_Q^{-2}$, и неравенство (VI.2.9) дает

$$D_{\overline{Q}}\{\mathbf{M}\}\geqslant\sigma_Q^2=\frac{\hbar}{\omega}\left(\overline{N}+\frac{1}{2}\right) \tag{VI.2.11}$$

для любого локально несмещенного измерения $\overline{Q}$.

Эта граница, очевидно, достигается (для любого значения $\overline{Q}$) на простом измерении $E(\mathrm{d}\overline{Q})$, отвечающем наблюдаемой Q. Пользуясь символикой Дирака, мы можем написать

$$E(\mathrm{d}\overline{Q})=|\overline{Q})(\overline{Q}|\mathrm{d}\overline{Q}, \tag{VI.2.12}$$

где $|\overline{Q})$ — формальные собственные векторы оператора Q. Так как $E(\mathrm{d}\overline{Q})$ — спектральная мера Q, то $X_{\mathbf{E}}=Q$ и условие (VI.2.10) выполнено в силу того, что

$$\langle L_{\overline{Q}},Q\rangle_{\overline{Q}}=\sigma_Q^{-2}\langle Q-\overline{Q},Q\rangle_{\overline{Q}}=\sigma_Q^{-2}\langle Q-\overline{Q},Q-\overline{Q}\rangle_{\overline{Q}}=1.$$

Таким образом, *измерение канонической наблюдаемой координаты Q является равномерно наилучшим несмещенным измерением параметра $\overline{Q}$ в семействе гауссовских состояний* $\{S_{\overline{P},\overline{Q}}\}$. Аналогичное утверждение имеет место и для измерений параметра $\overline{P}$.

§ 3. Случай параметра сдвига

Здесь мы докажем неравенство

$$D_\theta\{\mathbf{M}\}D_\theta(A) \geqslant \frac{1}{4}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_\theta\{\mathbf{M}\}\right|^2 \tag{VI.3.1}$$

для дисперсия измерения параметра сдвига θ в семействе состояний вида

$$S_\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}A\theta} S \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\theta}. \tag{VI.3.2}$$

Это обобщение неравенства Мандельштама-Тамма (III.2.3), которое связано с соотношениями неопределенностей для параметров сдвига. Теперь мы дадим строгое доказательство этого неравенства и сравним его с полученным выше некоммутативным неравенством Рао-Крамера (VI.2.5), возникшим из аналогий с математической статистикой.

Прежде всего установим условие, при котором семейство (VI.3.2) удовлетворяет необходимым требованиям (1) и (2) раздела § 2.

Предложение VI.3.1. *Пусть инфинитезимальный оператор A унитарной группы $\{V_\theta = \exp \mathrm{i}\theta A;\, \theta \in \mathbb{R}\}$ квадратично-суммируем относительно исходного состояния S. Тогда он квадратично-суммируем относительно состояний S_θ, $\theta \in \mathbb{R}$. Семейство $\{S_\theta\}$ удовлетворяет условию* (1) *и его производная дается соотношением*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}S_\theta = \mathrm{i}[A, S_\theta], \tag{VI.3.3}$$

где коммутатор понимается в смысле § II.8. *Далее, $\{S_\theta\}$ удовлетворяет условию* (2) *и его симметричная логарифмическая производная равна*

$$L_\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}\mathfrak{D}(A)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A},$$

где $\mathfrak{D}$ — коммутационный оператор исходного состояния S.

Доказательство. Докажем сначала, что из $A \in \mathscr{L}^2_h(S)$ следует $A \in \mathscr{L}^2_h(S_\theta)$. Как было сказано перед формулировкой теоремы Стоуна в разделе § II.4, из того, что $\psi \in \mathscr{D}(A)$, следует $V_\theta\psi \in \mathscr{D}(A)$. Далее, поскольку V_θ является функцией A, $AV_\theta\psi = V_\theta A\psi$. Поэтому из $\mathscr{D}(A) \supset \mathscr{R}(\sqrt{S})$ следует, что

$$\mathscr{D}(A) \supset \mathscr{R}(V_\theta\sqrt{S}V_\theta^*) = \mathscr{R}(\sqrt{S_\theta})$$

и оператор $A\sqrt{S_\theta} = AV_\theta\sqrt{S}V_\theta^* = V_\theta A\sqrt{S}V_\theta^*$ является оператором Гильберта—Шмидта. Остается сослаться на предложение II.8.2.

Положим теперь $S_\theta = T_\theta R_\theta$, где $T_\theta = V_\theta\sqrt{S_\theta}$, $R_\theta = \sqrt{S_\theta}V_\theta^*$. Покажем, что семейства $\{T_\theta\}$, $\{R_\theta\}$ дифференцируемы как функции θ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$, причем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}T_\theta = \mathrm{i}AT_\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}R_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\mathrm{i}R_\theta A. \tag{VI.3.4}$$

Достаточно рассмотреть семейство $\{T_\theta\}$, поскольку рассмотрение $\{R_\theta\}$ аналогично. Имеем

$$\left\|\frac{T_{\theta+\Delta\theta} - T_\theta}{\Delta\theta} - \mathrm{i}AT_\theta\right\|_2 = \|F_{\Delta\theta}(A)AT_\theta\|_2,$$

где функция

$$F_{\Delta\theta}(x) = (\Delta\theta \cdot x)^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\theta\cdot x} - 1 - \mathrm{i}\Delta\theta\cdot x)$$

обладает свойствами

$$|F_{\Delta\theta}(x)| \leqslant \mathrm{const};$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} F_{\Delta\theta}(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Используя спектральное представление $F_{\Delta\theta}(A)$, можно показать, что

$$\|F_{\Delta\theta}(A)\| \leqslant \mathrm{const}; \tag{VI.3.5}$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} F_{\Delta\theta}(A)\psi = 0, \qquad \psi \in \mathscr{H}. \tag{VI.3.6}$$

Теперь покажем, что $\|F_{\Delta\theta}(A)AT_\theta\|_2 \to 0$, когда $\Delta\theta \to 0$. Поскольку $Q = AT_\theta \in \mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$, Q можно аппроксимировать операторами конечного ранга $\widetilde{Q}$. Из (VI.3.6) вытекает, что $\|F_{\Delta\theta}(A)\widetilde{Q}\|_2 \to 0$ при $\Delta\theta \to 0$. С другой стороны, согласно неравенству (II.7.14)

$$\|F_{\Delta\theta}(A)\cdot(Q-\widetilde{Q})\|_2 \leqslant \|F_{\Delta\theta}(A)\|\cdot\|Q-\widetilde{Q}\|_2,$$

что в силу (VI.3.5) может быть сделано сколь угодно малым. Это доказывает первое соотношение в (VI.3.4).

Соотношение (VI.3.3) вытекает теперь из следующего простого факта: если $S_\theta = T_\theta \cdot R_\theta$, где $\{T_\theta\}$, $\{R_\theta\}$ дифференцируемы как функции со значениями в $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$, то $\{S_\theta\}$ дифференцируемо как функция со значениями в $\mathfrak{T}^1(\mathscr{H})$ и

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}S_\theta = \frac{\mathrm{d}T_\theta}{\mathrm{d}\theta}R_\theta + T_\theta\frac{\mathrm{d}R_\theta}{\mathrm{d}\theta}.$$

В самом деле,

$$\frac{S_{\theta+\Delta\theta} - S_\theta}{\Delta\theta} = \frac{T_{\theta+\Delta\theta} - T_\theta}{\Delta\theta}R_{\theta+\Delta\theta} + T_\theta\frac{R_{\theta+\Delta\theta} - R_\theta}{\Delta\theta}.$$

Имеем

$$(\Delta\theta)^{-1}(T_{\theta+\Delta\theta} - T_\theta) \to \frac{\mathrm{d}T_\theta}{\mathrm{d}\theta}, \qquad (\Delta\theta)^{-1}(R_{\theta+\Delta\theta} - R_\theta) \to \frac{\mathrm{d}R_\theta}{\mathrm{d}\theta}$$

в $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$: семейство $\{R_\theta\}$, будучи дифференцируемым, является непрерывным, так что $R_{\theta+\Delta\theta} \to R_\theta$ в $\mathfrak{T}^2(\mathscr{H})$. Переходя к пределу при $\Delta\theta \to 0$ и используя (II.7.13), мы видим, что $\{S_\theta\}$ удовлетворяет условию (1), откуда получается выражение (VI.3.3) для $\mathrm{d}S_\theta/\mathrm{d}\theta$.

Рассмотрим математическое ожидание $E_\theta(X)$ ограниченной наблюдаемой X. Используя (VI.2.1), (VI.3.3) и (II.8.7), получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_\theta(X) = [X, A]_\theta, \tag{VI.3.7}$$

где $[\cdot,\cdot]_\theta \equiv [\cdot,\cdot]_{S_\theta}$. Отсюда следует, что семейство $\{S_\theta\}$ удовлетворяет условию (2) из раздела § 2, поскольку

$$\left|\mathrm{Tr}\,\frac{\mathrm{d}S_\theta}{\mathrm{d}\theta}X\right|^2 = |[A, X]_\theta|^2 \leqslant 4\langle A, A\rangle_\theta\langle X, X\rangle_\theta$$

в силу неравенства (4) предложения II.8.3.

Сравнивая (VI.2.2) и (VI.3.3), получаем

$$S_\theta \circ L_\theta = \mathrm{i}[A, S_\theta], \tag{VI.3.8}$$

или, что то же

$$\langle X, L_\theta\rangle_\theta = [X, A]_\theta$$

для всех $X \in \mathscr{L}_h^2(S_\theta)$. В силу определения коммутационного оператора (II.10.4) это означает, что

$$L_\theta = \mathfrak{D}_\theta(A), \tag{VI.3.9}$$

где $\mathfrak{D}_\theta$ — коммутационный оператор состояния S_θ. Из (VI.3.8) и (VI.3.2)

$$S \circ (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A} L_\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}) = \mathrm{i}[A, S],$$

следовательно $\mathfrak{D}_\theta(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta A}\mathfrak{D}(A)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta A}$, и мы получаем искомое соотношение для L_θ.

Предложение VI.3.2. *В условиях предложения* VI.3.1, *неравенство* (VI.3.1) *выполняется для любого измерения* $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}\theta)\}$ *с конечными вторыми моментами, удовлетворяющего* (VI.2.4).

Доказательство. Полагая $X = M(B)$ в (VI.3.7), получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mu_\theta(B) = [M(B), A]_\theta, \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta).$$

Теперь можно распространить (VI.3.7) на измерения $\mathbf{M}$, удовлетворяющие условиям предложения:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_\theta\{\mathbf{M}\} = [X_\mathbf{M}, A]_\theta. \tag{VI.3.10}$$

В самом деле, согласно (VI.2.4)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_\theta\{\mathbf{M}\} = \int \hat\theta \frac{\mathrm{d}\mu_\theta}{\mathrm{d}\theta}(\mathrm{d}\hat\theta).$$

Рассуждая как в доказательстве предложения VI.2.1, получаем

$$\int \hat\theta \frac{\mathrm{d}\mu_\theta}{\mathrm{d}\theta}(\mathrm{d}\hat\theta) = \int \hat\theta [M(\mathrm{d}\hat\theta), A]_\theta = [X_\mathbf{M}, A]_\theta,$$

что и требовалось. Комбинируя (II.9.5) с (II.9.7), получаем

$$D_\theta\{\mathbf{M}\} D_\theta(A) \geqslant \frac{1}{4}[X_\mathbf{M}, A]_\theta^2.$$

Подставляя (VI.3.10) в правую часть этого неравенства, получаем (VI.3.1).

Если $\mathbf{M}$ локально несмещенно, то (VI.3.1) принимает вид

$$D_\theta\{\mathbf{M}\} \geqslant [4D_\theta(A)]^{-1}. \tag{VI.3.11}$$

Это является обобщением соотношения неопределенностей для ковариантных измерений параметра сдвига из раздела § IV.7. Таким образом, в условиях предложения VI.3.1 для дисперсии локально несмещенного измерения $\mathbf{M}$ параметра сдвига θ справедливы две разные нижние границы: соотношение неопределенностей (VI.3.11) и неравенство Рао-Крамера (VI.2.9).

Покажем, что *граница, использующая симметричную логарифмическую производную, всегда не хуже границы* (VI.3.11) *и совпадает с ней в случае чистых состояний* $\{S_\theta\}$. Прежде всего, заметим, что обе границы фактически не зависят от θ. Это очевидно для (VI.3.11), а для (VI.2.9) это следует из выражения для L_θ, полученного в предложении VI.3.1 и (VI.3.2). Поэтому мы можем предположить, что $\theta = 0$. Используя (VI.3.9), (VI.2.3) и (II.10.6), получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}D_S(L_0) &= \frac{1}{4}\langle\mathfrak{D}(A), \mathfrak{D}(A)\rangle_S = \\ &= \frac{1}{4}\langle\mathfrak{D}(A-\overline{A}), \mathfrak{D}(A-\overline{A})\rangle_S = -\frac{1}{4}\langle(A-\overline{A}), \mathfrak{D}^2(A-\overline{A})\rangle_S,\end{aligned}$$

где $\overline{A} = E_S(A)$. Поскольку $1 + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2 \geqslant 0$, имеем

$$\frac{1}{4}D_S(L_0) \leqslant \langle A-\overline{A}, A-A\rangle_S = D_S(A),$$

что доказывает, что (VI.2.9) по крайней мере не хуже (VI.3.11). Равенство имеет тогда и только тогда, когда

$$\left(I + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2\right)(A-\overline{A}) = 0. \qquad \text{(VI.3.12)}$$

Для того чтобы раскрыть смысл этого условия, рассмотрим матричное представление оператора $A \in \mathscr{L}^2(S)$, задаваемое соотношением (II.10.1). Согласно последнему равенству в (II.10.9), действие оператора $I + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2$ задается умножением элемента матрицы в j-й строке и k-м столбце на $4s_js_k(s_j+s_k)^{-1}$, где $\{s_j\}$ собственные значения S. Поэтому условие $(I + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2)X = 0$ равносильно условию $SXS = 0$, так что (VI.3.12) равносильно

$$SAS = \overline{A}\cdot S^2.$$

Очевидно это выполняется, если S чистое состояние.

Вернемся к примеру, рассмотренному в конце раздела § 2. В соответствии с результатами раздела § V.6, гауссовские состояния $\{S_{\overline{P},\overline{Q}}\}$ удовлетворяют соотношению

$$S_{\overline{P},\overline{Q}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{Q}P}S\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{Q}P},$$

где $S = S_{\overline{P},0}$. Применяя (VI.3.11) с $A = -P$, мы получаем лишь

$$D_{\overline{Q}}\{\mathbf{M}\} \geqslant (2\sigma_P)^{-2},$$

по сравнению с границей σ_Q^2 из уравнения (VI.2.11). В силу соотношения неопределенностей Гейзенберга, $\sigma_Q^2 \geqslant (2\sigma_P)^{-2}$, причем равенство выполняется только для чистых состояний минимальной неопределенности.

Будучи менее информативной, граница (VI.3.11) тем не менее может быть полезной, поскольку выражается непосредственно в терминах инфинитезимального оператора A и не требует знания симметричной логарифмической производной. Но если последняя известна, как в гауссовском случае, то следует использовать более информативную границу (VI.2.9).

Хотя (VI.3.1) применимо и к угловому параметру φ в семействе $\{S_\varphi\}$, определяемом соотношением (IV.6.5), в этом случае следует использовать другое неравенство. Как мы уже видели в разделе § IV.5, дисперсия $D_\varphi\{\mathbf{M}\}$ должна быть заменена мерой неопределенности, определенной соотношением (VI.5.1). Более того, условие несмещенности также должно быть модифицировано. Легко видеть, что ковариантное измерение $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}\varphi)\}$ углового параметра с необходимостью смещенное. Для того, чтобы найти замену условию несмещенности, введем ограниченный оператор

$$U_M = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} M(\mathrm{d}\varphi).$$

Обозначая $E_\varphi(U) = \mathrm{Tr}\, S_\varphi U$, имеем

$$E_\varphi(U_M) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} E_0(U_{\mathbf{M}}),$$

как следствие свойства ковариантности измерения $\mathbf{M}$. Отсюда вытекает, что

$$\mathrm{i}^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \ln E_\varphi(U_{\mathbf{M}}) = 1. \tag{VI.3.13}$$

Это заменяет локальную несмещенность в угловом случае.

Докажем неравенство

$$\Delta_\varphi\{\mathbf{M}\} \cdot D_\varphi(A) \geqslant \frac{1}{4} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \ln E_\varphi(U_{\mathbf{M}}) \right|^2 \tag{VI.3.14}$$

при том же предположении квадратичной суммируемости оператора A в семействе (IV.6.5), для любого измерения $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}\varphi)\}$.

Из (VI.3.7) получаем $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi) E_\varphi(U_{\mathbf{M}}) = [A, U_{\mathbf{M}}]_\varphi$, так что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \ln E_\varphi(U_{\mathbf{M}}) = [A, U_{\mathbf{M}}]_\varphi E_\varphi(U_{\mathbf{M}})^{-1}.$$

Используя (II.8.16), получаем

$$\frac{1}{4} |[A, U_{\mathbf{M}}]_\varphi|^2 \leqslant \langle A - \overline{A}, A - \overline{A} \rangle_\varphi \langle U_{\mathbf{M}} - \overline{U}_{\mathbf{M}}, U_{\mathbf{M}} - \overline{U}_{\mathbf{M}} \rangle_\varphi,$$

где $\overline{A} = E_\varphi(A)$ и т.д. Применяя (II.9.10):

$$\langle U_{\mathbf{M}} - \overline{U}_{\mathbf{M}}, U_{\mathbf{M}} - \overline{U}_{\mathbf{M}} \rangle_\varphi \leqslant \int |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\varphi}} - \overline{U}_{\mathbf{M}}|^2 \mu_\varphi(\mathrm{d}\hat{\varphi}) \equiv$$
$$\equiv \Delta_\varphi\{\mathbf{M}\} \cdot |E_\varphi(U_{\mathbf{M}})|^2.$$

В итоге приходим к (VI.3.14).

Если теперь измерение $\mathbf{M}$ удовлетворяет (VI.3.13) (в частности, если $\mathbf{M}$ ковариантно), то мы получаем модификацию соотношения (VI.3.11) для углового параметра

$$\Delta_\varphi\{\mathbf{M}\} \geqslant [4D_\varphi(A)]^{-1}.$$

Рассуждая как в разделе § 2, мы можем усилить это неравенство до

$$\Delta_\varphi\{\mathbf{M}\} \geqslant D_\varphi(L_\varphi)^{-1},$$

где L_φ — симметричная логарифмическая производная семейства (IV.6.5).

§ 4. Измерение силы, действующей на пробный объект

Как пример применения результатов, полученных в предыдущих параграфах, рассмотрим вопрос об измерении постоянной силы F, действующей на квантовомеханический объект массы m, по наблюдениям за этим объектом. Потенциал постоянной силы равен $V(x) = -Fx$, поэтому динамика объекта описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m} - Fq\right).$$

Записывая уравнение Шредингера (III.7.10) в импульсном представлении (III.4.7), получаем

$$\mathrm{i}\frac{\partial\tilde{\psi}_t(\eta)}{\partial t} = -\frac{\eta^2\tilde{\psi}_t(\eta)}{2m\hbar} - \mathrm{i}F\frac{\partial\tilde{\psi}_t(\eta)}{\partial\eta}.$$

Это линейное уравнение в частных производных первого порядка, его решение

$$\tilde{\psi}_t(\eta) \equiv V_t\tilde{\psi}_0(\eta) = \tilde{\psi}_0(\eta - Ft)\cdot \cdot\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\eta^2 t}{2m\hbar} + \frac{\mathrm{i}\eta F t^2}{2m\hbar} - \frac{\mathrm{i}F^2t^3}{6m\hbar}\right).$$

Используя соотношение (III.4.8), находим следующую формулу для оператора эволюции $V_t = \exp[-(\mathrm{i}t/\hbar)(p^2/2m - Fq)]$:

$$V_t = W_{Ft^2/2m,Ft/m}V_t^0\cdot\exp\left(\frac{\mathrm{i}F^2t^3}{12m\hbar}\right). \tag{VI.4.1}$$

Здесь

$$W_{Ft^2/2m,Ft/m} = \exp\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(Ftq - \frac{Ft^2}{2m}p\right) \tag{VI.4.2}$$

— оператор сдвига, соответствующий кинематическому преобразованию

$$(x, v) \to \left(x + \frac{Ft^2}{2m}, v + \frac{Ft}{m}\right);$$

$V_t^0 = \exp(-\mathrm{i}p^2/2m\hbar)$ — оператор свободной эволюции, а последняя экспонента является несущественным для дальнейшего фазовым множителем.

Формула (VI.4.1) имеет простой физический смысл. В классической механике уравнения движения в поле постоянной силы F имеют вид

$$p(t) = p + Ft, \qquad q(t) = q + \frac{p}{m}t + \frac{Ft^2}{2m}. \tag{VI.4.3}$$

Преобразование $(p, q) \to (p(t), q(t))$ можно представить как суперпозицию двух преобразований: кинематического сдвига $(p, q) \to (p + Ft, q + Ft^2/2m)$ и преобразования $(p, q) \to (p, q + (p/m)t)$, которое соответствует свободному движению. Формула (VI.4.1) является квантовомеханическим аналогом этого факта в картине Шредингера (из нее следуют операторные уравнения (VI.4.1) для наблюдаемых $p(t) = V_t^* p V_t$, $q(t) = V_t^* q V_t$ в картине Гейзенберга, которые имеют точно такой же вид, как классические).

В итоге можно сказать, что за время t начальное состояние S объекта, подверженного силе F, перейдет в состояние

$$V_t S_t V_t^* = W_{Ft^2/2m, Ft/m} S_t^0 W_{Ft^2/2m, Ft/m}^*,$$

где $S_t^0 = V_t^0 S (V_t^0)^*$ — состояние, в которое перешел бы объект при отсутствии силы. Обозначая результирующее состояние S_F и учитывая (VI.4.2), имеем

$$S_F = \mathrm{e}^{\mathrm{i}FA} S_t^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}FA}, \tag{VI.4.4}$$

где

$$A = \frac{t}{\hbar}\left(q - \frac{p}{2m}t\right). \tag{VI.4.5}$$

Рассмотрим теперь вопрос — с какой точностью можно оценить величину силы F, действовавшей на объект в интервале времени $[0, t)$ по измерениям, относящимся к моменту t? Проведенный анализ показывает, что это сводится к оцениванию параметра сдвига F в семействе состояний (VI.4.4), так что к этой задаче полностью применимы результаты § 3.

В предположении, что оператор (VI.4.5) имеет конечный второй момент относительно состояния S_t^0, для дисперсии любого локально несмещенного измерения $\mathbf{M}$ силы F выполняется неравенство (VI.3.11). Выразим входящую в него величину $D_F(A)$ через дисперсии, относящиеся к исходному состоянию S. Переходя от картины Шредингера к картине Гейзенберга, имеем

$$D_F(A) \equiv D_{S_t^0}(A) = \frac{t^2}{\hbar^2} D_S\left(q^0(t) - \frac{p^0(t)}{2m}t\right), \tag{VI.4.6}$$

где $q^0(t) = (V_t^0)^* q V_t^0$, $p^0(t) = (V_t^0)^* p V_t^0$ — зависящие от времени канонические наблюдаемые свободного движения. Из (III.7.7) и (III.7.6)

$$p^0(t) = p, \qquad q^0(t) = q + \frac{p}{m}t. \tag{VI.4.7}$$

Подставляя это в (VI.4.6), получаем окончательно *неравенство для дисперсии любого несмещенного измерения* $\mathbf{M}$ *силы* F

$$D_F\{\mathbf{M}\} \geqslant \frac{\hbar^2}{4t^2 D_S\left(q + \dfrac{p}{2m}t\right)}, \tag{VI.4.8}$$

которое имеет место в предположении, что p и q имеют конечные вторые моменты относительно начального состояния S.

Предположив дополнительно, что q и p *некоррелированы* относительно исходного состояния S, т. е.

$$\langle q - E_S(q), p - E_S(p)\rangle_S = 0, \tag{VI.4.9}$$

получаем из (VI.4.8)

$$D_F\{\mathbf{M}\} \geqslant \frac{\hbar^2}{4t^2}\left[D_S(q) + \frac{t^2}{4m^2}D_S(p)\right]^{-1}. \tag{VI.4.10}$$

Заметим, что в силу соотношения неопределенностей Гейзенберга максимальное значение правой части равно $\hbar m/2t^3$ и достигается при $D_S(p) = \hbar m/t$, $D_s(q) = \hbar t/4m$. Таким образом, *при наименее выгодных* для экспериментатора исходных условиях граница принимает вид

$$D_F\{\mathbf{M}\} \geqslant \frac{\hbar m}{2t^3}. \tag{VI.4.11}$$

Приготовляя соответствующим образом начальное состояние, можно в принципе добиться измерения F со сколь угодно высокой точностью при фиксированном t. Чтобы это показать, рассмотрим наблюдаемые вида

$$B = \alpha\frac{2mq}{t^2} + \beta\frac{p}{t}, \qquad \alpha + \beta = 1,$$

которые являются канонически сопряженными к A в смысле § III.2. Тогда, как было показано в разделе § III.2, B задает ковариантное и, значит, несмещенное (с точностью до постоянной) измерение параметра F. Чтобы получить несмещенное измерение, следует вычесть из p и q их средние значения, равные, согласно (VI.4.7),

$$E_{S_t^0}(p) = E_S(p), \qquad E_{S_t^0}(q) = E_S(q) + \frac{t}{m}E_S(p).$$

Используя (VI.4.7) и (VI.4.9), получаем дисперсию B, одинаковую для всех значений F:

$$D_{S_t^0}(B) = D_S\left(\alpha\cdot 2m\left(q + \frac{t}{m}p\right)t^{-1} + \beta p t^{-1}\right) = \\ = \frac{4m^2}{t^4}D_S(q)\alpha^2 + \frac{1}{t^2}D_S(p)(2\alpha+\beta)^2.$$

Минимум этой величины при условии $\alpha + \beta = 1$ достигается при

$$\alpha = -D_S(p)\left[\frac{4m^2}{t^2}D_S(q) + D_S(p)\right]^{-1}$$

что отвечает несмещенной оценке [1]

$$B_* = t^{-1}\left[D_S(p)^{-1} + \frac{t^2}{4m^2}D_S(q)^{-1}\right]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{p-E_S(p)}{D_S(p)} - \frac{t}{2m}\frac{q-\dfrac{p}{m}t-E_S(q)}{D_S(q)}\right], \tag{VI.4.12}$$

имеющей дисперсию

$$D_{S_t^0}(B_*) = t^{-2}\left[D_S(p)^{-1} + \frac{t^2}{4m^2}D_S(q)^{-1}\right]^{-1} =$$
$$= \frac{D_S(q)\cdot D_S(p)}{t^2\left[D_S(q) + \dfrac{t^2}{4m^2}D_S(p)\right]}. \tag{VI.4.13}$$

Как следовало ожидать, эта величина удовлетворяет (VI.4.10); более того, равенство достигается, если начальное состояние S — состояние минимальной неопределенности.

Дисперсия измерения силы B_* стремится к нулю, если одна из величин $D_S(p)$, $D_S(q)$ стремится к нулю. Пусть $D_S(p)\approx 0$, т. е. исходное состояние имеет почти точно определенный импульс $E_S(p)$, тогда из (VI.4.12) следует, что $B_*\approx[p-E_S(p)]t^{-1}$. В этом случае наблюдаемая $[p-E_S(p)]t^{-1}$ дает почти точное значение измеряемой силы F, что, очевидно, согласуется с «полуклассическими» соображениями, основанными на законе сохранения импульса $F\cdot t=\Delta p$.

Если же $D_S(q)\approx 0$, то из (VI.4.12) следует, что

$$B_*\approx\frac{2m}{t^2}\left(q-p\frac{t}{m}-E_S(q)\right). \tag{VI.4.14}$$

С точки зрения классических аналогий смысл этого выражения также понятен: предположим на минуту, что p, q — классические наблюдаемые. Тогда $q-pt/m$ есть значение координаты, начиная с которого при $t=0$ свободная частица достигнет координаты q в момент t. Чтобы измерить величину (VI.4.13), можно в принципе произвести совместное измерение p и q с произвольно высокой точностью и подставить результаты в соответствующее выражение. Сравнение (VI.4.13) с (VI.4.12) показывает, что $D_{S_t^0}(L_0)^{-1}\equiv D_0(L_0)^{-1}=D_{S_t^0}(B_*)$, так что оценка $B_*=L_0/D_0(L_0)$ достигает нижней границы (VI.2.9), которая теперь может быть записана в виде

$$D_F\{\mathbf{M}\}\geqslant t^{-2}\left[D_S(p)^{-1}+\frac{t^2}{4m^2}D_S(q)^{-1}\right]^{-1}.$$

Эта граница более информативна, чем (VI.4.10), но она верна только для гауссовских состояний.

[1] Читатель, знакомый с математической статистикой, легко увидит, что такое же выражение (VI.4.12) с заменой p, q на $p(t)$, $q(t)$ задает наилучшие несмещенные оценки силы F в классической проблеме оценивания по наблюдениям $p(t)$, $q(t)$, задаваемым соотношениями (VI.4.3), где p, q — обычные случайные величины.

§ 5. Граница для матрицы ковариации измерения многомерного параметра, основанная на симметричных логарифмических производных

Рассмотрим семейство состояний $\{S_{\boldsymbol{\theta}}\}$, где $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1, \ldots \theta_n]$ многомерный параметр, пробегающий область Θ. Например, это может быть семейство гауссовских состояний $\{S_{\overline{P},\overline{Q}}\}$ с двумерным параметром $[\overline{P}, \overline{Q}]$. Мы предположим, что выполнен следующий многомерный аналог условий (1) и (2) раздела § 2.

(1) *Семейство $\{S_{\boldsymbol{\theta}}\}$ дифференцируемо как функция $\theta_1, \ldots \theta_n$ со значениями в банаховом пространстве ядерных операторов.*

(2) *Линейные функционалы*

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j} E_{\boldsymbol{\theta}}(X) = \operatorname{Tr} \frac{\partial S_{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta_j} X, \qquad X \in \mathfrak{B}_h(\mathscr{H})$$

могут быть продолжены до линейных функционалов в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2_h(S_{\boldsymbol{\theta}})$, т. е. существует некоторая постоянная c такая, что

$$\left|\operatorname{Tr} \frac{\partial}{\partial\theta_j} S_{\boldsymbol{\theta}} \cdot X\right|^2 \leqslant c \operatorname{Tr} S_{\boldsymbol{\theta}} X^2; \qquad X \in \mathfrak{B}_h(\mathscr{H}), \qquad j=1, \ldots, n.$$

Как и в случае одномерного параметра, при этих условиях существуют *симметричные логарифмические производные* $L^j_{\boldsymbol{\theta}}$; $j=1, \ldots, n$, определяемые как элементы пространства $\mathscr{L}^2_h(S_\theta)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial S_{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta_j} = S_{\boldsymbol{\theta}} \circ L^j_{\boldsymbol{\theta}}. \tag{VI.5.1}$$

Поскольку все наши рассмотрения будут относиться к фиксированной точке $\boldsymbol{\theta}$, мы упростим обозначения, опустив индекс $\boldsymbol{\theta}$. Таким образом, пишем S вместо $S_{\boldsymbol{\theta}}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ вместо $\langle\cdot,\cdot\rangle_{S_{\boldsymbol{\theta}}}$ и т.д. Симметричные логарифмические производные будут обозначаться L^j; $j=1, \ldots, n$.

