

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА СЕГОДНЯ

к десятилетию
Независимого Московского Университета

Под редакцией С.К.Ландо и О.К.Шейнмана

FUNDAMENTAL MATHEMATICS TODAY

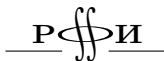
in honor of the 10th anniversary
of the Independent University of Moscow

Editors S.K.Lando and O.K.Sheinman

ИМУ, МЦНМО 2003

ББК 22.1
УДК 51
Ф94

*Издание осуществлено при поддержке РФФИ
(издательский проект № 02-01-14112).*



Ф94 **Фундаментальная** математика сегодня. К десятилетию НМУ. — М.: НМУ, МЦНМО, 2003. — 408 с. + 16 с. фотографий.

ISBN 5-94057-112-3

Книга представляет собой сборник статей, посвящённых активно развивающимся в настоящее время направлениям фундаментальной математики. В первую очередь в ней представлены области, широкое исследование которых ведётся в Независимом Московском Университете, — топология в своих разнообразных проявлениях и метрическая геометрия, теория алгебр Ли и динамические системы, теория чисел и алгебраическая геометрия. Она будет интересна специалистам в этих областях; среди авторов как убеждённые седины мэтры, так и их способные молодые ученики. Все авторы являются участниками конференции «Фундаментальная математика сегодня», прошедшей в декабре 2001 года и посвящённой 10-летию Независимого Московского Университета. Приведены программы конференции и фотографии ряда участников.

ББК 22.1

ISBN 5-94057-112-3



9 785940 571124 >

© С. К. Ландо, О. К. Шейнман
составление 2003.

© НМУ, МЦНМО, 2003.

Оглавление

Вместо предисловия	4
<i>В. А. Васильев.</i> Алгоритмы для комбинаторной реализации кого-мологий пространств узлов	10
<i>М. Verbitsky.</i> A simple proof of stability of Fourier—Mukai transform	32
<i>А. М. Вершик.</i> Случайные и универсальные метрические пространства	54
<i>Р. Grozman, D. Leites, I. Shchepochkina.</i> The analogs of the Riemann tensor for exceptional structures on supermanifolds	89
<i>С. М. Гусейн-Заде, В. Эбелинг.</i> Об индексах 1-форм на изолированных особенностях полных пересечений	110
<i>Ю. С. Ильяшенко.</i> Столетняя история 16-й проблемы Гильберта .	135
<i>О. Karpenkov.</i> Energy of a knot: some new aspects	214
<i>Л. Katzarkov.</i> Derived categories in four-dimensional topology . . .	224
<i>С. Максименко.</i> Сечения действий групп Ли	246
<i>Е. Polulyakh.</i> One property of trajectories of Toeplitz flows	259
<i>А. Г. Сергеев.</i> Адиабатические пределы и абрикосовские нити . .	276
<i>В. Timorin.</i> Kähler metrics whose geodesics are circles	284
<i>W. G. Faris.</i> Non-selfadjoint Ornstein—Uhlenbeck semigroups . . .	294
<i>Б. Фейгин, Е. Фейгин.</i> Интегрируемые $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модули как бесконечные тензорные произведения	304
<i>С. Г. Влэдуц, М. А. Цфасман.</i> Бесконечные глобальные поля и обобщённая теорема Брауэра—Зигеля	335
<i>С. В. Шадрин.</i> Компактификация и эйлерова характеристика пространств вещественных мероморфных функций	352
<i>О. К. Шейнман.</i> Казимиры второго порядка аффинных алгебр Кричевера—Новикова $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ и $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$	372
Приложение	405

Вместо предисловия

Выступление Ректора Независимого Московского университета Ю. С. Ильяшенко на открытии конференции¹, посвящённой 10-летию НМУ².

Независимый Московский университет отмечает свою десятую годовщину. Он так же похож на обычный университет с давней историей, как десятилетний ребёнок на взрослого.

История НМУ начинается со встречи в Московской пятьдесят седьмой школе летом 1991 года. Встречу организовал Н. Н. Константинов. По его предложению будущая команда Независимого университета попросту решила начать чтение математических курсов с сентября того же года.

Результаты этой встречи характерны для того периода российской истории. Состоись она в сталинские времена, всех её участников немедленно бы арестовали. В брежневские времена она не имела бы никаких последствий. В горбачевские же дни она послужила началом истории Независимого Московского университета. Основатели Независимого университета создали и небольшой фонд, из которого финансировался начальный период его работы.

Основатели образовали Научный Совет университета, который возглавил В. И. Арнольд. В Совет вошли А. А. Бейлинсон, Р. Л. Добрушин (ныне покойный), Б. А. Дубровин, А. А. Кириллов, С. П. Новиков, А. Н. Рудаков, Я. Г. Синай, В. М. Тихомиров, Л. Д. Фаддеев, А. Г. Хованский и М. А. Шубин. Профессора П. Делинь и Р. Макферсон, которые активно поддерживали НМУ с момента его основания, являются почётными членами Научного Совета.

В первые годы деятельностью университета руководил Н. Н. Константинов, а помогали ему его ученики и друзья: С. Комаров занимался финансовой стороной, В. Имайкин готовил издания лекций, М. Вялый ор-

¹ См. Приложение.

² Перевод из *Moscow Mathematical Journal*, с сокращениями.

ганизовывал учебный процесс. Первый год университет работал в Лицее информационных технологий, неподалёку от Московского государственного университета. В течение следующих четырёх лет Лицей Вторая Школа любезно предоставил НМУ возможность вести занятия по вечерам в своём здании. Мы чрезвычайно благодарны тогдашнему директору Второй Школы П. В. Хмелинскому за гостеприимство.

В 1994 году по новой инициативе Н. Н. Константинова, поддержанной А. Шенем, префект Центрального административного округа г. Москвы А. И. Музыкантский предложил организовать новый центр, связывающий школьную и университетскую математику, который мог бы официально получить здание. Обеспечение функционирования этого нового образования и решение многочисленных административных проблем, связанных с получением здания, требовали огромной бюрократической работы. Мы начали искать исполнительного директора для нового центра, способного эту работу проделать. Я как-то сказал одному из своих старших коллег: «Нам нужен администратор-профессионал, понимающий наши университетские идеалы». «Тогда нет причин для беспокойства», — ответил мой коллега, — «такого человека попросту не существует». Однако нам повезло найти даже не одного, а двух людей, о которых мы мечтали: И. Яценко и В. Фурина. Оба они выпускники Московского государственного университета. В то время, о котором идёт речь, они занимались собственным успешным бизнесом. При этом Яценко продолжал заниматься собственными математическими исследованиями.

Изготовление всех необходимых документов потребовало от Яценко и Фурина полного напряжения сил, и в результате через полгода правительство Москвы преподнесло подарок: в июне 1995 года мэр Москвы Ю. Лужков подписал указ о передаче в управление вновь организованному Московскому Центру непрерывного математического образования незаконченного здания в историческом центре Москвы. НМУ должен был изыскать \$1 000 000 на завершение строительства.

На тот момент здание представляло собой четырехэтажный каркас без крыши с недостроенными лестницами и полами, усыпанными битым кирпичом, как после бомбёжки. Мы заявили, что найдём требуемую сумму, не имея ни малейшего представления о том, где её взять и надеясь лишь на то, что на столь хорошее предприятие деньги как-нибудь найдутся. И действительно, в августе 1995 г. правительство Москвы выделило \$1 500 000 на завершение строительства и оборудование здания, и в течение года работы были завершены в соответствии с проектом, представленным университетской командой. 26 сентября 1996 г. состоялась церемония инаугурации нового здания и две тесно связанных между собой организации — НМУ и МЦНМО — начали работать в нём.

Помимо поддержки Независимого московского университета МЦНМО ведёт большую работу, связанную с обучением школьников: организует разнообразные математические олимпиады, лекции для старшеклассников, конференции по проблемам обучения и т. д.

В течение последних восьми лет, с момента, когда Московское математическое общество, а затем и МЦНМО, оказались непосредственно вовлечены в организацию знаменитых Московских математических олимпиад, эти олимпиады возродились и восстановили свою былую популярность. В прошлом году в городском туре олимпиады приняли участие три тысячи старшеклассников, а число наград совпало с общим числом участников Московской олимпиады 1992 г. (!).

Среди других предприятий МЦНМО следует упомянуть оказавшую большое влияние Конференцию по проблемам обучения математики в 2000 г. и весьма успешную Летнюю школу 2001 г., в которой старшеклассники и студенты младших курсов встретились с лекторами наивысшего уровня, включая академиков Аносова, Арнольда и Болибруха.

Первым ректором Независимого университета был М. К. Поливанов, математический физик и философ; он ушёл из жизни через год после начала своего ректорства. В НМУ два колледжа — Высший Колледж математической физики и Высший Колледж математики. Первым руководил О. И. Завьялов, теперь его декан А. И. Кириллов. Первым деканом Колледжа математики был А. Н. Рудаков, сейчас деканом является Ю. С. Ильяшенко. В двух колледжах обучается около 100 студентов, новый приём ежегодно составляет около 40 человек. ВКМФ выпустил почти 20 человек, ВКМ — 25. С момента своего образования ВКМФ располагается в Математическом Институте им. Стеклова Российской академии наук. Аспирантура НМУ образовалась в 1993 году по инициативе А. Бейлинсона, Б. Фейгина и В. Гинзбурга. Ее окончили и защитили кандидатские диссертации 27 человек. В 1998 году Американское математическое общество опубликовало в своих *Transactions* том, состоящий из статей студентов, аспирантов и профессоров Независимого университета.

Бюрократическое укрепление НМУ должно пройти несколько этапов, лишь два из которых уже преодолены. Мы зарегистрированы как Независимый московский университет — высшее учебное заведение — и имеем государственную лицензию на ведение образовательной деятельности в области высшего образования. В нынешней тяжёлой бюрократической ситуации на получение этих документов ушло пять лет. Последующие шаги — аккредитация (обеспечивающая государственное признание диплома), лицензия на аспирантуру, открытие специального совета по защите диссертаций, освобождение от армейского призыва — остаются нереа-

лизованными. После их преодоления Независимый университет сможет, подобно традиционным вузам, превратиться в дневное учебное заведение.

НМУ предоставляет возможность математикам, не вовлечённым в преподавание в МГУ, создать свои собственные школы. В течение нескольких лет в университете успешно работают семинары Б. Фейгина, С. Натанзона—О. Шварцмана—О. Шейнмана, Ю. Неретина, М. Цфасмана, В. Васильева.

За время существования НМУ в нём читали курсы лекций Д. В. Аносов, В. И. Арнольд, А. А. Кириллов, С. П. Новиков, Я. Г. Синай, А. А. Белавин, В. К. Белошапка, В. А. Васильев, Э. Б. Винберг, С. М. Гусейн-Заде, Ю. С. Ильяшенко, И. М. Кричевер, А. Н. Рудаков, А. Г. Сергеев, В. М. Тихомиров, Б. Л. Фейгин, А. Г. Хованский, М. А. Цфасман, и многие другие. Курсы Арнольда (уравнения в частных производных), Васильева (топология), Аносова (динамические системы) были впоследствии опубликованы в виде книг. То же относится и ко многим другим курсам, например, Белавина, Гусейн-Заде, Прасолова, Сосинского, Винберга.

НМУ приглашает преподавать и профессоров, постоянно работающих на Западе. Они читают краткие курсы, однако со столь интенсивным наполнением, что их можно сравнить с семестровыми. Такие курсы читали А. А. Кириллов, А. Г. Хованский (дважды), И. Кричевер, А. Каток (иностранный сотрудник НМУ), П. Картье. В 1995—96 г. А. Г. Хованский, находясь в отпуске со своей постоянной должности в университете Торонто, читал регулярный курс анализа.

Деятельность НМУ не сводится к обучению. С 1997 г. по 2000 г. регулярно проводились Студенческие чтения. Первую лекцию на них прочитал В. И. Арнольд. В 2000 г. эти чтения преобразовались в постоянно действующий математический семинар Глобус. На чтениях и на семинаре выступали Ю. Манин, Я. Синай, а также чуть не все пленарные докладчики настоящей конференции, некоторые неоднократно. Лекции записываются на магнитофон и затем публикуются в виде сборников. Вышло уже два таких сборника. Основная нагрузка по их подготовке легла на В. В. Прасолова.

В 2001 г. НМУ стал издавать новое периодическое издание — *Moscow Mathematical Journal*. Среди авторов уже опубликованных работ А. Гивенталь, А. де Йонг, А. и С. Каток, К. Кениг, А. Хованский, А. А. Кириллов, Я. Синай, М. Цфасман, А. Варченко и многие другие. Свои статьи журналу обещали П. Делинь, Г. Фальтингс, В. Гинзбург, Д. Загир; дата выхода соответствующих томов уже определена.

В 2001 г. НМУ начал программу обучения для иностранных студентов (в первую очередь североамериканских), получившую название *Math in Moscow* (MiM). Студенты приглашаются в НМУ на один семестр

и слушают как математические, так и нематематические курсы. Оценки, выставленные за обучение, признаются американскими и канадскими университетами. Первым участником программы был Александр Смит из Корнелльского университета. Вторым—Брайан Ли из университета Торонто. Весной 2002 года мы ожидаем 11 участников из различных университетов США. Бывший президент Американского математического общества Феликс Браудер, которому о программе MiM сообщил Я. Г. Синай, предложил учредить от имени Общества ограниченное число стипендий для участников программы. К настоящему времени присуждено 8 таких стипендий.

С 1996 г. Университет проводит программу обмена студентами с Высшей Нормальной школой в Париже. В рамках этой программы от 4 до 6 студентов Нормальной школы ежегодно приезжают на месяц в Москву и столько же московских студентов посещают Париж.