Нас будут интересовать измерения $\mathbf{M}=\{M(\mathrm{d}^n\theta)\}$ многомерного параметра $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1, \ldots, \theta_n]$. Как и в случае одномерного параметра, мы ограничимся *измерениями с конечными вторыми моментами, удовлетворяющими условию локальной несмещенности в данной точке* $\boldsymbol{\theta}$, т. е. удовлетворяющими условиям (VI.1.1)-(VI.1.3) с

$$\frac{\partial\mu_{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta_k}(B) = \operatorname{Tr} \frac{\partial S_{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta_k} M(B); \qquad B \in \mathscr{A}(\Theta).$$

В силу конечности вторых моментов, интегралы

$$X^j_{\mathbf{M}} = \int \hat{\theta}_j M(\mathrm{d}^n\hat{\theta})$$

определены как элементы пространства $\mathscr{L}^2_h(S)$. Рассуждая как в (VI.2.7), получаем альтернативную формулировку условия (VI.1.3)

$$\langle X^j_M, L^k\rangle_S = \delta_{jk}.$$

Поскольку как в (VI.2.3)

$$\langle I, L^j\rangle_S = \frac{\partial}{\partial\theta_j} E_\theta(I) = 0,$$

то это равносильно тому, что

$$\langle L^j, X_k\rangle_S = \delta_{jk}, \tag{VI.5.2}$$

где введены новые переменные

$$X_j = X^j_{\mathbf{M}} - \theta_j = \int (\hat\theta_j - \theta_j) M(\mathrm{d}^n\hat\theta). \tag{VI.5.3}$$

Введем *информационную матрицу*, которая является матрицей Грама системы $\{L^j\}$ в $\mathscr{L}^2_h(S)$:

$$\mathbf{J} = [\langle L^j, L^k\rangle_S].$$

Если существует локально несмещенное измерение, то $\mathbf{J}$ невырождена и для матрицы ковариации (VI.1.4) любого локально несмещенного измерения имеет место многомерный аналог неравенства (VI.2.9):

$$\mathbf{B}\{\mathbf{M}\} \geqslant \mathbf{J}^{-1}. \tag{VI.5.4}$$

Это означает, что для любого вектора-строки $\mathbf{v} = [v_1, \ldots, v_n]$ выполняется

$$\mathbf{v}\mathbf{B}\{\mathbf{M}\}\mathbf{v}^* \geqslant \mathbf{v}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{v}^*,$$

где $\mathbf{v}^*$ — эрмитово сопряженный вектор-столбец. Так как обе матрицы в (VI.5.4) вещественны, то, не ограничивая общности, можно считать компоненты вектора $\mathbf{v}$ вещественными.

Чтобы доказать (VI.5.4), мы сначала заметим, что матрица ковариаций $\mathbf{B}\{\mathbf{M}\}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{B}\{\mathbf{M}\} \geqslant [\langle X_j, X_k\rangle_S], \tag{VI.5.5}$$

где $\{X_j\}$ определены соотношением (VI.5.3). Это следует из (II.9.9), если положить $f(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum v_j(\hat\theta_j - \theta_j)$, где $\{v_j\}$ — произвольные вещественные числа. Остальное следует из

Лемма VI.5.1. *Пусть X_j, L^j; $j = 1, \ldots, n$ две системы векторов в некотором линейном пространстве $\mathscr{L}$, удовлетворяющие соотношению*

$$\langle L^j, X_k\rangle = \delta_{jk}; \qquad j, k = 1, \ldots, n,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ псевдоскалярное произведение в $\mathscr{L}$. Тогда матрицы Грама систем $\mathbf{\Gamma}_X = [\langle X_j, X_k\rangle]$ и $\mathbf{\Gamma}_L = [\langle L^j, L^k\rangle]$ невырождены и удовлетворяют неравенству $\mathbf{\Gamma}_X \geqslant \mathbf{\Gamma}_L^{-1}$.

Доказательство. Вводя векторы $X = \sum u_j X_j$, $Y = \sum v_j L^j$, имеем $\langle X, Y\rangle = \mathbf{v}\mathbf{u}^*$. Используя неравенство Коши—Буняковского для $\langle\cdot,\cdot\rangle$, получаем

$$\mathbf{u}\mathbf{\Gamma}_X\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v}\mathbf{\Gamma}_L\mathbf{v}^* = \langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle \geqslant (\mathbf{v}\mathbf{u}^*)^2.$$

Полагая $\mathbf{v}=\mathbf{u}\Gamma_L^{-1}$, видим, что $\mathbf{\Gamma}_X$, $\mathbf{\Gamma}_L$ не могут быть вырожденными. Полагая $\mathbf{v}=\mathbf{u}\mathbf{\Gamma}_L^{-1}$, получаем $\mathbf{u}\mathbf{\Gamma}_X\mathbf{u}^* \geqslant \mathbf{u}\mathbf{\Gamma}_L^{-1}\mathbf{u}^*$ и лемма доказана.

Комбинируя (VI.5.5) с леммой VI.5.1, получаем неравенство (VI.5.4).

Из этого неравенства сразу получается простая нижняя граница для среднеквадратичной погрешности $\mathbf{\Sigma}\{\mathbf{M}\} = \mathbf{Tr}\,\mathbf{GB}\{\mathbf{M}\}$, где $\mathbf{G}$ — весовая матрица:

$$\mathbf{\Sigma}\{\mathbf{M}\} \geqslant \mathbf{Tr}\,\mathbf{GJ}^{-1}. \tag{VI.5.6}$$

Для двухпараметрического семейства гауссовских состояний $\{S_{\overline{P},\overline{Q}}\}$ симметричные логарифмические производные, полученные из (V.6.10), даются формулами

$$L^Q = \sigma_Q^{-1}(Q-\overline{Q}), \qquad L^P = \sigma_P^{-2}(P-\overline{P}), \tag{VI.5.7}$$

так что

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sigma_P^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_Q^{-2} \end{bmatrix}. \tag{VI.5.8}$$

Матричное неравенство (VI.5.4) дает два скалярных неравенства

$$D_{(P)}\{\mathbf{M}\} \geqslant \sigma_P^2, \qquad D_{(Q)}\{\mathbf{M}\} \geqslant \sigma_Q^2,$$

где

$$D_{(P)}\{\mathbf{M}\} = \int (\alpha-\overline{P})^2 \mu_{\overline{P},\overline{Q}}(\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta),$$
$$D_{(Q)}\{\mathbf{M}\} = \int (\beta-\overline{Q})^2 \mu_{\overline{P},\overline{Q}}(\mathrm{d}\alpha,\mathrm{d}\beta)$$

– маргинальные дисперсии несмещенного измерения $\mathbf{M}=\{M(\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta)\}$ с распределением вероятностей $\mu_{\overline{P},\overline{Q}}(\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta) = \mathrm{Tr}\,S_{\overline{P},\overline{Q}}M(\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta)$. Неравенство (VI.5.6) дает

$$g_P D_{(P)}\{\mathbf{M}\} + g_Q D_{(Q)}\{\mathbf{M}\} \geqslant g_P\sigma_P^2 + g_Q\sigma_Q^2 \tag{VI.5.9}$$

для любых положительных весов g_P, g_Q. Мы увидим, однако, ниже, что эта граница является недостижимой, и получим лучшую, достижимую границу, которая учитывает невозможность точного совместного измерения наблюдаемых P и Q.

§ 6. Граница, основанная на правой логарифмической производной

В отличие от классической математической статистики, в некоммутативной теории существует несколько различных вариантов неравенства Рао—Крамера, использующих разные определения логарифмической производной. Предположим, что семейство $\{S_{\boldsymbol{\theta}}\}$ удовлетворяет условию (1) раздела § 5; однако вместо условия (2) потребуем

(2′) *Для некоторой постоянной c*

$$\left|\mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_{\boldsymbol{\theta}}\cdot X\right|^2 \leqslant c\,\mathrm{Tr}\,S_{\boldsymbol{\theta}}XX^*; \qquad X\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}), \quad j=1,\ldots,n.$$

Это означает, что комплексно-линейный функционал

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}E_{\boldsymbol{\theta}}(X) = \mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_{\boldsymbol{\theta}}\cdot X$$

на $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ продолжается до непрерывного функционала на комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2_+(S_{\boldsymbol{\theta}})$. По лемме Рисса—Фреше существуют единственные элементы $\widetilde{L}^j_{\boldsymbol{\theta}} \in \mathscr{L}^2_+(S_{\boldsymbol{\theta}})$ такие, что

$$\mathrm{Tr}\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_{\boldsymbol{\theta}}\cdot X = \langle \widetilde{L}^j_{\boldsymbol{\theta}}, X\rangle^+_{S_{\boldsymbol{\theta}}}, \qquad X\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}),$$

или, равносильно,

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_{\boldsymbol{\theta}} = (\widetilde{L}^j_{\boldsymbol{\theta}})^* S_{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial\theta_j}S_{\boldsymbol{\theta}} = S_{\boldsymbol{\theta}}\widetilde{L}^j_{\boldsymbol{\theta}}. \tag{VI.6.1}$$

Операторы $\widetilde{L}^j \equiv \widetilde{L}^j_{\boldsymbol{\theta}}$ называются *правыми логарифмическими производными* семейства $\{S_{\boldsymbol{\theta}}\}$. Отметим, что

$$\langle I, \widetilde{L}^j\rangle^+_S = 0, \qquad j=1,\ldots,n.$$

Введем *правую информационную матрицу*

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\mathbf{J}} = [\langle \widetilde{L}^j, \widetilde{L}^k\rangle^+_S].$$

Рассмотрим измерение $\mathbf{M}=\{M(\mathrm{d}^n\theta)\}$ многомерного параметра $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\ldots$ $\ldots,\theta_n]$, удовлетворяющее условию локальной несмещенности, предполагая что такое существует. Аналогично соотношениям (VI.5.2), получаем

$$\langle \widetilde{L}^j, X_k\rangle^+_S = \delta_{jk}.$$

Вместо (VI.5.5) получаем, применяя неравенство (II.9.10)

$$\mathbf{B}\{\mathbf{M}\} \geqslant [\langle X_j, X_k\rangle^\pm_S]. \tag{VI.6.2}$$

Отсюда, применяя лемму VI.5.1 к системе векторов $\{\widetilde{L}^j\}$, $\{X_j\}$ в комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2_+(S)$, получаем другое неравенство для матрицы ковариации измерения:

$$\mathbf{B}\{\mathbf{M}\} \geqslant \tilde{\mathbf{J}}^{-1}. \tag{VI.6.3}$$

Важно, однако, отметить, что в отличие от $\mathbf{J}$ в (VI.5.4), здесь $\tilde{\mathbf{J}}$ уже является, вообще говоря, комплексной эрмитовой матрицей, так что в равносильной записи соотношения (VI.6.3)

$$\mathbf{v}\mathbf{B}\{\mathbf{M}\}\mathbf{v}^* \geqslant \mathbf{v}\tilde{\mathbf{J}}^{-1}\mathbf{v}^*$$

следует учитывать все комплексные векторы $\mathbf{v}$, так как ограничение только вещественными векторами приводит к менее информативному неравенству, не учитывающему мнимую часть матрицы $\tilde{\mathbf{J}}^{-1}$.

Прежде чем применить результат (VI.6.3) к оцениванию параметров в семействе гауссовскнх состояний $\{S_{\overline{P},\overline{Q}}\}$, найдем общее соотношение, связывающее симметричную и правую логарифмические производные.

Отметим, что из условия $(2')$ следует условие (2) раздела § 5, поскольку $\langle X, X\rangle_S^{\pm} \leqslant 2\langle X, X\rangle_S$, как было отмечено в § II.8. Поэтому из условия $(2')$ следует существование обеих логарифмических производных. По определению логарифмических производных

$$\langle L^j, X\rangle_S = \langle \widetilde{L}^j, X\rangle_S^+ \tag{VI.6.4}$$

для любого ограниченного X. Используя первое соотношение в (II.8.14) и определение коммутационного оператора, имеем

$$\begin{aligned}\langle Y, X\rangle_S^+ = \langle Y, X\rangle_S + \frac{1}{2}\mathrm{i}[Y, X]_S = \\ = \left\langle Y, \left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right) X\right\rangle_S.\end{aligned} \tag{VI.6.5}$$

Отсюда следует, что

$$\left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right)\widetilde{L}^j = L^j. \tag{VI.6.6}$$

Если оператор $(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D})$ невырожден, что выполняется в силу предложения II.10.1, когда $S = S_{\boldsymbol{\theta}}$ — точное состояние, то мы получаем

$$\widetilde{L}^j = \left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right)^{-1} L^j \tag{VI.6.7}$$

и

$$\tilde{\mathbf{J}} = \left[\left\langle L^j, \left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right)^{-1} L^k\right\rangle_S\right]. \tag{VI.6.8}$$

Фактически для (VI.6.3) нужна матрица $\tilde{\mathbf{J}}^{-1}$. Очень простое выражение для нее получается в следующем частном случае: предположим, что *подпространство $\mathscr{L}$ пространства $\mathscr{L}^2(S)$, натянутое на симметричные логарифмические производные, инвариантно относительно оператора $\mathfrak{D}$*:

$$\mathfrak{D}(\mathscr{L}) \subset \mathscr{L}. \tag{VI.6.9}$$

Тогда $I = \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}$ является эрмитовым оператором, для которого $\mathscr{L}$ — инвариантное подпространство. Поэтому можно рассматривать $I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}$ как оператор, действующий в $\mathscr{L}$, а $(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D})^{-1}$ в (VI.6.8) — как его обратный в $\mathscr{L}$. Тогда $\tilde{\mathbf{J}}$ — матрица квадратичной формы оператора $(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D})^{-1}$ в базисе $\{L^j\}$ и, как известно из линейной алгебры,

$$\tilde{\mathbf{J}}^{-1} = \mathbf{J}^{-1}\left[\left\langle L^j, \left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right) L^k\right\rangle_S\right]\mathbf{J}^{-1},$$

поскольку $\mathbf{J} = [\langle L^j, L^k\rangle_S]$ — матрица Грама базиса $\{L^j\}$ в $\mathscr{L}$. Вводя вещественную кососимметричную матрицу

$$\mathbf{D} = [\langle L^j, \mathfrak{D}L^k\rangle_S] = [[L^j, L^k]_S],$$

находим окончательно

$$\tilde{\mathbf{J}}^{-1} = \mathbf{J}^{-1}\left[\mathbf{J} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathbf{D}\right]\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^{-1} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}. \tag{VI.6.10}$$

Обратимся к примеру гауссовского семейства $\{S_{\overline{P},\overline{Q}}\}$. Пользуясь формулами (VI.6.6), (VI.5.7) и (V.6.11), можно найти

$$\begin{aligned} \widetilde{L}^Q &= (4\sigma_P^2\sigma_Q^2 - 1)^{-1}[4\sigma_P^2(Q-\overline{Q}) - 2\mathrm{i}(P-\overline{P})], \\ \widetilde{L}^P &= (4\sigma_P^2\sigma_Q^2 - 1)^{-1}[4\sigma_Q^2(P-\overline{P}) - 2\mathrm{i}(Q-\overline{Q})], \end{aligned} \tag{VI.6.11}$$

предполагая, что $4\sigma_P^2\sigma_P^2 \neq 1$. Это исключает случай, когда $S_{\overline{P},\overline{Q}}$ — чистые состояния. Тогда, как следует из (V.5.10), все собственные значения оператора плотности $S_{\overline{P},\overline{Q}}$ положительны, т. е. состояния $S_{\overline{P},\overline{Q}}$ являются точными. Таким образом, условие $4\sigma_P^2\sigma_Q^2 \neq 1$ равносильно невырожденности оператора $I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}$ для всех $\overline{P}$, $\overline{Q}$. Из уравнения (VI.6.11) может быть получена правая информационная матрица $\tilde{\mathbf{J}}$, но есть более простой путь, основанный на (VI.6.10). В самом деле, подпространство $\mathscr{L}$, порожденное симметричными логарифмическими производными $L^Q = \sigma_Q^{-2}(Q-\overline{Q})$ и $L^p = \sigma_P^{-2}(P-\overline{P})$ совпадает с $\mathfrak{R}_1$ для состояния $S_{\overline{P},\overline{Q}}$, как описано в § V.6. По теореме VI.6.1 оно инвариантно относительно коммутационного оператора $\mathfrak{D}$ (это также непосредственно следует из формул (V.6.11)). Поэтому можно применить соотношение (VI.6.10). Матрица $\mathbf{J}$ дается выражением (VI.5.8); учитывая, что

$$[P,Q]_S = 1, \qquad [Q,Q]_S = [P,P]_S = 0$$

в силу (V.4.10) с $R(z) = Px + Qy$, $\Delta(z,z') = xy' - x'y$, получаем

$$\mathbf{J}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда, согласно (VI.6.10)

$$\tilde{\mathbf{J}}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_P^2 & \mathrm{i}/2 \\ -\mathrm{i}/2 & \sigma_Q^2 \end{bmatrix}.$$

Выбирая в качестве $\mathbf{v}$ в скалярном неравенстве, следующем за соотношением (VI.6.3), комплексный вектор $[\sqrt{g_P}, \mathrm{i}\sqrt{g_Q}]$, получаем новую границу для среднеквадратичного отклонения локально несмещенного измерения

$$g_P D_{(P)}\{\mathbf{M}\} + g_Q D_{(Q)}\{\mathbf{M}\} \geqslant g_P\sigma_P^2 + g_Q\sigma_Q^2 + \sqrt{g_P g_Q}. \tag{VI.6.12}$$

Эта граница, очевидно, лучше, чем (VI.5.9). Она совпадает с границей (III.6.9) для ковариантного измерения. Как показано в § III.6, она достигается на совместном каноническом измерении координаты и импульса

$$M(\mathrm{d}\overline{P}, \mathrm{d}\overline{Q}) = |\overline{P}, \overline{Q}; \sigma^2)(\sigma^2; \overline{Q}, \overline{P}|\frac{\mathrm{d}\overline{P}\,\mathrm{d}\overline{Q}}{2\pi}, \tag{VI.6.13}$$

где $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sqrt{g_P/g_Q}$. Согласно предложению III.6.1, это измерение реализуется парой коммутирующих наблюдаемых

$$\widetilde{P} = P \otimes I_0 + I \otimes P_0, \qquad \widetilde{Q} = Q \otimes I_0 - I \otimes Q_0$$

в пространстве $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$, где вспомогательная степень свободы P_0, Q_0 описывается основным состоянием $|0,0;\sigma^2)(\sigma^2;0,0|$. В § 8 будет показано, что это измерение удовлетворяет условию локальной несмещенности. Следовательно, оно является равномерно наилучшим локально несмещенным совместным измерением параметров $\overline{P}$, $\overline{Q}$ в гауссовском семействе $\{S_{\overline{P},\overline{Q}}\}$.

Неравенства (VI.5.4) и (VI.6.3), основанные на разных определениях логарифмической производной, дают две существенно разные границы для среднеквадратичного отклонения. Именно, выше мы видели, что для гауссовского двухпараметрического семейства $\{S_{\overline{P},\overline{Q}}\}$ граница (VI.6.3) лучше, чем (VI.5.4). Покажем теперь, что для любого однопараметрического семейства $\{S_\theta\}$ граница (VI.5.4) предпочтительнее (VI.6.3). Достаточно показать, что всегда

$$\langle L, L\rangle_S \leqslant \langle \widetilde{L}, \widetilde{L}\rangle_S^+.$$

Для этого найдем матричное представление правой и симметричной логарифмической производных в базисе из собственных векторов $\{\psi_j\}$ оператора плотности $S = S_\theta$. Умножая уравнения (VI.5.1), (VI.6.1) на $(\psi_j|$ и $|\psi_k)$, находим, что

$$(\psi_j|L\psi_k) = 2(s_j+s_k)^{-1}\left(\psi_j\left|\frac{\mathrm{d}S_\theta}{\mathrm{d}\theta}\psi_k\right.\right),$$
$$(\psi_j|\widetilde{L}\psi_k) = s_j^{-1}\left(\psi_j\left|\frac{\mathrm{d}S_\theta}{\mathrm{d}\theta}\psi_k\right.\right).$$

Отсюда

$$\langle L, L\rangle_S = 2\sum_{j,k} p_{jk}(s_j+s_k)^{-1},$$
$$\langle \widetilde{L}, \widetilde{L}\rangle_S^+ = \sum_{j,k} p_{jk}s_j^{-1} = \sum_{j,k}\frac{p_{jk}}{2}(s_j^{-1}+s_k^{-1}),$$

где $p_{jk} = |\psi_j|(\mathrm{d}S_\theta/\mathrm{d}\theta)\psi_k)|^2 \geqslant 0$. Так как $2(s_j+s_k)^{-1} \leqslant \frac{1}{2}(s_j^{-1}+s_k^{-1})$, то и требуемое неравенство установлено.

Аналогично можно ввести левую логарифмическую производную. Соответствующая информационная матрица есть $\tilde{\mathbf{J}}^T$, где ^{T} означает транспонирование матрицы. Заметим, что

$$\tilde{\mathbf{J}}^{-1} = \operatorname{Re}\tilde{\mathbf{J}}^{-1} + \mathrm{i}\operatorname{Im}\tilde{\mathbf{J}}^{-1}, \qquad (\tilde{\mathbf{J}}^{-1})^{\mathrm{T}} = \operatorname{Re}\tilde{\mathbf{J}}^{-1} - \mathrm{i}\operatorname{Im}\tilde{\mathbf{J}}^{-1},$$

где $\operatorname{Re}\tilde{\mathbf{J}}^{-1}$ — вещественная симметричная, $\operatorname{Im}\tilde{\mathbf{J}}^{-1}$ — вещественная кососимметричная матрицы. Так как $\mathbf{B}\{\mathbf{M}\}$ вещественна и симметрична, то из (VI.6.3) вытекает

$$\mathbf{B}\{\mathbf{M}\} \geqslant \operatorname{Re}\tilde{\mathbf{J}}^{-1} \pm \mathrm{i}\operatorname{Im}\tilde{\mathbf{J}}^{-1}.$$

Отсюда, в частности, видно, что границы, полученные с помощью правой и левой логарифмических производных, по существу совпадают.

В рассмотренном выше примере гауссовского семейства мы получили границу (VI.6.12) для среднеквадратичного отклонения, искусственно подбирая вектор $\mathbf{v}$. Можно, однако, получить из (VI.6.3) и общую границу для $\Sigma\{\mathbf{M}\}$ с произвольной весовой матрицей $\mathbf{G}$. Согласно последнему неравенству, можно написать

$$\begin{aligned}\Sigma\{\mathbf{M}\} \geqslant \min\{&\mathbf{Tr}\,\mathbf{GB} : \mathbf{B} \text{ вещественная симметричная},\\ &\mathbf{B} \geqslant \operatorname{Re}\tilde{\mathbf{J}}^{-1} \pm \mathrm{i}\operatorname{Im}\tilde{\mathbf{J}}^{-1}\}.\end{aligned} \tag{VI.6.14}$$

Чтобы получить явное выражение для минимума, воспользуемся следующим приемом. Для любой матрицы $\mathbf{M}$, которая подобна диагональной, т. е.

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}\begin{bmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1},$$

можно определить функции от $\mathbf{M}$; положим, в частности,

$$\mathrm{a}bs\,\mathbf{M} = \mathbf{T}\begin{bmatrix}|\mu_1| & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & |\mu_n|\end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1}.$$

Подчеркнем, что, вообще говоря, $\mathrm{abs}\,\mathbf{M} \neq |\mathbf{M}| \equiv \sqrt{\mathbf{M}^*\mathbf{M}}$; если же $\mathbf{M}$ эрмитова, то имеет место равенство.

Произведение эрмитовых матриц $\mathbf{GR}$, из которых одна, например $\mathbf{G}$, строго положительно определена, подобно диагональной матрице. В самом деле, $\mathbf{GR} = \sqrt{\mathbf{G}}(\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{G}})\sqrt{\mathbf{G}}^{-1}$, так что матрица $\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{G}}$, будучи эрмитовой, подобна диагональной матрице. Из определений вытекает, что

$$\mathrm{a}bs\,(\mathbf{GR}) = \sqrt{G}|\sqrt{G}\mathbf{R}\sqrt{G}|\sqrt{G}^{-1}. \tag{VI.6.15}$$

Лемма VI.6.1. *Пусть $\mathbf{R}$ комплексная эрмитова матрица; тогда*

$$\min\{\mathbf{Tr}\,\mathbf{GX} : \mathbf{X} \geqslant \pm\mathbf{R}\} = \mathbf{Tr}\ \mathrm{a}bs\,(\mathbf{GR}),$$

причем минимум достигается для $\mathbf{X} = \mathbf{G}^{-1}\mathrm{a}bs\,(\mathbf{GR})$.

Доказательство. Так как $\mathbf{X} \geqslant \pm\mathbf{R}$, то

$$\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{X}\sqrt{\mathbf{G}} \geqslant \pm\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{G}} \qquad \text{и}$$
$$\mathbf{e}^*\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{X}\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{e} \geqslant |\mathbf{e}^*\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{e}|$$

для любого вектора-столбца $\mathbf{e}$. Пусть $\{\mathbf{e}_j\}$ — базис из собственных векторов эрмитовой матрицы $\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{G}}$, а $\{\mu_j\}$ ее собственные значения. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{Tr}\,\mathbf{GX} = \mathbf{Tr}\,\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{X}\sqrt{\mathbf{G}} = \sum_j \mathbf{e}_j^*\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{X}\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{e}_j \geqslant \sum_j |\mu_j|\\ = \mathbf{Tr}\,|\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{G}}| = \mathbf{Tr}\ \mathrm{a}bs\,(\mathbf{GR}).\end{aligned}$$

Подстановка $\mathbf{X} = \mathbf{G}^{-1}\mathrm{a}bs\,(\mathbf{GR})$, очевидно, дает нижнюю границу, и надо проверить только, что $\mathbf{G}^{-1}\ \mathrm{abs}\,(\mathbf{GR}) \geqslant \pm\mathbf{R}$. Учитывая (VI.6.15), перепишем левую часть в виде $\sqrt{\mathbf{G}}^{-1}|\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{G}}|\sqrt{\mathbf{G}}^{-1}$. Тогда доказываемое неравенство сводится к неравенству $|\mathbf{Y}| \geqslant \pm\mathbf{Y}$ для эрмитовой матрицы $\mathbf{Y} = \sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{G}}$, которое вытекает из свойств функционального исчисления эрмитовых матриц (*ср.* § II.3).

Предположим теперь, что $\mathbf{G}$ вещественная, а $\mathbf{R}$ чисто мнимая, $\mathbf{R} = \mathrm{i}\mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ вещественная кососимметричная. Тогда минимизирующая матрица $\mathbf{X}$ вещественна. В самом деле, согласно (VI.6.15) и определению $|\mathbf{Y}|$, получаем $\mathbf{X} = \sqrt{\mathbf{G}^{-1}}\sqrt{\sqrt{\mathbf{G}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{G}}}\sqrt{\mathbf{G}^{-1}}$. Это выражение содержит квадратные корни вещественных положительных матриц, которые сами положительны. Отсюда следует, что результат леммы VI.6.1 может быть использован для вычисления минимума в (VI.6.14), что дает

$$\boldsymbol{\Sigma}\{\mathbf{M}\} \geqslant \mathbf{Tr}\,\mathbf{G}\,\mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{J}}^{-1} + \mathbf{Tr}\ \mathrm{a}bs\,(\mathrm{i}\mathbf{G}\,\mathrm{Im}\,\tilde{\mathbf{J}}^{-1}). \tag{VI.6.16}$$

Если выполняется условие (VI.6.9), то из (VI.6.10) получаем

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{J}}^{-1} = \mathbf{J}^{-1}, \qquad \mathrm{Im}\,\tilde{\mathbf{J}}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1},$$

так что

$$\boldsymbol{\Sigma}\{\mathbf{M}\} \geqslant \mathbf{Tr}\,\mathbf{G}\mathbf{J}^{-1} + \frac{1}{2}\,\mathbf{Tr}\ \mathrm{a}bs\,(\mathrm{i}\mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}). \tag{VI.6.17}$$

Предоставляем читателю показать, что применение (VI.6.17) к гауссовскому семейству $\{S_{\overline{P},\overline{Q}}\}$ позволяет вновь получить границу (VI.6.12).

§ 7. Общая граница для среднеквадратичного отклонения

Выше были получены две существенно различные границы для среднеквадратичного отклонения. В этом разделе мы постараемся раскрыть механизм ситуации и получим общее неравенство, из которого эти границы вытекают как частные случаи.

Рассмотрим семейство состояний $\{S_{\boldsymbol{\theta}}\}$, где $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \ldots, \theta_n]$ — многомерный параметр. Мы будем предполагать, что это семейство удовлетворяет условиям (1) и (2) из § 5 в фиксированной точке $\boldsymbol{\theta}$. Пусть $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}^n\theta)\}$ измерение параметра $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \ldots, \theta_n]$, локально несмещенное в точке $\boldsymbol{\theta}$. Полагая, как в § 5,

$$X_j = \int (\hat{\theta}_1 - \theta_j) M(\mathrm{d}^n\hat{\theta}) \equiv W^j_{\mathbf{M}} - \theta_j, \tag{VI.7.1}$$

запишем условие локальной несмещенности в виде

$$\langle L^j, X_k\rangle_S = \delta_{jk}; \qquad j, k = 1, \ldots, n, \tag{VI.7.2}$$

где S, как обычно, обозначает $S_{\boldsymbol{\theta}}$.

Матрица ковариаций измерения с конечными вторыми моментами удовлетворяет неравенству (VI.6.2), которое, используя (II.8.14), можно переписать в виде

$$\mathbf{B}\{\mathbf{M}\} \geqslant [\langle X_j, X_k\rangle_S] \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}[[X_j, X_k]_S]. \tag{VI.7.3}$$

Полагая

$$\kappa_{jk} = b_{jk}\{\mathbf{M}\} - \langle X_j, X_k\rangle_S \tag{VI.7.4}$$

мы можем переписать (VI.7.3) в виде

$$[\kappa_{jk}] \geqslant \pm\frac{1}{2}\mathrm{i}[[X_j, X_k]_S]. \tag{VI.7.5}$$

Среднеквадратичное отклонение в этих обозначениях равно

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}\{\mathbf{M}\} \equiv \sum_{j,k} g_{jk} b_{jk}\{\mathbf{M}\} = \\ = \sum_{j,k} g_{jk}[\kappa_{jk} + \langle X_j, X_k\rangle_S].\end{aligned} \tag{VI.7.6}$$

Измерение $\mathbf{M}$ входит в это выражение через наблюдаемые $X_j \in \mathscr{L}_h^2(S)$ и вещественную симметричную матрицу $[\kappa_{jk}] = \mathbf{K}$. Мы получим нижнюю границу для среднеквадратичного отклонения, найдя минимум выражения (VI.7.6) по всевозможным $\{X_j\}$ и $[\kappa_{jk}]$, удовлетворяющим ограничениям (VI.7.2) и (VI.7.5). Эта граница будет достижимой, если минимизирующие ее значения $\{X_j^*\}$, $[\kappa_{jk}^*]$ соответствуют некоторому измерению $\mathbf{M}$ по формулам (VI.7.1) и (VI.7.4).

Для того, чтобы найти минимум, будет удобно вместо $\{X_j\}$ и $[\kappa_{jk}]$ ввести новые переменные в соответствии со следующей леммой. В дальнейшем мы будем использовать комплексное гильбертово пространство $\mathscr{L}^2(S) = \mathscr{L}_h^2(S) \oplus \oplus\, \mathrm{i}\mathscr{L}_h^2(S)$. *Комплексным расширением* вещественного линейного оператора $\mathfrak{A}$ в $\mathscr{L}_h^2(S)$ мы называем оператор в $\mathscr{L}^2(S)$, определенный соотношением $\mathfrak{A}(X_1 + \mathrm{i}X_2) = \mathfrak{A}X_1 + \mathrm{i}\mathfrak{A}X_2$. Если $\mathfrak{A}$ — ограниченный вещественный симметричный оператор в $\mathscr{L}_h^2(S)$, то его комплексное расширение эрмитово в $\mathscr{L}^2(S)$.

Лемма VI.7.1. *Элементы* $X_j \in \mathscr{L}_h^2(S)$; $j = 1, \ldots, n$ *и вещественная симметричная* $(n \times n)$*-матрица* $[\kappa_{jk}]$ *удовлетворяют условию* (VI.7.5) *тогда и только тогда, когда существуют элементы* $Y_j \in \mathscr{L}_h^2(S)$; $j = 1, \ldots, n$ *и ограниченный вещественный симметричный оператор* $\mathfrak{F}$ *в* $\mathscr{L}_h^2(S)$ *такие, что*

(1) $X_j = \mathfrak{F}Y_j$; $j = 1, \ldots, n$;

(2) $\kappa_{jk} = \langle Y_j, \mathfrak{F}(I - \mathfrak{F})Y_k\rangle_S$; $j, k = 1, \ldots, n$;

(3) *комплексное расширение оператора* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет условию*

$$\mathfrak{F} \geqslant \mathfrak{F}\left(I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right)\mathfrak{F}.$$

Доказательство. Пусть $\{X_j\}$ и $[\kappa_{jk}]$ удовлетворяют условиям (VI.7.5), и пусть $\mathscr{L}$ подпространство $\mathscr{L}_h^2(S)$, порожденное элементами X_j; $j = 1, \ldots, n$. Определим вещественный симметричный оператор $\mathfrak{K}$ в $\mathscr{L}$ соотношением

$$\langle X_j, \mathfrak{K}X_k\rangle_S = \kappa_{jk}; \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Тогда (VI.7.5) можно записать в форме

$$\langle Y, \mathfrak{K}Y\rangle_S \geqslant \pm\frac{1}{2}\mathrm{i}\langle Y, \mathfrak{D}Y\rangle, \qquad Y \in \mathscr{L} \oplus \mathrm{i}\mathscr{L}. \tag{VI.7.7}$$

Определим ограниченный вещественный симметричный оператор $\mathfrak{F}$ в $\mathscr{L}_h^2(S)$ соотношением

$$\mathfrak{F} = \begin{cases} (I+\mathfrak{K})^{-1}, & \text{на } \mathscr{L}, \\ 0, & \text{на } \mathscr{L}_n^2(S) \ominus \mathscr{L}. \end{cases}$$

Полагая $Y_j = (I+\mathfrak{K})X_j$, имеем $X_j = \mathfrak{F}Y_j$ и

$$\begin{aligned} \kappa_{jk} = \langle X_j, \mathfrak{K}X_k\rangle_S = \langle Y_j, \mathfrak{F}\mathfrak{K}\mathfrak{F}Y_k\rangle_S = \\ = \langle Y_j, \mathfrak{F}(I-\mathfrak{F})Y_k\rangle_S, \end{aligned}$$

так что условия (1) и (2) леммы VI.7.1 выполнены и остается проверить (3). Поскольку область значений оператора $\mathfrak{F}$, построенного выше, есть $\mathscr{L}$, мы можем положить $Y = \mathfrak{F}X$, $X \in \mathscr{L}^2(S)$, в (VI.7.7). Добавляя к обеим частям полученного неравенства слагаемое $\langle \mathfrak{F}X, \mathfrak{F}X\rangle_S$, получаем

$$\begin{aligned} \left\langle X, \mathfrak{F}\left(I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right)\mathfrak{F}X\right\rangle_S \leqslant \langle X, \mathscr{F}(I+\mathfrak{K})\mathfrak{F}X\rangle_S = \\ = \langle X, \mathfrak{F}X\rangle_S, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Обратно, пусть $\{Y_j\}$ и $\mathfrak{F}$ удовлетворяют условиям леммы. Определяя $\{X_j\}$, $[\kappa_{jk}]$ соотношениями (1), (2), мы можем записать соотношение (VI.7.5) в виде

$$\begin{aligned} [\langle Y_j, \mathfrak{F}(I-\mathfrak{F})Y_k\rangle_S] \geqslant \pm\frac{1}{2}\mathrm{i}[[\mathfrak{F}Y_j, \mathfrak{F}Y_k]_S] \\ = \pm\frac{1}{2}\mathrm{i}[\langle Y_j, \mathfrak{F}\mathfrak{D}\mathfrak{F}Y_k\rangle_S]. \end{aligned}$$

Для доказательства этого достаточно установить

$$\mathfrak{F}(I-\mathfrak{F}) \geqslant \pm\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{F}\mathfrak{D}\mathfrak{F},$$

что следует из (3), и лемма доказана.

Выражая (VI.7.6) в терминах новых переменных, получаем

$$\mathbf{\Sigma}\{\mathbf{M}\} = \sum_{j,k} g_{jk}\langle Y_j, \mathfrak{F}Y_k\rangle_S, \tag{VI.7.8}$$

и условие (VI.7.2) принимает форму

$$\langle L^j, \mathfrak{F}Y_k\rangle_S = \delta_{jk}. \tag{VI.7.9}$$

Теперь задача в том, чтобы минимизировать (VI.7.8) по всем $\{Y_j \in \mathscr{L}_h^2(S);$ $j = 1, \ldots, n\}$, удовлетворяющим (VI.7.9) и всем операторам $\mathfrak{F}$ в $\mathscr{L}_h^2(S)$, удовлетворяющим условию (3) леммы VI.7.1.

Предположим сначала, что оператор $\mathfrak{F}$ фиксирован и будем минимизировать по $\{Y_j\}$. Заметим, что оператор $\mathfrak{F}$ положителен, точнее,

$$0 \leqslant \mathfrak{F} \leqslant I. \tag{VI.7.10}$$

В самом деле, складывая соотношение (3), отвечающее знаку $+$ с соотношением, отвечающим знаку $-$, получаем $\mathfrak{F} \geqslant \mathfrak{F}^2$ или $\mathfrak{F}(I-\mathfrak{F}) \geqslant 0$, что равносильно (VI.7.10). Поэтому симметричная билинейная форма $\langle X, \mathfrak{F}Y\rangle_S$ на $\mathscr{L}^2_h(S)$ является положительно определенной и определяет псевдоскалярное произведение (т. е. произведение, скалярный квадрат которого может обращаться в нуль для ненулевого вектора X). Согласно лемме VI.5.1 и предположению о существовании локально несмещенного измерения, матрица

$$\mathbf{F} = [\langle L_j, \mathfrak{F}L_k\rangle_S]$$

невырождена и удовлетворяет следующему матричному неравенству

$$[\langle Y_j, \mathfrak{F}Y_k\rangle_S] \geqslant [\langle L_j, \mathfrak{F}L_k\rangle_S]^{-1} = \mathbf{F}^{-1}.$$

Здесь равенство достигается, если

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\mathbf{\Sigma}\{\mathbf{M}\} \geqslant \inf \mathbf{Tr}\, \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1} \tag{VI.7.11}$$

где нижняя грань берется по вещественным ограниченным симметричным операторам $\mathfrak{F}$ *в* $\mathscr{L}^2_h(S)$*, удовлетворяющим условию* (3) *леммы* VI.7.1. Обозначим $\mathfrak{F}_*$ решение минимизационной задачи в правой части соотношения (VI.7.11) (если оно существует) и положим $F_* = [\langle L_j, \mathfrak{F}_* L_k\rangle]$. Переменные исходной минимизационной задачи тогда выражаются через $\mathfrak{F}_*$ соотношениями

$$\begin{bmatrix} X_1^* \\ \vdots \\ X_n^* \end{bmatrix} = \mathbf{F}_*^{-1} \begin{bmatrix} \mathfrak{F}_* L_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{F}_* L_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K}_* = \mathbf{F}_*^{-1}[\langle L_j, \mathfrak{F}_*(I-\mathfrak{F}_*)L_k\rangle_S \mathbf{F}_*^{-1}. \tag{VI.7.12}$$

Явное решение для $\mathfrak{F}_*$ было получено в специальных случаях, один из которых будет рассмотрен в конце этого раздела. Покажем теперь, что неравенство (VI.7.11) в общем случае более информативно, чем два предыдущие.

Используя второе неравенство в (VI.7.10), получаем

$$\mathbf{F} = [\langle L_j, \mathfrak{F}L_k\rangle_S] \leqslant [\langle L_j, L_k\rangle_S] = \mathbf{J}.$$

Поэтому $\mathbf{F}^{-1} \geqslant \mathbf{J}^{-1}$ и мы получаем неравенство (VI.5.7), отвечающее симметричной логарифмической производной. Чтобы получить неравенство (VI.6.16), заметим, что условие (3) леммы VI.7.1 может быть записано в виде

$$0 \leqslant \left(I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right) \mathfrak{F} \left(I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right) \leqslant \left(I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right). \tag{VI.7.13}$$

В самом деле, умножая неравенство (3) справа и слева на $\sqrt{I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}}$, получаем

$$\left(\sqrt{I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}}\,\mathfrak{F}\sqrt{I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}}\right)^2 \leqslant \sqrt{I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}}\,\mathfrak{F}\sqrt{I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}},$$

откуда $0 \leqslant \sqrt{I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}}\,\mathfrak{F}\sqrt{I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}} \leqslant I$ как в (VI.7.10). Вновь умножая справа и слева на $\sqrt{I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}}$, получаем (VI.7.13). Предположим теперь, что условие (2′) из § 6 выполнено, что обеспечивает существование правых логарифмических производных. Тогда, используя (VI.6.6),

$$\mathbf{F} = \left[\left\langle \left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right)\widetilde{L}^j, \mathfrak{F}\left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right)\widetilde{L}^k\right\rangle_S\right].$$

В силу (VI.7.13) и (VI.6.5)

$$\mathbf{F} \leqslant \left[\left\langle \widetilde{L}^j, \left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}\right)\widetilde{L}^k\right\rangle_S\right] = [\langle \widetilde{L}^j, \widetilde{L}^k\rangle_S^+] = \tilde{\mathbf{J}},$$

так что

$$\mathbf{F}^{-1} \geqslant \tilde{\mathbf{J}}^{-1} = \operatorname{Re}\tilde{\mathbf{J}}^{-1} + \mathrm{i}\operatorname{Im}\tilde{\mathbf{J}}^{-1}.$$

Поскольку $\mathbf{F}^{-1}$ вещественна и симметрична, то отсюда следует, что $\mathbf{F}^{-1} \geqslant \operatorname{Re}\tilde{\mathbf{J}}^{-1} + \mathrm{i}\operatorname{Im}\tilde{\mathbf{J}}^{-1}$. Поэтому граница неравенства (VI.7.11) больше или равна границы неравенства (VI.6.14), которая совпадает с (VI.6.16).

Покажем, что *в случае, когда пространство $\mathscr{L}$, порожденное симметричными логарифмическими производными L^j; $j=1,\ldots,n$ инвариантно относительно коммутационного оператора $\mathfrak{D}$ состояния S, неравенство* (VI.7.11) *совпадает с границей* (VI.6.17). Для этого мы докажем утверждение, которое понадобится и в дальнейшем.

Предложение VI.7.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — замкнутое инвариантное подпространство оператора $\mathfrak{D}$, содержащее симметричные логарифмические производные L^j; $j = 1,\ldots,n$. Тогда нижняя грань в* (VI.7.11) *не изменится, если считать операторы $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}$ действующими не в $\mathscr{L}^2_h(S)$, а в $\mathscr{M}$.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{D}_{\mathscr{M}}$ ограничение оператора $\mathfrak{D}$ на $\mathscr{M}$. Достаточно показать, что всякому вещественному ограниченному симметричному оператору $\mathfrak{F}$, удовлетворяющему условию (3) леммы VI.7.1, отвечает оператор $\mathfrak{F}_{\mathscr{M}}$ в $\mathscr{M}$, удовлетворяющий условию

$$\mathfrak{F}_{\mathscr{M}}\left(I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}_{\mathscr{M}}\right)\mathfrak{F}_{\mathscr{M}} \leqslant \mathfrak{F}_{\mathscr{M}}, \tag{VI.7.14}$$

и такой что

$$\langle L^j, \mathfrak{F}L^k\rangle_S = \langle L^j, \mathfrak{F}_{\mathscr{M}}L^k\rangle_S, \tag{VI.7.15}$$

и обратно.

Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (3), которое нам удобно записать в виде (VI.7.13). Пусть E — проектор на $\mathscr{M}$, тогда, по предположению, он коммутирует с $\mathfrak{D}$. Умножая (VI.7.13) справа и слева на E и полагая $\mathfrak{F}_{\mathscr{M}} = E\mathfrak{F}E$, получаем

$$0 \leqslant \left(I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}_{\mathscr{M}}\right)\mathfrak{F}_{\mathscr{M}}\left(I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}_{\mathscr{M}}\right) \leqslant I \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}_{\mathscr{M}}, \tag{VI.7.16}$$

что равносильно (VI.7.14). Условие (VI.7.15) при этом выполняется, так как $EL^j = L^j$; $j = 1,\ldots,n$.

Обратно, если $\mathfrak{F}_{\mathscr{M}}$ вещественный ограниченный симметричный оператор в $\mathscr{M}$, удовлетворяющий (VI.7.14) или (VI.7.16), то, продолжая его нулем на ортогональное дополнение к $\mathscr{M}$, получаем оператор $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий всем необходимым условиям.

Возвращаясь к случаю, в котором пространство $\mathscr{L}$, порожденное элементами $\{L^j\}$, является инвариантным подпространством $\mathfrak{D}$, мы видим, что можно считать, что оператор $\mathfrak{F}$ действует в $\mathscr{L}$. Поскольку матрица Грама базиса L^j; $j=1,\ldots,n$ в $\mathscr{L}$ совпадает с $\mathbf{J}$, то операторы $\mathfrak{F}$ и $I\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathfrak{D}$ представляются в этом базисе матрицами $\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}$, $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{J}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathbf{D})$. Поэтому условие (VI.7.14) в матричной форме принимает вид

$$\mathbf{F}\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{J}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathbf{D}\right)\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}\leqslant\mathbf{F},$$

откуда

$$\mathbf{F}^{-1}\geqslant\mathbf{J}^{-1}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1},$$

учитывая невырожденность матрицы $\mathbf{F}$. Тогда (VI.7.11) равносильно неравенству

$$\boldsymbol{\Sigma}\{\mathbf{M}\}\geqslant\min\Big\{\mathbf{Tr}\,\mathbf{G}\mathbf{F}^{-1}:\qquad\mathbf{F}^{-1}\text{вещественна, симметрична}$$
$$\text{и }\mathbf{F}^{-1}\geqslant\mathbf{J}^{-1}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\Big\}.$$

Но это совпадает с (VI.6.14), где $\tilde{\mathbf{J}}$ дается соотношением (VI.6.10). Таким образом, мы вновь приходим к (VI.6.17). В соответствии с леммой VI.6.1, оптимальная матрица $\mathbf{F}_*$ дается выражением

$$\mathbf{F}_*^{-1}=\mathbf{J}^{-1}+\frac{1}{2}\mathbf{G}^{-1}\mathrm{abs}(\mathrm{i}\mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}).$$

Используя (VI.7.12) и принимая во внимание соотношение

$$\begin{bmatrix}\mathfrak{F}_*L_1\\ \vdots\\ \mathfrak{F}_*L_n\end{bmatrix}=\mathbf{F}_*\mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_n\end{bmatrix},$$

которое связывает оператор $\mathfrak{F}_*$ с его матрицей, получаем

$$\begin{bmatrix}X_1^*\\ \vdots\\ X_n^*\end{bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_n\end{bmatrix},\qquad\mathbf{K}_*=\frac{1}{2}\mathbf{G}^{-1}\mathrm{abs}(\mathrm{i}\mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}).\tag{VI.7.17}$$

Если найдется измерение $\mathbf{M}_*$, отвечающее таким $\{X_j^*\}$ и $\mathbf{K}_*=[\kappa_{jk}]$ по формулам (VI.7.1) и (VI.7.4), , то оно является наилучшим локально несмещенным измерением параметра в точке θ. Такая ситуация имеет место в гауссовском случае, к рассмотрению которого мы переходим.

§ 8. Линейные измерения

В примерах из § 5, § 6 мы нашли наилучшие несмещенные измерения параметров $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ среднего значения гауссовского состояния $\{S_{\overline{P},\overline{Q}}\}$ в случае одной степени свободы. В однопараметрическом случае для этого использовалось неравенство (VI.2.9), основанное на симметричной логарифмической производной, а в двухпараметрическом — неравенство (VI.6.3), основанное на правой логарифмической производной. Общим в обоих случаях является то, что наблюдаемые, определяющие наиболее точное измерение, являются линейными функциями канонических наблюдаемых P и Q.

Теперь нашей задачей будет обобщение этих результатов на произвольные гауссовские состояния для любого конечного числа степеней свободы. Мы покажем, что в общем случае равномерно наилучшее несмещенное измерение параметров среднего значения гауссовского состояния находится в классе линейных измерений, который будет описан в этом разделе. Грубо говоря, линейные измерения соответствуют линейным функциям канонических наблюдаемых, однако с учетом возможной некоммутативности компонент. С этим существенным дополнением теорему, которую мы докажем в § 9, можно рассматривать как некоммутативный аналог известного результата математической статистики, утверждающего, что наилучшие несмещенные оценки параметров среднего значения гауссовского распределения являются линейными функциями от наблюдений.

Пусть (Z, Δ) — симплектическое пространство и $z \to V(z)$ — неприводимое представление канонических коммутационных соотношений в $\mathscr{H}$. Измерение $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}^n\theta)\}$ параметра $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \ldots, \theta_n]$ назовем *линейным*, если для любого состояния S в $\mathscr{H}$ с конечными вторыми моментами

(1) измерение $\mathbf{M}$ имеет конечные вторые моменты относительно состояния S, так что определены величины

$$b_{jk}\{\mathbf{M}\} = \int (\theta_j - \overline{\theta}_j)(\theta_k - \overline{\theta}_k)\mu_S(\mathrm{d}^n\theta),$$
$$\left(\overline{\theta}_j = \int \theta_j \mu_S(\mathrm{d}^n\theta)\right)$$

(2) элементы $X^j_{\mathbf{M}} = \int \theta_j M(\mathrm{d}^n\theta)$ пространства $\mathscr{L}^2_h(S)$ лежат в подпространстве канонических наблюдаемых, так что

$$X^j_{\mathbf{M}} = R(z_j); \qquad j = 1, \ldots, n,$$

для некоторых $z_j \in Z$.

(3) числа $\kappa_{kj} = b_{jk}\{\mathbf{M}\} - \alpha(z_j, z_k)$, где α корреляционная функция состояния S, не зависят от выбора S.

Набор элементов $\{R(z_j)\}$ и симметричная матрица чисел $[\kappa_{jk}]$ называются *параметрами* линейного измерения. Они связаны неравенством

$$[\kappa_{jk}] \geqslant \pm\frac{1}{2}\mathrm{i}[\Delta(z_j, z_k)], \tag{VI.8.1}$$

которое вытекает из (VI.7.5), если положить $X_j = R(z_j) - \overline{\theta}_j$.

Предложение VI.8.1. *Пусть* z_j; $j = 1, \ldots, n$, *произвольные элементы* Z, $[\kappa_{jk}]$ — *вещественная симметричная* $(n \times n)$*-матрица, удовлетворяющая соотношению* (VI.8.1). *Тогда существует линейное измерение с параметрами* $\{R(z_j)\}$, $[\kappa_{jk}]$.

Мы дадим доказательство при упрощающем предположении, что $\{z_j\}$ образуют базис в Z.

Доказательство. Помимо представления $z \to V(z)$ канонических коммутационных соотношений в пространстве $\mathscr{H}$, рассмотрим неприводимое представление $z \to V_0(z)$ в пространстве $\mathscr{H}_0$, отвечающее симплектическому пространству $(Z, -\Delta)$, так что

$$V_0(z)V_0(z') = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta(z,z')/2}V_0(z+z'). \qquad \text{(VI.8.2)}$$

Для любых состояний S, S_0 с конечными вторыми моментами канонические наблюдаемые удовлетворяют соотношению

$$[R_0(z), R_0(z')]_{S_0} = -[R(z), R(z')]_S$$

в соответствии с (V.4.10).

Рассмотрим семейство операторов $\widetilde{V}(z) = V(z) \otimes V_0(z)$, $z \in Z$, в тензорном произведении гильбертовых пространств $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_0$. В силу (V.2.1) и (VI.8.2) оно является коммутативным, так что $z \to \widetilde{V}(z)$ является унитарным представлением аддитивной группы Z, т. е. $\widetilde{V}(z)\widetilde{V}(z') = \widetilde{V}(z+z')$; z, $z' \in Z$. Применяя теорему Стоуна к однопараметрическим унитарным группам $\{V(tz_j);\ t \in \mathbb{R}\}$, получаем

$$\widetilde{V}(tz_j) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\widetilde{R}(z_j)}, \qquad \text{(VI.8.3)}$$

где

$$\widetilde{R}(z_j) = R(z_j) \otimes I + I \otimes R_0(z_j); \qquad j = 1, \ldots, n. \qquad \text{(VI.8.4)}$$

Так как операторы (VI.8.3) коммутируют при разных j, то согласно § II.6, операторы (VI.8.4) представляют совместимые наблюдаемые, так что

$$\widetilde{R}(z_j) = \int \theta_j E(\mathrm{d}^n\theta); \qquad j = 1, \ldots, n,$$

где $\mathbf{E} = \{E(\mathrm{d}^n\theta)\}$ ортогональное разложение единицы, представляющее совместное измерение наблюдаемых $\widetilde{R}(z_j)$; $j = 1, \ldots, n$.

Пусть S_0 состояние с конечными вторыми моментами в $\mathscr{H}_0$, удовлетворяющее условию

$$\begin{aligned} &E_{S_0}(R_0(z_j)) = 0; \\ &\langle R_0(z_j), R_0(z_k)\rangle_{S_0} = \kappa_{jk}; \qquad j, k = 1, \ldots, n, \end{aligned} \qquad \text{(VI.8.5)}$$

При нашем упрощающем предположении такое состояние всегда существует. В самом деле, если $\{z_j\}$ базис в Z, то мы можем однозначно определить в Z билинейную симметричную форму $\kappa(\cdot,\cdot)$, полагая $\kappa(z_j, z_k) = k_{kj}$. Из условия (VI.8.1) вытекает, что форма $\kappa(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию (V.4.14). Поэтому, согласно теореме V.5.1, $\varkappa(\cdot,\cdot)$ является корреляционной функцией гауссовского состояния. Беря в качестве S_0 гауссовское состояние с нулевым средним и корреляционной функцией $\varkappa(\cdot,\cdot)$, получаем (VI.8.5).

Рассмотрим тройку $(\mathscr{H}_0, S_0, \mathbf{E})$. В силу предложения II.5.2, найдется измерение $\mathbf{M} = \{M(\mathrm{d}^n\theta)\}$ в $\mathscr{H}$, такое что

$$\mu_S(B) = \mu^{\mathbf{M}}_{S\otimes S_0}(B); \qquad B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^n), \tag{VI.8.6}$$

где $\mu_S(\mathrm{d}^n\theta) = \operatorname{Tr} SM(\mathrm{d}^n\theta)$ — распределение вероятностей $\mathbf{M}$ относительно состояния S. Другими словами, $\mathbf{M}$ — это измерение, реализацией которого является описанная выше тройка. Покажем, что $\mathbf{M}$ является линейным измерением с параметрами $\{R(z_j)\}$ и $[\varkappa_{jk}]$.

Нам понадобится простое соотношение

$$\begin{aligned} &\langle X_1\otimes Y_1, X_2\otimes Y_2\rangle_{S\otimes S_0} = \langle X_1, X_2\rangle_S \langle Y_1, Y_2\rangle_{S_0} \\ &X_j \in \mathscr{L}^2(S), \qquad Y_j \in \mathscr{L}^2(S_0) \end{aligned} \tag{VI.8.7}$$

которое вытекает из аналогичного соотношения для ограниченных X_j, Y_j переходом к пределу в $\mathscr{L}^2$. Поскольку из (II.9.1) следует $E_{S\otimes S_0}(\widetilde{R}(z_j)) = \langle \widetilde{R}(z_j), I\rangle_{S\otimes S_0}$, то используя (VI.8.4) и (VI.8.7), получаем

$$E_{S\otimes S_0}(\widetilde{R}(z_j)) = E_S(R(z_j)) + E_{S_0}(R_0(z_j)) = \overline{\theta}_j,$$

так как $E_{S_0}(R_0(z_j)) = 0$ в силу (VI.8.5). Аналогично получаем для матрицы ковариаций измерения

$$b_{jk}\{\mathbf{M}\} = \langle R(z_j) - \overline{\theta}_j, R(z_k) - \overline{\theta}_k\rangle_S + \langle R_0(z_j), R_0(z_k)\rangle_{S_0}.$$

Первое слагаемое — это корреляционная функция $\alpha(z_j, z_k)$, поэтому разность $b_{jk}\{\mathbf{M}\} - \alpha(z_j, z_k)$, в силу второго соотношения в (VI.8.5), равна $\varkappa_{jk}$, что и требовалось.

Остается показать, что $Z^j_{\mathbf{M}} = R(z_j)$. В силу линейности соотношения (VI.8.6) по S получаем

$$\operatorname{Tr} TM(B) = \operatorname{Tr}(T\otimes S_0)E(B)$$

для любого ядерного оператора T. Полагая $T = YS$, где Y — ограниченный оператор, а S оператор плотности, находим

$$\langle M(B), Y\rangle_S = \langle E(B), Y\otimes I\rangle_{S\otimes S_0}.$$

Отсюда для любой простой функции $f(\cdot)$

$$\left\langle \int f(\theta)M(\mathrm{d}\theta), Y\right\rangle_S = \left\langle \int f(\theta)E(\mathrm{d}\theta), Y\otimes I\right\rangle_{S\otimes S_0}.$$

Переходя к пределу в $\mathscr{L}^2$ и используя (VI.8.7), получаем

$$\begin{aligned} \langle X^j_{\mathbf{M}}, Y\rangle_S = \left\langle \int \theta_j E(\mathrm{d}^n\theta), Y\otimes I\right\rangle_{S\otimes S_0} = \langle \widetilde{R}(z_j), Y\otimes I\rangle_{S\otimes S_0} = \\ = \langle R(z_j), Y\rangle_S + \langle R_0(z_j), I\rangle_{S_0} = \langle R(z_j), Y\rangle_S, \end{aligned}$$

так как S_0 имеет нулевое среднее. Поскольку это выполняется для всех ограниченных Y, то $Z_{\mathbf{M}}^j = R(z_j)$ в $\mathscr{L}_h^2(S)$, и предложение доказано.

Вернемся к случаю одной степени свободы. Очевидно, что измерение наблюдаемой (VI.6.13) является линейным измерением с параметрами

$$\begin{aligned} &X_{\mathbf{M}}^P = P, \qquad X_{\mathbf{M}}^Q = Q; \\ &\kappa_{QQ} \equiv D_{S_0}(Q_0) = \frac{1}{2}\sqrt{g_P/g_Q}, \qquad \kappa_{PP} \equiv D_{S_0}(P_0) = \frac{1}{2}\sqrt{g_Q/g_P}, \\ &\kappa_{PQ} = \kappa_{QP} = 0, \end{aligned}$$

как следует из реализации этого измерения и соотношений (VI.8.5). Условие локальной несмещенности

$$\begin{aligned} \langle L^P, X_{\mathbf{M}}^P\rangle = \langle L^Q, X_{\mathbf{M}}^Q\rangle = 1; \\ \langle L^P, X_{\mathbf{M}}^Q\rangle = \langle L^Q, X_{\mathbf{M}}^P\rangle = 0 \end{aligned}$$

легко получается, принимая во внимание выражение (VI.5.7) для симметричной логарифмической производной (скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ отвечает состоянию $S_{\overline{P},\overline{Q}}$).

Рассмотрим теперь простое измерение (VI.2.12) наблюдаемой Q. Очевидно $X_E^Q = \int \theta E(\mathrm{d}\theta) = Q$ и согласно (II.9.2), $\kappa_{QQ} = 0$. Поэтому $\mathbf{E}$ является линейным измерением с параметрами

$$X_{\mathbf{E}}^Q = Q, \qquad \kappa_{QQ} = 0.$$

В данном случае вектор Z_Q не образует базис в двумерном пространстве Z канонических наблюдаемых, поэтому конструкция предложения VI.8.1 непосредственно неприменима. Однако измерение Q можно рассматривать как «предельный случай» совместных измерений $\widetilde{Q}$ и $\widetilde{P}$ в реализации (VI.6.13), когда $\kappa_{QQ} \to 0$, $\kappa_{PP} \to \infty$. Тогда $g_P/g_Q \to 0$, т.е. в пределе мы пренебрегаем вкладом измерения P в общую меру точности. Предельного состояния с $D_{S_0}(Q_0) = 0$ не существует, и это делает необходимой модификацию в доказательстве предложения VI.8.1.

В § III.6 была дана кинематическая интерпретация совместного измерения (VI.6.13) в случае, когда Q является координатой, а P — импульсом квантовой частицы. Здесь для нас представляет интерес другой случай, когда P, Q возникают из представления квантового электромагнитного поля в виде суммы гармонических компонент

$$E(t) \sim q\cos\omega t + p\omega^{-1}\sin\omega t,$$

соответствующих разным частотам ω. Дадим описание мысленного эксперимента, который отвечает совместному измерению (VI.6.13). Рассмотрим плоскую монохроматическую волну $\mathbf{E}(t)$, распространяющуюся в направлении z, как показано на рис. 2. Разлагая ее по двум взаимно ортогональным осям x, y, получим

$$\begin{aligned} E_x(t) \sim q_x\cos\omega t + p_x\omega^{-1}\sin\omega t, \\ E_y(t) \sim q_y\cos\omega t + p_y\omega^{-1}\sin\omega t. \end{aligned}$$

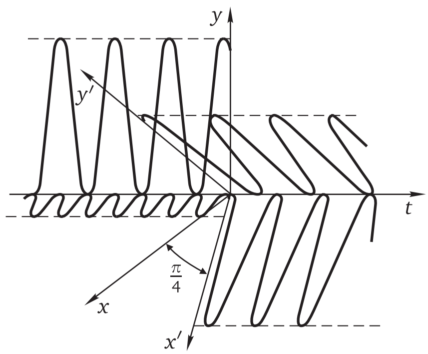

Рис. 2.

Пусть $E(t) = E_x(t)$, и предположим, что $E_y(t)$ описывается вакуумным состоянием S_0; физически это означает, что волна поляризована в направлении x, а колебания поля вдоль оси y обусловлены лишь неустранимыми квантовыми флуктуациями. Вводя в плоскости x, y новые оси x', y', имеем

$$E_{x'}(t) \sim (q_x + q_y)\cos\omega t + (p_x + p_y)\omega^{-1}\sin\omega t,$$
$$E_{y'}(t) \sim (q_x - q_y)\cos\omega t + (p_x - p_y)\omega^{-1}\sin\omega t.$$

Ортогональные компоненты $E_{x'}(t)$ и $E_{y'}(t)$ могут быть разделены с помощью двоякопреломляющего фильтра; совместное измерение коммутирующих наблюдаемых

$$\tilde{p} = p_x + p_y, \qquad \tilde{q} = q_x - q_y.$$

и дает нужную процедуру.

Рассмотрим общее линейное измерение вида (VI.8.4). Производя симплектическое преобразование, можно свести семейство операторов (VI.8.4) к набору пар операторов $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ типа (VI.6.13); поэтому можно считать, что всякое линейное измерение, например, в оптическом диапазоне в принципе может быть реализовано устройством, состоящим из конечного числа линейных оптических фильтров (см. Комментарии).

§ 9. Измерение параметров среднего значения гауссовского состояния

Рассмотрим семейство гауссовских состояний $\{S_{\boldsymbol{\theta}};\ \boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \ldots, \theta_n] \in \mathbb{R}^n\}$ с корреляционной функцией $\alpha(\cdot, \cdot)$ и средним значением

$$m(z) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j m_j(z), \tag{VI.9.1}$$

где $m_j(\cdot)$ — известные линейные функции на симплектическом пространстве (Z, Δ), а θ_j — неизвестные вещественные параметры, которые подлежат оцениванию по наблюдениям над рассматриваемой квантовой системой. Например, $S_{\boldsymbol{\theta}}$ может быть состоянием поля излучения, представляющим смесь фонового излучения и сигнала, в котором неизвестными являются амплитуды θ_j аддитивных компонент сигнала $m_j(\cdot)$. Мы будем предполагать, что функции $m_j(\cdot)$ линейно независимы.