В 1997 году В. Балакоев и А. Кокин (преуспевающие предприниматели, выпускники Московского института электроники и автоматики) учредили премию Мебиуса для победителей конкурса научных работ среди студентов и аспирантов. Лауреатами премии стали А. Кузнецов (1997, НМУ), В. Тиморин (1998, НМУ), А. Буфетов (1999, НМУ), А. Мелихов (2000, МГУ), С. Шадрин (2000, НМУ), А. Эршлер (2001, С.-Петербургский университет).

Разумеется, с количественной точки зрения место, занимаемое НМУ в российской культурной жизни, пренебрежимо мало, однако, с моей точки зрения, его влиянием ни в коем случае нельзя пренебречь. Это влияние можно охарактеризовать цитатой из Евангелия:

Царство Небесное подобно закваске, которую женщина взявши положила в три меры муки, доколе не вскисло всё. (От Матфея, 13:33)

Один из принципов работы НМУ состоит в том, что процесс работы не менее важен, чем результат. Это значит, что вовлечённые в работу люди не только должны добиться результата, но и в процессе работы должны хорошо себя чувствовать.

НМУ пытается быть местом, куда могли бы при желании вернуться, поработав за границей, российские математики. У нас сейчас преподают семь молодых математиков, защитивших диссертации за рубежом.

Мы платим скромные стипендии студентам и аспирантам и символическую зарплату преподавателям и административным сотрудникам. В современных условиях, когда доход каждого складывается из нескольких источников, это оказывается важным. Наши выплаты были бы невозможны без разнообразной поддержки, которую мы получали в течение всего

своего существования. Первый вклад, как уже упоминалось, сделали основатели; мы получили и другую поддержку от частных лиц, в первую очередь, действующих математиков. Затем НМУ получил грант от соросовской образовательной программы. Доля организации в нескольких грантах, присуждённых соросовским «Институтом Открытое общество», составила финансовую основу НМУ в 1994–96 гг. В 1997 и 1999 гг. два гранта в поддержку НМУ выделило Американское Математическое общество. В 1998 г. университет получил поддержку Международного математического союза. Начиная с 1996 г. существенную долю доходной части бюджета составляет доля организации в грантах Российского Фонда фундаментальных исследований. Стипендии аспирантам выплачивались при поддержке французского фонда «Promatematica», созданного в 1994 г. С 2000 г. мы получаем значительный грант от Математического института Клея. За два дня до открытия настоящей конференции я получил тёплое поздравительное письмо от директора Института Клея, бывшего президента Американского Математического Общества, Артура Джаффе.

НМУ благодарен всем частным лицам и учреждениям, сделавшим его существование возможным.

В. А. Васильев

Алгоритмы для комбинаторной реализации когомологий пространств узлов

Аннотация

Описан алгоритм построения комбинаторных формул для инвариантов узлов в \mathbb{R}^3 и для прочих классов когомологий пространств узлов в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Он основан на глубокой аналогии между теорией узлов и теорией наборов плоскостей. Этот метод позволяет также доказывать нетривиальность многих положительномерных классов когомологий, предсказанных с помощью алгебраических вычислений.

Ключевые слова: инвариант узлов, комбинаторная формула, пространство узлов, набор плоскостей, симплициальное разрешение, дискриминант

§ 1. Введение

Изучение инвариантов узлов — лишь часть более естественной задачи о кольце когомологий пространства узлов. Действительно, численные инварианты узлов в M^3 — это просто 0-мерные классы когомологий этого пространства. Недавние работы В. Э. Турчина показывают, что кольцо когомологий конечного типа для пространства узлов в \mathbb{R}^3 обладает замечательной алгебраической структурой; по-видимому простейшее описание кольца инвариантов конечного типа получается из него очевидной факторизацией, см. [17], [18] и §7 ниже.

Очень полезно одновременно рассматривать пространства узлов во всех пространствах \mathbb{R}^n , $n \geq 3$; если $n > 3$, то все их классы когомологий — конечного типа (фильтрации) в смысле [21], [24]. При растущем n для (фильтрованных) колец когомологий этих пространств выполняются свойства стабилизации и периодичности.

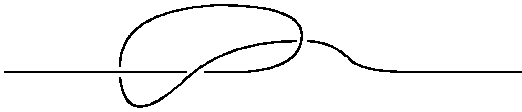


Рис. 1. Длинный узел

Мы будем в основном рассматривать пространства *длинных узлов* в \mathbb{R}^n , то есть пространства вложений $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, совпадающих с фиксированным линейным вложением вне некоторого компакта в \mathbb{R}^1 , см. рис. 1. Кольцо когомологий обычного пространства компактных узлов (соответственно, зацеплений), то есть гладких вложений окружности (соответственно, несвязного набора окружностей) в \mathbb{R}^n конструируется из кольца когомологий пространства длинных узлов и из топологической нетривиальности одномерного многообразия-прообраза, подобно тому, как группа бордизмов топологического пространства строится из кольца кобордизмов Тома и топологической нетривиальности этого пространства. Эта конструкция может быть довольно сложной, см. например §7 в [25], но в любом случае сначала надо рассматривать пространство длинных узлов.

Любой (конечномерный) класс когомологий пространства узлов (как длинных, так и компактных) реализуется индексом зацепления с некоторым циклом (бесконечной размерности но конечной коразмерности) в *дискриминанте* Σ , состоящем из гладких отображений $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ или $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, не являющихся узлами, то есть имеющих особенности или самопересечения. В конечномерной теории дискриминантов такая редукция впервые была использована в [1].

Определение 1. Для любого класса когомологий пространства узлов в \mathbb{R}^n (например, для инварианта узлов, если $n = 3$), его комбинаторная формула — это произвольный NP -простой полуалгебраический относительный цикл в пространстве всех кривых по модулю дискриминанта Σ , такой, что наш класс когомологий равен индексу зацепления с границей этого цикла; см. §2 ниже.

Имеется глубокая аналогия между теорией узлов и хорошо известной в геометрической комбинаторике теорией (конечных) наборов аффинных плоскостей произвольных (возможно различных) размерностей в \mathbb{R}^N . Эта аналогия определяется тем, что дискриминант Σ в пространстве кривых \mathcal{K} также замечается семейством плоскостей в \mathcal{K} . Это семейство не дискретно: оно параметризуется всевозможными неупорядоченными парами точек $a, b \in \mathbb{R}^1$. Именно, любой такой паре соответствует плоскость $L(a, b)$, состоящая из таких отображений $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $f(a) = f(b)$ при



Рис. 2. Формула Поляка—Виро для инварианта Кассона

$a \neq b$ или $f'(a) = 0$ при $a = b$. Краткие списки параллельных понятий в обеих теориях сведены в таблицы в [26], [27].

В обеих теориях очень полезно рассматривать *симплициальные разрешения* дискриминантов (соответственно, наборов плоскостей), и, в частности, сопутствующие им спектральные последовательности.

Наш метод построения комбинаторных формул для когомологий пространства узлов $\mathcal{K} \setminus \Sigma$ есть не что иное, как прямое вычисление такой спектральной последовательности.

Все другие известные мне методы нахождения комбинаторных формул для инвариантов узлов существенно используют пространственные картинки, рисование диаграмм узлов и отслеживание их гомотопий. Наш метод — чисто комбинаторный и имеет дело только с легко кодируемыми объектами, такими как хордовые диаграммы и естественные их обобщения.

Я покажу, как этот метод вычисляет комбинаторную формулу для простейшего инварианта узлов (порядка 2) и приведу результаты его работы для $(3n - 8)$ -мерного коцикла Тейблума—Турчина (порядка 3) пространства длинных узлов в \mathbb{R}^n , и для всех классов когомологий порядка ≤ 2 пространств компактных узлов $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Этот доклад основан на моих работах [26] и [28], содержащих аналогичные вычисления для этих и для некоторых других классов когомологий. Моя работа частично поддержана грантами РФФИ-01-01-00660, INTAS-00-0259, и NWO-047-008-005.

§ 2. Что такое комбинаторная формула для класса когомологий пространства узлов?

Это — комментарий к предыдущему определению 1. Я не буду пытаться придать точный смысл словосочетанию «*NP*-простой полуалгебраический относительный цикл» в случае бесконечномерных подмножеств функционального пространства: это можно сделать с помощью конечномерных аффинных аппроксимаций этого пространства. Вместо этого давайте разберём пример.

По-видимому, первые нетривиальные комбинаторные формулы для некоторых инвариантов узлов конечного типа были даны Ж. Ланном

в [12]. Наиболее известные и удобные комбинаторные выражения для таких инвариантов — это *формулы Поляка—Виро* [15], то есть картинki вроде рис. 2 или линейные комбинации подобных картинок. Рис. 2 читается следующим образом. Рассмотрим типичный длинный узел $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. *Представление* картинki рис. 2 в этом узле — это произвольный набор точек $\{a < b < c < d\} \subset \mathbb{R}^1$ таких, что $f(a)$ лежит ниже $f(c)$, а $f(d)$ лежит ниже $f(b)$ (относительно выбранного направления в \mathbb{R}^3). Значение этой картинki на нашем узле равно числу её представлений (посчитанных с подходящими знаками). Непосредственные вычисления показывают, что это число является инвариантом узлов порядка 2. Более того, для любого $n > 3$ эта же диаграмма задаёт $2(n-3)$ -мерный класс когомологий пространства длинных узлов в \mathbb{R}^n , а именно класс, порождающий группу когомологий фильтрации (степени) 2. Общая диаграмма Поляка—Виро состоит из нескольких ориентированных дуг, соединяющих разные точки прямой \mathbb{R}^1 . М. Гусаров доказал, что любой инвариант конечного типа для длинных узлов можно задать линейной комбинацией таких диаграмм, см. [8].

Почему предыдущая диаграмма задаёт NP -простое полуалгебраическое множество?

В конечномерной теории сложности NP -простые полуалгебраические множества — это просто проекции полиномиально простых множеств из немного бóльших пространств. В нашем случае в качестве такого большего пространства можно взять прямое произведение $\mathcal{K} \times \mathbb{R}^4$ пространства кривых $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ и пространства четвёрок точек $a, b, c, d \in \mathbb{R}^1$. Тогда все предыдущие условия задают очень простой набор линейных условий в этом расширенном пространстве: 5 условий типа неравенства и $2(n-1)$ условий типа равенства. Относительный цикл, заданный формулой Поляка—Виро, — это прямой образ фундаментального цикла этого множества при проектировании в \mathcal{K} .

Доказательство того, что это множество действительно является относительным циклом, граница которого лежит в дискриминанте, немного сложнее; ср. §5 ниже.

2.1. Пример: реализация коцикла Тейблума—Турчина mod 2

Комбинаторные формулы для классов когомологий положительной размерности могут быть сложнее: я не знаю общего выражения для них, которое было бы столь же просто, как формулы Поляка—Виро. Сейчас я предъявляю формулу для простейшего такого класса когомологий — клас-

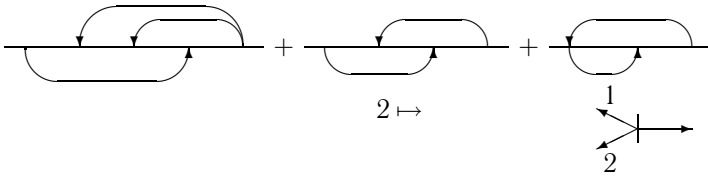


Рис. 3. Комбинаторная формула для коцикла Тейблума—Турчина

са Тейблума—Турчина, найденного Д. М. Тейблумом и В. Э. Турчиным в 1995 и описанного в [23], [25]. Этот класс имеет размерность $3n - 8$ (в частности, размерность 1, если $n = 3$) и степень 3 в смысле естественной фильтрации в (разрешённом) дискриминанте. (Эта фильтрация задаёт также обычную степень инвариантов конечного типа.)

Наша комбинаторная формула для этого класса показана на рис. 3. Три её картинки расшифровываются в формулировке следующей теоремы.

Обозначим через \mathbb{R}^{n-1} факторпространство пространства \mathbb{R}^n по выбранному направлению (определяющему понятия «выше» и «ниже»). Выберем направление «на восток» в этом пространстве \mathbb{R}^{n-1} .

Теорема 1 (см. [26]). Для любого $n \geq 3$ значение приведённого mod 2 класса Тейблума—Турчина на любом типичном $(3n - 8)$ -мерном сингулярном цикле в пространстве длинных узлов в \mathbb{R}^n равно чётности числа точек этого цикла, соответствующих таким узлам $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, что выполнено одно из трех:

1) найдутся пять точек $a < b < c < d < e$ в \mathbb{R}^1 , такие, что точка $f(a)$ лежит выше $f(d)$, а $f(e)$ выше чем обе точки $f(c)$ и $f(b)$;

2) найдутся четыре точки $a < b < c < d$ в \mathbb{R}^1 , такие, что $f(a)$ лежит выше $f(c)$, точка $f(b)$ — ниже $f(d)$, и проекция производной $f'(b)$ в \mathbb{R}^{n-1} направлена «на восток»;

3) найдутся три точки $a < b < c$ в \mathbb{R}^1 , такие, что $f(a)$ лежит выше $f(b)$ но ниже $f(c)$, и направление «на восток» принадлежит «внешнему» углу в \mathbb{R}^{n-1} , образованному проекциями векторов $f'(a)$ и $f'(b)$ (то есть любой вектор этого направления равен линейной комбинации этих проекций, причём по крайней мере один из коэффициентов этой комбинации неположителен).

(Если для какого-нибудь узла f имеется несколько наборов точек $a < b < \dots$, удовлетворяющих этим условиям, то точка f цикла должна учитываться с соответствующей кратностью.)