Теорема VI.9.1. *Равномерно наилучшее локально несмещенное измерение параметров $\boldsymbol{\theta}$ среднего значения гауссовского состояния может быть найдено в классе линейных измерений.*

Доказательство. В силу предложения V.6.3 семейство $\{S_{\boldsymbol{\theta}}\}$ удовлетворяет условиям (1) и (2) из § 5, причем симметричные логарифмические производные даются формулой

$$L^j = R(m_j) - m(m_j); \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{VI.9.2}$$

где $m_j \in Z$ определяются из уравнений

$$m_j(z) = \alpha(m_j, z), \qquad z \in Z.$$

Фиксируем значения $\boldsymbol{\theta}$ и рассмотрим границу (VI.7.11). В силу характеристического свойства гауссовских состояний, выражаемого теоремой V.6.2, пространство $\mathfrak{R}_1 \subset \mathscr{L}^2(S_{\boldsymbol{\theta}})$ канонических наблюдаемых $R(z)-m(z)$, $z \in Z$, инвариантно относительно коммутационного оператора $\mathfrak{D}$ состояния $S_{\boldsymbol{\theta}}$. Поскольку $\mathfrak{R}_1$, очевидно, содержит векторы (VI.9.2), применимо предложение VI.7.2, и $\mathfrak{F}$ в уравнении (VI.7.11) может рассматриваться как оператор в $\mathfrak{R}_1$. Обозначим через $\mathscr{F}$ оператор, отвечающий $\mathfrak{F}$ при изометрии (V.6.2), так что

$$\mathfrak{F}(R(z) - m(z)) = R(\mathscr{F}z) - m(\mathscr{F}z).$$

Тогда (VI.7.11) может быть переписано как

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\} \geqslant \inf \mathbf{Tr}\, \mathbf{GF}^{-1} \equiv \boldsymbol{\Sigma}_*, \tag{VI.9.3}$$

где

$$\mathbf{F} = [\alpha(m_j, \mathscr{F}m_k)], \tag{VI.9.4}$$

и нижняя грань берется по всем $\mathbf{F}$, отвечающим симметричным операторам $\mathscr{F}$ в Z, удовлетворяющим условию

$$0 \leqslant \left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathscr{D}\right) \mathscr{F} \left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathscr{D}\right) \leqslant \left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathscr{D}\right) \tag{VI.9.5}$$

в комплексификации пространства (Z, α). Здесь $\mathscr{D}$ — комплексное расширение оператора, определенного соотношением (V.2.7), где α — корреляционная функция состояния $S_{\boldsymbol{\theta}}$.

Покажем, что нижняя грань в (VI.9.3) достигается. Множество операторов $\mathscr{F}$ в конечномерном пространстве Z, удовлетворяющих условию (VI.9.5), является, очевидно, замкнутым. Оно ограничено, так как из (VI.7.10) следует $0 \leqslant \mathscr{F} \leqslant I$. Таким образом, это множество компактно. Функция $\mathscr{F} \to \mathbf{Tr}\, \mathbf{GF}^{-1}$ является суперпозицией непрерывной функции $\mathscr{F} \to \mathbf{F}$, задаваемой соотношением (VI.9.4) и функции $\mathbf{F} \to \mathbf{Tr}\, \mathbf{GF}^{-1}$, которая полунепрерывна снизу, будучи верхней гранью семейства непрерывных функций $\mathbf{F} \to \mathbf{Tr}\, \mathbf{G}(\mathbf{F} + \epsilon\mathbf{I})^{-1}$, $\epsilon > 0$. По известной теореме анализа, функция $\mathscr{F} \to \mathbf{Tr}\, \mathbf{GF}^{-1}$, полунепрерывная снизу, достигает минимума на компактном множестве.

Пусть $\mathscr{F}_*$ — оператор в Z, на котором достигается минимум в (VI.9.3), и $\mathbf{F}_*$ — соответствующая ему матрица. Тогда оптимальные векторы X_j^*, согласно (VI.7.12) и (VI.9.2), даются формулами

$$X_j^* = R(z_j^*) - m(z_j^*); \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{VI.9.6}$$

где

$$\begin{bmatrix} z_1^* \\ \vdots \\ z_n^* \end{bmatrix} = \mathbf{F}_*^{-1} \begin{bmatrix} \mathscr{F}_* m_1 \\ \vdots \\ \mathscr{F}_* m_n \end{bmatrix}.$$

Отметим, что система $\{z_j^*\}$ является по построению биортогональной к векторам $\{m_j\}$, представляющим компоненты среднего значения в (Z, α):

$$\alpha(m_k, z_j^*) \equiv m_k(z_j^*) = \delta_{jk}. \tag{VI.9.7}$$

Элементы $\{X_j^*\}$ и матрица

$$\mathbf{K}_* \equiv [\kappa_{jk}^*] = \mathbf{F}_*^{-1}[\alpha(m_j, \mathscr{F}_*(I - \mathscr{F}_*)m_k)]\mathbf{F}_*^{-1}$$

по построению удовлетворяют условию (VI.7.5). Принимая во внимание, что в силу (VI.9.6) и (V.4.10)

$$\begin{aligned} [X_j^*, X_k^*]_S = [R(z_j^*) - m(z_j^*), R(z_k^*) - m(z_k^*)]_S = \\ = \Delta(z_j^*, z_k^*), \end{aligned}$$

мы можем переписать (VI.7.5) в виде

$$[\kappa_{jk}^*] \geqslant +\frac{1}{2}\mathrm{i}[\Delta(z_j^*, z_k^*)].$$

Согласно предложению VI.8.1, существует линейное измерение $\mathbf{M}_* = \{M_*(\mathrm{d}^n\theta)\}$ с параметрами $\{R(z_j^*)\}$ и $[\kappa_{jk}^*]$. Оно является локально несмещенным, так как согласно (VI.9.7)

$$\begin{aligned} \langle L^j, X_{\mathbf{M}_*}^k \rangle_S = \langle R(m_j) - m(m_j), R(z_k^*) \rangle_S \\ = \alpha(m_j, z_k^*) = \delta_{jk}, \end{aligned}$$

и его полное среднеквадратичное отклонение достигает минимального значения $\mathbf{\Sigma}_*$, допускаемого соотношением (VI.9.3). Поскольку параметры измерения $\mathbf{M}_*$ не зависят от фиксированных вначале значений $\boldsymbol{\theta}$, оно является равномерно наилучшим среди всех локально несмещенных измерений. Теорема доказана.

Теорема эта устанавливает принципиальный факт линейности наилучшего измерения, однако не дает явного выражения для оператора $\mathscr{F}_*$, через который определяются параметры наилучшего измерения. Явное решение этой задачи было получено в некоторых частных случаях. Рассмотрим подпространство $Z_{\mathscr{L}} \subset Z$, порождаемое векторами m_j; $j = 1, \ldots, n$ (оно соответствует подпространству $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}_h^2(S)$ при изометрии $z \leftrightarrow R(z) - m(z)$, и предположим, что оно является инвариантным подпространством оператора $\mathscr{D}$. В частности, это очевидным образом выполняется, если $n = \dim Z$, так что $Z_{\mathscr{L}} = Z$. Тогда $\mathscr{L}$ будет инвариантным подпространством коммутационного оператора $\mathfrak{D}$ и формулы (VI.7.17) дают

$$\begin{bmatrix} R(z_1^*) \\ \vdots \\ R(z_n^*) \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} R(m_1) \\ \vdots \\ R(m_n) \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{K}_* = \frac{1}{2}\mathbf{G}^{-1}\mathrm{abs}(\mathrm{i}\mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}),$$

где

$$\mathbf{J} \equiv [\langle L^j, L^k \rangle_S] = [\alpha(m_j, m_k)],$$
$$\mathbf{D} \equiv [[L^j, L^k]_S] = [\Delta(m_j, m_k)].$$

Вспоминая доказательство предложения VI.8.1, можно сказать, что наилучшее измерение $\mathbf{M}_*$ реализуется коммутирующим семейством наблюдаемых

$$\widetilde{R}_j = R(z_j^*) \otimes I_0 + I \otimes R_j^0,$$

где R_j^0 — вспомогательные канонические наблюдаемые в пространстве $\mathscr{H}_0$ с состоянием S_0 такие, что

$$E_{S_0}(R_j^0) = 0, \qquad [\langle R_j^0, R_k^0 \rangle_{S_0}] = \mathbf{K}_*.$$

Если положить формально $\Delta \equiv 0$, мы получим решение соответствующей классической задачи, которое дается просто измерением совместимых наблюдаемых $R(z_j^*)$; $j = 1, \ldots, n$. Это решение не зависит от весовой матрицы $\mathbf{G}$. В общем некоммутативном случае $Z_{\mathscr{L}}$ может не быть инвариантным подпространством оптимального оператора $\mathscr{F}_*$, и $\{z_j^*\}$, $\mathbf{K}_*$ могут зависеть от весовой матрицы $\mathbf{G}$, входящей в определение среднеквадратичного отклонения.

Теорема VI.9.1 позволяет также установить любопытное свойство гауссовских состояний, позволяющее охарактеризовать их как «наименее информативные» или «наименее выгодные» с точки зрения экспериментатора. Рассмотрим другое семейство состояний $\{\widetilde{S}_{\boldsymbol{\theta}}\}$, которое имеет те же первые и вторые моменты, что и гауссовское семейство $\{S_{\boldsymbol{\theta}}\}$, а в остальном совершенно произвольно. Обозначим $\alpha(\cdot,\cdot)$ их общую корреляционную функцию. Пусть $\mathbf{M} = \{M(d^n\theta)\}$ локально несмещенное линейное измерение с параметрами $\{R(z_j)\}$ и $[\kappa_{jk}]$. Тогда среднеквадратичное отклонение результатов измерения, вычисленное относительно состояния $\widetilde{S}_{\boldsymbol{\theta}}$, равно

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\} = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}[\kappa_{jk} + \alpha(z_j, z_k)],$$

в силу (VI.7.6) и пунктов (1) и (2) определения линейного измерения.

Поскольку κ_{jk} не зависят от состояния в силу пункта (3) того же определения, а $\alpha(\cdot,\cdot)$ по предположению совпадает с корреляционной функцией гауссовского состояния S_θ, то $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\}$, где $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\}$ — среднеквадратичное отклонение, вычисленное относительно S_θ. Так как минимум величины

$\boldsymbol{\Sigma_\theta}\{\mathbf{M}\}$ по линейным измерениям совпадает с минимумом по всем измерениям, то он равен величине $\boldsymbol{\Sigma}_*$ из (VI.9.3), причем это же верно для $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\}$. Поэтому

$$\min_{\mathbf{M}} \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\} \leqslant \boldsymbol{\Sigma}_*,$$

где минимум берется по всем локально несмещенным измерениям и

$$\max_{\{S_\theta\}} \min_{\mathbf{M}} \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{M}\} = \boldsymbol{\Sigma}_*,$$

а максимум достигается для гауссовского семейства $\{S_\theta\}$.

Таким образом, при данной априорной информации о первых и вторых моментах, гауссовские состояния являются наихудшими в смысле среднеквадратичного отклонения измерения параметров среднего значения. Выбор наилучшего линейного измерения соответствует стратегии экспериментатора, который стремится минимизировать среднеквадратичное отклонение, исходя из осторожного предположения, что фактическое состояние может оказаться для него наихудшим в данном классе. С этой точки зрения предположение о гауссовости в задаче оценивания среднего при отсутствии априорных данных о моментах выше второго порядка представляется оправданным.

Комментарии

§ 1. Краткий обзор основных понятий и проблем математической теории передачи сообщений Шеннона дается в докладе Колмогорова [22]. На необходимость учета квантовой природы носителя информации при изучение оптических каналов указывал еще изобретатель голографии Габор [78]. Математические модели квантовых каналов связи обсуждались Холево [48], Ингарденом [97], Дэвисом [73]. Информационные характеристики рассматривались в работах Холево [50] и Линдблада [108]. Общее понятие квантового канала связи и его пропускных способностей обсуждалось в [153], см. также [152], §3.2.

§ 2, § 3. По поводу классического неравенства Рао—Крамера см. Крамер [23]. Обстоятельное геометрическое исследование неравенства Рао—Крамера содержится в книге Ченцова [53]. Предложение VI.2.1 является строгой версией неравенства Хелстрома [46, 87]. Результаты раздела частично были получены в работе автора [94].

В квантовом случае задачи оценивания с многомерным параметром кардинально отличаются от задач с одномерным параметром. Это происходит из-за некоммутативности алгебры квантовых наблюдаемых (случайных величин), отражающей существование несовместимых величин, которые в принципе нельзя измерить точно в одном эксперименте. Это устанавливает новые статистические ограничения для компонент многомерных оценок, отсутствующие в классическом случае, и приводит к существенной неединственности логарифмических производных и соответствующих квантовых неравенств Рао-Крамера.

Хорошо известно, что в классической статистике фишеровская информация порождает риманову метрику на множестве распределений вероятностей, которая является существенно единственным монотонным инвариантом в категории статистических (марковских) морфизмов [154], [53]. У нее есть естественные квантовые аналоги, однако единственность уже не имеет места. Выражение

$$d(S_1, S_2) = \sqrt{2(1 - \|\sqrt{S_1}\sqrt{S_2}\|_1)}$$

определяет метрику на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ операторов плотности. В более общем контексте алгебр фон Неймана, эта метрика подробно изучалась Араки, Ульманом и другими и была названа *метрикой Бюреса*. Если $\{S_\theta\}$ — семейство, удовлетворяющее условиям 1) и 2) из § 2, то при $\Delta\theta \to 0$ выполняется

$$d(S_\theta, S_{\theta+\Delta\theta})^2 \approx \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{k} \langle L_\theta^i, L_\theta^j\rangle_\theta \Delta\theta_i \Delta\theta_j. \tag{$*$}$$

Таким образом, метрика Бюреса локально эквивалентна римановой метрике, определенной квантовым аналогом фишеровской матрицы информации. Морозова и Ченцов [154] описали метрики в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, где $\dim\mathcal{H} < \infty$, которые монотонно инвариантны в категории марковских морфизмов. В этом классе риманова метрика, определенная в (*) минимальна, в то время как метрика, связанная с правой или левой логарифмической производной, максимальна. Примером метрики, отличной от них обеих, является метрика Боголюбова-Кубо-Мори, играющая важную роль в квантовой статистической механике. Исследование этого вопроса было продолжено в [188], и окончательное решение было получено в [183], где было дано исчерпывающее описание монотонных инвариантных римановых метрик на множестве операторов плотности. Значение этого результата для квантовой теории оценивания еще нуждается в осмыслении. В этой связи упомянем результат из [174], показывающий, что метрика Боголюбова-Кубо-Мори возникает в теории больших уклонений в границе для суперэффективных оценок. В работах [176], [187] получен некоммутативный аналог теоремы Санова, дающий асимптотику ошибки оптимального различения двух квантовых состояний в терминах относительной энтропии.

§ 4. Постановка задачи об оценивании силы, действующей на пробный объект, мотивирована работой Брагинского и Воронцова [9], в которой обсуждался вопрос об обнаружении силы и была получена граница типа (VI.4.11) как условие обнаружения.

§ 5, § 6. Неравенство (VI.5.4) является строгой версией результата Хелстрома [46, 86]. Неравенство (VI.6.3) получено в работе Юна и Лэкса [148]. Оптимальность линейного измерения в гауссовском семействе установлена в работах Холево [51], Юна и Лэкса [148].

Неравенство леммы VI.6.1, принадлежащее Белавкину и Гришанину, приводится в работе Стратоновича [134].

§ 7—§ 9. Материал взят из работ Холево [52, 90–93]. Лемма VI.7.1 доказана в работах [91], посвященных байесовской задаче. Линейные измерения были введены в работе [48].

Всякая квантово-оптическая система, выполняющая преобразование типа Боголюбова, эквивалентна схеме, состоящей из линейных элементов, таких как многополюсные интерферометры и некоторого числа нелинейных «сжимающих», таких как параметрический частотный конвертер [160]. К тому же, произвольное гауссовское состояние может быть представлено как отклик подобной системы на вакуумные и равновесные тепловые состояния, тогда как линейное измерение сводится к набору гомодинных или гетеродинных измерений на выходе такой системы. В квантовой оптике приближенное совместное измерение квадратур q, p реализуется оптическим гетеродинированием. В этом процессе измеряемая мода складывается с интенсивным опорным излучением, имеющим частоту, близкую к частоте измеряемой моды. В пределе бесконечной интенсивности локального осциллятора, измерение интенсивности двух полей на выходе светоделителя с коэффициентом пропускания, близким к единице, оказывается эквивалентным совместному измерению $\tilde{q}, \tilde{p}$ [198].

В частности, вычисляя величину $\tilde{\phi} = \arctan(\tilde{p}/\tilde{q})$, можно получить оценку для фазы. Это статистически эквивалентно ковариантному измерению фазы в смысле § 8, которое, конечно, неоптимально, поскольку содержит избыточную информацию об амплитуде. (Более подробно о гетеродинном измерении фазы см. §VII.3.7 в книге [161].) В работе [197] было рассмотрено адаптивное гомодинное измерение фазы, использующее обратную связь и электрооптический модулятор для управления фазой локального осциллятора, при котором измеряется фазовая квадратура $R(\phi)$. Для сравнения различных измерений фазы в работе [197] использовался критерий $V = \min_\psi \Delta_\psi$, где Δ_ψ — мера неопределенности (IV.5.1), а минимум берется по всем чистым состояниям со средним числов квантов, не превышающим N. При $N >> 1$ каноническое (т. е. оптимальное) распределение фазы дает $V \approx \pi^2/N^2$, тогда как для гетеродинного измерения лишь $V \approx 1/4N$. Специальный подбор обратной связи позволяет достичь $V \approx \ln N/4N^2$, что приближается к качеству канонического измерения, однако вопрос практической реализации остается открытым.

Исследование случаев, для которых оптимальный оператор $\mathscr{F}_*$ находится в явном виде, можно найти в работах [52, 92]. Применения к конкретным пространственно-временным моделям сигналов рассматриваются, например, в книге Хелстрома [46].

Известно, что гауссовское состояние имеет максимальную квантовую энтропию $-\operatorname{Tr} S \ln S$ при фиксированных первых и вторых моментах (ср. например Люиселл [25]). Это служит другой иллюстрацией того факта, что гауссовские состояния являются в данной задаче измерения «наименее информативными».

Глава VII

ДОПОЛНЕНИЕ. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ И СКРЫТЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Истину можно высказать и облечь в слова, лишь когда она односторонняя. Односторонне все, что мыслится мыслью и говорится словом, все это односторонне, половинчато, всему не хватает цельности, округлости, единства... Сам же мир, бытие вокруг нас и внутри нас никогда не бывает односторонним.
Г. Гессе «Сиддхартха»

§ 1. Введение

К концу XVIII столетия сложилось представление о материальном мире как о гигантском механизме, движение которого подчиняется жестким динамическим закономерностям и в принципе может быть определено и предсказано с произвольной степенью подробности и точности. Соответствующая система взглядов, получившая название «детерминизм», была для своего времени прогрессивной и основывалась на триумфальном успехе ньютоновской механики, позволившей дать рациональное объяснение множеству непонятных ранее физических фактов.

Развитие естествознания, однако, сопровождалось возрастанием роли статистических представлений. Изучение случайных явлений началось в XVII в. с простейших моделей неопределенности, предоставляемых азартными играми. Введенное с помощью таких моделей понятие вероятности было с большим успехом использовано во второй половине XIX в. творцами статистической механики. Законы учения о теплоте (термодинамика) получили объяснение через статистические закономерности, проявляющиеся в механических моделях вещества как системы из огромного числа одинаковых взаимодействующих частиц-молекул. Тем не менее к началу XX в. детерминизм продолжал сохранять определяющее положение в фундаменте естествознания. Хорошо известно высказывание Эйнштейна о том, что «бог не играет в кости». Смысл этого высказывания сводится к тому, что природа изначально детерминистична, а наблюдаемая статистичность носит производный характер и лишь отражает неполноту нашего знания об истинном состоянии природы.

Создание основ статистической физики явилось торжеством восходящей к глубокой древности идеи атомизма. Однако конкретное изучение элементарных составляющих вещества привело к парадоксальному выводу — эти составляющие не могут рассматриваться как частицы в собственном, классиче-

[0]Это Дополнение является самодостаточным и может читаться независимо от основного содержания книги.

ском смысле этого слова. В зависимости от условий наблюдения они могут проявлять и корпускулярные, и волновые свойства. Например, электрон, взаимодействуя с пересыщенным паром в камере Вильсона, оставляет след, который наглядно интерпретируется как траектория материальной частицы. С другой стороны, пучок электронов, проходя через твердое тело, рассеивается на кристаллической решетке с образованием характерной интерференционной картины, подобной той, которая наблюдается при прохождении света через систему достаточно мелких отверстий.

Попытки теоретического объяснения столь необычного, «двойственного» поведения микрообъектов привели шестьдесят лет назад к созданию квантовой механики — наиболее революционной научной теории нашего времени. Исторически «матричная механика» Гейзенберга и «волновая механика» Шредингера, давшие жизнь современной квантовой теории, возникли как результат ряда удачных догадок в ходе подбора математических объектов, способных отразить своеобразное сочетание дискретности и непрерывности в микропроцессах. Вскоре затем Борн предложил статистическую интерпретацию этой теории, которая прекрасно сочеталась со свойствами математического аппарата квантовой механики, однако исключала ее детерминистическое истолкование. Глубокий физико-философский анализ содержания квантовой механики, предпринятый Бором и Гейзенбергом, привел к заключению, что она представляет собой принципиально новый тип теоретической модели реальности, отражающий в самой своей структуре свойство целостности моделируемой системы и диалектическое отношение дополнительности между различными аспектами описания.

Понятие дополнительности, введенное Бором, «употребляют, чтобы характеризовать связь между данными, которые получены при разных условиях опыта и могут быть наглядно истолкованы лишь на основании взаимно исключающих друг друга представлений» [8], с. 529. Иногда, желая наглядно пояснить это понятие, проводят аналогию со сделанными с различных сторон фотографиями одного и того же объемного предмета. Продолжая эту аналогию, можно сказать, что квантовая теория дает «голографическое» отображение реальностей микромира. Однако эта аналогия не является полной в одном очень важном отношении: ничто не мешает сфотографировать предмет одновременно с нескольких точек зрения, сопоставить и даже, если угодно, совместить полученные отображения (вспомните портреты Пикассо, на которых одно и то же лицо изображается и в фас, и в профиль). «Элементарность» же, неделимость микрообъектов исключают возможность совмещения различных измерительных процедур, каждая из которых предполагает свою сложную специфическую организацию пространственно-временной среды. Например, бессмысленно говорить о траектории электрона в опыте с дифракцией на кристаллической решетке, поскольку любая попытка проследить эту траекторию изменяет условия опыта так, что интерференция принципиально исключается.

При таком взгляде на вещи статистичность квантовой механики оказывается тесно связанной с дополнительностью. Величинам, которые измеряются во взаимно дополнительных условиях, «нельзя одновременно придать определенные значения. Таким образом, статистический характер формального аппарата выступает как естественное обобщение описания классической физики» ([8], с. 508). Итак, статистичность микропроцессов приобретает в квантовой механике изначальный характер. Не только «бог не играет в кости», но в природе имеется фундаментальный физический источник неопределенности, который невозможно подменить никаким классическим механизмом случайности. Конечно, результаты каждого отдельного эксперимента представляют собой обычную случайную величину, но речь идет о невозможности охватить классическим описанием всю совокупность экспериментов, относящихся к данной квантовой системе. Классический способ описания, заключающийся, по существу, в простом перечислении свойств, оказывается адекватным по отношению к большинству объектов окружающего нас макроскопического мира лишь постольку, поскольку квантовые неопределенности в масштабах этого мира имеют пренебрежимо малую величину.

В развернувшейся в 1930-е годы драматической дискуссии главным оппонентом Бора и других создателей и сторонников «ортодоксальной» интерпретации квантовой механики выступил Эйнштейн, взгляды которого разделялись де Бройлем, Шредингером и некоторыми другими учеными, принимавшими активное участие в становлении квантовой теории. Эйнштейн выдвинул тезис о неполноте квантовой механики, согласно которому ее статистичность обусловлена вариациями пока еще неучтенных «скрытых параметров» и в будущей полной теории должна уступить место детерминистическому описанию.

С этой точки зрения каждый электрон обладает индивидуальной траекторией независимо от того, наблюдается она или нет. Траектория представляется случайной постольку, поскольку мы не знаем более глубоких причин, обусловливающих движение электрона. Установив эти скрытые причины, мы восстановим детерминизм. Такая точка зрения может показаться привлекательной своей близостью к позициям «наивного реализма». Однако до сих пор все попытки найти альтернативную, «более глубокую» интерпретацию квантовой механики оказывались бесплодными; более того, каждая такая попытка в конечном счете приводила к укреплению позиций ортодоксальной интерпретации, которой придерживается в настоящее время большинство физиков.

Возникшая на фоне этой дискуссии проблема скрытых параметров сводится, таким образом, к вопросу: можно ли в принципе свести математическую модель квантовой механики к той или иной форме классического вероятностного описания? Надо сказать, что сам аналитический способ задания неопределенности в квантовой механике настолько отличен от языка теории вероятностей, что возникает мысль о математическом доказательстве невозможности введения скрытых параметров, которое позволило бы раз и навсегда покончить со всеми спорами.

Состояния и наблюдаемые величины описываются в квантовой механике матрицами (операторами) $\hat{S}, \hat{X}$; в теории вероятностей (статистические) состояния описываются распределениями вероятностей $S(d\omega)$, а наблюдаемые величины — функциями $X(\omega)$ на фазовом пространстве $\Omega = \{\omega\}$ классической системы. Речь идет о возможности или невозможности установления соответствия $S \to \hat{S}, X \to \hat{X}$ между классическими и квантовыми состояниями и наблюдаемыми, которое сохраняло бы статистические предсказания квантовой механики и, конечно, удовлетворяло некоторым важным, физически мотивированным условиям.

Первая попытка доказательства невозможности установления такого соответствия была предпринята в знаменитой монографии фон Неймана «Математические основы квантовой механики», вышедшей в свет в 1932 г. В течение долгого времени «теорема фон Неймана» рассматривалась как решающий аргумент против скрытых параметров. Однако постепенно было осознано, что эти рассуждения не решают проблемы, поскольку основываются на формальном предположении, лишенном достаточной физической мотивации. Предпринятые затем исследования значительно прояснили существо вопроса и даже сделали возможной экспериментальную проверку гипотезы о скрытых параметрах. Итоги этих исследований, затрагивающих основы представлений о природе физической реальности, можно рассматривать как серьезный аргумент в пользу точки зрения, согласно которой физически содержательное введение скрытых параметров в квантовую теорию принципиально невозможно.

В настоящем очерке мы попытаемся дать последовательное изложение вопроса о скрытых параметрах, каким он видится с сегодняшних позиций.

В первой части мы проанализируем общие свойства описания любого статистического эксперимента и выделим математические структуры, возникающие из такого описания. Ими оказываются выпуклость в пространстве состояний, обусловленная возможностью смешивания статистических ансамблей, и частичное упорядочение среди наблюдаемых, отражающее разную степень информативности соответствующих измерений. Сохранение этих структур в силу самой их универсальности является минимальным необходимым требованием для любой теории со скрытыми параметрами. Общее рассмотрение статистического эксперимента позволит нам также выразить в наиболее чистой форме математическую сущность понятия дополнительности.

Вторая часть начинается с обсуждения наиболее важных теорем о невозможности введения скрытых параметров в квантовую механику. В основе ряда таких попыток, начиная с теоремы фон Неймана, лежало согласующееся с ортодоксальной физико-философской аргументацией убеждение, что именно дополнительность служит основной причиной невозможности классического описания в квантовой механике. Из нашего обсуждения следует важный вывод, что дополнительность исключает классическое описание только при добавочном требовании взаимной однозначности такого описания. «Техническое» условие взаимной однозначности соответствий $S \to \hat{S}, X \to \hat{X}$ присутствует во всех усовершенствованиях доказательства фон Неймана, однако его решающее физическое значение было понято далеко не сразу, что послужило в свое время источником серьезной путаницы. Таким образом, настоящее доказательство невозможности не может опираться только на дополнительность и требует привлечения других свойств квантовомеханического описания. Таким свойством оказывается квантовая неразделимость, которая обсуждается в заключительном параграфе второй части. Аргументы, основанные на знаменитом неравенстве Белла, доказывают невозможность классического описания составной квантовой системы, сохраняющего подразделение системы на части и, следовательно, удовлетворяющего эйнштейновскому постулату локальности.

Изложение вопроса о скрытых параметрах имеет свои специфические особенности. Речь идет не столько о конкретной физической теории, сколько о «теории теорий» (метатеории). Это ограничивает возможность использования примеров, наглядных представлений и аналогий. Встав на этот путь, мы рисковали бы лишь сгустить тот туман, который, к сожалению, еще окружает проблему скрытых параметров. Поэтому читатель, который желает получить ясное представление об этом интригующем вопросе, лежащем на границе физики, математики и философии, должен вооружиться логикой и определенным терпением; предполагается также знакомство с основными понятиями теории вероятностей, линейной алгебры и квантовой механики.

§ 2. Структура статистических теорий

2.1. Аксиоматические подходы в квантовой механике. История теоремы фон Неймана хорошо показывает, что вопрос о скрытых параметрах не сводится к чисто математической задаче. Поскольку речь идет о соотношении между структурами квантовой механики и классической теории вероятностей и о возможности сведения в каком-то смысле первой ко второй, то решающую роль приобретает выбор основных свойств, определяющих эти структуры. Поэтому математическому рассмотрению проблемы скрытых параметров должен предшествовать содержательный анализ основных положений и неформальный выбор определенных аксиоматических систем обеих теорий.

Здесь уместно вспомнить, что вопрос о «математическом изложении аксиом физики» был поставлен Гильбертом в его известном докладе на II Математическом конгрессе в 1900 г. Конкретно речь тогда шла «об аксиоматическом построении... тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика». Знаменательно, что в один ряд с логическим обоснованием теории вероятностей Гильберт поставил «развитие метода средних значений в математической физике, в частности в кинетической теории газов», затронув, таким образом, одни из наиболее глубоких проблем математической физики, исследование которых привело впоследствии к появлению математических методов статистической механики и теории динамических систем.

Поиски аксиоматического базиса теории вероятностей, как хорошо известно, завершились в 1933 г. построением системы аксиом А.Н. Колмогорова, дающей набор формально простых и интуитивно ясных положений, на которых зиждется вся математическая структура теории. Квантовая механика не могла быть упомянута Гильбертом просто потому, что в то время не существовало и самого физического понятия кванта — знаменитый доклад Планка состоялся четыре месяца спустя в том же 1900 г. Основополагающим трудом в области математизации квантовой механики стала упоминавшаяся уже монография фон Неймана, который занялся этими вопросами в 1926-1927 гг., будучи сотрудником Гильберта [177]. Работы фон Неймана положили начало исследованиям по аксиоматике квантовой теории. В настоящее время здесь существует три основных течения.

Алгебраический подход [41, 56] берет за основу «алгебру наблюдаемых» физической системы. Этот подход оказался наиболее плодотворным в математическом отношении: вместе с теорией представлений групп он послужил истоком современной глубоко развитой структурной теории топологических алгебр. Физические приложения этого подхода относятся главным образом к структурным вопросам теории систем с бесконечным числом степеней свободы — квантовых полей и сред.

Исходным элементом квантово-логического подхода [99, 139, 159, 190] является «решетка высказываний», т. е. двузначных наблюдаемых, принимающих значения 0 и 1. Венцом усилий в этом направлении явилось создание некоторой системы аксиом, характеризующей решетку проекторов гильбертова пространства, т. е. «высказываний», относящихся к квантовомеханической системе. Введение определенной алгебраической структуры в этих подходах в конечном счете требует некоторых предположений, не имеющих прямой физической мотивации. В 1950-е годы известный американский математик Дж. Макки предпринял попытку изложить понятия квантовой механики, отправляясь от некоторых первичных свойств статистического описания физической системы [26]. Хотя эта попытка не носила законченного характера, она оказала значительное влияние на последующие работы.

В 1970-е годы обозначилось третье направление в основаниях квантовой механики, в котором понятие состояния играет определяющую или равноценную роль по отношению к понятию наблюдаемой или измерения [52, 72, 172, 184]. Одним из главных элементов соответствующей математической схемы является выпуклое множество состояний физической системы. Этот подход, называемый операциональным или «выпуклым», можно было бы назвать статистическим, поскольку в сущности он представляет собой далеко идущее логическое развитие статистической интерпретации квантовой механики. В частности, в этой главе будет показано, что «статистическая идеология» дает естественную основу и для обсуждения проблемы скрытых параметров.

Несмотря на очевидные достижения, окончательная форма квантовой аксиоматики пока отсутствует. Поэтому главное внимание в первой части этого очерка будет обращено на положения, которые в той или иной форме, по-видимому, должны лежать в основе любой разумной статистической теории. Именно эти положения и должны в первую очередь учитываться в возможной теории со скрытыми параметрами. Однако сначала необходимо остановиться на классической картине эксперимента, которая послужит отправной точкой для дальнейших рассмотрений.