Эта теорема также доказывает, что коцикл Тейблума—Турчина задаёт ненулевой класс когомологий в наиболее интересном случае $n = 3$

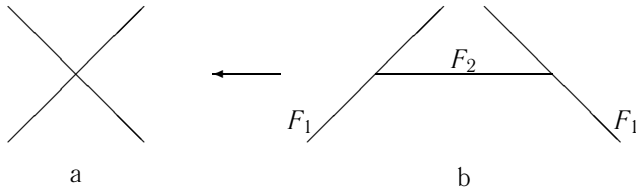


Рис. 4. Разрешение креста

(для $n > 3$ это следует из размерностных соображений). Действительно, рассмотрим связную сумму двух одинаковых (длинных) трилистниковых узлов в \mathbb{R}^3 и путь в пространстве узлов, соединяющий этот узел с самим собой, как в доказательстве коммутативности полугруппы узлов: мы сжимаем первое слагаемое, протаскиваем его «сквозь» второе, и затем опять раздуваем. В [26] посчитано, что этот замкнутый путь в пространстве длинных узлов имеет нечётное число точек пересечения (посчитанных с учётом кратностей) с объединением трех множеств, описанных в пунктах 1, 2 и 3 теоремы 1. Но коцикл Тейблума—Турчина является корректно определённым целочисленным классом когомологий. Мы получаем, что его приведение по модулю двойки принимает ненулевое значение на приведении по модулю двойки корректно определённого целочисленного класса гомотопий; следовательно, также и спаривание этих целочисленных классов не равно нулю.

§ 3. Симплициальные разрешения дискриминантов и наборов плоскостей

Наиболее удобный способ вычисления групп гомотопий наборов плоскостей (равно как и дискриминантов пространств кривых) основан на *симплициальных разрешениях*, т. е. на непрерывном аналоге комбинаторной формулы включений—исключений.

Наш основной пример — набор прямых $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^2$, состоящий из двух пересекающихся прямых, см. рис. 4а. Пусть нам нужно посчитать его *группу гомотопий Бореля—Мура* $\bar{H}_*(\mathbf{X})$, то есть группу гомотопий его одноточечной компактификации $\bar{\mathbf{X}}$, приведённую по модулю добавленной точки. Эта группа связана двойственностью Александра с обычной (приведённой по модулю точки) группой когомологий дополнительного пространства:

$$\bar{H}_i(\mathbf{X}) \sim \bar{H}^{N-i-1}(\mathbb{R}^N \setminus \mathbf{X})$$

(в нашем случае $N = 2$). Симплициальное разрешение креста \mathbf{X} показано

на рис. 4б. Именно, сначала мы берём две прямые, образующие \mathbf{X} , по отдельности, а затем соединяем отрезком их точки, соответствующие точке пересечения. Получающееся пространство $\mathbf{X}!$ обладает естественной проекцией на \mathbf{X} , определяющей изоморфизм групп гомологий Бореля—Мура этих пространств (и даже гомотопическую эквивалентность их одноточечных компактификаций). Оно обладает естественной возрастающей фильтрацией: первый её член F_1 состоит из двух разведённых прямых, а F_2 совпадает со всем $\mathbf{X}!$.

В случае произвольного набора плоскостей Ψ в \mathbb{R}^N также надо сначала взять по отдельности все плоскости этого набора, а затем вклеить симплексы, натянутые на их общие точки, таким образом, чтобы полученное пространство $\Psi!$ обладало собственной проекцией на Ψ со стягиваемыми (но как правило различными) слоями. Имеется несколько разных конструкций симплициального разрешения; наиболее удобное из них описывается в терминах *порядкового комплекса* нашего набора плоскостей. (Его определение см. например в [7], [30] или [27].) Это разрешённое пространство $\Psi!$ всегда обладает естественной возрастающей фильтрацией длины $\leq n - 1$: её i -й член — это объединение *собственных прообразов* при проекции $\Psi! \rightarrow \Psi$ всех стратов нашего набора, имеющих коразмерность $\leq i$ в \mathbb{R}^N .

В случае набора \mathbf{X} с рис. 4 соответствующая спектральная последовательность, вычисляющая группу гомологий Бореля—Мура, такова: она имеет только два ненулевых члена

$$E_{p,q}^1 \equiv \bar{H}_{p+q}(F_p \setminus F_{p-1}),$$

а именно $E_{1,0}^1 = \bar{H}_1(F_1) \sim \mathbb{Z}^2$ и $E_{2,-1}^1 = \bar{H}_1(F_2 \setminus F_1) \sim \mathbb{Z}$. Приведенные по модулю точки классы когомологий пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}$, порядок (= фильтрация) которых равна 1, — это в точности линейные комбинации индексов зацепления с каждой из двух прямых, образующих \mathbf{X} .

В частности, отсюда следует, что гомологическая спектральная последовательность, вычисляющая группу $\bar{H}_*(\mathbf{X})$, стабилизируется в первом члене, и мы имеем формулу расщепления

$$\bar{H}_i(\mathbf{X}) \equiv \bar{H}_i(\mathbf{X}!) \simeq E_{1,i-1}^1 \oplus E_{2,i-2}^1. \quad (3.1)$$

Аналогичная формула справедлива для любого аффинного набора плоскостей. Более того, имеет место *гомотопическое расщепление* [30], [22]: одноточечная компактификация любого аффинного набора плоскостей гомотопически эквивалентна букету одноточечных компактификаций пространств $F_k \setminus F_{i-1}$ естественной фильтрации симплициального разрешения этого набора. Гомологический вариант этого

расщепления выражается формулой Горески—МакФерсона [7] для когомологий дополнения к набору плоскостей.

Симплициальное разрешение дискриминантного множества Σ в пространстве \mathcal{K} параметризованных кривых $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ (с фиксированным поведением на бесконечности) строится точно таким же образом. Сначала мы берём *тавтологическую нормализацию* множества Σ , то есть пространство аффинного расслоения, база которого — это конфигурационное пространство $\overline{B}(\mathbb{R}^1, 2)$ всех неупорядоченных пар точек $a, b \in \mathbb{R}^1$, а слой над такой точкой — это подпространство $L(a, b) \subset \mathcal{K}$, состоящее из всех отображений $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, таких, что $f(a) = f(b)$ если $a \neq b$ и $f'(a) = 0$ если $a = b$. Это нормализованное пространство очевидным образом проектируется на Σ и является естественным аналогом «объединения прямых, взятых по отдельности», то есть множества F_1 на рис. 4б. Однако такие пространства $L(a, b)$ с различными парами (a, b) пересекаются в \mathcal{K} . Поэтому нам приходится стягивать их соответствующие точки отрезками, треугольниками, и т. д. таким образом, чтобы получающееся в итоге пространство σ обладало естественной проекцией на Σ , все слои которой стягиваемы.

Точная конструкция этого пространства σ описывается в терминах (естественным образом топологизированного) порядкового комплекса всех аффинных подпространств в \mathcal{K} , являющихся пересечениями нескольких пространств типа $L(a, b)$. Пространство σ обладает естественной возрастающей фильтрацией $\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \dots$, первый член которой совпадает с тавтологической нормализацией, а общий член σ_i является объединением собственных прообразов всех плоскостей $L(a_1, b_1) \cap L(a_2, b_2) \cap \dots$ коразмерности $\leq i$.

Получающееся пространство σ очень похоже на Σ . Если $n > 3$, то их группы гомологий Бореля—Мура конечной коразмерности корректно определены и совпадают (и двойственны по Александру группе когомологий пространства узлов). Если $n = 3$, то ситуация сложнее. А priori лишь часть классов гомологий Бореля—Мура пространства Σ (= классов когомологий пространства узлов в \mathbb{R}^3) может быть представлена образами циклов из σ . Это — в точности классы, двойственные по Александру классам когомологий *конечного типа* пространства узлов $\mathcal{K} \setminus \Sigma$; их *степени* (или *порядки*) определяются нашей фильтрацией в σ .

Однако пока не известно ни одного ненулевого класса гомологий пространства узлов в \mathbb{R}^3 , на котором все классы когомологий конечного типа принимали бы нулевые значения.

Первый член фильтрации σ_1 гомологически тривиален: он является пространством $((\infty - 1)n)$ -мерного аффинного расслоения над полуплос-

костью $\mathbb{R}^2 / \{(a, b) = (b, a)\}$ (где ∞n — это размерность пространства \mathcal{K}). Поэтому $H_*(\sigma_1) \equiv 0$ и весь первый столбец $E_{1,q}^r$ соответствующей спектральной последовательности тождественно равен нулю.

Далее, простые вычисления показывают, что единственная нетривиальная клеточка второго столбца $E_{2,q}^1 \equiv \bar{H}_{2+q}(\sigma_2 \setminus \sigma_1)$ — это $E_{2,(\infty-2)n+5}^1 \sim \mathbb{Z}$. По размерностным соображениям, эта клеточка доживает до E^∞ ; более того, соответствующие циклы выдерживают проекцию $\sigma \rightarrow \Sigma$ и образуют подгруппу, изоморфную \mathbb{Z} , в $\bar{H}_{(\infty-2)n+5}(\Sigma)$. В силу двойственности Александера это означает, что все классы когомологий степени 2 пространства длинных узлов лежат в размерности $n - 3$ и образуют группу, изоморфную \mathbb{Z} ; при $n = 3$ она порождена инвариантом Кассона узлов.

Мы будем обсуждать этот базисный класс v_2 параллельно с классом A , порождающим группу классов гомологий Бореля—Мура степени 2 для набора прямых с рис. 4 по модулю подгруппы классов степени 1.

Главная часть класса A — это класс гомологий, порождающий группу $\bar{H}_1(F_2(\mathbf{X}!) \setminus F_1(\mathbf{X}!))$, то есть попросту класс горизонтального интервала на рис. 4b.

Аналогично, *главная часть* класса v_2 — это класс гомологий, порождающий группу $\bar{H}_{(\infty-2)n+5}(\sigma_2 \setminus \sigma_1)$. Этот класс реализуется циклом в $\sigma_2 \setminus \sigma_1$, состоящим из троек вида

$$((a_1 < a_2 < b_1 < b_2 \in \mathbb{R}^1), f, t), \quad (3.2)$$

где f — отображение $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, такое, что $f(a_1) = f(b_1)$, $f(a_2) = f(b_2)$, а $t \in (-1, 1)$ — параметр вдоль вклеенного интервала, участвующего в построении симплициального разрешения и аналогичного горизонтального интервалу на рис. 4b. Концы каждого такого интервала лежат в σ_1 , то есть в пространстве пар

$$((a < b \in \mathbb{R}^1), f), \quad (3.3)$$

таких, что $f(a) = f(b)$. Именно, эти концевые точки замечают множества таких точек (3.3) в σ_1 , что дополнительно $f(a') = f(b')$ для некоторой пары точек $a' < b' \in \mathbb{R}^1$, где либо

$$a' < a < b' < b \quad (3.4)$$

либо

$$a < a' < b < b'. \quad (3.5)$$

Наш базисный цикл (3.2) в $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ естественно изобразить с помощью «хордовой диаграммы»

$$\begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ \text{---} \underbrace{\text{---}}_{\text{---}} \text{---} \end{array}, \quad (3.6)$$

которая показывает взаимное расположение возможных пар точек (a_i, b_i) , склеиваемых отображениями f , участвующими в определении этого цикла.

Две компоненты его границы в σ_1 , соответствующие двум возможным расположениям (3.4) и (3.5), будут обозначаться соответственно двумя картинками, участвующими в выражении

$$\begin{array}{c} \triangle \\ \hline \cup \end{array} + \begin{array}{c} \triangle \\ \hline \cup \end{array} . \tag{3.7}$$

Они являются прямыми аналогами двух концевых точек горизонтального отрезка на рис. 4б.

§ 4. «Комбинаторные формулы» для гомологий наборов плоскостей

Рассмотрим вновь относительный цикл A_0 в разрешённом кресте \mathbf{X} !, порождающий группу $E_{2,-1}^1 \equiv \bar{H}_1(F_2 \setminus F_1)$. Хотя мы имеем расщепление (3.1) для группы

$$\bar{H}_1(\mathbf{X}) \sim \bar{H}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}),$$

этот цикл A_0 сам по себе не определяет никакого класса когомологий и не может принимать значений на (гомологических нулю) 0-мерных циклах в $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}$. Формула (3.1) означает лишь, что этот относительный цикл *может быть* продолжен до цикла Бореля—Мура во всём \mathbf{X} (а следовательно определить такой класс когомологий). Однако, для того чтобы такой класс был определён корректно, необходима *явная конструкция* такого продолжения.

Именно, мы должны сначала рассмотреть границу этого относительного цикла в F_1 . Из формулы (3.1) следует, что её можно там *затянуть*, то есть представить как границу некоторой локально конечной цепи в F_1 . Мы должны выбрать такую цепь A_1 , тогда разность $A_0 - A_1$ будет циклом во всём \mathbf{X} !. Затем рассмотрим прямой образ этого цикла в \mathbf{X} и двойственный к нему по Александру класс в $\bar{H}^*(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X})$. Если мы хотим получить в итоге не приведённый, а настоящий класс когомологий, то мы должны ещё выбрать относительный цикл в $\mathbb{R}^2 \bmod \mathbf{X}$, затягивающий этот цикл в \mathbb{R}^2 . Только этот класс может принимать значения на отдельных точках пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}$, определяя тем самым «комбинаторную формулу». В случае произвольного набора плоскостей в \mathbb{R}^N мы, по самому определению спектральной последовательности фильтрованного пространства, должны сделать всё то же самое, но может быть с бóльшим количеством шагов. Пусть дан элемент группы $E_{p,q}^1$, тогда мы начинаем с локально конечного цикла γ в $F_p \bmod F_{p-1}$, порождающего

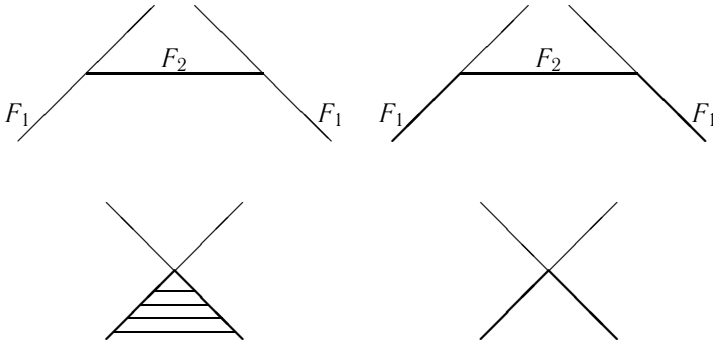


Рис. 5. «Комбинаторная формула» для класса когомологий степени 2

этот элемент, затем берём его границу $\partial_1(\gamma)$ в $F_{p-1} \setminus F_{p-2}$, затачиваем её там цепью γ_1 , рассматриваем границу $\partial_2(\gamma)$ цикла $\gamma - \gamma_1$ в $F_{p-2} \setminus F_{p-3}$, и т. д.