2.2. Классическая картина статистического эксперимента. Во всяком эксперименте можно условно выделить две основные стадии. В первой стадии — *приготовления* — устанавливаются исходные условия, задаются «входные данные» эксперимента. В следующей стадии — *измерения* — определенным образом приготовленный объект или система взаимодействует с тем или иным измерительным прибором, результатом чего в каждом индивидуальном эксперименте является определенный исход — выходные данные эксперимента.

Важнейшим требованием, которому должен удовлетворять любой научный эксперимент, является *воспроизводимость*, возможность неограниченного повторения данного измерения в данных условиях. Рассмотрим последовательность одинаковых и независимых повторений некоторого эксперимента. Исходы подобных индивидуальных экспериментов, как правило, будут не строго одинаковы, а подвержены случайному разбросу, амплитуда которого варьируется в зависимости от характера эксперимента и природы исследуемого объекта. Таким образом, результаты эксперимента определяются обеими стадиями, однако эта зависимость обычно не является детерминированной, а носит статистический характер. Для классических объектов, описываемых в терминах фазового пространства, выразить это обстоятельство позволяет язык теории вероятностей.

Обозначим ω полный набор переменных, характеризующих классический объект. Множество всевозможных конкретных значений ω образует *фазовое пространство* объекта $\Omega = \{\omega\}$.

Приготовление любого физического состояния объекта осуществляется некоторым прибором, который в силу особенностей своего устройства либо просто из-за своего несовершенства не может обеспечить точного воспроизведения значений всех параметров для различных представителей одного и того же объекта. Наконец, объект может характеризоваться таким огромным числом переменных, что обеспечить контроль за всеми ими не представляется никакой реальной возможности. Предполагается, однако, что разброс приготовленных значений ω обладает определенной статистической устойчивостью, характеризуемой распределением вероятностей P. Это распределение вероятностей, сопоставляющее элементарному объему $d\omega$ его меру $P(d\omega)$ и называется *состоянием* объекта.

Таким образом, данное определение состояния, по существу, является статистическим и отражает возможность флуктуаций параметров объекта. Его реальное содержание состоит в том, что если рассмотреть «ансамбль», т. е. большую (потенциально неограниченную) совокупность независимых представителей данного объекта, то доля тех представителей, для которых значение ω лежит в некотором подмножестве $B \subset \Omega$, будет близка к своему теоретическому значению $P(B)$.

Возьмем два ансамбля, соответствующие состояниям P_1 и P_2, состоящие каждый из N представителей, и образуем новый ансамбль из pN представителей первого ансамбля и $(1-p)N$ представителей второго ансамбля, где $0 \leqslant p \leqslant 1$. В соответствии с данной выше частотной интерпретацией новый ансамбль будет описываться состоянием $pP_1 + (1-p)P_2$, которое называется *смесью* состояний P_1 и P_2 в пропорции $p:(1-p)$. Аналогично вводится смесь любого конечного семейства состояний $\sum_j p_j P_j$. Можно рассматривать и непрерывные смеси вида $\int p(d\alpha)P_\alpha$, где $p(d\alpha)$ — некоторое распределение вероятностей. Такие смеси могут описывать состояния, приготовляемые прибором с флуктуирующим параметром α. Если представлять себе состояния как элементы (точки) некоторого множества, то смеси состояний P_1 и P_2 во всевозможных пропорциях будут заполнять отрезок, соединяющий точки P_1 и P_2. Такие множества, которые вместе с любыми двумя своими точками содержат и соединяющий их отрезок, называются *выпуклыми*. Таким образом, множество классических состояний, которое будем теперь обозначать $\mathfrak{S}(\Omega)$, является выпуклым. Точка выпуклого множества называется *крайней*, если она не лежит внутри отрезка, принадлежащего этому множеству. Крайним точкам множества состояний соответствуют *чистые состояния*, которые нельзя представить в виде смеси других состояний. В классической картине чистыми состояниями являются вырожденные распределения вероятностей, сосредоточенные в точках ω фазового пространства.

Чтобы это пояснить, рассмотрим простейший случай, когда Ω состоит из конечного числа точек: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$. В этом случае состояние P задается конечным распределением $[p_1, \ldots, p_N]$, где $p_j \geqslant 0, \sum_j p_j = 1$. Чистые состояния — это вырожденные распределения вероятностей $[1, 0, \ldots, 0], \ldots$ $\ldots, [0, \ldots, 0, 1]$.

Важная теорема выпуклого анализа (доказанная Минковским в конечномерном случае и Крейном и Мильманом в бесконечномерном) утверждает, что во всяком компактном выпуклом множестве любая точка может быть представлена как смесь крайних точек. Если это можно сделать единственным образом, то множество называется *симплексом*. Такое положение, очевидно, имеет место в рассмотренном выше примере. Это верно и в случае произвольного фазового пространства Ω, если допускать произвольные «непрерывные» смеси состояний. Таким образом, при отсутствии каких-либо априорных ограничений пространство состояний $\mathfrak{S}(\Omega)$ в классической картине эксперимента образует симплекс, т. е. множество, в котором всякое состояние является однозначной смесью чистых состояний, соответствующих точной фиксации всех параметров объекта.

Заключительная стадия эксперимента состоит в измерении некоторой величины X. В идеальном случае измерение не вносит каких-либо дополнительных погрешностей, т. е. сводится к наблюдению. *Наблюдаемая* (величина) X определяется тогда функцией, которая относит каждому возможному $\omega \in \Omega$ ее «объективное» значение $X(\omega)$. Произведя наблюдение X, можно вычислить исходы наблюдений величин $f(X)$, (где f — любая функция), не прибегая к непосредственному наблюдению этих величин.

Пусть для простоты наблюдаемая X может принимать конечное число значений $\{x_j\}$. Тогда

$$X(\omega) = \sum_i x_i E_i(\omega), \tag{VII.2.1}$$

где $E_i(\omega)$ — индикатор подмножества $\Omega_i \subset \Omega$, на котором $X(\omega)$ принимает значение x_i, т. е. функция, равная 1 на Ω_i и 0 вне Ω_i. Семейство функций $E = E_i(\omega)$ образует *ортогональное разложение единицы* в Ω:

$$\sum_i E_i(\omega) = 1; \quad E_i(\omega)E_j(\omega) = 0 \qquad i \neq j; \quad E_i(\omega)^2 = E_i(\omega)$$

для всех $\omega \in \Omega$.

Рассмотрим теперь наблюдаемую $f(X(\omega))$, где f — любая вещественная функция. Очевидно, что

$$f(X(\omega)) = \sum_i f(x_i) E_i(\omega). \tag{VII.2.2}$$

Даже если все x_i различны, среди чисел $f(x_i)$ могут оказаться совпадающие. Поэтому, чтобы уравнять в правах соотношения (VII.2.1) и (VII.2.2), удобно с самого начала допустить возможность совпадения некоторых значений x_i. Тогда *наблюдение* (измерение без ошибок) будет задаваться разложением единицы E, а каждой наблюдаемой X может соответствовать по формуле (VII.2.1) множество способов наблюдения, отличающихся степенью «подробности» разбиения фазового пространства Ω.

С точки зрения статистики разложение единицы $E=\{E_i(\omega)\}$ несет всю существенную информацию об измерении: вероятность $i-$го исхода в состоянии P равна

$$\mu_P^E(i) = P(\Omega_i) = \int_\Omega P(d\omega)E_i(\omega). \tag{VII.2.3}$$

С операциональной точки зрения E отвечает разбиению исходного ансамбля на классы представителей, характеризующиеся свойством $\omega \in \Omega_i$.

Отсюда *среднее значение* наблюдаемой (VII.2.1) в состоянии P (математическое ожидание) есть $M_P\{X\} = \int_\Omega P(d\omega)X(\omega)$.

Измерения, описываемые ортогональными разложениями единицы, являются детерминированными в том смысле, что безошибочно относят представителей ансамбля к тому или иному классу. Измерение с ошибками задается указанием вероятностей $M_i(\omega)$ i-го исхода для представителя, характеризующегося значением ω, так что

$$\sum_i M_i(\omega) = 1, \quad M_i(\omega) \geqslant 0.$$

Набор $M = \{M_i(\omega)\}$ образует *разложение единицы* в Ω, вообще говоря, неортогональное в том смысле, что $M_i(\omega)M_j(\omega) \not\equiv 0$ при $i \neq j$. При этом $M_i(\omega)^2 \leqslant M_i(\omega)$. Вероятность i-го исхода в состоянии P для такого измерения равна

$$\mu_P^M(i) = \int_\Omega P(d\omega)M_i(\omega). \tag{VII.2.4}$$

Эта формула показывает, каким образом неопределенность исхода измерения в классической картине возникает из двух источников: из неопределенности в приготовлении состояния P и из статистических погрешностей измерения M.

Разложение единицы M дает лишь вероятности исходов измерения с ошибками, однако, зная эти вероятности, можно смоделировать статистическую реализацию измерения, используя датчик случайных чисел. Допустим, что имеется такой датчик, позволяющий получать значения случайной величины λ, равномерно распределенной на отрезке $\Lambda = [0,1]$ (классическим примером может служить надлежащим образом градуированная рулетка). Опишем детерминированное измерение $E = \{E_i(\omega,\lambda)\}$ над системой, состоящей из рассматриваемого объекта и датчика случайных чисел, статистически эквивалентное измерению $M = \{M_i(\omega)\}$ в том смысле, что для любого состояния P вероятности всех исходов для измерений M и E одинаковы. Для этого разобьем фазовое пространство составной системы $\Omega \times \Lambda$ на подмножества $\Omega_i' = \left\{(\omega,\lambda) : \sum\limits_{k=1}^{i-1} M_k(\omega) < \lambda \leqslant \sum\limits_{k=1}^{i} M_k(\omega)\right\}$ и обозначим $E_i(\omega,\lambda)$ индикатор подмножества Ω_i'.

По самому построению имеем

$$\int d\lambda E_i(\omega,\lambda) = M_i(\omega).$$

В самом деле, для данного ω указанный интеграл есть просто интеграл от $d\lambda$ в пределах от $\sum\limits_{k=1}^{i-1} M_k(\omega)$ до $\sum\limits_{k=1}^{i} M_k(\omega)$, т. е. $M_k(\omega)$. Интегрируя это равенство по $P(d\omega)$, получаем

$$\mu_P^M(i) = \int_\Omega P(d\omega)M_i(\omega) = \int_\Omega\int_\Lambda P(d\omega)d\lambda E_i(\omega,\lambda) = \mu_{P\times d\lambda}^M(i), \tag{VII.2.5}$$

что и означает статистическую эквивалентность измерении M и E.

Процедура розыгрыша исхода с помощью датчика случайных чисел, введенная в статистику Вальдом, называется рандомизацией [53], и соответствующие измерения также могут быть названы *рандомизованными*.

С точки зрения статистики, результаты эксперимента, состоящего в приготовлении состояния P и последующем измерении M, полностью описываются распределением вероятностей исходов измерения $\mu_P^M = \{\mu_P^M(i)\}$. Отметим, что соответствие $P \to \mu_P^M$ обладает характеристическим свойством *аффинности*: если состояние P является смесью состояний P_1 и P_2 в пропорции $p:(1-p)$, то распределение исходов μ_P^M является смесью распределений $\mu_{P_1}^M$ и $\mu_{P_2}^M$ в той же пропорции, $\mu_{pP_1+(1-p)P_2}^M = p\mu_{P_1}^M + (1-p)\mu_{P_2}^M$.

2.3. Основные свойства статистического описания. Предполагая перейти в дальнейшем к квантовой механике, попытаемся выделить в виде аксиом основные черты статистического описания эксперимента, уже не используя предположения о классичности объекта, т. е. не прибегая к понятию фазового пространства.

Аксиома VII.2.1. *Заданы некоторое множество $\mathfrak{S}$, элементы которого называются состояниями, и множество $\mathfrak{M}$, элементы которого называются измерениями. С каждым измерением $M \in \mathfrak{M}$ связано пространство U возможных исходов этого измерения. Для любой пары $S \in \mathfrak{S}$, $M \in \mathfrak{M}$ на пространстве U определено распределение вероятностей μ_S^M исходов измерения M в состоянии S.*

Интуитивно S можно представить себе как более или менее детальное задание приготовления некоторого «статистического ансамбля», а M — измерения в этом ансамбле. Попытка истолкования этих понятий с помощью введения фазового пространства в сущности и приводит к вопросу о скрытых параметрах. Но об этом пойдет речь дальше. Здесь же S и M рассматриваются как некоторые первичные понятия. Для любого (измеримого) подмножества $B \subset U$ величина $\mu_S^M(B)$ интерпретируется как теоретическое значение доли представителей ансамбля, приготовленного в состоянии S, для которых исход измерения M попадает в множество B.

Таким образом, первая аксиома является формализацией требования воспроизводимости эксперимента и устойчивости частот. Следующая аксиома утверждает, что смешивание ансамблей представляет собой допустимый способ приготовления.

Аксиома VII.2.2. *Для любых состояний S_1, S_2 и числа $p, 0 < p < 1$, существует состояние S, называемое смесью S_1 и S_2 в пропорции $p:(1-p)$, такое, что $\mu_S^M = p\mu_{S_1}^M + (1-p)\mu_{S_2}^M$ для всех измерений $M \in \mathfrak{M}$.*

Исходом измерения M может быть показание одного или нескольких приборов, а также реализация любого другого способа представления информации — например, магнитофонная запись или картинка на экране дисплея. Очень часто информация, полученная в результате измерения, должна быть подвергнута некоторому преобразованию f. Результат такого преобразования можно рассматривать как исход сложной измерительной процедуры, включающей в себя и заданное преобразование. Если M_1 — измерение со значениями в U_1, а M_2 — измерение со значениями в U_2, такие, что существует (измеримая) функция $f: U_2 \to U_1$, удовлетворяющая соотношению

$$\mu_S^{M_1}(B) = \mu_S^{M_2}(f^{-1}(B)); \quad B \subset U_1,$$

для всех $S \in \mathfrak{S}$, то это означает, что статистические результаты измерения M_1 получаются из результатов измерения M_2 функциональным преобразованием f. (Напомним, что $f^{-1}(B)$ обозначает прообраз множества B, т.е. множество всех таких $u_2 \in U_2$, что $f(u_2) \in B$). В этом случае будем говорить, что M_1 *подчинено* измерению M_2. Если U_1 и U_2 — конечные множества, то это значит, что

$$\mu_S^{M_1}(u_1) = \sum_{u_2 : f(u_2) = u_1} \mu_S^{M_2}(u_2),$$

т.е. подчиненность определяется группировкой исходов измерения.

Аксиома VII.2.3. *Вместе с измерением M множество $\mathfrak{M}$ содержит все подчиненные ему измерения.*

Пару множеств $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$, удовлетворяющую аксиомам VII.2.1 - VII.2.3, назовем *статистической моделью.* Статистическая модель называется *отделимой*, если выполняется

Аксиома VII.2.4. *Из того, что $\mu_{S_1}^M = \mu_{S_2}^M$ для всех $M \in \mathfrak{M}$, следует $S_1 = S_2$, а из того, что $\mu_S^{M_1} = \mu_S^{M_2}$ для всех $S \in \mathfrak{S}$, следует $M_1 = M_2$.*

Для отделимой модели смесь состояний в $\mathfrak{S}$ и подчиненное измерение в $\mathfrak{M}$ определяются однозначно. Таким образом, множество состояний $\mathfrak{S}$ получает структуру выпуклости, а множество измерений — частичный порядок.

Чтобы проиллюстрировать общее понятие статистической модели, вернемся к классической картине, где состояния объекта описываются распределениями вероятностей на фазовом пространстве Ω, так что $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\Omega)$. Если мы рассматриваем только безошибочные измерения, соответствующие случайным величинам (см. формулу (VII.2.1)), то $\mathfrak{M}$ состоит из всевозможных ортогональных разложений единицы на Ω. При этом вероятности исходов измерения в данном состоянии определяются формулой (VII.2.3). Если же мы включаем в рассмотрение и измерения с ошибками, то $\mathfrak{M}$ должно состоять из всевозможных, а не только ортогональных разложений единицы на Ω, при этом вероятности исходов измерений определяются формулой (VII.2.4). Таким образом, получаются две основные классические модели, различающиеся запасом элементов множества $\mathfrak{M}$. Условно можно назвать первую модель *колмогоровской*, а вторую — *вальдовской.* Обе эти модели являются отделимыми.

2.4. Статистическая модель квантовой механики. В предыдущем параграфе было показано, что из самых общих свойств статистического описания эксперимента возникают две основные математические структуры: выпуклость (смешивание) в множестве состояний и подчиненность в множестве измерений. Значение этих структур в контексте квантовомеханического описания подчеркивалось еще в книге фон Неймана. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

В квантовой механике с каждой системой связывается комплексное гильбертово пространство $\mathcal{H}$. Для простоты будем считать его конечномерным. Тогда $\mathcal{H}$ состоит из векторов-столбцов $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{bmatrix}$, где ψ_j — комплексные числа. Обозначая $\langle\psi| = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1 & \dots & \bar{\psi}_n \end{bmatrix}$ эрмитово сопряженный вектор-строку, мы можем записать скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}$ в виде $\langle\varphi|\,\psi\rangle$.

Всякому ансамблю квантовых систем, определяющему некоторое квантовое состояние, сопоставляется матрица плотности $\hat{S} = [s_{ij}]$, обладающая свойствами

$$\hat{S} \geqslant 0, \quad \mathrm{Tr}\hat{S} = 1.$$

Первое соотношение означает, что матрица $\hat{S}$ является эрмитовой и положительно определенной, а $\mathrm{Tr}\hat{S} = \sum_i s_{ii}$ есть след матрицы. Если два ансамбля, описываемые матрицами плотности $\hat{S}_1, \hat{S}_2$, смешиваются в пропорции $p:(1-p)$, то смешанному ансамблю сопоставляется матрица $p\hat{S}_1 + (1-p)\hat{S}_2$, которая, как легко понять, является матрицей плотности. Таким образом, множество $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ всех квантовых состояний — матриц плотности — является выпуклым, причем образование выпуклых комбинаций отвечает смешиванию ансамблей. Крайние точки множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ — чистые квантовые состояния — задаются матрицами плотности вида $\hat{S}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, где ψ — единичный вектор: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Геометрически описать выпуклое множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ весьма сложно, за исключением случая $n = 2$, когда оно оказывается шаром в трехмерном вещественном пространстве. Всякая матрица плотности представляется в виде смеси крайних точек

$$\hat{S} = \sum_j p_j \hat{S}_{\psi_j}; \quad p_j \geqslant 0, \sum_j p_j = 1,$$

но в противоположность классической картине это представление в высшей степени неоднозначно.

Наблюдаемые величины описываются в квантовой механике эрмитовыми матрицами $\hat{X} = [x_{ij}]$. Возможными исходами измерения наблюдаемой $\hat{X}$ считаются ее собственные значения x_j. Запишем спектральное разложение матрицы $\hat{X}$:

$$\hat{X} = \sum_{j=1}^{n} x_j \hat{E}_j, \qquad \text{(VII.2.6)}$$

где E_j — ортогональный проектор на подпространство из собственных векторов матрицы $\hat{X}$, отвечающий собственному значению x_j. Семейство $\mathbf{\hat{E}} = \{\hat{E}_j\}$

образует ортогональное разложение единицы в $\mathcal{H}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{E}_j = \hat{I}; \quad \hat{E}_j \hat{E}_k = 0 \quad j \neq k; \quad \hat{E}_j^2 = \hat{E}_j,$$

где $\hat{I}$ — единичная матрица. Соответственно $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств $\hat{E}_j(\mathcal{H})$.

Согласно правилам матричной алгебры для любой вещественной функции f

$$f(\hat{X}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \hat{E}_j. \tag{VII.2.7}$$

При этом среди чисел $f(x_j)$ возможны одинаковые, так что некоторые слагаемые суммы (VII.2.7) могут быть сгруппированы. Как и в классической картине, удобно сразу рассматривать представления наблюдаемой $\hat{X}$ в виде (VII.2.6), не предполагая, что все x_j различны. Тогда разложение единицы $\mathbf{E}$ в (VII.2.6) определяется по наблюдаемой $\hat{X}$, вообще говоря, не единственным образом и может быть более или менее «подробным». Спектральная теорема дает единственное «наименее подробное» из таких разложении единицы. Производя все более подробные разбиения, мы в конце концов придем к «максимальному», т. е. далее не разделимому разложению единицы, которое определяется любым базисом из собственных векторов матрицы $\hat{X}$. Такое максимальное разложение единицы будет неединственным, если у $\hat{X}$ имеются кратные собственные значения.

Согласно статистическому постулату, вероятность исхода x_j при измерении наблюдаемой $\hat{X}$ в состоянии $\hat{S}$ равна

$$\mu_S^{\hat{\mathbf{E}}}(x_j) = \mathrm{Tr}\hat{S}\hat{E}_j. \tag{VII.2.8}$$

Отсюда и из (VII.2.6) видно, что среднее значение наблюдаемой $\hat{X}$ в состоянии $\hat{S}$ равно $\mathrm{Tr}\hat{S}\hat{X}$. Для чистого состояния $\hat{S}_\psi$ среднее значение приобретает вид $\langle\psi|\hat{X}\psi\rangle$.

Таким образом, можно сказать, что стандартная форма квантовой механики описывается статистической моделью $(\mathfrak{S}(\mathcal{H}), \mathfrak{M}(\mathcal{H}))$, где $\mathfrak{M}(\mathcal{H})$ — совокупность всевозможных ортогональных разложений единицы в $\mathcal{H}$, описывающих измерения квантовых наблюдаемых. Внимательный читатель, очевидно, отметит аналогию между соотношениями (VII.2.1), (VII.2.2), (VII.2.3) классической колмогоровской модели и соотношениями (VII.2.6), (VII.2.7), (VII.2.8). Естественно рассмотреть и квантовый аналог вальдовской модели, в которой измерения описываются произвольными (неортогональными) разложениями единицы в $\mathcal{H}$, т. е. семействами матриц $\hat{\mathbf{M}} = \{\hat{M}_j\}$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_j \hat{M}_j = \hat{I}, \quad \hat{M}_j \geqslant 0.$$

Несмотря на то, что математический аппарат квантовой механики с самого начала содержал все необходимые для этого предпосылки, роль неортогональных разложений единицы в теории квантового измерения была понята лишь в 1970-е годы с развитием статистического подхода. Формально такое расширение понятия квантового измерения подобно введению рандомизованных процедур в классической картине. С этой точки зрения ортогональные разложения единицы описывают важный подкласс измерений, в которых стохастичность, обусловленная собственно измерительной процедурой, сведена к минимуму, допускаемому данной статистической моделью. В этом смысле они аналогичны классическим детерминированным процедурам. Однако эта аналогия не является полной в одном важном отношении: если в классической картине измерения, определяемые требованиями статистической оптимальности типа предельной точности, максимальной информативности и т. п., оказываются детерминированными, то в квантовой механике статистически и информационно оптимальные процедуры далеко не всегда описываются ортогональными разложениями единицы. Как было показано в § 2, классическое рандомизованное измерение сводится к наблюдению над составной системой, включающей объект и источник случайных чисел. Интуитивно ясно, что такой способ наблюдения не может нести больше информации о состоянии классического объекта, чем прямое наблюдение, не использующее рандомизации. Однако в квантовой статистике, как это ни кажется парадоксальным, подключение независимой «квантовой рулетки» позволяет в ряде случаев увеличить объем измерительной информации о состоянии системы. Стоит отметить, что осознанию этого факта способствовали постановка и решение некоторых прикладных вопросов из области квантовых каналов связи (см. главы III, IV основного текста). Причина здесь кроется в свойстве «неразделимости» квантовомеханического описания и в обусловленных им специфических связях между компонентами составной системы, которые будут обсуждаться далее.

Поскольку основным предметом нашего рассмотрения будет проблема скрытых параметров, которая возникла и обсуждалась в рамках традиционной схемы квантовой механики, то мы и будем ее в дальнейшем придерживаться. При этом надо заметить, что все основные результаты и выводы могут быть обобщены и на расширенную модель квантовой механики, использующую для описания измерений произвольные разложения единицы.

2.5. Совместимость и дополнительность. Отношение подчиненности задает частичный порядок на множестве измерений $\mathfrak{M}$, имеющий прямое статистическое истолкование: если M_1 подчинено M_2, то M_2 является более подробным, более информативным измерением, чем M_1. Если измерения M_1 и M_2 взаимно подчинены, то они равноценны с точки зрения содержащейся в них статистической информации. Будем называть такие измерения эквивалентными. Эквивалентными являются, например, измерения, проводимые одним и тем же прибором, но с различным образом градуированными шкалами U_1, U_2. Понятно, что очень важны максимальные элементы множества $\mathfrak{M}$, описывающие наиболее информативные измерения, допускаемые рамками данной статистической модели. В чисто математическом плане вопрос о существовании таких максимальных измерений может быть совсем не тривиальным. Мы просто предположим, что каждое измерение из $\mathfrak{M}$ подчинено некоторому максимальному. Вообще говоря, может быть много неэквивалентных максимальных измерений. Единственность с точностью до эквивалентности такого максимального измерения оказывается характеристическим свойством классической картины.

Чтобы это объяснить, введем важное определение: измерения M_1, M_2 называются *совместимыми*, если существует измерение M, которому подчинены и M_1 и M_2. Другими словами, исходы совместимых измерений могут быть получены с помощью некоторых процедур пересчета из результатов одного измерения M. Предположим теперь, что отделимая статистическая модель $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ такова, что все измерения в $\mathfrak{M}$ совместимы. Тогда $\mathfrak{M}$ как упорядоченное множество является направленным и максимальное измерение M^* единственно с точностью до эквивалентности. Выберем какой-то из эквивалентных представителей $M^*: S \to \mu_S^*$, и пусть Ω — пространство его исходов. Поскольку всякое измерение M подчинено M^*, то существует функция $f_M : \Omega \to U$, где U — пространство исходов измерения M, такая, что

$$\mu_S^M(B) = \mu_S^*(f_M^{-1}(B)), \quad B \subseteq U.$$

В силу предположенной отделимости модели отображение $S \to \mu_S^*$ взаимнооднозначно и аффинно отображает множество состояний $\mathfrak{S}$ в симплекс $\mathfrak{S}(\Omega)$, так что состояния можно отождествить с распределениями вероятностей на пространстве исходов максимального измерения Ω. При этом μ_S^M является распределением вероятностей классической наблюдаемой f_M в классическом состоянии μ_S^*.

Таким образом, если в отделимой статистической модели все измерения совместимы, то она в существенном приводится к классической картине, в которой роль фазового пространства играет множество исходов максимального измерения. В этой связи полезно заметить, что теорему А.Н. Колмогорова о продолжении меры [21] можно интерпретировать как утверждение о существовании максимального измерения для некоторого бесконечного проективного семейства совместимых измерений.

Если же в $\mathfrak{M}$ имеются несовместимые измерения, то максимальное измерение не может быть единственным. Обратимся к модели квантовой механики. Пусть $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{F}}$ — измерения, описываемые ортогональными разложениями единицы $\{\hat{E}_j\}, \{\hat{F}_j\}$, которые коммутируют в том смысле, что

$$\hat{E}_j \hat{F}_k = \hat{F}_k \hat{E}_j \quad \text{для всех} \quad j, k. \tag{VII.2.9}$$

Тогда формула $\hat{G}_{jk} = \hat{E}_j \hat{F}_k$ определяет измерение, по отношению к которому $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{F}}$ являются подчиненными, поскольку $\hat{E}_j = \sum_k \hat{G}_{jk}$, $\hat{F}_k = \sum_j \hat{G}_{jk}$. Условие (VII.2.9) не только достаточно, но и необходимо для совместимости измерений $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{F}}$. Наблюдаемые $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ называются *совместимыми*, если для них найдутся совместимые измерения, а это оказывается равносильным выполнению условия $\hat{X}\hat{Y} = \hat{Y}\hat{X}$. Таким образом можно «вывести» определение совместимости наблюдаемых, принятое в традиционной формулировке квантовой механики. Поскольку имеется много несовместимых наблюдаемых, описываемых неперестановочными матрицами, постольку имеется и множество неэквивалентных максимальных измерений, определяемых различными ортонормированными базисами в пространстве $\mathcal{H}$. Это те ортогональные разложения единицы, которые уже не поддаются дальнейшему расщеплению.

В бесконечномерном случае ситуация усложняется ввиду появления «непрерывных» ортогональных разложений единицы. Заметим, однако, что даже в конечномерном случае существуют как дискретные, так и непрерывные неортогональные максимальные разложения единицы. Геометрически они возникают из «переполненных» систем векторов, получающихся проецированием в $\mathcal{H}$ ортонормированных базисов в некотором более широком пространстве $\mathcal{H}'$. Типичным примером таких переполненных систем являются хорошо известные в теоретической физике семейства когерентных состояний. Во многих случаях максимальная информация о тех или иных параметрах состояния квантовой системы дается как раз измерениями, связанными с переполненными системами векторов (см. главы III, IV основного текста).

Существуют физические системы, в определенном смысле промежуточные между классическими и квантовыми (системы с правилами суперотбора). Назовем *центром* статистической модели $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ совокупность измерений, совместимых со всеми измерениями из $\mathfrak{M}$. С центром может быть связан спектр, отражающий классические свойства статистической модели. В классическом случае спектр совпадает с фазовым пространством. Если центр тривиален, т. е. состоит только из измерений констант, как в случае квантовой механики, то модель является *неприводимой*. Можно ожидать некоторого разложения достаточно произвольной статистической модели в «прямую сумму» или «прямой интеграл» неприводимых. Такая структурная теория вполне разработана в рамках алгебраического подхода, хотя имеются и более общие результаты для произвольных выпуклых множеств [59].

Осознание феномена несовместимости явилось в свое время решающим шагом в создании «ортодоксальной» интерпретации квантовой теории, и по сей день составляющей ее методологическую основу. Несовместимость измерений в квантовой механике обусловливается тем, что физические измерения осуществляются экспериментальными установками, каждая из которых предполагает сложную специфическую организацию макроскопической пространственно-временной среды. Очевидно, что два различных способа такой организации могут оказаться взаимоисключающими. «В квантовой физике данные об атомных объектах, полученные при помощи разных экспериментальных установок, находятся в своеобразном дополнительном отношении друг к другу» ([8], с. 529). Классическая механика опирается на идеализацию, допускающую принципиальную совместимость любых измерительных процедур и оправданную постольку, поскольку она имеет дело с макроскопическими объектами, физическое взаимодействие которых с измерительным прибором является пренебрежимо слабым. Окружающий нас мир, непосредственно доступный органам наших чувств, «по определению» макроскопичен. Поэтому так трудно дать наглядное объяснение дополнительности. Пытаясь найти доступные аналогии в повседневном опыте, Бор пришел к выводу, что принцип дополнительности носит общий характер и особенно важен для тонких «гуманитарных» сфер, упорно ускользающих от детального математического моделирования. Выраженная в современной литературной форме древняя истина, взятая в качестве эпиграфа к настоящему очерку, перекликается с мыслью Бора, что «цельность живых организмов и характеристики людей, обладающих сознанием, а также и человеческих культур, представляют черты целостности, отображение которых требует типично дополнительного способа описания» ([8], с. 532). Философия уже давно нащупала диалектические закономерности, позволяющие качественно отобразить цельность и сложность живого реального мира. Однако квантовая теория является пока что уникальным примером математической модели реального класса явлений, дающей в своей области точное количественное выражение диалектического принципа дополнительности.

2.6. Классические и неклассические модели. Рассмотрим статистическую модель $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$, которая является «классической» в том смысле, что состояния и измерения описываются в терминах некоторого фазового пространства, как в § 2. Однако удобно считать, что множество состояний $\mathfrak{S}$ не обязательно содержит все распределения вероятностей, а $\mathfrak{M}$ — измерения всех наблюдаемых; таким образом, допускается, что $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{M}$ могут определяться некоторыми априорными ограничениями типа дополнительности. Из-за этого модель $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ может не быть отделимой: могут существовать различные распределения вероятностей P_1, P_2, такие, что $\mu_{P_1}^M = \mu_{P_2}^M$ для всех измерений $M \in \mathfrak{M}$, т. е. неразличимые с точки зрения статистики возможных экспериментов. Точно так же могут существовать и неразличимые измерения. Объединяя такие неразличимые классические состояния и измерения в классы эквивалентности, получаем новую, уже отделимую, статистическую модель. Описание состояний и измерений в новой модели «сжато» ровно настолько, чтобы сохранить вероятности результатов всевозможных допустимых экспериментов в исходной классической модели. Как показано в главе I, «склеивание» классических состояний геометрически выражается в проецировании множества $\mathfrak{S}$ на некоторое множество $\hat{\mathfrak{S}}$ в пространстве меньшей размерности. При этом даже если исходная модель допускает в качестве состояний всевозможные распределения вероятностей на Ω, так что множество состояний $\mathfrak{S}$ совпадает с симплексом $\mathfrak{S}(\Omega)$, его «проекция» $\hat{\mathfrak{S}}$ в сжатой модели может принять форму произвольного выпуклого множества. Эта форма определяется множеством $\mathfrak{M}$, т. е. характером ограничений на классические измерения.

В статистической механике важную роль играет понятие сокращенного описания, тесно связанного с вероятностным понятием частичной наблюдаемости. Представим себе, что из всех величин, относящихся к классическому объекту с фазовым пространством Ω, реально наблюдаемыми являются лишь величины $X_1, \ldots, X_n$, а также всевозможные измеримые функции этих величин. В данном случае множество $\mathfrak{M}$ состоит из измерений всевозможных наблюдаемых вида $f(X_1, \ldots, X_n)$. Классические состояния P_1, P_2 неразличимы, если для соответствующих математических ожиданий выполняется условие $\mathsf{M}_{P_1} f(X_1, \ldots, X_n) = \mathsf{M}_{P_2} f(X_1, \ldots, X_n)$ для любых измеримых функций f (это означает, что совпадают сужения P_1, P_2 на σ-алгебру подмножеств $\mathcal{B}$, порожденную величинами $X_1, \ldots, X_n$. Классом эквивалентности состояний является, таким образом, произвольное распределение вероятностей $P(dx_1 \ldots dx_n)$ на пространстве $\hat{\Omega}$ значений величин $X_1, \ldots, X_n$, которое может быть принято за фазовое пространство сокращенного описания. При этом $\hat{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}(\hat{\Omega})$, т. е. симплекс $\mathfrak{S}(\Omega)$ проецируется в симплекс $\mathfrak{S}(\hat{\Omega})$ и классический характер описания сохраняется.

Таким образом, сокращение описания является важным специальным случаем сжатия. С чисто иллюстративной целью рассмотрим теперь следующее видоизменение схемы частичной наблюдаемости: предположим, что реально наблюдаемыми являются только величины вида $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$, где $f_1, \ldots, f_n$ — произвольные функции. Таким образом, величины $X_1, \ldots, X_n$ по определению считаются несовместимыми наблюдаемыми. Тогда классические состояния P_1, P_2 будут неразличимы, если выполняется условие:

$$\mathsf{M}_{P_1} f_i(X_i) = \mathsf{M}_{P_2} f_i(X_i)$$

для любых функций f_i; $i=1, \ldots, n$ (т.е. если P_1, P_2 имеют одинаковые сужения на $\sigma-$подалгебры $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$, порожденные соответственно величинами $X_1, \ldots, X_n$. Классом эквивалентности является набор распределений вероятностей на пространствах значений величин $X_1, \ldots, X_n$. В этом случае $\mathfrak{S}(\hat{\Omega})$ есть прямое произведение n симплексов; в частности, если $X_1, \ldots, X_n$ — двузначные величины, то P пробегает n-мерный гиперкуб. Таким образом, введение априорных ограничений на измерения способно радикально изменить характер выпуклой структуры множества состояний при переходе к сжатому отделимому описанию.

Мы видели в главе I, что для любой достаточно регулярной отделимой статистической модели $(\hat{\mathfrak{S}}, \hat{\mathfrak{M}})$ существует классическая модель, для которой $(\hat{\mathfrak{S}}, \hat{\mathfrak{M}})$ дает сжатое описание в определенном выше смысле. В этом смысле для любой отделимой модели существует некоторое формальное классическое описание. Не означает ли это, что имеется принципиальная возможность введения скрытых параметров в произвольной статистической модели, в частности и в квантовой механике? Чтобы разобраться в этом вопросе, надо проанализировать требования, которые могут быть предъявлены к теории со скрытыми параметрами. Их можно условно разделить на две категории. К первой относятся «минимальные» требования, вытекающие из общих свойств статистического описания эксперимента. Их мы и рассмотрим в первую очередь, поскольку почти все попытки математических «доказательств невозможности» по видимости апеллировали лишь к таким требованиям. Мы увидим, что на самом деле эти доказательства опираются на некоторые дополнительные предположения, не имеющие безусловной физической мотивации. Более того, на примере квантовой механики будет продемонстрирована возможность классического описания, удовлетворяющего минимальным статистическим требованиям. Другую категорию составляют требования, в большей мере использующие специфику квантовомеханической модели. Именно среди них и находится главный камень преткновения для теории со скрытыми параметрами.

§ 3. Проблема скрытых параметров

3.1. «Доказательства невозможности» и минимальные статистические требования на скрытые параметры. Теория со скрытыми параметрами призвана дать объяснение статистичности экспериментальных результатов через изменчивость значений некоторой совокупности переменных ω, характеризующих «истинные свойства» объекта. Поэтому попытки «доказательств невозможности» обычно начинались с того, что каждому квантовому состоянию $\hat{S}$ сопоставлялось некоторое распределение вероятностей $S(d\omega)$, а каждой квантовой наблюдаемой $\hat{X}$ — некоторая функция $X(\omega)$ на гипотетическом фазовом пространстве Ω. Таким образом, подразумевалось, что имеется пара взаимно-однозначных соответствий $\hat{S} \leftrightarrow S$, $\hat{X} \leftrightarrow X$. Однако изложенные в предыдущем параграфе соображения о той роли, которую может играть в переходе к неклассическим моделям сжатие статистического описания, наводят на мысль, что теория со скрытыми параметрами должна допускать возможность «склеивания» статистически эквивалентных классических состояний и измерений. Поэтому с самого начала условимся, что классическое описание квантовой системы состоит в указании фазового пространства Ω и пары отображений: $S \to \hat{S}$ из симплекса $\mathfrak{S}\,(\Omega)$ на множество квантовых состояний $\hat{\mathfrak{S}}$ и $X \to \hat{X}$ из пространства классических наблюдаемых $\mathfrak{O}\,(\Omega)$ в пространство квантовых наблюдаемых $\hat{\mathfrak{O}}$. Область определения первого отображения не обязательно совпадает с $\mathfrak{S}\,(\Omega)$, а второго — с $\mathfrak{O}\,(\Omega)$. Таким образом, классическое описание однозначно сопоставляет некоторым распределениям вероятностей $S(d\omega)$ операторы плотности $\hat{S}$ и некоторым величинам $X(\omega)$ — квантовые наблюдаемые $\hat{X}$ в пространстве $\mathcal{H}$; при этом одно и то же квантовое состояние $\hat{S}$ может описываться несколькими распределениями вероятностей, а одна и та же квантовая наблюдаемая $\hat{X}$ — несколькими разными функциями на фазовом пространстве. Распределения вероятностей $S(d\omega)$, отвечающие одному и тому же квантовому состоянию $\hat{S}$, интерпретируются как разные способы приготовления ансамбля, описываемого этим состоянием, а функции $X(\omega)$, отвечающие одной и той же наблюдаемой $\hat{X}$, связываются с различными способами наблюдения $\hat{X}$.

Чтобы обозначить возможную неоднозначность классического описания, Белл использовал термин «контекстуальность». Контекстуальность в описании квантового состояния отражает, в частности, тот факт, что один и тот же оператор плотности $\hat{S}$, в зависимости от контекста процедуры приготовления, может быть получен как совершенно различные смеси чистых состояний. Аналогично, один и тот же проектор $\hat{P}$, в зависимости от контекста процедуры измерения, может возникнуть как результат укрупнения из различных ортонормированных базисов. Перейдем к рассмотрению требований, которые выдвигались к теориям со скрытыми параметрами. С точки зрения данного выше определения, соглашение об однозначности классического описания является ограничением, которое должно быть явно оговорено:

(S.0) *отображение* $S \to \hat{S}$ *взаимно-однозначно*;

(X.0) *отображение* $X \to \hat{X}$ *взаимно-однозначно.*

Эти условия, которые с математической точки зрения могут показаться «техническими», на самом деле имеют решающее значение. В то же время представляется затруднительным найти для них удовлетворительную физическую мотивировку.

Условие, что статистические предсказания теории со скрытыми параметрами во всех отношениях совпадают с квантовомеханическими, выражается равенством математических ожиданий:

(E.1) $\mathrm{Tr}\hat{S}\hat{X} = \int_\Omega S(d\omega)X(\omega)$ для всех X, S.

Если это условие статистического соответствия не выполняется, то должно быть количественное расхождение между предсказаниями двух теорий, которое в принципе может быть обнаружено экспериментально. Изучение таких возможностей относится к компетенции физика, а не математика, и мы их рассматривать не будем.

Следующая группа условий касается свойств отображения $X \to \hat{X}$. Формула (VII.2.7) показывает, что результаты измерения наблюдаемой $f(\hat{X})$ могут быть получены из результатов измерения $\hat{X}$ простым пересчетом $x_i \to f(x_i)$. Для этого к прибору, который осуществляет измерение $\hat{X}$, достаточно, например, присоединить калькулятор, запрограммированный на вычисление функции $f(x)$. Однако в теории со скрытыми параметрами любой способ измерения $\hat{X}$ сводится к наблюдению некоторой величины $X(\omega)$. Последующий пересчет результатов наблюдения $x \to f(x)$ равносилен прямому наблюдению величины $f(X(\omega))$. Таким образом, наблюдение величины $f(X)$ представляет в теории со скрытыми параметрами один из способов измерения квантовой наблюдаемой $f(\hat{X})$. Отсюда возникает *функциональное условие*:

(X.1) *если* $X \to \hat{X}$, *то* $f(X) \to f(\hat{X})$.

Это условие тесно связано с двумя следующими:

(X.2) *если* $X \to \hat{X}$, *то любое значение* $X(\omega)$ *принадлежит спектру* $\{x_i\}$ *квантовой наблюдаемой* $\hat{X}$.

Смысл этого *спектрального условия* очевиден: в теории со скрытыми параметрами должны сохраняться «объективные значения» наблюдаемых.

(X.3) *для любых совместимых квантовых наблюдаемых* $\hat{X}, \hat{Y}$ *найдутся соответствующие классические величины* X, Y, *такие что* $X \to \hat{X}$, $Y \to \hat{Y}$, *и* $X + Y \to \hat{X} + \hat{Y}$.

Совместимость квантовых наблюдаемых означает, что существует измерительное устройство, которое в ходе одного эксперимента выдает результаты измерения $\hat{X}$ и $\hat{Y}$. Присоединяя простой сумматор, мы получаем прибор для измерения наблюдаемой $\hat{X} + \hat{Y}$. *Правило конечных сумм* (X.3) отражает эту возможность в теории со скрытыми параметрами. Оно может быть заменено следующим *правилом конечных произведений*:

(X.4) *для любых совместимых квантовых наблюдаемых* $\hat{X}, \hat{Y}$ *найдутся соответствующие случайные величины* X, Y, *такие что* $X \to \hat{X}$, $Y \to \hat{Y}$ *и* $XY \to \hat{X}\hat{Y}$.

Лемма VII.3.1. *Функциональное условие* (X.1) *влечет правило конечных сумм* (X.3) *и правило конечных произведений* (X.4). *При выполнении условия* (X.0), *условие* (X.1) *влечет также спектральное условие* (X.2).

Доказательство. Если $\hat{X}, \hat{Y}$ совместимы, то найдется наблюдаемая $\hat{Z}$, такая что $\hat{X} = f(\hat{Z}), \hat{Y} = g(\hat{Z})$. Пусть $Z \to \hat{Z}$ — соответствующие классические наблюдаемые, тогда согласно (X.1) $X = f(Z) \to \hat{X}$ и $Y = g(Z) \to \hat{Y}$. Поэтому

$X+Y=(f+g)(Z)\to(f+g)(\hat{Z})=\hat{X}+\hat{Y}$. Это доказывает (X.3), а (X.4) доказывается аналогично. Пусть соответствие $X\to\hat{X}$ взаимно однозначно, так что $X\leftrightarrow\hat{X}$. Рассмотрим функцию $f_0(x)\equiv 0$. Применяя к этой функции (X.1), имеем $0\leftrightarrow\hat{0}$, где $\hat{0}$ — нулевой оператор, а 0 — классическая наблюдаемая, тождественно равная нулю. Пусть $P(x)$ — характеристический многочлен эрмитова оператора $\hat{X}$, так что $P(\hat{X})=\hat{0}$. Если $X\leftrightarrow\hat{X}$, то согласно (X.1) $P(X)\leftrightarrow P(\hat{X})$, поэтому $P(X(\omega))\equiv 0$ т. е. любое значение $X(\omega)$ принадлежит спектру квантовой наблюдаемой $\hat{X}$.

Из (E.1) и (X.1) вытекает следующее усиление условия статистического соответствия:

(E.2) $\mathrm{Tr}\hat{S}f(\hat{X})=\int_\Omega S(d\omega)f(X(\omega))$ для всех X, S, f.

Отметим, что выполнение условия (E.2), конечно, влечет (E.1), но (X.1) следует из (E.2) лишь при некотором дополнительном условии. Множество $\mathfrak{S}_0\subseteq\mathfrak{S}\,(\Omega)$ назовем *отделяющим*, если из того, что

$$\int_\Omega S(d\omega)X_1(\omega)=\int_\Omega S(d\omega)X_2(\omega)\quad \text{для всех } S\in\mathfrak{S}_0,$$

следует $X_1=X_2$. Если множество распределений вероятностей, которые соответствуют всевозможным квантовым состояниям в данном классическом описании (будем обозначать это множество $\mathfrak{S}_0$), является отделяющим, то условие статистического соответствия (E.1), очевидно, влечет выполнение условия взаимной однозначности (X.0), при этом (E.2) влечет (X.1). В самом деле, пусть $Y\to f(\hat{X})$. Тогда в силу (E.2)

$$\int_\Omega S(d\omega)Y(\omega)=\mathrm{Tr}\hat{S}f(\hat{X})=\int_\Omega S(d\omega)f(X(\omega))\quad \text{для всех } S\in\mathfrak{S}_0,$$

откуда $f(X)=Y\to f(\hat{X})$.

Наконец, остановимся на условии линейности:

(X.5) $(\lambda\widehat{X+\mu}Y)=\lambda\hat{X}+\mu\hat{Y}$ для любых X, Y и вещественных λ,μ .

Это математически вполне безупречное условие не имеет прямой физической мотивации, что отмечалось еще в книге фон Неймана [45]. Если $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ несовместимы, то измерения наблюдаемых $\hat{X}$, $\hat{Y}$ и $\hat{X}+\hat{Y}$ могут не иметь между собой ничего общего, кроме равенства средних значений в любом состоянии. Это последнее обстоятельство и было привлечено фон Нейманом для мотивировки условия типа (X.5). Проанализируем соответствующее рассуждение из статьи [150]: «В квантовой механике средние удовлетворяют соотношению $\langle\hat{X}+\hat{Y}\rangle=\langle\hat{X}\rangle+\langle\hat{Y}\rangle$. Поэтому и в модели скрытых параметров должно иметь место соотношение

$$\int_\Omega S(d\omega)(X+Y)(\omega)=\int_\Omega S(d\omega)X(\omega)+\int_\Omega S(d\omega)Y(\omega). \tag{VII.3.1}$$

Так как различным матрицам плотности $\hat{S}$ соответствуют различные распределения вероятностей $S(d\omega)$, естественно потребовать выполнения соотношения

$$(X+Y)(\omega)=X(\omega)+Y(\omega) \tag{VII.3.2}$$

для любых наблюдаемых X, Y, которые могут соответствовать как коммутирующим, так и некоммутирующим операторам $\hat{X}, \hat{Y}$. »

Однако второе соотношение (VII.3.2) вытекает из первого (VII.3.1) только при дополнительном предположении, что множество классических состояний $\mathfrak{S}_0$ в теории со скрытыми параметрами является отделяющим. Является ли такое предположение «естественным»? Очень простой (и характерный) пример неотделяющего множества — это семейство распределений вероятностей $S(d\omega)$ на произведении пространств $\Omega' \times \Omega''$, имеющих вид $S(d\omega) = S'(d\omega')P(d\omega'')$, где $S'(d\omega')$ — произвольное распределение на Ω', а $P(d\omega'')$ — фиксированное распределение на Ω''. Именно таковы множества классических состояний в явно построенных моделях со скрытыми параметрами. Это имеет определенный физический смысл: $P(d\omega'')$ толкуется как равновесное распределение «скрытой» подсистемы, обеспечивающей стохастичность результатов измерения [65].

Условия (X.1), (X.5) были сформулированы выше в такой форме, что если принять соглашение об однозначности (X.0), то они превращаются в известные условия, предлагавшиеся в разное время в доказательствах невозможности введения скрытых параметров. Приведем наиболее примечательные результаты в этом направлении. Следующие утверждения видоизменены по сравнению с оригинальными формулировками, с тем чтобы привести их в соответствие с предложенной общей схемой.

Первое утверждение близко к теореме фон Неймана.

Предложение VII.3.2. *Не существует классического описания, удовлетворяющего условиям* (X.0), (X.2), (X.5).

Из проведенного выше обсуждения видно, что этот результат можно сформулировать так: *не существует классического описания с отделяющим множеством классических состояний, удовлетворяющего условию статистического соответствия.* Предположим, что классическое описание с указанными свойствами (X.0), (X.2), (X.5) существует. Согласно (X.0) имеется единственный X, такой что $X \to \hat{X}$. Фиксируем точку ω_0 фазового пространства и рассмотрим функционал на операторах, задаваемый соотношением $F(\hat{X}) = X(\omega_0)$. В силу (X.5) этот функционал линеен. В рассматриваемом здесь конечномерном случае почти очевидно, что всякая такая функция имеет вид $F(\hat{X}) = \mathrm{Tr}\hat{P}\hat{X}$, где $\hat{P} \in \hat{\mathfrak{O}}$ (в бесконечномерном случае требуются некоторые соображения непрерывности, важные с математической точки зрения, но не относящиеся к существу данной проблемы). Пусть $\hat{X}$ пробегает всевозможные проекторы в $\mathcal{H}$, так что его собственные значения $x_i = 0, 1$. Тогда в силу (X.2) величина $X(\omega_0) = \mathrm{Tr}\hat{P}\hat{X}$ принимает только значения 0 или 1, что, очевидно, невозможно ни для какого $\hat{P}$.

В историческом плане представляет интерес примечание Вигнера к его статье о скрытых параметрах ([196], с. 294). «Возражения фон Неймана обычно принято цитировать по его книге (разделы § IV.1 и § IV.2). На правах старого друга фон Неймана и во имя сохранения исторической правды автор настоящей статьи хотел бы подчеркнуть, что убеждение фон Неймана в неадекватности скрытых параметров опирается в основном не на те соображения, которые изложены в его книге. . . »[1]

Однако независимо от того, какое значение придавал этим соображениям сам фон Нейман, опубликованные в его монографии и соответствовавшие преобладающему умонастроению физической общественности, они стали рассматриваться как решающий аргумент против скрытых параметров. В течение последующих 20 лет к этому вопросу практически не возвращались. Интерес к проблеме оживился в 1960-е годы после появления работ Д. Бома (1952) и Н. Винера и А. Зигеля (1953), содержавших явные (хотя и не во всем ясные) конструкции моделей со скрытыми параметрами [151], [195]. В ответ появился целый ряд модификаций теоремы фон Неймана.

Поворот в понимании проблемы ознаменовался появлением работ Дж. Белла (1966) и С. Кохена и Э.П. Шпеккера (1967) (см. [66,103]). В 1957 г. А. Глисон, отвечая на вопрос, поставленный Макки, доказал следующую очень нетривиальную теорему [170]: *пусть* $F(\hat{E})$ — *вероятностная мера на проекторах в пространстве* $\mathcal{H}$ *размерности* $\geqslant 3$, *т. е. функция, удовлетворяющая условиям:* 1) $F(\hat{E}) \geqslant 0$; 2) *для любого ортогонального разложения единицы* $\{\hat{E}_i\}$ *выполняется* $\sum_i F(\hat{E}_i) = 1$. Тогда

$$F(\hat{E}) = \mathrm{Tr}\hat{S}\hat{E},$$

где $\hat{S}$ — *матрица плотности в* $\mathcal{H}$.

Отсюда сразу вытекает

Предложение VII.3.3. *При* $\dim \mathcal{H} \geqslant 3$ *не существует классического описания, удовлетворяющего условиям (X.0), (X.2), (X.3).*

В самом деле, если бы такое описание существовало, то функция $F(\hat{E}) = E(\omega_0)$, где $E \leftrightarrow \hat{E}$, удовлетворяла бы условиям теоремы Глисона. Тогда $F(\hat{E}) = \mathrm{Tr}\hat{S}\hat{E}$, и, рассуждая как в конце доказательства утверждения 1, мы приходим к противоречию.

Доказательство теоремы Глисона остается достаточно сложным даже после ряда последующих упрощений. Сам Глисон не занимался приложениями своей теоремы к проблеме скрытых параметров. На эту возможность обратил внимание Белл. Более того, он извлек из доказательства Глисона геометрическую идею, существенную с точки зрения проблемы скрытых параметров, и дал краткое прямое доказательство теоремы, которая в нашем изложении следует из предложения VII.3.2 и леммы VII.3.1:

Предложение VII.3.4. *При* $\dim \mathcal{H} \geqslant 3$ *не существует классического описания, удовлетворяющего условиям (X.0), (X.1).*

Этот результат был получен Кохеном и Шпеккером [103] независимо от Белла и внешне другим путем. Кохен и Шпеккер дали конкретное построение системы из 117 единичных векторов в трехмерном пространстве, на которой не может быть определена функция F, обладающая свойствами меры из теоремы Глисона и принимающая только значения 0 и 1 (позднее были предложены более экономные конструкции [65]). Другими словами, геометрия этой системы такова, что условия, определяющие такую меру, оказываются на ней противоречивыми.

[1] Эти неопубликованные аргументы фон Неймана будут рассмотрены в следующем разделе.

Случай $\dim \mathcal{H} = 2$, соответствующий квантовой частице со спином $1/2$, является особым. Как Белл, так и Кохен и Шпеккер приводят элементарные явные конструкции моделей со скрытыми параметрами в этом случае. Еще одна конструкция вытекает из общей модели, которая будет построена в следующем параграфе. На этих конструкциях хорошо прослеживается несостоятельность «доказательства невозможности» по типу предложения 1.

Обращает на себя внимание тот факт, что утверждения 3.3 и 3.4 совсем не используют условие статистического соответствия (E.1), которое должно было бы быть основным для теории со скрытыми параметрами. По существу, эти утверждения не затрагивают статистики и говорят лишь о невозможности взаимно-однозначного соответствия между «квантовой логикой» проекторов и классической булевой алгеброй, которое сохраняло бы алгебраические соотношения для совместимых величин. Решающим здесь оказывается условие (X.0), и это обстоятельство было отмечено в работе Белла.

Как же совместить эти математические результаты с моделями Бома и Винера—Зигеля? Нефизическим предположением, которое не выполняется в упомянутых моделях, является условие однозначности (X.0). Как уже отмечалось, разумно допустить, что одна и та же квантовая наблюдаемая может быть измерена множеством способов (что, в частности, отражается в неоднозначности разложения единицы, входящего в представление (VII.2.6). Из утверждений 3.3, 3.4 следует, что в теории со скрытыми параметрами, удовлетворяющей условиям типа (X.1)-(X.4), описания этих способов с необходимостью должны быть различны.

Другой путь «доказательства невозможности» связан с идеями Э. Вигнера и Д.И. Блохинцева о невозможности определения совместного распределения для несовместимых квантовых наблюдаемых и основан на анализе свойств отображения $S \to \hat{S}$.

Рассмотрим классическое состояние S и соответствующее квантовое состояние $\hat{S}$. Тогда классический ансамбль, определяемый состоянием $S(d\omega)$, можно рассматривать как квантовый ансамбль, определяемый состоянием $\hat{S}$. Смесь классических ансамблей $pS_1 + (1-p)S_2$ является в то же время смесью квантовых ансамблей $p\hat{S}_1 + (1-p)\hat{S}_2$. Эти рассуждения приводят к следующему условию аффинности:

(S.1) *для любых* $S_1 \to \hat{S}_1$, $S_2 \to \hat{S}_2$ *и вещественного* p, $0 < p < 1$, *выполняется равенство* $pS_1 + (1-p)S_2 \to p\hat{S}_1 + (1-p)\hat{S}_2$.

Предложение VII.3.5. *Не существует классического описания, удовлетворяющего условиям* (E.2), (S.0), (S.1).

Доказательство. Предположим, что такое описание существует, и рассмотрим две произвольные квантовые наблюдаемые $\hat{X}, \hat{Y}$. Пусть X, Y — какие-то соответствующие им классические величины. Благодаря условию (S.0) имеет место взаимно-однозначное аффинное соответствие $S \leftrightarrow \hat{S}$, и формула

$$\mu_{\hat{S}}(B) = S\left(\omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in B\right)$$

определяет распределение вероятностей на плоскости $\mathbb{R}^2$. В силу условия (S.1) отображение $\hat{S} \to \mu_{\hat{S}}$ оказывается аффинным, т. е. определяет обобщенное квантовое измерение со значениями в плоскости (x, y). Используя условие (Е.2), получаем, что распределения вероятностей наблюдаемых $\hat{X}, \hat{Y}$ в состоянии $\hat{S}$ являются маргинальными одномерными распределениями для $\mu_{\hat{S}}\,(dx, dy)$. Таким образом, мы приходим к абсурдному заключению, что любые квантовые наблюдаемые $\hat{X}$, $\hat{Y}$ совместимы.

Приведенные рассуждения в основном следуют работе Шринивaза [193]. Автор этой работы правильно отмечает, что решающим в его доказательстве является условие однозначности (S.0). Каждое квантовое состояние $\hat{S}$ может быть различными способами представлено в виде смеси чистых состояний, и каждому способу представления может отвечать свое классическое состояние S. Если теория со скрытыми параметрами, удовлетворяющая условиям (Е.2), (S.1), возможна, то она с необходимостью должна обладать такой неоднозначностью. В этом отношении можно провести аналогию между условием (S.0) и условием (X.0).

Итак, из ряда требовании, выдвигавшихся к теориям со скрытыми параметрами, выделяются условия (Е.1), (X.1), (S.1) (а также связанные с ними (Е.2), (X.2)—(X.4)), которые имеют убедительное статистическое обоснование. По существу, эти требования сводятся к тому, чтобы классическое описание сохраняло основные структурные свойства статистической модели, выраженные аксиомами (А.1)—(А.3). «Доказательства невозможности» на самом деле не запрещают теорий, удовлетворяющих этим требованиям. Математически и физически корректный вывод, который следует из этих результатов, состоит в том, что удовлетворяющее этим требованиям классическое описание (если оно вообще возможно) с необходимостью должно носить неоднозначный характер, предполагающий «сжатие» статистического описания при переходе к квантовой теории.

3.2. Модель со скрытыми параметрами для «уединенной» квантовой системы. В работе Кохена и Шпеккера [103] была рассмотрена «тривиальная» модель со скрытыми параметрами, удовлетворяющая условию статистического соответствия (Е.1), но не сохраняющая структуру функциональных зависимостей в квантовой механике. Лежащая в основе этой модели идея достаточно прямолинейна и состоит в том, что для каждой квантовой наблюдаемой $\hat{X}$ вводится свой «скрытый параметр», описывающий стохастичность результатов измерения $\hat{X}$. Совокупность всех таких скрытых параметров и образует фазовую переменную ω данной модели. Цель этого примера состояла в том, чтобы продемонстрировать недостаточность одного условия (Е.1) и силу условия (X.1), которое, казалось бы, позволяет исключить из рассмотрения подобные модели. Оказывается, однако, что, основываясь на сходной идее, можно построить модель со скрытыми параметрами, удовлетворяющую всем минимальным статистическим условиям (Е.1), (X.1), (S.1). Ключевым моментом является, конечно, отказ от однозначности классического описания.

Обозначим Ω' множество чистых квантовых состояний, так что каждому $\omega' \in \Omega'$ отвечает единичный вектор $\psi_{\omega'} \in \mathcal{H}$, для которого $\mathrm{Tr}\omega'\hat{X} = \langle\psi_{\omega'}|\hat{X}\psi_{\omega'}\rangle$. Всякое квантовое состояние записывается в виде дискретной или непрерывной смеси чистых состояний

$$\hat{S} = \int_{\Omega'} \omega' S'(d\omega'), \qquad \text{(VII.3.3)}$$

где $S'(d\omega')$ — некоторое распределение вероятностей на Ω', причем такая запись, конечно, неоднозначна. Математически состояние (VII.3.3) определяет аффинное отображение $S' \to \hat{S}$ симплекса $\mathfrak{S}(\Omega')$ на выпуклое множество $\hat{\mathfrak{S}}$.

Пусть $\hat{\mathbf{E}} = \{\hat{E}_i\}$ — ортогональное разложение единицы в $\mathcal{H}$, описывающее квантовое измерение. Достаточно будет ограничиться максимальными измерениями, для которых $\hat{E}_i$ — проекторы на векторы e_i ортонормированного базиса в $\mathcal{H}$. Положим

$$M_i(\omega') = \mathrm{Tr}\omega'\hat{E}_i = |\langle\psi_{\omega'}|e_i\rangle|^2\,, \qquad \text{(VII.3.4)}$$

тогда $\hat{\mathbf{M}} = \{M_i(\omega')\}$ будет классическим рандомизованным измерением на Ω'. Из (VII.3.3), (VII.3.4) получаем:

$$\mathrm{Tr}\hat{S}\hat{E}_i = \int_{\Omega'} S'(d\omega')M_i(\omega'). \qquad \text{(VII.3.5)}$$

Таким образом, удалось построить классическую модель, в которой квантовые состояния описываются распределениями вероятностей на «фазовом пространстве» Ω', а (максимальные) квантовые измерения — некоторыми рандомизованными классическими измерениями M, причем выполняется условие статистического соответствия (VII.3.5). Квантовая теория дает сжатое описание этой классической модели в смысле п. 2.6 (см. также теорему I.7.1 в гл. I).

Следующий шаг состоит в том, что каждое рандомизованное классическое измерение вида (VII.3.4) реализуется как детерминированное измерение с помощью рандомизующего вероятностного пространства $\left(\Lambda_{\hat{\mathbf{E}}}, d\lambda_{\hat{\mathbf{E}}}\right)$, например, как описано в конце § 2.2. Можно сказать, что каждому максимальному квантовому измерению сопоставляется «рулетка» $\left(\Lambda_{\hat{\mathbf{E}}}, d\lambda_{\hat{\mathbf{E}}}\right)$, с помощью которой моделируется стохастичность исходов измерения в каждом чистом состоянии ω'. Если же состояние $\hat{S}$ является смешанным, то распределение исходов измерения дается соответствующей смесью

$$\mathrm{Tr}\hat{S}\hat{E}_i = \int_{\Omega'}\int_{\Lambda_{\hat{\mathbf{E}}}} S'(d\omega')d\lambda_{\hat{\mathbf{E}}}E_i\left(\omega', \lambda_{\hat{\mathbf{E}}}\right), \qquad \text{(VII.3.6)}$$

как видно из (VII.3.5) и (VII.2.5). Чтобы охватить всю совокупность максимальных квантовых измерений, введем произведение вероятностных пространств $(\Omega'', P'') = \prod_{\hat{\mathbf{E}}}\left(\Lambda_{\hat{\mathbf{E}}}, d\lambda_{\hat{\mathbf{E}}}\right)$. Таким образом, каждое $\omega'' \in \Omega''$ представляет собой набор $\omega'' = \prod_{\hat{\mathbf{E}}}\lambda_{\hat{\mathbf{E}}}$ показаний независимых «рулеток», отвечающих всевозможным максимальным квантовым измерениям, так что $P(d\omega'') = \prod_{\hat{\mathbf{E}}} d\lambda_{\hat{\mathbf{E}}}$.