В случае наборов плоскостей в \mathbb{R}^N имеется очевидный способ выбрать все эти затачивающие цепи. Действительно, зафиксируем произвольное постоянное векторное поле в \mathbb{R}^N , находящееся в общем положении по отношению к набору плоскостей. Удобно представлять его как градиент типичной линейной функции \mathcal{L} . Каждый член $F_i \setminus F_{i-1}$ разрешения является несвязным объединением нескольких компонент, замыкание каждой из которых — это произведение конечного симплициального комплекса на некоторую плоскость размерности $N - i$, равную пересечению нескольких плоскостей нашего набора. Мы всегда можем поднять наше векторное поле на все эти компоненты: оно будет постоянным вдоль первых сомножителей, а вдоль вторых совпадать с градиентом ограничения функции \mathcal{L} на соответствующую плоскость. Все очередные циклы $\partial_k(\gamma)$ будут затачиваться траекториями этих поднятых полей, вытекающими из их точек: условие типичности исходного векторного поля гарантирует, что эти траектории будут трансверсальны к этим циклам.

В частности, для набора плоскостей \mathbf{X} эта процедура изображена на рис. 5. Мы считаем, что выбранное векторное поле направлено вниз. На верхней левой картинке мы отмечаем жирной линией только исходный относительный цикл $A \subset F_2 \setminus F_1$; на верхней правой мы добавляем к нему отрезки, затачивающие его границу в F_1 ; на правой нижней картинке выделена проекция получающегося цикла в \mathbf{X} , а на левой нижней заштрихована цепь, затачивающая этот цикл в \mathbb{R}^2 , замётённая траекториями нашего векторного поля, вытекающими из его точек.

В действительности, в случае наборов плоскостей нет необходимости выполнять все этапы этого построения, поскольку результат его можно предсказать с самого начала: это реализация формулы Горески—Мак-Ферсона, данная в [30].

§ 5. Как вычислять комбинаторные формулы для пространств узлов?

Все то же самое можно сделать в гомологиях дискриминанта в пространстве узлов.

В этом параграфе мы дадим первую иллюстрацию этого утверждения, вычисляя комбинаторную формулу для единственного инварианта узлов v_2 степени 2. Для простоты вычислений я рассматриваю здесь только гомологии mod 2.

Теорема 2 (см. [28]). *Значение инварианта v_2 на любом длинном узле $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ общего положения равно (mod 2) сумме трех чисел:*

а) числа конфигураций $\{a < b < c < d\} \subset \mathbb{R}^1$, таких, что $f(c)$ выше $f(a)$, а $f(d)$ выше $f(b)$;

б) числа конфигураций $\{a < b < c\}$, таких, что $f(c)$ выше $f(a)$, а проекция $f(b)$ в \mathbb{R}^2 лежит к востоку от (общей) проекции $f(a)$ и $f(c)$;

в) числа конфигураций $\{a < b\}$, таких, что $f(b)$ выше $f(a)$, и направление «на восток» в \mathbb{R}^2 является линейной комбинацией проекций производных $f'(a)$ и $f'(b)$, причём первая из этих проекций участвует в этой линейной комбинации с положительным коэффициентом, а вторая — с отрицательным.

Эти три числа изображаются тремя слагаемыми в следующей формуле:

$$\begin{array}{c} \triangleleft \\ \text{---} \\ \triangleright \end{array} + \begin{array}{c} \triangleleft \\ \text{---} \\ \triangleright \end{array} + \begin{array}{c} \triangleleft \\ \text{---} \\ \triangleright \end{array} \cdot \quad (5.8)$$

Замечание 1. *Эта формула очевидно сложнее формулы Поляка—Виро с рис. 2 для этого же инварианта. Нижеследующее её вычисление легко подправить так, чтобы получилась в точности формула Поляка—Виро, см. Замечание 2 ниже. Я пока не знаю как формализовать эту поправку таким образом, чтобы мой алгоритм самостоятельно мог выбрать наиболее экономный способ вычислений.*

Доказательство теоремы 2 занимает оставшуюся часть этого параграфа.

5.1. Главная часть, первый дифференциал, и его гомологичность нулю

Главная часть класса v_2 в $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ изображается хордовой диаграммой, указанной в формуле (3.6). Граница этой главной части в σ_1 указана в (3.7).

Затянем эту границу цепью в σ_1 . Вспомним, что первое слагаемое в (3.7) — это объединение всех точек $((a, b), f) \in \sigma_1$, таких, что дополнительно к условию $f(a) = f(b)$ (входящему в определение многообразия σ_1) f склеивает ещё какие-то две точки a', b' , такие, что $a' < a < b' < b$.

Естественно попытаться затянуть этот цикл в σ_1 (то есть представить в виде части границы) множеством точек $((a, b), f)$, удовлетворяющих всем тем же условиям, но с равенством $f(a') = f(b')$ заменённым на условие, что проекции $f(a')$ и $f(b')$ на «горизонтальную» плоскость \mathbb{R}^2 совпадают, а проекция точки $f(a')$ на вертикальную прямую лежит ниже проекции точки $f(b')$.

Последнее условие изображается «ломаной стрелкой» как в левой части равенства (5.9).

Аналогично, мы попытаемся затянуть второе слагаемое в (3.7) множеством, закодированным в левой части (5.10).

К сожалению, эти два множества имеют дополнительные участки границы, так что их сумма не затягивает весь цикл (3.7). Эти участки соответствуют возможным вырождениям конфигураций четвёрок точек a, b, a' и b' , участвующих в определении этих множеств.

Именно, полные границы этих двух множеств описаны в правых частях уравнений (5.9) и (5.10). Проанализируем для примера первое из них.

$$\partial \left(\text{diag} \right) = \left(\text{diag} \right) + \left(\text{diag} \right) + \left(\text{diag} \right) \quad (5.9)$$

$$\partial \left(\text{diag} \right) = \left(\text{diag} \right) + \left(\text{diag} \right) + \left(\text{diag} \right) \quad (5.10)$$

Второе слагаемое в его правой части возникает, когда первая точка a' и вторая точка a , участвующие в определении нашего множества, стремятся друг к другу.

В действительности это уравнение должно бы иметь ещё два слагаемых, возникающих когда третья точка b' стремится либо к a либо к b . Однако эти два слагаемых совпадают и взаимно сокращаются. (Это происходит и в аналогичном вычислении с целочисленными гомологиями:

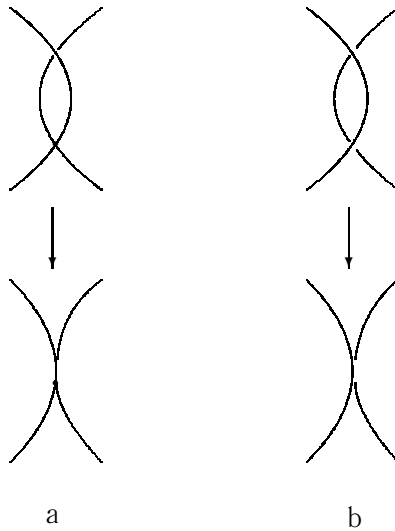


Рис. 6. Некоторые стандартные вырождения диаграмм особых узлов

эти два слагаемых возникают в целочисленной границе нашего множества с противоположными ориентациями.)

Наконец, последнее слагаемое возникает когда a' стремится к a , и одновременно b' стремится к b . Пространственная картинка соответствующего вырождения показана на рис. 6а. Нумерованные стрелочки в обозначении этого слагаемого выражают следующие условия: проекции на горизонтальную плоскость \mathbb{R}^2 производных нашего узла в точках $a < b$ сонаправлены в этой плоскости, но направление производной $f'(a)$ во всём \mathbb{R}^3 идёт «выше» направления $f'(b)$. Вторая формула (5.10) анализируется точно также.

Итак, мы получаем, что цикл (3.7) гомологичен в σ_1 сумме вторых и третьих слагаемых правых частей формул (5.9) и (5.10). Но сумма вторых (соответственно, третьих) слагаемых задаётся первым (соответственно, вторым) слагаемым в следующей формуле:

$$\begin{array}{c} \triangle \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \cup \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \text{---} \\ \rightleftharpoons \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \frac{1}{2} \tag{5.11}$$

По определению, первое из них состоит из точек $((a, b), f) \in \sigma_1$ которые, в дополнение к обычному условию $f(a) = f(b)$, удовлетворяют ещё следующему: *существует точка $c \in (a, b)$, такая, что проекция точки $f(c)$ на горизонтальную плоскость совпадает с проекцией*

точки $f(a) \equiv f(b)$. Аналогично, дополнительное условие, выраженное двумя перечёркнутыми стрелками под вторым слагаемым в (5.11), означает, что проекции производных $f'(a)$ и $f'(b)$ на горизонтальную плоскость должны быть сонаправлены.

Итак, сумма полуалгебраических множеств, закодированных в левых частях формул (5.9) и (5.10), осуществляет гомологию между циклами (3.7) и (5.11), и мы должны затянуть последний цикл. Этот цикл проще, чем исходный, в следующем простом смысле: он состоит из двух множеств, каждое из которых задаётся некоторыми условиями на поведение отображения f в 3 или 2 точках прямой \mathbb{R}^1 , тогда как для обоих слагаемых исходного цикла число таких «активных» точек равнялось 4. Эта же ситуация имеет место на каждом шагу выполнения алгоритма. Всякий раз нам нужно затянуть некоторый цикл, состоящий из конечного числа множеств, каждое из которых задаётся некоторыми условиями на поведение f в нескольких точках. Одно из этих условий должно быть условием типа равенства (например, образы некоторых двух точек в \mathbb{R}^3 должны совпадать, или некоторые два вектора в \mathbb{R}^2 должны быть сонаправлены, или образы некоторых трех точек должны иметь общую проекцию в \mathbb{R}^2 , и т. д.) Мы пытаемся затянуть это множество сходным множеством, в определении которого это равенство заменено неравенством, связывающим те же самые величины. Последнее множество имеет лишние участки границы, однако эти участки возникают при вырождении конфигураций активных точек, а следовательно они проще (в нашем смысле), чем исходный цикл. Алгоритм сходится в виду уменьшения числа активных точек.

Сделаем всё это с циклом (5.11). Заменим условие типа равенства, выделяющее его первое слагаемое, то есть условие «существует точка $c \in (a, b)$, такая, что проекции точек $f(c)$ и $f(a) \equiv f(b)$ в \mathbb{R}^2 совпадают» на условие типа неравенства: «существует точка $c \in (a, b)$, такая, что проекция точки $f(c)$ в \mathbb{R}^2 лежит к востоку от проекции точки $f(a) = f(b)$ ». Это условие кодируется перечёркнутой ломаной стрелкой как в левой части уравнения (5.12).

Также мы заменяем условие типа равенства, выделяющее второе слагаемое в (5.11), то есть условие «проекции в \mathbb{R}^2 векторов $f'(a)$ и $f'(b)$ сонаправлены» на условие типа неравенства: «выбранное направление “на восток” в \mathbb{R}^2 лежит в угле между проекциями двух векторов $f'(a)$ и $-f'(b)$ ». Последнее условие кодируется подстрочным выражением под левой частью уравнения (5.13).

$$\partial \left(\text{diagram with arrow} \right) = \left(\text{diagram with arrow} \right) + \underbrace{\left(\text{diagram} \right)}_{1 \mapsto} + \underbrace{\left(\text{diagram} \right)}_{2 \leftarrow} \quad (5.12)$$

$$\partial \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (5.13)$$

Вновь множества, указанные в левых частях равенств (5.12), (5.13), содержат лишние участки границы, описанные в правых частях этих равенств (наряду с участками, подлежащими затягиванию и взятыми из (5.11)). Например, условие $1 \mapsto$ означает, что проекция в \mathbb{R}^2 производной отображения f в первой активной точке соответствующей картинке должна быть направлена на восток. К счастью, лишние слагаемые в правых частях этих двух уравнений совпадают и сокращаются; следовательно сумма всех их слагаемых равна циклу (5.11).

Полный список вырождений особых узлов, участвующих в вычислении подобных граничных операторов, возникающих при комбинаторном вычислении комбинаторных формул для инвариантов узлов, см. в §1 работы [28].

Окончательно мы получаем, что искомая цепь, затягивающая цикл (3.7) в σ_1 , равна сумме четырёх полуалгебраических множеств, указанных в левых частях уравнений (5.9), (5.10), (5.12) и (5.13). Эта цепь вместе с исходным относительным циклом (3.6) образует цикл в σ_2 , порождающий группу $H_{\infty-1}(\sigma_2)$.