Теперь определим фазовое пространство искомого классического описания как $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, так что $\omega = (\omega', \omega'')$. Классические состояния будут задаваться распределениями вероятностей на Ω вида $S(d\omega) = S'(d\omega')P(d\omega'')$, где S' — произвольное распределение вероятностей на Ω'. Соответствие $S \to \hat{S}$ определяется формулой

$$\hat{S} = \int_{\Omega}\omega' S(d\omega) = \int_{\Omega'}\omega' S'(d\omega'). \qquad \text{(VII.3.7)}$$

Каждому максимальному квантовому измерению $\hat{\mathbf{E}}$ взаимно-однозначно сопоставляется детерминированное измерение $\mathbf{E} = \{E_i(\omega)\}$, где $E_i(\omega) = E_i\left(\omega', \lambda_{\hat{\mathbf{E}}}\right)$, а $\lambda_{\hat{\mathbf{E}}} = \pi_{\hat{\mathbf{E}}}(\omega'')$ есть координатная проекция точки ω''. Из (VII.3.6) вытекает, что

$$\mathrm{Tr}\hat{S}\hat{E}_i = \int_\Omega S(d\omega)E_i(\omega). \qquad \text{(VII.3.8)}$$

Остается определить соответствие между квантовыми наблюдаемыми и случайными величинами на Ω. Пусть $\hat{X}$ — квантовая наблюдаемая и $\hat{\mathbf{E}} = \{\hat{E}_i\}$ — одно из соответствующих ей *максимальных* измерений, так что $\hat{X} = \sum_i x_i\hat{E}_i$. Пусть $\mathbf{E} = \{E_i(\omega)\}$ — соответствующее ему классическое детерминированное измерение. Рассмотрим случайную величину $X(\omega) = \sum_i x_i E_i(\omega)$. Поскольку $\hat{\mathbf{E}}$ определяется по $\hat{X}$, вообще говоря, неоднозначно, мы получаем некоторую совокупность случайных величин $X(\omega) \to \hat{X}$, отвечающих всевозможным $\hat{\mathbf{E}}$. Важно, что $X(\omega)$ зависит от ω'' только через координатную проекцию $\lambda_{\hat{\mathbf{E}}} = \pi_{\hat{\mathbf{E}}}(\omega'')$. Если $X(\omega) \neq \mathrm{const}$, то это позволяет однозначно определить $\mathbf{E}$ по данному $X(\omega)$. Тогда набор значений x_i также однозначно восстанавливается по X. Далее по $\mathbf{E}$ однозначно находится $\hat{\mathbf{E}}$, а значит, и $\hat{X} = \sum_i x_i\hat{E}_i$. Поэтому отображение $X \to \hat{X}$ однозначно для $X(\omega) \neq \mathrm{const}$. Если же $X(\omega) \equiv \lambda$, то $x_i \equiv \lambda$ и, следовательно, $\hat{X} = \lambda\hat{I}$, так что и в этом случае однозначность не может нарушиться.

Из (VII.3.8) следует, что $\mathrm{Tr}\hat{S}\hat{X} = \int_\Omega S(d\omega)X(\omega)$, так что условие (E.1) выполняется. Отображение $S \to \hat{S}$, определяемое формулой (VII.3.7), очевидно, аффинно, значит, условие (S.1) также выполняется. Проверим выполнение функционального условия (X.1). Пусть X — случайная величина, $X \to \hat{X}$, и f — функция (X и f можно считать непостоянными). Тогда $f(X(\omega)) = \sum_i f(x_i)E_i(\omega)$. Тогда $\hat{\mathbf{E}}$, а значит и $\hat{X}$, определяется по E, т. е. по X, однозначно, так что $\widehat{f(X)} = \sum_i f(x_i)\hat{E}_i = f(\hat{X})$.

Отметим, что в случае $\dim\mathcal{H} = 2$, когда всякое нетривиальное разложение единицы в $\mathcal{H}$ максимально, наша конструкция удовлетворяет даже условию однозначности (X.0). Это объясняет наличие ограничения $\dim\mathcal{H} \geqslant 3$ в утверждениях 2, 3.

Говоря кратко, предложенное классическое описание устроено так, что все способы смешивания, приводящие к одинаковым квантовым состояниям $\hat{S}$, и все измерения, приводящие к одинаковым квантовым наблюдаемым $\hat{X}$, становятся в нем различимыми. Соответствие $S \to \hat{S}$ взаимно-однозначно лишь для чистых состояний $\hat{S}$, а соответствие $X \to \hat{X}$ — лишь для наблюдаемых с простым спектром, которым соответствует единственное максимальное измерение.

Конечно, такая модель не может реально претендовать на замену аппарата квантовой механики. Она крайне неэкономна с точки зрения представления статистики экспериментов и содержит массу несущественных «подробностей». Тем не менее значение приведенной здесь конструкции видится в том, что она выявляет структурные свойства квантовой теории, которые могут быть сохранены в классическом описании, и определенно показывает, что доказательство невозможности скрытых параметров не может основываться на одних минимальных статистических требованиях (E.1), (S.1), (X.1). При этом наличие дополнительности не является помехой для классического описания, коль скоро допускается, что такое описание может быть неоднозначным. Аналогичные выводы справедливы для произвольной отделимой модели, так как эти требования касаются лишь тех свойств квантовомеханического описания, которые являются общими для всех статистических моделей. Таким образом, рассмотрение гипотезы о скрытых параметрах с необходимостью должно привлекать какие-то более специфические особенности квантовомеханического описания.

3.3. Скрытые параметры и временные свойства квантовой системы. Здесь обсуждается вопрос: может ли классическое описание воспроизводить временные свойства, к которым относят а) квантовую динамику, определяемую уравнением Шредингера и б) скачкообразные изменения квантового состояния (редукции) в результате последовательных измерений?

Квантовая динамика уединенной системы переводится на язык классического описания, предложенного в предыдущем параграфе, без особых затруднений. Комплексный единичный вектор ψ определяет координаты $\left[\psi_j, \bar{\psi}_j\right]$ на множестве чистых состояний Ω', а уравнение Шредингера $\frac{d\psi}{dt} = -iH\psi$ с гамильтонианом H порождает поток $\{T'_t\}$ на Ω', который в координатах $\left[\psi_j, \bar{\psi}_j\right]$ описывается классической гамильтоновой системой (в комплексной форме)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_j}{dt} &= -i\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}_j}\Gamma\left(\psi, \bar{\psi}\right), \\ \frac{d\bar{\psi}_j}{dt} &= i\frac{\partial}{\partial\psi_j}\Gamma\left(\psi, \bar{\psi}\right); \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

с функцией Гамильтона $\Gamma\left(\psi, \bar{\psi}\right) = (\psi|H\psi)$. Полагая $T''_t\omega'' = \omega''$, получаем поток $T_t = T'_t \times T''_t$ на фазовом пространстве $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, определяющий динамику соответствующей классической системы.

Сложнее обстоит делом с последовательными измерениями и редукциями. Настоящая модель со скрытыми параметрами должна была бы полностью свести измерения к наблюдениям и тем самым разрешить так называемую «проблему измерения», составляющую еще одну тайну оснований квантовой механики. Этой проблеме уделялось много внимания в физической и философской литературе (см., например, [45], [99], [172], [184], [196]), и нижеследующие замечания являются, конечно, очень краткими и неполными.

Сначала дадим описание результатов последовательных измерений в квантовой механике. Пусть над квантовой системой в состоянии $\hat{S}$ производится сначала измерение $\hat{\mathbf{E}} = \{\hat{E}_i\}$, а затем измерение $\hat{\mathbf{F}} = \{\hat{F}_j\}$. Каково будет совместное распределение исходов этих двух измерений? Формула (VII.2.8), относящаяся к единичному измерению, не может дать ответа на этот вопрос в общем случае, и здесь требуется дополнительное предположение. «Гипотеза воспроизводимости» фон Неймана приводит к следующей формуле для распределения вероятностей двух последовательно проведенных измерений

$$\mu_{\hat{S}}^{\hat{\mathbf{E}},\hat{\mathbf{F}}}(i, j) = \mathrm{Tr}\hat{S}\hat{E}_i\hat{F}_j\hat{E}_i. \qquad \text{(VII.3.9)}$$

Если $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{F}}$ — совместимые измерения, то эти величины не зависят от порядка проведения измерений и равны вероятностям совместного измерения $\mathrm{Tr}\hat{S}\hat{E}_i\hat{F}_j$.

Если $\hat{\mathbf{E}}=\hat{\mathbf{F}}$, то $\mu_{\hat{S}}^{\hat{\mathbf{E}},\hat{\mathbf{F}}}(i,j)=0$ для $i\neq j$, что и объясняет название «гипотеза воспроизводимости». В общем случае несовместимых измерений $\mu_{\hat{S}}^{\hat{\mathbf{E}},\hat{\mathbf{F}}}\neq\mu_{\hat{S}}^{\hat{\mathbf{F}},\hat{\mathbf{E}}}$, что отражает невозможность придать объективное значение совместному распределению исходов двух измерений. Отметим также, что для фиксированной наблюдаемой $\hat{X}$ распределение (VII.3.9) зависит, вообще говоря, от выбора измерения $\hat{\mathbf{E}}$, отвечающего этой наблюдаемой.

Формула (VII.3.9) непосредственно обобщается на любое число последовательных измерений. Например, для трех измерений

$$\mu_{\hat{S}}^{\hat{\mathbf{E}},\hat{\mathbf{F}},\hat{\mathbf{G}}}(i,j,k)=\mathrm{Tr}\hat{S}\hat{E}_i\hat{F}_j\hat{G}_k\hat{F}_j\hat{E}_i. \qquad \text{(VII.3.10)}$$

Неопубликованные аргументы фон Неймана, о которых говорится в упоминавшемся уже замечании Вигнера, относятся как раз к возможностям воспроизведения результатов последовательных измерений. В этом замечании речь идет о частице со спином $1/2$, которая описывается двумерным пространством $\mathcal{H}$, а компоненты спина частицы в различных направлениях — некоммутирующими 2×2-матрицами (см. следующий параграф).

«...Возражая против введения скрытых параметров, фон Нейман часто приводил в качестве примера измерение компонент спина в различных направлениях частицы со спином $1/2$. Ясно, что с помощью скрытых параметров нетрудно предсказать вероятности двух возможных исходов каждого такого измерения. Однако, по мнению фон Неймана, этого нельзя сделать, если речь идет о большом числе последовательных измерений компонент спина в различных направлениях. Результат первого из таких измерений ограничивает интервал значений, которые могли принимать скрытые параметры до того, как оно было проведено. Вследствие этого ограничения распределение вероятностей значений скрытых параметров, характеризующих спин, для частиц с положительным результатом измерения будет отличаться от аналогичного распределения значений для частиц с отрицательным результатом измерения. Для тех частиц, для которых второе измерение компоненты спина по некоторому (отличному от первого) направлению также приводит к положительному результату, интервал допустимых значений уменьшается еще сильнее. Большое число последовательных измерений позволит отобрать частицы со столь близкими значениями скрытых параметров, что компонента спина в любом направлении с большой вероятностью будет отлична от нуля и иметь определенный знак. Согласно квантовой теории такое состояние невозможно, и мы приходим к противоречию. Шредингер возразил против приведенного только что рассуждения, заметив, что измерение компоненты спина в одном направлении, хотя и может налагать определенные ограничения на область допустимых значений какой-то части скрытых параметров, одновременно вполне может восстанавливать случайное распределение значений остальных скрытых параметров. У автора настоящей статьи [Вигнера] сложилось впечатление, что фон Нейман не считал возражение Шредингера убедительным. По мнению фон Неймана, в возражении Шредингера неявно содержится предположение о скрытых параметрах измерительного прибора. В качестве контрпримера, наглядно демонстрирующего всю несостоятельность точки зрения Шредингера, фон Нейман предложил рассмотреть два прибора со взаимно перпендикулярными магнитными полями и последовательность измерений, производимых то одним, то другим прибором. В конце концов в результате многочисленных последовательных измерений компонент спина в направлениях, задаваемых магнитными полями приборов, мы сможем фиксировать даже скрытые параметры обоих приборов и, следовательно, всей системы. Это наглядное опровержение фон Нейманом возражения Шредингера так и не было опубликовано».

Обсудим, как должно меняться состояние в модели со скрытыми параметрами из § II.2, чтобы обеспечить воспроизведение результатов последовательных измерений. Для простоты ограничимся чистыми состояниями и максимальными измерениями. Если в квантовом состоянии ω' производится измерение $\hat{\mathbf{E}}$, а затем измерение $\hat{\mathbf{F}}$, то согласно (VII.3.9) вероятность получить исход (i,j) равна

$$\mu_{\omega'}^{\hat{\mathbf{E}},\hat{\mathbf{F}}}(i,j) = |\langle\psi_{\omega'}|e_i\rangle|^2\,|\langle e_i|f_j\rangle|^2\,,$$

где $\{e_i\}\,,\{f_j\}$ — базисы, определяющие измерения $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{F}}$. Нетрудно убедиться, что такие значения вероятностей будут обеспечены, если исходная точка фазового пространства $\omega = (\omega',\omega'')$ после первого измерения перейдет в точку $(\hat{E}_i,\omega'')$ при условии, что первое измерение дало i-й исход (т. е. если $\lambda_{\hat{\mathbf{E}}} = \pi_{\hat{\mathbf{E}}}(\omega'')$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=1}^{i-1}|\langle\psi_{\omega'}|e_i\rangle|^2 < \lambda_{\hat{\mathbf{E}}} \leqslant \sum_{k=1}^{i}|\langle\psi_{\omega'}|e_i\rangle|^2\,.$$

Изменение компоненты ω' представляет собой, таким образом, управляемый марковский процесс. Следует еще описать переход $\omega'' \to \tilde{\omega}''$. Если второе измерение совпадает с первым, то из формулы (VII.3.9) вытекает, что его исход должен совпадать с исходом первого измерения. Чтобы это выполнялось, должно быть $\pi_{\hat{\mathbf{E}}}(\tilde{\omega}'') = \pi_{\hat{\mathbf{E}}}(\omega'')$, т. е. «рулетка», соответствующая измерению $\hat{\mathbf{E}}$, сохраняет свое состояние после розыгрыша результата первого измерения. Для выполнения формулы (VII.3.9) несущественно, что будет происходить с остальными «рулетками», лишь бы они сохраняли равномерное распределение.

Рассмотрим, однако, три последовательных измерения $\hat{\mathbf{E}}$,$\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{E}}$. По формуле (VII.3.10) вероятность получить последовательность результатов (i,j,k) равна

$$\mu_{\omega'}^{\hat{\mathbf{E}},\hat{\mathbf{F}},\hat{\mathbf{E}}}(i,j,k) = |\langle\psi_{\omega'}|e_i\rangle|^2\,|\langle e_i|f_j\rangle|^2\,|\langle f_j|e_k\rangle|^2\,.$$

Чтобы в классической модели могло получиться такое соотношение, необходимо, чтобы после второго измерения распределение вероятностей «рулетки», отвечающей измерению $\hat{\mathbf{E}}$, полностью обновилось, т. е. чтобы $\pi_{\hat{\mathbf{E}}}(\omega'')$ стало случайной величиной, не зависящей от своих предыдущих значений. Поскольку $\hat{\mathbf{E}}$ произвольно, это приводит к следующему окончательному правилу изменения состояния рулеток ω'': в результате проведения измерения $\hat{\mathbf{F}}$ состояния всех рулеток $\lambda_{\hat{\mathbf{E}}} = \pi_{\hat{\mathbf{E}}}(\omega'')$ с $\hat{\mathbf{E}} \neq \hat{\mathbf{F}}$ полностью обновляются, тогда как $\lambda_{\hat{\mathbf{F}}} = \pi_{\hat{\mathbf{F}}}(\omega'')$ сохраняет свое значение. Это вполне соответствует замечанию Шредингера. Легко убедиться, что такое предписание позволяет воспроизвести вероятности всевозможных последовательных максимальных измерений.

Для того чтобы рассмотреть все, а не только максимальные измерения, потребуется соответствующим образом расширить множество «рулеток» в конструкции классического описания.

Скрытые переменные ω состоят из двух компонент ω' и ω'', из которых первая, повидимому, может рассматриваться как характеристика самой системы. Вопрос — к чему следует отнести ω'' — собственно к системе или к взаимодействующим с ней приборам, весьма интересен, хотя и не дает прямых аргументов, опровергающих предписание Шредингера. С одной стороны, кажется естественным рассматривать $\lambda_{\hat{\mathbf{E}}} = \pi_{\hat{\mathbf{E}}}(\omega'')$ как параметры прибора $\hat{\mathbf{E}}$. Взаимодействие прибора $\hat{\mathbf{E}}$ с системой фиксирует параметры прибора, и $\lambda_{\hat{\mathbf{E}}}$ не меняется после повторного измерения $\hat{\mathbf{E}}$. С другой стороны, совокупность всевозможных измерений $\hat{\mathbf{E}}$, которые могут быть произведены над системой, и описывающую ее совокупность параметров $\omega'' = \prod_{\hat{\mathbf{E}}} \lambda_{\hat{\mathbf{E}}}$ можно рассматривать уже как характеристику системы в целом, тем более что измерение $\hat{\mathbf{F}}$ затрагивает все параметры $\lambda_{\hat{\mathbf{E}}}$, $\hat{\mathbf{E}} \neq \hat{\mathbf{F}}$. Здесь уместно вспомнить слова Бора о том, что «мы сталкиваемся в атомной физике с совершенно новой ситуацией, когда принципиально невозможно провести четкое разграничение между внутренними свойствами объектов и их взаимодействием с измерительными приборами, которые необходимо использовать для самого обнаружения этих свойств» ([8], с. 383). Так или иначе, существует способ определить стохастическое правило изменения состояний классической системы, позволяющее воспроизвести вероятности всех последовательных квантовых измерений.

Для случая квантовой системы со спином $1/2$ это было отмечено Дж. Клаузером [162] в дискуссии, которая последовала за опубликованием статьи Вигнера. Рассмотрев модель Белла, Клаузер предложил очень простое правило изменения состояния после измерения, использующее в сущности предписание Шредингера и воспроизводящее вероятности всех последовательных измерений. В своем ответе Вигнер выдвинул следующее возражение, которое применимо и к нашей модели: модель со скрытыми параметрами должна давать объяснение изменения состояния в «механических», т. е. детерминированных, а не стохастических терминах. Постоянный приток случайности, который необходим для частичного обновления распределения ω'' после каждого измерения, находится, как отмечает Вигнер, в конфликте с теоремой типа Лиувилля (о сохранении фазового объема механической системы). Чтобы описать такое перманентное обновление, требуется радикальное увеличение размерности. Поясним это на простейшем примере последовательности независимых случайных величин $\{X_i\}$ со значениями в $\mathbb{R}$. Чтобы представить эту последовательность как динамическую систему с инвариантной мерой, придется перейти к пространству траекторий $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Стохастическое обновление состояния одномерной системы можно представить как эволюцию механического типа лишь в бесконечномерном пространстве последовательностей.

В заключение своего ответа Вигнер поясняет, что «все схемы со скрытыми параметрами, которые сам фон Нейман или кто-либо из известных ему лиц мог себе представить и которые воспроизводили бы вероятности последовательных измерений направлений спина, имели некоторые черты, которые делали их непривлекательными и, по существу, неприемлемыми». По мнению Вигнера, «это и было действительной причиной убежденности фон Неймана в неадекватности теорий со скрытыми параметрами». Таким образом, требование воспроизведения результатов последовательных измерений в теории со скрытыми параметрами, по-видимому, приводит к непривлекательным конструкциям, вызывающим отрицательные эмоции как у физиков, так и у математиков. Однако каких-либо точных результатов, определенно закрывающих поиски в этом направлении, получено все же не было. После опубликования работ Белла центр тяжести исследований переместился на другой аспект скрытых параметров, связанный с описанием составных квантовых систем.

3.4. Составные системы, неравенство Белла и парадокс ЭПР. Наиболее важным качеством математического аппарата квантовой механики с точки зрения физики является возможность описания характерных черт *взаимодействия* микрообъектов, не находящих отражения в классической картине. Тем не менее первый шаг в квантовомеханическом описании взаимодействия следует в основном рецепту, заимствованному из классики. Именно, вводится понятие системы невзаимодействующих «уединенных» компонент, а затем взаимодействие задается в терминах элементов этой составной системы. Таким образом, когда речь идет о взаимодействии, то исходным математическим материалом служит не столько модель уединенной квантовой системы, сколько категория таких моделей с операцией произведения, задающей правило образования составной системы. В классической механике рассматриваются всевозможные фазовые (симплектическне) пространства с операцией прямого произведения, а в квантовой — гильбертовы пространства с операцией тензорного произведения.

Обсудим эту операцию, для простоты не принимая в учет дополнительных осложнений, связанных с неразличимостью квантовых частиц. Тензорным произведением вектора $\psi_1 \in \mathcal{H}_1$ с компонентами $[\psi_1^i]$ и вектора $\psi_2 \in \mathcal{H}_2$ с компонентами $[\psi_2^j]$ называется вектор $\psi_1 \otimes \psi_2$ с компонентами $[\psi_1^i \psi_2^j]$, который удобно изображать матрицей. Пространство $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ состоит из всевозможных линейных комбинаций (суперпозиций) векторов вида $\psi_1 \otimes \psi_2$, т. е. из всевозможных матриц $[\psi^{ij}]$. Рассмотрим чистое состояние составной системы, определяемое единичным вектором $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ (для краткости будем дальше отождествлять вектор ψ с соответствующим чистым состоянием). Далеко не каждый такой вектор может быть записан в факторизованной форме $\psi_1 \otimes \psi_2$, соответствующей тому, что первая и вторая компоненты находятся в однозначно определенных чистых состояниях. Значительная часть векторов ψ имеет вид суперпозиций подобных произведений. Для такой суперпозиции не представляется возможным провести однозначное разделение составной системы на первую и вторую компоненты. Эти нефакторизуемые *сцепленные* состояния системы представляют собой целостные образования, в которых ее части существуют, как принято говорить, виртуально. В этом заключается свойство *квантовой неразделимости.*

На первый взгляд кажется непонятным, как такое слияние частей может произойти еще до начала взаимодействия компонент. Объяснение состоит в том, что приготовление сцепленного чистого состояния составной системы предполагает предварительное взаимодействие между компонентами. В самом деле, всякий вектор ψ можно получить из факторизуемого $\psi_1 \otimes \psi_2$ действием некоторого унитарного оператора U в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, так что $\psi = U(\psi_1 \otimes \psi_2)$. Тогда приготовление состояния ψ заключается в том, что компоненты, находящиеся в состояниях ψ_1, ψ_2, приводятся во взаимодействие, результат которого описывается оператором U. В отличие от классической механики, где приготовление любого состояния может быть полностью описано в кинематических терминах, в квантовой механике в описании приготовления многих состояний с необходимостью должен присутствовать динамический элемент.

Рассмотрим с этой точки зрения модель со скрытыми параметрами, предложенную в § II.2. Поскольку множество чистых состояний Ω' составной системы шире прямого произведения $\Omega_1' \times \Omega_2'$, где Ω_j' множество чистых состояний j-й компоненты, то и фазовое пространство классического описания для составной системы будет шире произведения фазовых пространств компонент: $\Omega_1 \times \Omega_2 \subsetneq \Omega$. Таким образом, построенное в § II.2 классическое описание не является соответствием между категориями классических и квантовых систем, сохраняющим операции произведения в этих категориях.

Оказывается, что вообще не существует способа установить такое соответствие. Более того, в любом классическом описании составной квантовой системы величины, отвечающие наблюдаемым отдельных компонент, с необходимостью «сцеплены» так, как это не свойственно для компонент классической системы. Чтобы сформулировать точный результат, заметим, что наблюдаемые, относящиеся к первой и второй компонентам, имеют соответственно вид $\hat{X} = \hat{X}_1 \otimes \hat{I}_2, \quad \hat{Y} = \hat{I}_1 \otimes \hat{Y}_2$, где $\hat{X}_1$ — оператор в $\mathcal{H}_1$, $\hat{Y}_2$ — оператор в $\mathcal{H}_2$, а $\hat{I}_j$ — единичный оператор в $\mathcal{H}_j$. Разумеется, $\hat{X}\hat{Y} = \hat{Y}\hat{X}$, так что наблюдаемые, относящиеся к разным компонентам, всегда совместимы, однако $\hat{X}, \hat{Y}$ обладают еще и более сильным свойством алгебраической независимости: из $f(\hat{X}) = g(\hat{Y})$ следует $f(\hat{X}) = g(\hat{Y}) = c\hat{I}$ (этим свойством не обладают, например, коммутирующие величины $\hat{X}$ и $\hat{X}^2$, если $\hat{X}^2 \neq c\hat{I}$).

Предложение VII.3.6. *Не существует классического описания составной квантовой системы в пространстве $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, удовлетворяющего условиям* (E.1), (X.2) *и следующему условию разделимости:*

(X.6) *для любых наблюдаемых $\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_n$ первой подсистемы и наблюдаемых $\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_m$ второй подсистемы найдутся случайные величины $X_1, \ldots, X_n$; $Y_1, \ldots, Y_m$, такие что $X_i \to \hat{X}_i, Y_j \to \hat{Y}_j$ и при этом $X_i Y_j \to \hat{X}_i \hat{Y}_j$.*

Более того, будет показано, что этому условию нельзя удовлетворить уже при $n = m = 2$. Отметим, что выполнения условий однозначности (X.0) или (S.0) здесь не требуется. Утверждение означает, что хотя для любой пары $\hat{X}, \hat{Y}$, где $\hat{X}$ (соответственно $\hat{Y}$) относится к первой (соответственно второй) системе, всегда можно найти X, Y, такие, что $X \to \hat{X}, Y \to \hat{Y}$ и $XY \to \hat{X}\hat{Y}$ (это вытекает из возможности удовлетворить правилу произведений (X.4)), невозможно сделать это так, чтобы величина Y была одинаковой для всех $\hat{X}$, а X — одинаковой для всех $\hat{Y}$. Выражение $\hat{X}\hat{Y}$ входит в корреляцию

$$\left\langle \hat{X}\hat{Y} \right\rangle = \mathrm{Tr}\hat{S}\hat{X}\hat{Y} \qquad \text{(VII.3.11)}$$

результатов совместных измерений $\hat{X}$ и $\hat{Y}$. Таким образом, для того чтобы воспроизводить квантовомеханические корреляции между компонентами системы, теория со скрытыми параметрами должна обладать следующим странным свойством: выбор способа, которым производится наблюдение величины $\hat{Y}$ над второй компонентой, с необходимостью должен зависеть от того, какая величина $\hat{X}$ наблюдается над первой компонентой.

Доказательство утверждения основано на *неравенстве Белла—Клаузера—Хорна—Шимони*, которое является одной из модификаций знаменитого неравенства Белла [7]. Предположим, что можно удовлетворить условию разделимости (X.6) для $n = m = 2$, и докажем, что тогда для любых наблюдаемых $\hat{X}_1, \hat{X}_2$, относящихся к первой компоненте, и любых $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2$, относящихся ко второй и принимающих значения, по модулю не превосходящие 1, корреляции (VII.3.11) подчиняются неравенству

$$\left|\left\langle \hat{X}_1\hat{Y}_1\right\rangle + \left\langle \hat{X}_1\hat{Y}_2\right\rangle + \left\langle \hat{X}_2\hat{Y}_1\right\rangle - \left\langle \hat{X}_2\hat{Y}_2\right\rangle\right| \leqslant 2. \tag{VII.3.12}$$

В силу условия (E.1) и условия разделимости (X.6), достаточно доказать это неравенство для корреляций классических наблюдаемых $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $Y_1(\omega)$, $Y_2(\omega)$, даваемых формулами вида

$$\langle XY\rangle = \int_\Omega S\,(d\omega)\, X\,(\omega)\, Y\,(\omega)\,.$$

В силу спектрального правила (X.2) должно выполняться $|X_j| \leqslant 1$, $|Y_k| \leqslant 1$; $j, k = 1, 2$, откуда

$$|X_1Y_1 + X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_2Y_2| \leqslant |Y_1 + Y_2| + |Y_1 - Y_2| \leqslant 2\max\{|Y_1|, |Y_2|\} \leqslant 2,$$

следовательно $-2 \leqslant X_1Y_1 + X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_2Y_2 \leqslant 2$. Беря математическое ожидание, приходим к (VII.3.12).

Остается показать, что в любой составной квантовомеханической системе найдутся наблюдаемые $\hat{X}_1, \hat{X}_2; \hat{Y}_1, \hat{Y}_2$ и состояние $\hat{S}$, для которых неравенство (VII.3.12) не выполняется. Для этого рассмотрим сначала конкретную систему, состоящую из двух (различимых) частиц со спином $1/2$, так что $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ двумерны. Обозначим $\hat{X}(\vec{a})$ наблюдаемую составляющей спина первой частицы в направлении $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, а $\hat{Y}(\vec{b})$ — составляющей спина второй частицы в направлении $\vec{b}$. Тогда в базисе

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

имеем

$$\hat{X}(\vec{a}) = \begin{bmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & -a_z \end{bmatrix},$$

а $\hat{Y}(\vec{b})$ задается аналогичной матрицей в соответствующем базисе пространства $\mathcal{H}_2$.

Пусть $\hat{S}_\psi$ — чистое состояние составной системы, определяемое сцепленным вектором

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\big]. \tag{VII.3.13}$$

Элементарный подсчет скалярного произведения показывает, что

$$\langle\psi|\sigma(\vec{a})\otimes\sigma(\vec{b})|\psi\rangle = -\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{VII.3.14}$$

Если выбрать четыре вектора $\vec{a}_j$, $\vec{b}_k$, $(j, k = 1, 2)$, лежащих в одной плоскости, как показано на рис. 1, то

$$\left|\left\langle \hat{X}_1\hat{Y}_1\right\rangle + \left\langle \hat{X}_1\hat{Y}_2\right\rangle + \left\langle \hat{X}_2\hat{Y}_1\right\rangle - \left\langle \hat{X}_2\hat{Y}_2\right\rangle\right| = 2\sqrt{2},$$

что противоречит (VII.3.12).

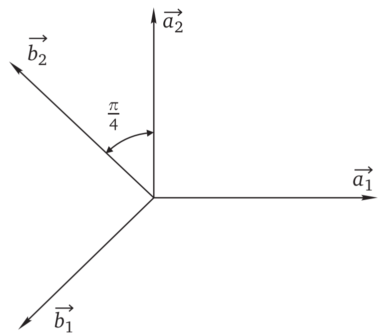

Рис. 1. Выбор векторов $\vec{a}_j$ и $\vec{b}_k$.

Для произвольной составной квантовой системы $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ всегда можно найти двумерные подпространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, и провести для них указанную конструкцию, что доказывает утверждение и в общем случае.

Лежащий в основе доказательства пример системы двух пространственно разделенных частиц очень важен по своим физическим следствиям. На него указали еще в 1935 г. А. Эйнштейн, Б. Подольский и Н. Розен (ЭПР) в ходе известной дискуссии о полноте квантовой механики ([8], с. 399; [155], с. 604) (рассматривать частицы со спином предложил позднее Бом). ЭПР считали, что их пример показывает «неполноту» квантовомеханического описания. Неравенство Белла приводит к существенной перестановке акцентов: если квантовомеханическое описание верно, то попытка «дополнить» его путем введения скрытых параметров неизбежно приводит к противоречию с некоторым естественным принципом *локальности*. Предположим, что $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ описывают спиновые степени свободы двух квантовых частиц со спином $1/2$, локализованных в макроскопически разделенных пространственных областях. Квантовая механика постулирует существование состояния системы из этих частиц, в котором совокупность спиновых переменных описывается произвольной суперпозицией факторизуемых векторов, в частности вектором (VII.3.13). Более того, в принципе существует способ реализовать такое состояние, как результат некоторого предварительного взаимодействия; например, оно может возникнуть в результате разлета продуктов распада системы с нулевым спином.