5.2. Второй дифференциал и его гомологичность нулю

Рассмотрим теперь проекцию последнего цикла в Σ . Проекция цепи (3.6) имеет размерность $3\infty - 2$ и не влияет на $(3\infty - 1)$ -мерные циклы, отвечающие за инварианты узлов. С другой стороны, проекции в Σ четырёх подмножеств, σ_1 , найденных в предыдущем разделе (то есть левых частей равенств (5.9), (5.10), (5.12) и (5.13)) задаются четырьмя слагаемыми следующей формулы (5.14):

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (5.14)$$

Переход от подмножества в σ_1 к подмножеству в Σ (выражающийся заменой дуг на неориентированные зигзаги) состоит в проставлении квантора \exists : мы заменяем множество точек $((a, b), f)$, удовлетворяющих условию $f(a) = f(b)$ и ещё каким-то условиям, на множество отображений f таких, что найдутся точки a, b , такие, что выполнено условие $f(a) = f(b)$ и все те же самые дополнительные условия. Опять-таки естественно

попытаться затянуть такое множество другим, в определении которого условие $f(a) = f(b)$ заменено на условие « $f(a)$ лежит ниже чем $f(b)$ в \mathbb{R}^3 ». На языке наших условных картинок, это множество получается из исходного методом рисования стрелочки у левого конца зигзага. Так мы получим три картинка, изображённые в левых частях уравнений (5.15)—(5.17); отметим, что и первое и второе слагаемое суммы (5.14) возникают как участки границы множества, указанного в левой части (5.15).

$$\partial \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \quad (5.15)$$

$$\partial \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \quad (5.16)$$

$$\partial \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \quad (5.17)$$

Все остальные слагаемые в правых частях этих равенств очевидны, быть может за исключением последнего слагаемого в (5.15), которое аналогично последним слагаемым в (5.9), (5.10) и отражает вырождение, возникающее при втором движении Райдемайстера, см. рис. 6b.

Сумма третьего, четвёртого и пятого членов в правой части уравнения (5.15) равняется второму слагаемому в (5.16). Поэтому сумма правых частей в (5.15)—(5.17) равна циклу (5.14), а сумма множеств, указанных в левых частях уравнений (5.15)—(5.17), является искомой комбинаторной формулой.

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Мы могли попытаться убить два слагаемых в (3.7) не левыми частями уравнений (5.9) и (5.10), а аналогичными картинками с изменёнными ориентациями ломаных стрелок. Если мы сделаем такую замену для ровно одного из этих слагаемых, то лишние слагаемые в правых частях соответствующих вариантов уравнений (5.9) и (5.10) взаимно сократятся, так что сумма их левых частей затянет цикл (3.7). Продолжая наш алгоритм, мы в этом случае получим в точности формулу Поляка—Виро (2), состоящую из одного члена, а не из трех как в теореме 2. К сожалению мой алгоритм ещё слишком молод и глуп, и не умеет выбирать лучшие варианты такого рода.

§ 6. Результаты для компактных узлов

В этом параграфе мы, следуя [26], опишем комбинаторные формулы для всех классов когомологий фильтрации ≤ 2 в пространстве компактных узлов $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ с любым $n \geq 3$. Сначала, следуя [25] и [23], перечислим все такие классы.

Мы предполагаем, что в S^1 зафиксирована циклическая координата, то есть отождествление $S^1 \simeq \mathbb{R}^1/2\pi\mathbb{Z}$.

Предложение 1 (см. [24], [25]). *Для любого $n \geq 3$ группа \mathbb{Z}_2 -когомологий порядка 1 пространства компактных узлов в \mathbb{R}^n тривиальна во всех размерностях кроме $n-2$ и $n-1$, а в этих размерностях изоморфна \mathbb{Z}_2 . Более того, (только) при чётных n аналогичные целочисленные группы когомологий в этих размерностях изоморфны \mathbb{Z} . При этом образующий элемент $(n-2)$ -мерной (соответственно, $(n-1)$ -мерной) группы задаётся индексом зацепления с множеством дискриминантных отображений $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, склеивающих какие-нибудь две противоположные точки окружности S^1 , (соответственно, с множеством отображений, склеивающих некоторые отмеченные противоположные точки, например 0 и π).*

Предложение 2 (см. [23], [25]). *Дополнительные классы порядка 2 имеются в точности в двух размерностях: $2n-6$ и $2n-3$. В размерности $2n-6$ они при любом n образуют группу, изоморфную \mathbb{Z} (при $n=3$ она порождена простейшим инвариантом узлов). Группа в размерности $2n-3$ изоморфна \mathbb{Z} при $n > 3$ и циклична при $n=3$; её образующая задаётся индексом зацепления с циклом в дискриминанте, главная часть которого (то есть аналог цикла (3.6)) в разрешённом двойном самопересечении Σ замечается такими отображениями $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, что для некоторого $\alpha \in S^1$ мы имеем $f(\alpha) = f(\alpha + \pi)$ и $f(\alpha + \pi/2) = f(\alpha + 3\pi/2)$.*

Ниже мы в частности покажем, что при $n=3$ последняя группа гомологий также свободная циклическая, см. Следствие 2. Сейчас мы опишем явные комбинаторные формулы для базисных классов, порождающих четыре группы, упоминающиеся в предложениях 1 и 2.

Теорема 3 (см. [26]). *Для любого $n \geq 3$, значение любого из этих четырёх классов когомологий на любом цикле общего положения соответствующей размерности в пространстве $\mathcal{K}_n \setminus \Sigma$ компактных узлов в \mathbb{R}^n равно числу точек этого цикла, соответствующих*

узлам, удовлетворяющим нижеследующим соотношениям (и в случае целых коэффициентов учтённых с подходящими знаками).

А. Для $(n - 1)$ -мерного класса фильтрации 1: проекции точек $f(0)$ и $f(\pi)$ в плоскость \mathbb{R}^{n-1} совпадают, и $f(0)$ «выше» чем $f(\pi)$.

Б. Для $(n - 2)$ -мерного класса порядка 1, одно из следующих двух условий:

а) найдётся точка $\alpha \in [0, \pi)$, такая, что проекции точек $f(\alpha)$ и $f(\alpha + \pi)$ в \mathbb{R}^{n-1} совпадают, причём $f(\alpha)$ «выше» чем $f(\alpha + \pi)$;

б) проекция точки $f(0)$ в \mathbb{R}^{n-1} лежит «к востоку» от проекции точки $f(\pi)$.

В. Для $(2n - 3)$ -мерного класса порядка 2, одно из следующих двух условий:

а) найдётся точка $\alpha \in [0, \pi/2)$, такая, что проекции точек $f(\alpha)$ и $f(\alpha + \pi)$ в \mathbb{R}^{n-1} совпадают, проекции $f(\alpha + \pi/2)$ и $f(\alpha + 3\pi/2)$ в \mathbb{R}^{n-1} совпадают, и при этом $f(\alpha + \pi)$ «выше» чем $f(\alpha)$, а $f(\alpha + \pi/2)$ «выше» чем $f(\alpha + 3\pi/2)$;

б) проекции точек $f(0)$ и $f(\pi)$ в \mathbb{R}^{n-1} совпадают, причём $f(\pi)$ «выше» чем $f(0)$, а проекция точки $f(\pi/2)$ в \mathbb{R}^{n-1} лежит «к востоку» от проекции точки $f(3\pi/2)$.

Г. Для $(2n - 6)$ -мерного класса порядка 2, одно из двух условий:

а) найдутся четыре точки $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S^1$ (циклические координаты которых удовлетворяют условию $0 \leq \alpha < \beta < \gamma < \delta < 2\pi$), такие, что проекции точек $f(\alpha)$ и $f(\gamma)$ в \mathbb{R}^{n-1} совпадают, проекции точек $f(\beta)$ и $f(\delta)$ в \mathbb{R}^{n-1} совпадают, причём $f(\gamma)$ «выше» чем $f(\alpha)$, а $f(\beta)$ «выше» чем $f(\delta)$.

б) Если $n = 3$, то второе условие отсутствует (и мы имеем лишь первое, совпадающее с комбинаторной формулой Поляка—Виро), однако при $n > 3$ имеется дополнительное условие: существуют три различные точки $\beta, \gamma, \delta \in S^1$ (циклические координаты которых удовлетворяют условию $0 < \beta < \gamma < \delta < 2\pi$), такие, что проекции точек $f(\gamma)$ и $f(0)$ в \mathbb{R}^{n-1} совпадают, $f(\gamma)$ «выше» чем $f(0)$, а проекция точки $f(\delta)$ в \mathbb{R}^{n-1} лежит «к востоку» от проекции точки $f(\beta)$.

Следствие 1. Для любого $n \geq 3$ базисный класс порядка 2 и размерности $2n - 3$ принимает значение ± 1 на фундаментальном цикле подмногообразия пространства узлов, состоящего из всех натурально параметризованных больших окружностей единичной сферы в \mathbb{R}^n .

Действительно, множество а) утверждения В не пересекается с этим подмногообразием, а множество б) имеет с ним ровно одну точку (транс-

версального) пересечения.

В случае чётного n утверждение о том, что класс этого подмногообразия в пространстве узлов не гомологичен нулю, было доказано в [4] совсем другими методами.

Следствие 2. *Группа $(2n - 3)$ -мерных классов когомологий порядка 2 является свободной циклической и при $n = 3$.*

§ 7. Добавление: вычисления В. Э. Турчина

Теория инвариантов конечного порядка для узлов породила много красивых алгебраических объектов, таких как алгебра Хопфа хордовых диаграмм и граф-комплекс деревьев, см. например [11], [2].

Недавно В. Э. Турчин показал (см. [17], [18]), что эти структуры являются неотъемлемыми частями более общих теорий, связанных со всем кольцом когомологий пространств узлов и формулируемых в терминах обобщённых хордовых диаграмм, перечисленных в [21]. Соответствующие мультипликативные структуры обобщают тасовочное умножение в когомологиях дополнений к наборам плоскостей (см. [29], [5], [6]), но, разумеется, намного сложнее. В частности, в [17] и [18] доказано, что первый член основной спектральной последовательности, вычисляющей рациональные гомологии пространства длинных узлов в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, описывается в терминах гомологий Хохшильда операды алгебр Пуассона если n нечётно (соответственно, операды алгебр Герстенхабера если n чётно). А именно, гомологии Хохшильда этих операд в обоих случаях образуют алгебру полиномов от бесконечного числа чётных и нечётных переменных. Для того, чтобы получить первый член спектральной последовательности, в случае чётного n мы должны профакторизовать соответствующую полиномиальную алгебру по одной образующей $[x_1, x_2]$. В случае нечётного n мы должны профакторизовать по двум образующим: одной чётной (равной $[x_1, x_2]$) и одной нечётной (равной $[[x_1, x_3], x_2]$).

В частности, обычная биалгебра хордовых диаграмм (см. [10], [2]), является подпространством в гомологиях Хохшильда операды алгебр Пуассона. Для того, чтобы получить алгебру инвариантов конечного порядка (то есть нульмерных когомологий при $n = 3$), нужно профакторизовать эту биалгебру по одной образующей $[x_1, x_2]$.

Литература

1. В. И. Арнольд, О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций. *Труды Моск. матем. об-ва*, 21 (1970), 27–46.

2. D. Bar-Natan, On the Vassiliev knot invariants, *Topology*, **34** (1995), 423–472.
3. P. Cartier, Construction combinatoire des invariants de Vassiliev, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **316** (1993), 1205–1210.
4. A. S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, and R. Longoni, *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimension*, preprint **math. GT/9910139**, 1999.
5. P. Deligne, M. Goresky, and R. MacPherson, L'algebre de cohomologie du complément, dans un espace affine, d'une famille finie de sous-espaces affines, *Michigan J. Math.* **48** (2000), 121–136.
6. M. de Longueville and C. Schultz, The cohomology rings of complements of subspace arrangements, *Math. Annalen* **319** (2000), 625–646.
7. M. Goresky and R. MacPherson, *Stratified Morse Theory*, Springer, Berlin a. o., 1988. Пер. на рус. яз.: М. Горески, Р. МакФерсон, *Стратифицированная теория Морса*, М.: Мир, 1991.
8. M. Goussarov, M. Polyak, and O. Viro, Finite type invariants of classical and virtual knots, *Topology* **39**:5 (2000), 1045–1068.
9. A. Hatcher, Spaces of knots, <http://math.cornell.edu/~hatcher>
10. M. Kontsevich, Vassiliev's knot invariants, in *Adv. in Sov. Math.*, **16**:2 (1993) AMS, Providence RI, 137–150.
11. M. Kontsevich, Formal (non-)commutative symplectic geometry. In: L. Corvin, I. Gel'fand, J. Lepovsky (eds.), *The I. M. Gel'fand's mathematical seminars 1990–1992*, 1993, Birkhäuser, Basel, 173–187.
12. J. Lannes, Sur les invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 3. *L'Enseignement Mathématique* **39** (1993), 295–316.
13. A. B. Merkov, Vassiliev invariants classify plane curves and doodles, Preprint, 1998, <http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/papers>
14. А. Б. Мерков, Сегментно–стрелочные диаграммы и инварианты орнаментов, *Матем. Сборник* **191**:11 (2001).
15. M. Polyak and O. Viro, Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants, *Internat. Math. Res. Notes* **11** (1994), 445–453.
16. M. Polyak and O. Viro, On the Casson knot invariant, *Tel-Aviv University and Uppsala University preprint*, 1996, **math. GT/9903158**
17. V. Tourtchine, Sur l'homologie des espaces des nœuds non-compacts, arXiv:**math. QA/0010017**, 2000
18. V. Tourtchine, Sur les questions combinatoires de la théorie spectrale des nœuds, These de Doctorate, Université Paris-7, 2002.
19. С. Д. Тюрина, О формулах типа Ланна и Виро—Поляка для инвариантов конечного типа, *Матем. Заметки*, **66** (1999), No. 3–4, 525–530.

20. V. A. Vassiliev, *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications*, Revised ed., Translations of Math. Monographs, AMS, Providence RI, 1994.
21. V. A. Vassiliev, Cohomology of knot spaces, in: Theory of Singularities and its Applications (V. I. Arnold, ed.), *Advances in Soviet Math. Vol. 1* (1990), p. 23–69 (AMS, Providence, RI).
22. V. A. Vassiliev, Complexes of connected graphs, in L. Corvin, I. Gel'fand, J. Lepovsky (eds.), *The I. M. Gel'fand's mathematical seminars 1990–1992*, 1993, Birkhäuser, Basel, 223–235.
23. В. А. Васильев, *Топология дополнений к дискриминантам*, М.: Фазис, 1997.
24. V. A. Vassiliev, On invariants and homology of spaces of knots in arbitrary manifolds, in: B. Feigin and V. Vassiliev, eds. *Topics in Quantum Groups and Finite-Type Invariants. Mathematics at the Independent University of Moscow*. AMS Translations. Ser. 2. Vol. 185. *Advances in the Mathematical Sciences*. AMS, Providence RI, 1998, p. 155–182.
25. V. A. Vassiliev, Topology of two-connected graphs and homology of spaces of knots, in: S. L. Tabachnikov (ed.), *Differential and Symplectic Topology of Knots and Curves*, AMS Transl., Ser. 2, **190**, AMS, Providence RI, 1999, 253–286.
26. V. A. Vassiliev, On combinatorial formulas for cohomology of spaces of knots, *Moscow Math. J.*, 1:1 (2001), 91–123.
27. В. А. Васильев, Топология наборов плоскостей и их дополнений, *УМН*, **56:2** (2001).
28. V. A. Vassiliev, (2001) Combinatorial computation of combinatorial formulas for knot invariants, <http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/papers>.
29. S. Yuzvinsky, Small rational model of subspace complement, Translations AMS; <http://xxx.lanl.gov/abs/math.CO/9806143>, 1998
30. G. M. Ziegler and R. T. Živaljević, Homotopy type of arrangements via diagrams of spaces, *Math. Ann.* **295** (1993), 527–548.

Независимый Московский университет;
Математический институт им. В. А. Стеклова.

M. Verbitsky

A simple proof of stability of Fourier—Mukai transform

Abstract

Let B be a stable bundle on a K3 surface, such that its deformation space is compact, and the universal bundle is well defined. Consider a stable bundle B_1 on M . Assume that the i -th cohomology sheaf $FM^i(B_1)$ of the Fourier—Mukai transform of B_1 is a bundle. Then $FM^i(B_1)$ is a direct sum of stable bundles. A more general version of this statement is proven in math.AG/0107196 (“Projective bundles over hyperkähler manifolds and stability of Fourier—Mukai transform”).

§ 1. Introduction

Throughout this paper, stability of coherent sheaves and holomorphic vector bundles is understood in the sense of Mumford—Takemoto (see Definition 3.3).

Let M_1 be a Kähler K3 surface and B a stable holomorphic vector bundle. Assume that the space of stable deformations of B is a compact manifold M_2 and the universal bundle \tilde{B} on $M_1 \times M_2$ is well defined. The Fourier—Mukai transform FM^\bullet takes a coherent sheaf B_1 on M_1 , and produces a complex of coherent sheaves on M_2 . If π_1, π_2 denote the projecting of $M_1 \times M_2$ to M_1, M_2 , then $FM^\bullet(B_1)$ is obtained as follows: we pull back B_1 to $M_1 \times M_2$, tensor it with \tilde{B} and apply the derived direct image functor $R^\bullet(\pi_2)_*$.

We prove the following theorem.

Theorem 1.1. In the above assumptions, consider the i -th cohomology sheaf $FM^i(B_1)$ of the complex $FM^\bullet(B_1)$. Assume that B_1 is stable and

$FM^i(B_1)$ is a bundle. Then $FM^i(B_1)$ is polystable, that is, $FM^i(B_1)$ is a direct sum of stable bundles of the same slope.

Proof: See Sec. 6.3.

In [25] a more general version of Theorem 1.1 was proven: it was shown that the reflexive hull of $FM^i(B_1)$ is polystable, for B_1 any stable bundle and B any stable bundle with a compact deformation space.

The argument present in this paper is essentially simplified because we avoid dealing with singularities of coherent sheaves, by assuming that $FM^i(B_1)$ is a bundle. This proof does not use many of the concepts introduced in [25]: the quaternionic Dolbeault complex, connections in modules over a DG-algebra, qD-modules, extended quaternionic Dolbeault bicomplex. However, the intuition underlying the proof is based on these notions.

The Fourier—Mukai transform was discovered by S. Mukai in 1981 ([16]). Mukai worked in the following situation. Let T be a compact torus or abelian variety, and \hat{T} the dual torus, which is by definition the moduli space of line bundles of degree 0 on T . The *Poincaré bundle* P is a line bundle of degree zero on the product $T \times \hat{T}$, defined in such a way that for all $t \in \hat{T}$ the restriction of P to $T \times \{t\}$ is isomorphic to the line bundle corresponding to the point $t \in \hat{T}$. This bundle is also called *the universal bundle*.

Given a coherent sheaf (or a complex of sheaves) F on T , let $FM(F)$ be the total derived direct image

$$FM(F) := R^\bullet(\pi_2)_*(P \otimes \pi_1^*F),$$

where $\pi_1, \pi_2: T \times \hat{T} \rightarrow T, \hat{T}$ are the natural projection maps.

Clearly, $F \rightarrow FM(F)$ defines a functor of derived categories of coherent sheaves

$$FM: D_b(T) \rightarrow D_b(\hat{T}).$$

Consider the dual torus $\hat{\hat{T}}$ to \hat{T} . Clearly, $\hat{\hat{T}}$ is naturally isomorphic to T . Applying Fourier—Mukai functor to the torus $\hat{\hat{T}}$, we obtain the transform

$$\hat{FM}: D_b(\hat{\hat{T}}) \rightarrow D_b(T).$$

It is easy to check that the composition functor

$$FM \circ \hat{FM}: D_b(T) \rightarrow D_b(T)$$

is equivalent to identity.

The usual Fourier transform has a similar interpretation in terms of D -moduli. There is also a version of the Fourier transform for perverse sheaves over $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}$, where $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}$ denotes an affine space over a field of char p .

This reveals the Fourier—Mukai transform as one of the most fundamental operations in algebraic geometry.

M. Kontsevich proposed an interpretation of the Mirror Conjecture in terms of the derived category of coherent sheaves on one of the mirror manifolds ([13]). It turns out that the derived category of coherent sheaves on a complex manifold M contains a great wealth of information about the geometry of M . In fact, if M is projective and the canonical or anti-canonical bundle of M is ample, the manifold M can be reconstructed from $D_b(M)$ ([6], [22]). This puts a spotlight on the cases where such a reconstruction is *not* possible.

For instance, the Fourier—Mukai transform implies the existence of an equivalence between $D_b(T)$ and $D_b(\hat{T})$ ([16]).

Let M be a K3 surface, B a stable bundle, and X the moduli of stable deformations of B . S. Mukai [17] investigated this situation in great detail. It was shown that X is smooth and hyperkähler. Under some additional assumptions, X is also compact, and there exists a universal bundle \mathcal{B} on $M \times X$. The cohomology group of X is generated by the Künneth component of the Chern classes of \mathcal{B} ([15]). In more special cases, X is a K3 surface with periods prescribed by S. Mukai [19].

This situation is similar to the usual duality between the abelian varieties, with the role of a dual manifold played by X . In such a case, the Fourier—Mukai transform is also defined, in the same way it was defined for a torus. It is also known that FM is (under additional assumptions) invertible ([14]). This establishes an equivalence of the derived categories of coherent sheaves ([7], [8], [21]).

The Fourier—Mukai transform on K3 surfaces was studied at great length by Bartocci, Bruzzo and Ruiperez [3]–[5] and Yoshioka [27]–[30], where some partial results on the stability were given. K. Yoshioka also found a counterexample to the stability of the Fourier—Mukai transform on a 2-dimensional torus ([27]).

§ 2. Hyperkähler manifolds

This Section contains some results and definitions from hyperkähler geometry, found, for instance, in [2].

Definition 2.1. ([2]) *A hyperkähler manifold* is a Riemannian manifold M endowed with three complex structures $I, J,$ and K such that the following holds:

- (i) the metric on M is Kähler with respect to these complex structures; and

- (ii) $I, J,$ and $K,$ considered as endomorphisms of the real tangent bundle, satisfy the relation $I \circ J = -J \circ I = K.$

The notion of hyperkähler manifold was introduced by E. Calabi ([9]).

Clearly, a hyperkähler manifold has a natural action of the quaternion algebra \mathbb{H} in its real tangent bundle $TM.$ Therefore its complex dimension is even. For each quaternion $L \in \mathbb{H}, L^2 = -1,$ the corresponding automorphism of TM is an almost complex structure. It is easy to check that this almost complex structure is integrable ([2]).

Definition 2.2. Let M be a hyperkähler manifold, and L a quaternion satisfying $L^2 = -1.$ The corresponding complex structure on M is called an *induced complex structure.* The $M,$ considered as a Kähler manifold, is denoted by $(M, L).$ In this case, the hyperkähler structure is called *compatible with the complex structure $L.$*

Definition 2.3. Let M be a complex manifold and Ω a closed holomorphic 2-form over M such that $\Omega^n = \Omega \wedge \Omega \wedge \dots$ is a nowhere degenerate section of the canonical class of M ($2n = \dim_{\mathbb{C}}(M).$). Then M is called *holomorphically symplectic.*

Let M be a hyperkähler manifold; denote the Riemannian form on M by $\langle \cdot, \cdot \rangle.$ Let the form $\omega_I := \langle I(\cdot), \cdot \rangle$ be the usual Kähler form which is closed and parallel (with respect to the Levi—Civita connection). Analogously defined forms ω_J and ω_K are also closed and parallel.

A simple linear algebraic consideration ([2]) shows that the form $\Omega := \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$ is of type $(2, 0)$ and, being closed, this form is also holomorphic. Also, the form Ω is nowhere degenerate, as another linear algebraic argument shows. It is called *the canonical holomorphic symplectic form of a manifold $M.$* Thus, for each hyperkähler manifold $M,$ and an induced complex structure $L,$ the underlying complex manifold (M, L) is holomorphically symplectic. The converse assertion is also true:

Theorem 2.4. ([1], [2]) Let M be a compact holomorphically symplectic Kähler manifold with the holomorphic symplectic form $\Omega,$ a Kähler class $[\omega] \in H^{1,1}(M)$ and a complex structure $I.$ Let $n = \dim_{\mathbb{C}} M.$ Assume that $\int_M \omega^n = \int_M (\operatorname{Re} \Omega)^n.$ Then there is a unique hyperkähler structure $(I, J, K, (\cdot, \cdot))$ over M such that the cohomology class of the symplectic form $\omega_I = (\cdot, I(\cdot))$ is equal to $[\omega]$ and the canonical symplectic form $\omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$ is equal to $\Omega.$

Theorem 2.4 follows from the conjecture of Calabi, proven by S.-T. Yau ([26]).

Let M be a hyperkähler manifold. We identify the group $SU(2)$ with the group of unitary quaternions. This gives a canonical action of $SU(2)$ on the

tangent bundle and all its tensor powers. In particular, we obtain a natural action of $SU(2)$ on the bundle of differential forms.

The following lemma is clear.

Lemma 2.5. The action of $SU(2)$ on differential forms commutes with the Laplacian.

Proof: See e. g. [24].

Thus, for compact M , we may speak of the natural action of $SU(2)$ in cohomology.

§ 3. Hyperholomorphic bundles

In this Section we repeat some results and definitions from [24].

3.1. Hyperholomorphic connections

Let B be a holomorphic vector bundle over a complex manifold X , ∇ a connection in B , and let $\Theta \in \Lambda^2 \otimes \text{End}(B)$ be its curvature. This connection is called *compatible with the holomorphic structure* if $\nabla_\gamma(\zeta) = 0$ for any holomorphic section ζ and any antiholomorphic tangent vector field $\gamma \in T^{0,1}(X)$. If there exists a holomorphic structure compatible with the given Hermitian connection then this connection is called *integrable*.

One can define the *Hodge decomposition* in the space of differential forms with coefficients in any complex bundle, in particular, $\text{End}(B)$.

Theorem 3.1. Let ∇ be a Hermitian connection in a complex vector bundle B over a complex manifold X . Then ∇ is integrable if and only if $\Theta \in \Lambda^{1,1}(X, \text{End}(B))$, where $\Lambda^{1,1}(X, \text{End}(B))$ denotes the forms of Hodge type $(1,1)$. Also, the holomorphic structure compatible with ∇ is unique.

Proof: This is Proposition 4.17 of [12], Chapter I.

This proposition is a version of the Newlander—Nirenberg theorem. For vector bundles, it was proven by M. Atiyah and R. Bott.

Definition 3.2. Let B be a Hermitian vector bundle with a connection ∇ over a hyperkähler manifold M . Then ∇ is called *hyperholomorphic* if ∇ is integrable with respect to each of the complex structures induced by the hyperkähler structure.

As follows from Theorem 3.1, ∇ is hyperholomorphic if and only if its curvature Θ is of Hodge type $(1,1)$ with respect to any of the complex structures induced by a hyperkähler structure.

A form is $SU(2)$ -invariant if and only if it is of type (p, p) with respect to all induced complex structures. Therefore, ∇ is hyperholomorphic if and only if Θ is an $SU(2)$ -invariant differential form.