Пусть теперь производится совместное измерение составляющих спина первой частицы в направлении $\vec{a}$ и второй — в направлений $\vec{b}$. После достаточно большой серии повторении статистическим усреднением находится корреляция между $\hat{X}(\vec{a})$ и $\hat{Y}(\vec{b})$. Сопоставим следующие три положения:

I правильные значения корреляций даются квантово-механической формулой (VII.3.11);

II существует классическое описание составной квантовой системы, удовлетворяющее спектральному правилу, т. е. сохраняющее «объективные значения» наблюдаемых;

III «реальная ситуация для первой частицы не зависит от того, что делается со второй частицей, пространственно отделенной от первой».

Последнее свойство называют *эйнштейновской локальностью* [155] или *разделимостью* [165]. Эйнштейн связывал его с «принципом близкодействия», который выражается в том, что «для относительной независимости пространственно отделенных объектов (A и B) характерна следующая идея: внешнее влияние A не имеет никакого непосредственного влияния на B» ([155], с. 614). Отметим, что положение (III) в такой форме имеет прямое недвусмысленное толкование лишь в классической картине, т. е. при условии, что выполнено (II). Классическое описание, удовлетворяющее условию (III), называют локальной теорией со скрытыми параметрами или «локальным реализмом». Поскольку локальность подразумевает выполнение свойства разделимости в предложении VII.3.6, неравенство Белла показывает, что положения (I)-(III) несовместимы, т. е. *локальная теория со скрытыми параметрами, воспроизводящая статистические предсказания квантовой механики, невозможна.* Это можно рассматривать как современную трактовку «парадокса ЭПР».

Более того, неравенство Белла открывает принципиальную возможность экспериментальной проверки альтернативы: квантовая механика против локальной теории со скрытыми параметрами. Практическое осуществление таких экспериментов сопряжено, однако, с большими трудностями и потребовало значительных усилий.

Знаменитые эксперименты группы Аспэ 1981—1982 гг. показали согласие с квантовомеханической формулой для корреляций. В дальнейшем был выполнен целый ряд экспериментов, убедительно подтверждающих квантовую теорию, хотя в паре случаев [192], [163] утверждалось, что данные согласуются с неравенствами Белла.

Однако вопрос все еще нельзя считать закрытым, поскольку цена отказа от «реалистического» описания Природы, повидимому, слишком велика [165]. Речь идет не о сторонниках наивного реализма, которые хотели бы иметь картинное описание микромира как чего-то, доступного непосредственному человеческому восприятию, и поэтому продолжают попытки найти пробелы в аргументах, ведущих к заключению о несовместимости локальной теории со скрытыми параметрами со статистическими предсказаниями квантовой теории относительно корреляций между частями составной квантовой системы. Следует отметить, что хотя корреляционные неравенства сами по себе достаточно элементарны, логика их использования в проблеме скрытых параметров совсем не тривиальна; попытки найти в ней какие-то противоречия, «лазейки» (loopholes) часто оказываются основанными на недопонимании. Критический разбор такого рода попыток дается в статье [166], где, в частности, дано доказательство неравенства Белла, принимающее во внимание конечность выборки и возможные корреляции между последовательными экспериментами.

Вскоре после публикации работ Белла пришло понимание, что корреляционные неравенства могут нарушаться и в локальной теории со скрытыми параметрами при недостаточной эффективности детектирования частиц, когда при подсчете корреляций результаты неудачных реализаций просто отбрасываются (detection loophole). Такой апостериорный отбор (postselection) фактически равносилен изменению состояния, относительно которого вычисляются корреляции. Простая классическая модель, удовлетворяющая условию локальности, для такого эксперимента с эффективностью детекторов ниже 75% была продемонстрирована в работе Н. и Б. Джизенов [169]. Таким образом, результаты подобных экспериментов не могут рассматриваться как решающие в данном вопросе. В течение ряда последующих лет происходило как совершенствование техники эксперимента, так и теоретический поиск более чувствительных неравенств, см. например [185]. В 2015 г. были опубликованы отчеты о трех решающих экспериментах, подтверждающих квантовомеханические корреляции, в которых возможные «лазейки» были исключены [199].

Таким образом, чтобы избежать противоречия между статистическими предсказаниями квантовой теории и принципом локальности, приходится отказаться от скрытых параметров и признать принципиальную невозможность исчерпывающего рационалистического описания квантовых состояний и измерений в классических терминах. Такой вывод соответствует умонастроению большинства физиков, отраженному в следующих словах Бора: «... здесь мы сталкиваемся не с каким-то аналогом использования вероятностных рассмотрении при описании поведения сложных механических систем, а с невозможностью указания каких-либо конкретных сведений относительно хода индивидуальных процессов сверх того, что допускается внутренне согласованным обобщением детерминистической механики» ([8], с. 502). Все это свидетельствует о невозможности «мирного сосуществования» квантовой механики и локальной «реалистической» теории, какой является общая теория относительности (что на самом деле и лежало в основе озабоченности Эйнштейна). Непонятно, какого рода компромисс мог бы лежать в основе объединенной квантовой теории взаимодействий, включающей гравитацию.

С другой стороны, макроскопические или, по крайней мере, мезоскопические проявления феномена сцепленности имеют критически важное значение для будущих квантовых информационных технологий. Современные исследования корреляционных неравенств, обозначающих количественную границу между «классическим» и «квантовым», являются одним из важных направлений квантовой теории информации, имеющим приложения в квантовой криптографии, методах обнаружения сцепленности, многочастичных системах интерактивных доказательств, теории сложности коммуникации и т. д., см. [180] и цитированную там литературу. Обсуждение этих волнующих вопросов, однако, выходит за рамки задач настоящего очерка.

Литература

[1] Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, "Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве".–М.: Наука, 1966.

[2] Ф. А. Березин, "Метод вторичного квантования".–М.: Наука, 1965.

[3] Д. И. Блохинцев, "Основы квантовой механики". –М.: Высшая школа, 1961.

[4] Д. И. Блохинцев, "Принципиальные вопросы квантовой механики".–М.: Наука, 1966.

[5] Н. Н. Боголюбов, "Лекции по теории симметрии элементарных частиц".-М.: Изд-во МГУ, 1966.

[6] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов и Н. Т. Тодоров, "Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля".–М.: Наука, 1969.

[7] Д. Бом, "Квантовая теория".–М.: Наука, 1965(1951).

[8] Н. Бор, "Атомная физика и человеческое познание". – М.: ИЛ, 1961.

[9] В. Б. Брагинский и Ю. И. Воронцов, *Квантовомеханические ограничения в макроскопических экспериментах и современная экспериментальная техника* .– УФН 114, вып. 1, 1974.

[10] Г. Вейль, "Теория групп и квантовая механика". –Харьков: ОНТИ ДНТВУ, 1938 (1928).

[11] Э. П. Вигнер, "Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров".–М.: Физматгиз, 1961 (1959).

[12] И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, "Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства".–М.: Физматгиз, 1961.

[13] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос и З. Я. Шапиро, "Представления группы вращений и группы Лоренца".–М.: Физматгиз, 1958.

[14] Р. Дж. Глаубер, *Оптическая когерентность и статистика фотонов*, (в сб. "Квантовая оптика и квантовая радиофизика" – М.: Мир, 1966) (1963).

[15] Б. В. Гнеденко, "Курс теории вероятностей".–М.: Наука, 1969.

[16] Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц, "Линейные операторы, I".–М.: ИЛ, 1962.

[17] П. А. М. Дирак, “Принципы квантовой механики”.–М.: Наука, 1979 (1930).

[18] Д. П. Желобенко, “Компактные группы Ли и их представления”.–М.: Наука, 1970.

[19] А. А. Кириллов, “ Элементы теории представлений”.–М.: Наука, 1978.

[20] Дж. Р. Клаудер и Э. С. О. Сударшан, “Основы квантовой оптики”.–М.: Мир, 1970 (1968).

[21] А. Н. Колмогоров, “Основные понятии теории вероятностей”. – М.: Наука, 1974 (1933).

[22] А. Н. Колмогоров, “Теория передачи информации”.–М.: Изд-во АН СССР. 1957.

[23] Г. Крамер, “Математические методы статистики” .–М.: Мир, 1975 (1946).

[24] Н. С. Крылов и В. А. Фок, *О двух основных толкованиях соотношения неопределенностей для энергии и времени*, ЖЭТФ 17, N 2. 1947, 93-107.

[25] У. Люиселл, “Излучение и шумы в квантовой электронике”.–М.: Наука, 1972 (1964).

[26] Дж. У. Макки, “Лекции по математическим основам квантовой механики”.–М.: Мир, 1965 (1963).

[27] И. А. Малкин и В. И. Манько, “Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем”.–М.: Наука, 1979.

[28] А. И. Мальцев, “Основы линейной алгебры”.–М.: Наука, 1970.

[29] Л. И. Мандельштам, “Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике”.–М.: Наука, 1972 (1939).

[30] Л. И. Мандельштам и И. Е. Тамм, *Соотношение неопределенностей энергия–время в нерелятивистской квантовой механике*, Изв. АН СССР (серия физич.) 9, N 1–2, 1945, 122–128.

[31] Дж. Э. Мойал, *Квантовая механика как статистическая теория.* –сб. “Вопросы причинности в квантовой механике”.–М., 1955.

[32] М. А. Наймарк, *О самосопряженных расширениях второго рода симметричного оператора*, Изв. АН СССР (серия матем.) 4, N 1, 1940, 53–104.

[33] М. А. Наймарк, *Спектральные функции симметричного оператора*, Изв. АН СССР (серия матем.) 4, N 3. 1940, 277–318.

[34] А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и некоторые их применения*, УФН 123, N 1. 1977, 23–53.

[35] Л. С. Полак (ред.), “50 лет квантовой механике”, Наука, Москва, 1979.

[36] Г. Полиа и Г. Сеге, “Задачи и теоремы из анализа. II”. – М.: ГИТТЛ, 1956.

[37] Л. С. Понтрягин, “Непрерывные группы”.–М.: Наука, 1970.

[38] М. Рид, и Б. Саймон, “ Методы современной математической физики, т. I. Функциональный анализ”.–М.: Мир, 1977 (1972).

[39] Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, “Лекции по функциональному анализу (перев. с франц.)”.–М.: Мир, 1979 (1953).

[40] Р. Т. Рокафеллар, “Выпуклый анализ”. –М.: Мир, 1973 (1970).

[41] И. Сигал, “Математические проблемы релятивистской физики”.–М.: Мир, 1968 (1963).

[42] Р. П. Фейнман, Р. Б. Лейтон и М. Сэндс, “Квантовая механика”.–ФЛФ, т. 8.–М.: Мир, 1966 (1965).

[43] В. А. Фок, “Начала квантовой механики”.–М.: Наука, 1976 (1982).

[44] В. А. Фок, *Об интерпретации квантовой механики.* – УФН 62, N 4, 1957, 461-474.

[45] Дж. фон Нейман, “Математические основы квантовой механики”. -М.: Наука, 1964 (1932).

[46] К. У. Хелстром, “Квантовая теория проверки гипотез и оценивания”.–М.: Мир, 1979 (1976).

[47] А. С. Холево, *О квантовых характеристических функциях*, Пробл. передачи информ. 6, N 4, 1970, 44–48.

[48] А. С. Холево, *К математической теории квантовых каналов связи*, Пробл. передачи информ. 8, N 1, 1972, 63–71.

[49] А. С. Холево, *Аналог теории статистических решений в некоммутативной теория вероятностей.*–Тр. Моск. матем. об-ва 26, 1972, 133-149.

[50] А. С. Холево, *Информационные аспекты квантового измерения*, Пробл. передачи информ. 9, N 2, 1973, 31–42.

[51] А. С. Холево, *Оптимальные квантовые измерения*, Теор. и матем. физика 13, N 3, 1973, 184–199.

[52] А. С. Холево, *Исследования по общей теории статистических решений.*–Тр. МИАН 124.–М.: Наука. 1976.

[53] Н. Н. Ченцов, “Статистические решающие правила и оптимальные выводы”. М., Наука, 1972.

[54] Ю. М. Широков, *Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики*, ЖЭТФ, вып. 5, 1957, 1196–1214.

[55] Ю. М. Широков, *Квантовая и классическая механика в представлении фазового пространства*, Физ. элем. частиц и атом. ядра **10** (1) (1979), 5–50.

[56] Г. Г. Эмх, “Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля”. М., Мир, 1976.

[57] L. Accardi, A. Frigerio and J. T. Lewis, “ Quantum Stochastic Processes”, Publ. RIMS Kioto University **18** (1982), 97-133.

[58] G. R. Allcock, *The time of arrival in quantum mechanics*, Ann. Physics **53** (1969), 253–348.

[59] E. M. Alfsen, “Compact Convex Sets and Boundary Integrals”, Ergebnisse der Mathematik 57, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[60] W. O. Amrein, *Localizability for particles of mass zero*, Helv. Phys. Acta **42** (1) (1969), 149–190.

[61] V. Bargmann, *On unitary ray representations of continuous groups*, Ann. of Math., **59** (1) (1954), 1–46.

[62] V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform*, I, Comm. Pure Appl. Math. **14** (3) (1961), 187–214.

[63] V. Bargmann, *Note on Wigner's theorem on symmetry operations*, J. Math. Phys. **5** (1964), 862–868.

[64] H. Bauer, *Minimalstellen von Functionen und Extremalpunkte*, Arch. Math. **9** (1958), 389–393.

[65] F. J. Belinfante, “A Survery of Hidden Variables Theories”, Pergamon Press, New York, 1973.

[66] J. Bell, *On the problem of hidden variables in quantum mechanics*, Rev. Modern Phys. **38** (1966), 447–452.

[67] P. Carruthers and M. M. Nieto, *Phase and angle variables in quantum mechanics*, Rev. Modern Phys. **40** (2) (1968), 411–440.

[68] D. Castler, *The C^*-algebras of a free Boson field*, Comm. Math. Phys. **1** (1) (1965), 14–48.

[69] C. D. Cushen and R. L. Hudson, *A quantum mechanical central limit theorem*, J. Appl. Probab. **8** (1971), 454–469.

[70] A. Daneri, A. Loinger and G. M. Prosperi, *Quantum theory of measurement and the ergodicity conditions*, Nuclear Phys. **33** (1962), 297–319.

[71] E. B. Davies, *On repeated measurements of continuous observables in quantum mechanics*, J. Funct. Anal. **6** (1970), 318–346.

[72] E. B. Davies, “Quantum Theory of Open Systems”, Academic Press, London, 1976.

[73] E. B. Davies, *Quantum communication systems*, IEEE Trans. Inform. Theory IT **23** (7) (1977), 530-534.

[74] E. B. Davies and J. T. Lewis, *An operational approach to quantum probability*, Comm. Math. Phys. **17** (3) (1970), 239–260.

[75] H. Ekstein and A. J. F. Siegert, *On a reinterpretation of decay experiments*, Ann. Physics **68** (1971), 509–520.

[76] T. S. Ferguson, “Mathematical Statistics: a Decision Theoretic Approach”, Academic Press, New York, 1967.

[77] R. P. Feynmann, *Concept of probability in quantum mechanics*, Proc. 2$^{\rm nd}$ Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probab. Berkeley (1951), 533–541.

[78] D. Gabor, *Communication theory and physics*, Phil. Mag. **41** (1950), 1161-1197.

[79] J. P. Gordon and W. Louisell, *Simultaneous measurements of non-commuting observables*, In: “Physics of Quantum electronics”, P. Kelley, M. Lax and B. Tannenwold (eds.), McGraw-Hill, New York, 1966, 833–840.

[80] V. Gorini, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski and E. C. G. Sudarshan, *Properties of quantum Markovian equantions*, Rep. Math. Phys. **13** (3) (1978), 149–173.

[81] S. Gudder, *Convex structures and operational quantum mechanics*, Comm. Math. Phys. **29** (3) (1973), 249–264.

[82] P. R. Halmos, “Finite-Dimensional Vector Spaces”, 2$^{\rm nd}$ ed. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1958.

[83] P. R. Halmos, “A Hilbert Space Problem Book”, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1967.

[84] A. Hartkämper, *Axiomatics of preparing and measuring processes*, In: “Foundations of Quantum Mechanics and Ordered Linear Spaces”, Lecture Notes in Phys. **29** (1974), 107–115.

[85] C. W. Helstrom, *Detection theory and quantum mechanics*, Inform. and Control **10** (3) (1967), 254–291.

[86] C. W. Helstrom, *Minimum mean-square error estimation in quantum statistics*, Phys. Let. **25A** (1967), 101–102.

[87] C. W. Helstrom, *Estimation of a displacement parameter of a quantum system*, Internat. J. Theoret. Phys. **11** (6) (1974), 357–378.

[88] K. Hepp, *Quantum theory of measurement and macroscopic observables*, Helv. Phys. Acta **45** (1972), 237–248.

[89] A. S. Holevo, *Statistical problems in quantum physics*, 2nd Japan-USSR Symp. on Probability Theory, Kyoto **1** (1972), 22–40.

[90] A. S. Holevo, *Statistical decision theory for quantum systems*, J. Multivariate Anal. **3** (4) (1973), 337–394.

[91] A. S. Holevo, *Some statistical problems for quantum Gaussian states*, IEEE Trans. Inform. Theory IT **21** (5) (1975), 533–543.

[92] A. S. Holevo, *Noncommutative analogs of the Cramer-Rao inequality in the quantum measurement theory*, 3rd Soviet-Japan Symp. on Probability Theory, Tashkent, 1975, Lecture Notes in Math. **550** (1976), 194–222.

[93] A. S. Holevo, *Commutation superoperator of a state and its applications in the noncommutative statistics*, Rep. Math. Phys. **12** (2) (1977), 251–271.

[94] A. S. Holevo, *Estimation of a shift parameter of a quantum state*, Rep. Math. Phys. **13** (3) (1978), 287–307.

[95] A. S. Holevo, *Covariant measurements and uncertainty relations*, Rep. Math. Phys. **16** (3) (1979), 385–400.

[96] W. Hunziker, *A note on symmetry operations in quantum mechanics*, Helv. Phys. Acta **45** (2) (1972), 233–236.

[97] R. S. Ingarden, *Quantum information theory*, Rep. Math. Phys. **10** (1) (1976), 43–72.

[98] E. Inönu and E. P. Wigner, *Representations of the Galilei group*, Nuovo Cimento **9** (1952), 705–718.

[99] J. M. Jauch, “Foundations of Quantum Mechanics”, Addison-Wesley, Reading, MA, 1968.

[100] J. M. Jauch and C. Piron, *Generalized localizability*, Helv. Phys. Acta **45** (1967), 559-570.

[101] D. Judge, *On the uncertainty relation for angle variables*, Nuovo Cimento **31** (1964), 332–340.

[102] R. V. Kadison, *Transformation of states in operator theory and dynamics*, Topology **3** (suppl.) (1965), 177–198.

[103] S. Kochen and E. P. Specker, *The problem of hidden variables in quantum mechanics*, J. Math. Mech. **17** (1) (1967), 59–88.

[104] K. Kraus, *Operations and effects in the Hilbert space formulation of quantum theory*, In: “Foundations of quantum mechanics and ordered linear space”, Lecture Notes in Phys. **29** (1974), 206–229.

[105] K. Kraus and J. Schröter, *Expectation values of unbounded observables*, Internat. J. Theoret. Phys. **7** (6) (1973), 431–442.

[106] U. Krause, *The inner orthogonality of convex sets in axiomatic quantum mechanics*, In: "Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces", Lecture Notes in Phys. **29** (1974), 269–280.

[107] L. Lanz, L. A. Lugiato and G. Ramella, *On the quantum mechanical treatment of decaying non-relativistic systems*, Internat. J. Theoret. Phys. **8** (5) (1973), 341–352.

[108] G. Lindblad, *Entropy, information and quantum measurements*, Comm. Math. Phys. **33** (4) (1973), 305–322.

[109] J. L. Lopes and M. Paty (eds.), "Quantum Mechanics: a Half Century Later", Reidel Publ. Company, Doredrecht-Holland, 1977.

[110] W. Louisell, *Amplitude and phase uncertainty relations*, Phys. Lett. **7** (1963), 60–61.

[111] G. Loupias and S. Miracle-Solé, *C^*-algèbre des systèmes canoniques*, Comm. Math. Phys. **2** (1) (1966), 31–42.

[112] G. Ludwig, *Measuring and preparing process*, In: "Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces", Lecture Notes in Phys. **29** (1974), 122–161.

[113] G. W. Mackey, *Imprimitivity for representations of locally compact groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **35** (4) (1949), 537–545.

[114] J. Manuceau and A. Verbeure, *Quasifree states of the CCR*, Comm. Math. Phys. **9** (4) (1968), 293–302.

[115] K. V. Mardia, "Statistics of Directional Data", Academic Press, New york, 1972.

[116] E. Nelson, *Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics*, Phys, Rev. **150** (4) (1966), 1079–1085.

[117] E. Nelson, "Dynamical Theories of Brownian Motion", Princeton, NJ, 1967.

[118] H. Neumann, *The structure of ordered Banach spaces in axiomatic quantum mechanics*, In: "Foundations of Quantum Mechanics and Ordered Linear spaces", Lecture Notes in Phys. **29** (1974), 116–121.

[119] T. D Newton and E. P. Wigner, *Localized states for elementary systems*, Rev. Modern Phys. **21** (1949), 400–406.

[120] M. Ozawa, *Optimal measurements for general quantum systems*, Rep. Math. Phys. (1980).

[121] W. Pauli, "General Principles of Wave Mechanics", Encyclopaedia of Phys. v. 5/1, Spinger-Verlag, Berlin, 1965.

[122] A. M. Perelomov, *Coherent states for arbitrary Lie groups*, Comm. Math. Phys. **26** (3) (1972), 222–236.

[123] C. Piron, *Axiomatique quantique*, Helv. Phys. Acta **37** (4-5) (1964), 439–468.

[124] J. C. T. Pool, *Mathematical aspects of Weyl correspondence*, J. Math. Phys. **7** (1) (1966), 66–76.

[125] E. Prugovecki, *On a theory of measurement of incompatible observables in quantum mechanics*, Canad. J. Phys. **45** (6) (1967), 2173–2219.

[126] C. R. Putnam, "Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics", Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[127] J. M. Radcliffe, *Some properties of coherent spin states*, J. Phys. **A4** (1971), 313–323.

[128] H. P. Robertson, *The uncertainty principle*, Phys. Rev. **34** (1) (1929), 163–164.

[129] R. Schatten, "Norm Ideals of Completely Continuous Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

[130] C. Y. She and H. Heffner, *Simultaneous measurements of noncommuting observables*, Phys. Rev. **152** (4) (1966), 1103–1110.

[131] I. Segal, *A generating functional for the states of a linear Boson field*, Canad. J. Math. **13** (1) (1961), 1–18.

[132] B. Simon, "Functional Integration and Quantum Physics", Academic Press, New York, 1979.

[133] M. H. Stone, "Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis", AMS, Providence, RI, 1932.

[134] R. L. Stratonovich, *The quantum generalization of optimal statistical estimation and testing hypothesis*, J. Stoch. **1** (1973), 87–126.

[135] L. Susskind and J. Glogower, *Quantum mechanical phase and time operator*, Phys. **1** (1964), 49–61.

[136] M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras*, Lecture Notes in Math. **128** (1972).

[137] K. Urbanik, *Joint probability distribution of observables in quantum mechanics*, Studia Math. **21** (1) (1961), 117–133.

[138] F. Valentine, "Convex Sets", McGraw Hill, New York, 1964.

[139] V. S. Varadarajan, "Geometry of Quantum Theory", Van Nostrand, New York, 1968.

[140] V. S. Varadarajan, “Geometry of Quantum Theory”, II, “Quantum Theory of Covariant Systems”, Van Nostrand, New York, 1970.

[141] H. C. Volkin, *Phase operators and phase relations for photon states*, J. Math. Phys. **14** (12) (1973), 1965–1976.

[142] J. von Neumann, *Die Eidentigkeit der Schrödingerschen Operatoren*, Math. Ann. **104** (3) (1931), 570–578.

[143] A. Wald, “Statistical Decision Functions”, Wiley, New York, Chapman and Hall, London, 1950.

[144] A. S. Wightman, *On the localizability of quantum mechanical systems*, Rev. Modern Phys. **34** (1962), 845–872.

[145] A. S. Wightman, *Hilbert's sixth problem: mathematical treatment of the axioms of physics*, Proc. Symp. in Pure Math. **28** (1) (1977), 147–240.

[146] E. P. Wigner, *Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. Math. **40** (1) (1939), 149–204.

[147] E. P. Wigner, *On the time-energy uncertainty relation*, In: “Aspects of Quantum Theory”, A. Salam and E. P. Wigner (eds.), Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

[148] H. P. H. Yuen and M. Lax, *Multiple-parameter quantum estimation and measurement of non-selfadjoint observables*, IEEE Trans. **IT-19** (6) (1973), 740–750.

[149] U. Zwanziger, *Representations of the Lorentz group corresponding to unstable particles*, Phys. Rev. **131** (6) (1963), 2818–2819.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ВО ВТОРОМ ИЗДАНИИ:

[150] А. И. Ахиезер, Р. В. Половин, Почему невозможно ввести в квантовую механику скрытые параметры, 1972, УФН, т. 107, вып. 3, с. 463-487.

[151] Бом Д. Квантовая теория в терминах “скрытых” параметров. – В сб.: Вопросы причинности в квантовой механике. М., ИЛ, 1955.

[152] Холево А. С. Статистическая структура квантовой теории. Москва-Ижевск: ИКИ, 2003.

[153] Холево А. С. Квантовые системы, каналы, информация. Москва: МЦНМО, 2010.

[154] Ченцов Н. Н. Избранные труды. Математика. Раздел IV. Геометростатистика и некоммутативная теория вероятностей. Москва: Физматлит, 2001.

[155] Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т. 3. М., Наука, 1966.

[156] Barchielli A., Gregoratti M., Quantum Trajectories and Measurements in Continuous Time. The Diffusive Case, Lect. Notes Phys. 782, Springer, Berlin-Heidelberg 2009.

[157] Barndorff-Nielsen O. E., Gill R. D., Jupp P. E. On quantum statistical inference. J. Royal Statist. Soc. B, **65**, 1-31, 2003.

[158] Bengtsson I., Zyczkowski K., Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement, Cambridge University Press 2006

[159] G. Birkhoff, J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, Ann. Math. 37 (1936), 823-843.

[160] Braunstein S. L. Squeezing as an irreducible resource. Arxiv:quant-ph/9904002.

[161] Busch P., Grabovski M., Lahti P. J. Operational quantum physics. Lect. Notes Phys. **m31**, Springer-Verlag: New York-Heidelberg-Berlin, 1997.

[162] J. F. Clauser, Von Neumann's informal hidden variable argument, Amer. J. Phys. 39 (1971) 1095-1099.

[163] J. F. Clauser, A. Shimoni, Bell's theorem: experimental tests and implications, Rep. Progr. Phys. 41 (1978) 1881-1928.

[164] D'Ariano G. M. Homodyning as universal detection. In: Quantum Communication, Computing and Measurement. Eds. Hirota O., Holevo A. S., Caves C. M. New York: Plenum Press, pp. 253-264, 1997.

[165] B. D'Espagnat, Veiled Reality. An Analysis of Present-Day Quantum-Mechanical Concepts, Addison-Wesley, 1995.

[166] Gill R. D. Time, finite statistics and Bell's fifth position, e-print quant-ph/0301059. Foundations of Probability and Physics - 2, Vaxjo Univ. Press, 2003, 179-206 (2003)

[167] Gill R. D., Massar S. State estimation for large ensembles. Phys. Rev. A **61**, 042312/1-16, 2000.

[168] Gill R., Guta M. I. An invitation to quantum tomography. Arxiv:quant-ph/0303020.

[169] N. Gisin, B. Gisin, A local hidden variable model of quantum correlation exploiting the detection loophole, Phys.Lett. A260 (1999) 323-327.

[170] A. Gleason, Measures on the closed subspaces of a Hilbert space, J. Rat. Mech. and Anal. 6 (1957) 885-894.

[171] Guta M., Jencova A., Local asymptotic normality in quantum statistics, Communications in Mathematical Physics, **276**, 341-379, 2007.

[172] A. Hartkämper and H. Neumann (eds.), Foundation of quantum mechanics and ordered linear spaces, Advanced Study Institute, Marburg 1973, Lect. Notes in Phys. 29, 1974.

[173] Hayashi M. Asymptotic estimation theory for a finite dimensional pure state model. J. Phys. A **31**, 4633-4655, 1998.

[174] Hayashi M. Two quantum analogues of Fisher information from a large deviation viewpoint of quantum estimation. J. Phys. A Math. Gen., **35**, 7689-7727, 2002.

[175] Hayashi M. Quantum information: an introduction, Springer, Berlin 2006.

[176] Hiai F., Petz D. The proper formula for relative entropy and its asymptotics in quantum probability. Commun. Math. Phys., **143**, 99-114, 1991.

[177] D. Hilbert, J. von Neumann, L. Nordheim, Uber die Grundlegen der Quantenmechanik. Math. Ann. 98 (1927) 1-30.

[178] Holevo A. S. Bounds for generalized uncertainty of shift parameter. Lect. Notes Math., **1021**, 243-251, 1983.

[179] P. Jordan, J. von Neumann, Wigner E., On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, Ann. of Math. 35(1) (1934) 29-64.

[180] M. Junge, C. Palazuelos, D. Perez-Garcia, I. Villanueva, M.M. Wolf, Operator Space theory: a natural framework for Bell inequalities, arXiv:0912.1941[quant-ph].

[181] Keyl M., Werner R. F. Estimating the spectrum of a density operator. Phys. Rev. A, **64**, no.5, 052311, 2001.

[182] Leonhardt U. Measuring the quantum state of light. Cambridge University Press, 1997.

[183] Lesniewski A., Ruskai M. B. Monotone Riemannian metrics and relative entropy on non-commutative probability spaces. J. Math. Phys. **40**, 5702-5724, 1999.

[184] G. Ludwig, Foundations of Quantum Mechanics, Springer -Verlag, Berlin, 1983.

[185] S. Massar, S. Pironio, J. Roland, B. Gisin, A zoology of Bell inequalities resistant to detector inefficiency, Phys. Rev. A 66 (2002) 052112.

[186] Massar S., Popescu S. Optimal extraction of information from finite quantum ensembles. Phys. Rev. Lett. **74**, 1259-1263, 1995.

[187] Ogawa T., Nagaoka H., Strong converse and Stein's lemma in quantum hypothesis testing. IEEE Trans. Inf. Theory, **IT-46**, 2428-2433, 2000.

[188] Petz D. Monotone metrics on matrix spaces. Lin. Alg. Appl. **244**, 81-96, 1996.

[189] Petz D. Quantum information theory and quantum statistics, Berlin: Springer, 2008

[190] C. Piron, Foundations of Quantum Physics, W. A. Benjamin Inc., London 1976.

[191] Schleih W. P., Barnett S. M. (eds.) Quantum phase and phase dependent measurements. Phys. Scripta **T48**, 1993.

[192] F. Selleri, G. Tarozzi, Quantum mechanics, reality and separability, La Rivista del Nuovo Cimento, 2, 1981.

[193] M. D. Srinivas, When is a hidden varible theory comparable with quantum mechanics? Pramana, 19 (1982) 159-173.

[194] Uhlmann A. Density operators as an arena for differential geometry. Rep. Math. Phys. **33**, 253-263, 1993.

[195] N. Wiener et al. Differential Space, Quantum Systems and Prediction, MIT Press, 1966.

[196] E. P. Wigner, Symmetries and Reflections, Indiana University Press, Bloomington-London, 1970.

[197] Wiseman H. M., Killip R. B., Adaptive single-shot phase measurements: the full quantum theory. Phys. Rev. A, **57**, no. 3, 2169-2185, 1998.

[198] Yuen H. P., Shapiro J. H., Quantum statistics of homodyne and heterodyne detection. In: Coherence and Quantum Optics IV. Eds. Mandel L., Wolf E., Plenum Press, New York, pp.719-727, 1978.

[199] B. Hensen et al., Experimental loophole-free violation of a Bell inequality using entangled electron spins separated by 1.3 km, Nature **526**, 682 (2015) (arXiv:1508.05949; A. Zeilinger et al., A significant loophole-free test of Bell's theorem with entangled photons, Phys. Rev. Lett. **115**, 250401 (2015) (arXiv:1511.03190); L. K. Shalm et al., A strong loophole-free test of local realism, Phys. Rev. Lett. **115**, 250402 (2015) (arXiv:1511.03189).