3.2. Hyperholomorphic bundles, Yang—Mills connections, and stability

Definition 3.3. Let F be a coherent sheaf over an n -dimensional compact Kähler manifold M . We define *the degree* $\deg(F)$ (sometimes the degree is also denoted by $\deg c_1(F)$) as

$$\deg(F) = \int_M \frac{c_1(F) \wedge \omega^{n-1}}{\text{Vol}(M)}$$

and slope(F) as

$$\text{slope}(F) = \frac{1}{\text{rk}(F)} \cdot \deg(F).$$

The number slope(F) depends only on the cohomology class of $c_1(F)$.

Let F be a coherent sheaf on M and $F' \subset F$ its subsheaf with $0 < \text{rk } F' < \text{rk } F$. Then F' is called a *destabilizing subsheaf* if $\text{slope}(F') \geq \text{slope}(F)$.

A coherent sheaf F is called *stable*¹, or μ -stable, if it has no destabilizing subsheaves. A coherent sheaf F is called *polystable* if it is a direct sum of stable sheaves of the same slope. A coherent sheaf F is called *semistable* if for all destabilizing subsheaves $F' \subset F$ we have $\text{slope}(F') = \text{slope}(F)$.

Let M be a Kähler manifold with a Kähler form ω . Consider the standard Hodge operator on differential forms, $L: \eta \rightarrow \omega \wedge \eta$. There is also a fiberwise-adjoint Hodge operator $\Lambda = *L*$ ([11]).

Definition 3.4. Let B be a holomorphic bundle over a Kähler manifold M with a holomorphic Hermitian connection ∇ and a curvature $\Theta \in \Lambda^{1,1} \otimes \text{End}(B)$. The Hermitian metric on B and the connection ∇ defined by this metric are called *Yang—Mills* if

$$\Lambda(\Theta) = c \cdot \text{Id} \Big|_B, \tag{3.1}$$

where Λ is a Hodge operator, c a constant, and $\text{Id} \Big|_B$ is the identity endomorphism which is a section of $\text{End}(B)$.

Clearly, the constant c is proportional to the slope of B . Throughout this paper, we shall consider only bundles of slope zero. In this case, the Yang—Mills equation can be written simply as $\Lambda(\Theta) = 0$.

The following fundamental theorem provides examples of Yang—Mills bundles.

Theorem 3.5. (Uhlenbeck—Yau) Let B be a holomorphic bundle over a compact Kähler manifold. Then B admits a Hermitian Yang—Mills connection if and only if it is polystable. Moreover, the Yang—Mills connection is unique, if it exists.

¹In the sense of Mumford—Takemoto.

Proof: [23].

Proposition 3.6. Let M be a hyperkähler manifold, J an induced complex structure, and let B be a complex vector bundle over (M, J) . Then every hyperholomorphic connection ∇ in B is Yang—Mills and satisfies $\Lambda(\Theta) = 0$, where Θ is the curvature of ∇ .

Proof: We use the definition of a hyperholomorphic connection as one with $SU(2)$ -invariant curvature. Then Proposition 3.6 follows from the following elementary observation:

Lemma 3.7. Let $\Theta \in \Lambda^2(M)$ be a $SU(2)$ -invariant differential 2-form on M . Then $\Lambda_J(\Theta) = 0$ for each induced complex structure J .²

Proof: This is Lemma 2.1 of [24].

Let M be a compact hyperkähler manifold, and I an induced complex structure. For any stable holomorphic bundle on (M, I) there exists a unique Hermitian Yang—Mills connection which, for some bundles, turns out to be hyperholomorphic. It is possible to tell exactly when this happens.

Theorem 3.8. Let B be a polystable holomorphic bundle over (M, I) , where M is a hyperkähler manifold and I is an induced complex structure over M . Then B admits a hyperholomorphic connection if and only if it is polystable and the first two Chern classes $c_1(B)$ and $c_2(B)$ are $SU(2)$ -invariant.³

Proof: This is Theorem 2.5 of [24].

§ 4. Projective bundles and their moduli

4.1. Projective bundles and $PGL(n)$ -bundles

Let M be a complex manifold and B a holomorphic vector bundle, $\dim B = n$. Consider the principal $GL(n)$ -bundle G_B of linearly independent n -tuples of vectors in B . The bundle B can be reconstructed from G_B as follows

$$B = G_B \times_{GL(n)} V_n,$$

where $V_n = \mathbb{C}^n$ denotes the fundamental representation of $GL(n)$. This is well known.

A similar construction exists for principal $PGL(n)$ -bundles. Given a principal $PGL(n)$ -bundle G_P , we can consider the associated fibration

$$P := G_P \times_{PGL(n)} \mathbb{P}, \tag{4.1}$$

where \mathbb{P} is $\mathbb{C}P^{n-1}$, equipped with the natural action of $PGL(n)$.

²By Λ_J we understand the Hodge operator Λ associated with the Kähler complex structure J .

³We use Lemma 2.5 to speak of action of $SU(2)$ in cohomology of M .

Definition 4.1. A projective vector bundle over M is a holomorphic fibration P over M , obtained from a principal $PGL(n)$ -bundle as in (4.1).

Remark 4.2. Any automorphism of $\mathbb{C}P^n$ is projective linear. Given a locally trivial holomorphic fibration P with the fibers isomorphic to $\mathbb{C}P^n$, it is very easy to reconstruct the corresponding principal $PGL(n+1)$ -bundle G_P . For any point $x \in M$, the fiber of G_P in x is the set of linearly independent n -tuples p_1, \dots, p_n in the space $V_x = \mathbb{C}^n$ corresponding to $P|_x \cong \mathbb{C}P^{n-1}$, up to a complex multiplier. The group $PGL(P) = \text{Aut}_M(P)$ acts on $G_P|_x$ freely and transitively, in such a way that G_P forms a principal $PGL(n)$ -bundle.

Clearly, then, the bundle P satisfies (4.1). In other words, projective vector bundles are in one-to-one correspondence with the locally trivial holomorphic fibrations with the fibers isomorphic to $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Definition 4.3. Given a projective bundle P , we consider the vector bundle $\mathfrak{pgl}(P)$ of vertical holomorphic vector fields on P . Clearly, the fibers of $\mathfrak{pgl}(P)$ are isomorphic (as Lie algebras) to $\mathfrak{pgl}(n)$. A Hermitian structure on a projective holomorphic bundle is an invariant Hermitian structure on the corresponding holomorphic vector bundle $\mathfrak{pgl}(P)$.

4.2. Projective hyperholomorphic bundles: the definition

Now assume that M is a hyperkähler manifold and I an induced complex structure. Consider (M, I) as a Kähler manifold.

Definition 4.4. Let P be a projective bundle over (M, I) equipped with a Hermitian structure. We say that P is hyperholomorphic if the Hermitian connection on the corresponding $\mathfrak{pgl}(n)$ -bundle $\mathfrak{pgl}(P)$ is hyperholomorphic (Definition 3.2).

Let B be a Hermitian holomorphic vector bundle on (M, I) and Λ, L the standard Hodge operators on differential forms. We denote by Θ the curvature of B . Let $\text{Tr}(\Theta) \in \Lambda^{1,1}(M)$ be the trace of the curvature,

$$\text{Tr}(\Theta)(x, y) = \text{Tr}(\Theta(x, y)); \quad x, y \in TM$$

(we interpret $\Theta(x, y)$ as an endomorphism of B and take its trace).

Proposition 4.5. Let M be a connected hyperkähler manifold, I an induced complex structure, and B a holomorphic Hermitian vector bundle on M . Denote the curvature of B by

$$\Theta \in \Lambda^{1,1}(M, \text{End}(B)).$$

Then the following conditions are equivalent:

- (i) the bundle $\text{End}(B)$ is hyperholomorphic;

(ii) the traceless part of the curvature

$$\Theta_{tr} := \Theta - \frac{1}{\dim B} \text{Tr}(\Theta)$$

is $SU(2)$ -invariant, with respect to the natural action of $SU(2)$ on the differential forms;

(iii) the projectivization $\mathbb{P}B$ is a hyperholomorphic projective bundle on M .

Proof: The implication (ii) \Rightarrow (i) is quite easy. The curvature $\Theta' \in \text{End}(\text{End}(B))$ of $\text{End} B$ is expressed via Θ as follows

$$\Theta' = l(\Theta) - r(\Theta), \quad (4.2)$$

where $l: \text{End}(B) \rightarrow \text{End}(\text{End}(B))$ is an operation of left multiplication by the sections of $\text{End}(B)$, and r is an operation of right multiplication. Now, the trace of Θ belongs to the center of $\text{End}(B)$, and therefore the traceless part of the curvature satisfies

$$\Theta' = l(\Theta) - r(\Theta) = l(\Theta_{tr}) - r(\Theta_{tr}). \quad (4.3)$$

Since the 2-form Θ_{tr} is $SU(2)$ -invariant, Θ' is also $SU(2)$ -invariant. By definition, this implies that $\text{End}(B)$ is hyperholomorphic. This proves the implication (ii) \Rightarrow (i). The converse implication is obvious. Clearly, the map

$$LR: \text{End}(B) \rightarrow \text{End}(\text{End}(B)), \quad LR(a) = l(a) - r(a)$$

is injective on the traceless part of $\text{End}(B)$. Therefore, $\text{End}(B)$ is hyperholomorphic if and only if the traceless part of Θ is $SU(2)$ -invariant. This proves the equivalence (i) \Leftrightarrow (ii).

To prove (i) \Rightarrow (iii), we notice that $\mathfrak{pgl}(B)$ is a quotient of $\mathfrak{gl}(B)$, which is hyperholomorphic by assumptions of (i). This means that $\mathbb{P}B$ is also hyperholomorphic. The converse implication is also clear. The Lie algebra bundle $\mathfrak{pgl}(B)$ corresponding to $PGL(B)$ is the bundle $\text{End}_{tr}(B)$ of traceless automorphisms of B , and it is hyperholomorphic by the assumptions of (iii). On the other hand, $\text{End}(B) = \text{End}_{tr}(B) \oplus \mathbb{C}$ where \mathbb{C} is the trivial holomorphic Hermitian line bundle. Therefore, $\text{End}(B)$ is hyperholomorphic if and only if $\text{End}_{tr}(B)$ is hyperholomorphic. We proved the equivalence (i) \Leftrightarrow (iii).

Definition 4.6. [24] Let M be a hyperkähler manifold, I an induced complex structure, and B a Hermitian holomorphic vector bundle on (M, I) . Consider the standard Hermitian connection ∇ on B . We say that ∇ is projectively hyperholomorphic if any of the conditions of Proposition 4.5 hold.

The following claim is trivial.

Claim 4.7. [24] Let M be a compact hyperkähler manifold of real dimension 4, I an induced complex structure, and B a holomorphic vector bundle

on (M, I) . Assume that B is stable. Then B admits a unique projectively hyperholomorphic Yang—Mills connection.

Proof: Let ∇ be the Yang—Mills connection on B , which exists and is unique by Theorem 3.5. Denote the corresponding connection on $\text{End}(B)$ by ∇_1 . The curvature of $\text{End}(B)$ can be algebraically expressed through the curvature of B . Using this expression, it is easy to show that $\text{End}(B)$ is also Yang—Mills (see (4.3)). By Theorem 3.8, to show that the Yang—Mills connection in $\text{End}(B)$ is hyperholomorphic, one needs to prove that the Chern classes $c_1(\text{End}(B))$ and $c_2(\text{End}(B))$ are $SU(2)$ -invariant. The first Chern class of $\text{End}(B)$ is zero, hence $SU(2)$ -invariant. The second Chern class belongs to the one-dimensional space $H^4(M)$, and it is clear that the standard action of $SU(2)$ on $H^4(M)$ is trivial. This proves that $c_1(\text{End}(B))$ and $c_2(\text{End}(B))$ are $SU(2)$ -invariant, and $\text{End}(B)$ is hyperholomorphic. By Proposition 4.5 (i), this implies that B is projectively hyperholomorphic.

Claim 4.8. Let M be a compact hyperkähler manifold, I an induced complex structure, and B a holomorphic vector bundle on (M, I) . Assume that B admits a projectively hyperholomorphic connection ∇ . Then B is polystable¹. Moreover, the Yang—Mills connection on B is projectively hyperholomorphic.

Proof: By Proposition 4.5 (i), the bundle $\text{End}(B)$ is hyperholomorphic; in particular, it is Yang—Mills and polystable. Given a destabilizing subsheaf $F \subset B$, we obtain that the sheaf $\text{Hom}(B, F) \subset \text{End}(B)$ is also destabilising. Since $\text{End}(B)$ is polystable, we have a direct sum decomposition

$$\text{End}(B) = \text{Hom}(B, F) \oplus \text{End}(B)/\text{Hom}(B, F). \quad (4.4)$$

Denote by F' the quotient sheaf $F' := B/F$. By definition, $\text{Hom}(B, F)$ is isomorphic to $B^* \otimes F$. Therefore, (4.4) gives a decomposition

$$\text{End } B = B \otimes B^* = F \otimes B^* \oplus F' \otimes B^*. \quad (4.5)$$

To prove that B is polystable, we need to show that the extension

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow F' \longrightarrow 0 \quad (4.6)$$

splits. If we tensor this exact sequence by B , it will be split by (4.5). Now, let us tensor (4.6) by $B \otimes B^*$. Thus obtained exact sequence splits because (4.6) tensored by B splits. On the other hand, the trivial sheaf \mathcal{O}_M is a direct summand of $B \otimes B^*$, hence the extension (4.6) is a direct summand of the extension

$$0 \longrightarrow F \otimes B \otimes B^* \longrightarrow B \otimes B \otimes B^* \longrightarrow F' \otimes B \otimes B^* \longrightarrow 0.$$

¹A polystable bundle is a direct sum of several stable bundles of the same slope.

We have shown that this extension splits; therefore, its direct summand (4.6) also splits. This proves that B is polystable.

Let ∇ be the Yang—Mills connection on B . Then ∇ induces a Yang—Mills connection ∇_e on $\text{End}(B)$. On the other hand, the Yang—Mills connection is unique. Therefore, ∇_e coincides with the original hyperholomorphic connection on $\text{End}(B)$. We obtained that ∇ is projectively hyperholomorphic.

Remark 4.9. It is possible for a connection in a bundle to be projectively hyperholomorphic, in the sense of Definition 4.6, and not Yang—Mills. For instance, any line bundle is obviously projectively hyperholomorphic.

Lemma 4.10. Let B be a projectively hyperholomorphic Yang—Mills bundle, Θ its curvature, and $\text{Tr}(\Theta) \in \Lambda^{1,1}(M)$ its trace. Then $\text{Tr}(\Theta)$ is harmonic.²

Proof: Clearly, $\text{Tr}(\Theta)$ is the curvature of the line bundle $\Lambda^q B$, $q = \dim B$ (the top exterior power of B). Since $\Lambda^q B$ is a tensor power of B , it is also a Yang—Mills bundle. We reduced Lemma 4.10 to the case when B is a line bundle. In this case, $\Theta \in \Lambda^{1,1}(M, \text{End } B) = \Lambda^{1,1}(M)$ is a closed 1, 1-form which satisfies $\Lambda\Theta = \text{const}$. Therefore,

$$\partial\Lambda\Theta = 0. \tag{4.7}$$

By Kodaira relations [11], $[\Lambda\partial] = \sqrt{-1}\bar{\partial}^*$. Therefore, (4.7) implies $\bar{\partial}^*\Theta = 0$. Since Θ is of type (1, 1) and closed, we also have $\bar{\partial}\Theta = 0$. Therefore, Θ is harmonic.

Remark 4.11. Yang—Mills bundles can be characterized as bundles that have a harmonic curvature. This is shown by the same argument that proves Lemma 4.10.

4.3. Moduli of projectively hyperholomorphic bundles

By the moduli of stable deformations of a stable vector bundle B we understood the space of deformations of Hermitian Yang—Mills connections on B . This definition is compatible with the usual one, as Uhlenbeck—Yau Theorem 3.5 implies.

Let M be a compact hyperkähler manifold, I an induced complex structure, and B a stable holomorphic vector bundle on (M, I) . Assume that the Chern classes of $\text{End}(B)$ are $SU(2)$ -invariant, or, what is the same, B is projectively hyperholomorphic. Then the natural (Weil—Peterson) metric on the moduli of stable deformations of B is hyperkähler ([24]). If M is a K3 surface, then this space is smooth, as S. Mukai proved ([17]).

²In fact, $\text{Tr}(\Theta)$ is harmonic for any Yang—Mills bundle; the same proof works.

In this Subsection we construct a universal bundle over a moduli of deformations of projective bundles and show that it is projective hyperholomorphic.

Proposition 4.12. Let M be a compact Kähler manifold, P a holomorphic projective vector bundle, and S the moduli of deformations of P . Assume that for all $s \in S$ the corresponding bundle P_s on M has no automorphisms.³ Then the universal bundle \tilde{P} exists over $M \times S$.

Proof: Locally in a neighbourhood of a point $[P'] \in S$, the universal bundle exists by the definition of moduli, and is unique up to an automorphism. To prove its existence globally, we need to glue together these local versions of the universal bundle. Generally speaking, this might be non-trivial, because the bundle P , which we are trying to deform, might have automorphisms. Then, gluing together the universal bundle from its local versions will have obstructions. These obstructions lie in the first cohomology $H^1(S, \text{Aut}(\mathcal{F}))$ of the sheaf of local automorphisms of the (locally defined) universal bundle of P . However, the universal bundle exists when the deformations of P have no automorphisms. Since $\mathbb{C}P^{n-1}$ has no automorphisms compatible with the $PGL(n)$ -action, the universal bundle for P always exists.

Remark 4.13. Scalars act on \mathbb{C}^n by automorphisms commuting with $GL(n)$. This is why the universal vector bundle does not always exist, in a situation similar to Proposition 4.12. The obstructions to its existence lie in $H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$.

Proposition 4.14. Let M be a compact hyperkähler manifold, I an induced complex structure, and B a projectively hyperholomorphic bundle on (M, I) . Denote the moduli of stable deformations of B by S . Assume that the universal bundle \tilde{B} exists. Then \tilde{B} is projectively hyperholomorphic.

Proof: Take the projectivization P of B , which is a projective bundle. To simplify the exposition, we assume that $H^1(M) = 0$ (for a more general version of the proof, see [25]; in this paper, we apply Proposition 4.14 only to K3 surfaces). Using the exact sequence of non-abelian cohomology

$$H^1(M, \mathcal{O}_{(M,I)}^*) \longrightarrow H^1\left(M, GL\left(\mathcal{O}_{(M,I)}^{\oplus n}\right)\right) \longrightarrow H^1\left(M, PGL\left(\mathcal{O}_{(M,I)}^{\oplus n}\right)\right)$$

we find that in the case $H^1(M) = 0$, the group $H^1\left(M, \mathcal{O}_{(M,I)}^*\right) = \text{Pic}(M, I)$ is discrete and the natural map from the moduli of deformations of B to the moduli of deformations P is an isomorphism. Let \tilde{P} be the universal bundle on $\text{Def}(P)$, which exists by Proposition 4.12. Then \tilde{P} is a projectivization of \tilde{B} , hence it suffices to prove that \tilde{P} is projectively hyperholomorphic.

³This happens, for instance, when P_s is a projectivization of a stable holomorphic bundle.

Consider the corresponding $\mathfrak{pgl}(n)$ -bundle $\mathfrak{pgl}(P)$. Since P is hyperholomorphic, this bundle is holomorphic on (M, L) , where L is any induced complex structure. The deformations of P are equivalent to the deformations of $\mathfrak{pgl}(P)$ (Remark 4.2). To prove Proposition 4.14, we have to show that the universal bundle $\mathfrak{pgl}(\tilde{P})$ is hyperholomorphic. We reduced Proposition 4.14 to the following

Claim 4.15. Let M be a compact hyperkähler manifold, I an induced complex structure, B a hyperholomorphic bundle on (M, I) . Denote the moduli of stable deformations of B by S . Assume that the universal bundle \tilde{B} exists. Then \tilde{B} is hyperholomorphic.

Proof: Claim 4.15 is clear from the definitions. Indeed, S is defined as the moduli of the hyperholomorphic connections on B . However, in this definition, S is independent of the induced complex structure; any particular choice of the induced complex structure gives a complex structure on S . This is how one obtains the quaternionic action on S .

Now, the universal bundle \tilde{B} is equipped with a natural connection, which is holomorphic with respect to any of the induced complex structures on S , hence hyperholomorphic. We proved Claim 4.15. Proposition 4.14 is proven.

§ 5. The operators $\bar{\partial}$, $\bar{\partial}_J$ on holomorphic Hermitian bundles

Throughout this section, M is a hyperkähler manifold, I, J, K the standard triple of induced complex structures, and B a holomorphic Hermitian bundle on (M, I) . The bundle B is equipped with a standard Hermitian connection [11]

$$\nabla: B \otimes \Lambda^i(M) \longrightarrow B \otimes \Lambda^{i+1}(M).$$

Let

$$\nabla^{1,0}: B \otimes \Lambda^{p,0}(M) \longrightarrow B \otimes \Lambda^{p+1,0}(M)$$

be the $(1, 0)$ -part of ∇ (the Hodge decomposition is taken with respect to I). Since the operators I and J anticommute, J maps $\Lambda^{p,q}(M)$ to $\Lambda^{q,p}(M)$. Let

$$\bar{\partial}_J: B \otimes \Lambda^{0,q}(M) \longrightarrow B \otimes \Lambda^{0,q+1}(M) \quad (5.1)$$

be $\nabla^{1,0}$ twisted with J :

$$\bar{\partial}_J = J \circ \nabla \circ J^{-1}.$$

As usually,

$$\bar{\partial}: B \otimes \Lambda^{0,q}(M) \longrightarrow B \otimes \Lambda^{0,q+1}(M)$$

denotes the holomorphic structure operator of B (that is, the $(0,1)$ -part of the connection ∇).

The space $\Lambda^*(M) \otimes B$ is graded. An operator on this space is *odd* if it shifts the grading by an odd degree, and *even* if it shifts the grading by an even degree. The supercommutator of two operators (odd or even) on $\Lambda^*(M) \otimes B$ is equal to their commutator if one or two of them are even, and to their anti-commutator if both of them are odd. We denote the supercommutator by $\{\cdot, \cdot\}$. The differentials shift the degree by 1, hence they are odd.

Given a function f on M and a section $b \in B$, we have

$$\bar{\partial}_J(fb) = f\bar{\partial}_Jb + \bar{\partial}_J^\circ(f) \cdot b,$$

where $\bar{\partial}_J^\circ: \Lambda^{0,i}(M) \rightarrow \Lambda^{0,i+1}(M)$ is the usual Dolbeault differential ∂ twisted by J . It is easy to check that on a hyperkähler manifold, the Dolbeault and de Rham differentials twisted by quaternions all anticommute (see e. g. [10]). Therefore, the anticommutator $\{\bar{\partial}, \bar{\partial}_J\}$ is C^∞ -linear; we can write

$$\{\bar{\partial}, \bar{\partial}_J\} \in \Lambda^{0,2}(M) \otimes \text{End}(B).$$

One can express the $SU(2)$ -invariance of $\Theta = \nabla^2$ in terms of $\bar{\partial}, \bar{\partial}_J$ as follows.

Proposition 5.1. Let M be a hyperkähler manifold, I, J, K the standard triple of induced complex structures, and B a holomorphic Hermitian bundle on (M, I) equipped with the natural connection ∇ . Consider the operators

$$\bar{\partial}, \bar{\partial}_J: B \otimes \Lambda^{0,q}(M) \rightarrow B \otimes \Lambda^{0,q+1}(M).$$

defined above. Then

- (i) the curvature $\Theta \in \Lambda^{1,1} \otimes \text{End}(B)$ is $SU(2)$ -invariant if and only if the operators $\bar{\partial}, \bar{\partial}_J$ anti-commute:

$$\{\bar{\partial}, \bar{\partial}_J\} = 0;$$

- (ii) the traceless part of the curvature

$$\Theta - \frac{1}{\text{rk } B} \text{Tr } \Theta$$

is $SU(2)$ -invariant if and only if the anti-commutator $\{\bar{\partial}, \bar{\partial}_J\}$ is a scalar $(0, 2)$ -form:

$$\{\bar{\partial}, \bar{\partial}_J\} \in \Lambda^{0,2}(M) \otimes Id_B.$$

Remark 5.2. A Hermitian connection with an $SU(2)$ -invariant curvature is called hyperholomorphic (Definition 3.2). A Hermitian connection with an $SU(2)$ -invariant form $\Theta - \frac{1}{\text{rk} B} \text{Tr} \Theta$ is called projectively hyperholomorphic (Definition 4.6).

Proof of Proposition 5.1: Let $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ be the Lie algebra elements corresponding to I, J, K^1 . We have an $SL(2)$ -triple

$$(\mathcal{J} - \sqrt{-1}\mathcal{K}, \sqrt{-1}\mathcal{I}, \mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}),$$

with $\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}$ mapping $\Lambda^{p,q}(M, I) \otimes B$ to $\Lambda^{p-1,q+1}(M, I) \otimes B$.

The following lemma is completely elementary, and can be easily checked by a local calculation. We give a coordinate-free proof.

Lemma 5.3. Let M be a hyperkähler manifold, I, J, K the standard triple of induced complex structures, and B a holomorphic Hermitian bundle on (M, I) equipped with the natural connection ∇ . Then

$$\bar{\partial}_I = \left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \nabla^{1,0} \right]. \quad (5.2)$$

Moreover,

$$\left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \bar{\partial} \right] = 0. \quad (5.3)$$

Proof: Consider the space V spanned by the operators of the form

$$s\nabla s^{-1}: \Lambda^s(M, I) \otimes B \longrightarrow \Lambda^{s+1}(M, I) \otimes B,$$

where $s \in SU(2)$. Clearly, this space contains the holomorphic structure operator $\bar{\partial}$ and the differentials $\nabla^{1,0}$ and $\bar{\partial}_I$. Using the Lie algebra action, we find that $[\mathcal{L}, \nabla] \in V$, for all $\mathcal{L} \in \mathfrak{su}(2)$. Since all vectors of V have weight 1 with respect to $SU(2)$, all $w \in V$ have weight at least -1 with respect to $\sqrt{-1}\mathcal{I}$. Therefore, $[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \bar{\partial}] = 0$. By the same reason, we have

$$\left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, v \right] \right] = 0. \quad (5.4)$$

Clearly, the operators on the left and right hand side of (5.2) satisfy the Leibniz equation. Moreover,

$$\left[\nabla^{1,0}, \frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2} \right]^2 = 0$$

¹For instance, \mathcal{I} is acting on the space $\Lambda^{p,q}(M, I) \otimes B$ of (p, q) -forms as the multiplication by $(p - q)\sqrt{-1}$.

because, as (5.4) implies,

$$0 = \left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, (\nabla^{1,0})^2 \right] \right] = \left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \nabla^{1,0} \right]^2$$

(we use $(\nabla^{1,0})^2 = 0$). Differential $(0, p)$ -forms are generated multiplicatively by 0-forms and the image of any of these two operators. Using the Leibniz formula, we find that to check (5.2), it remains to compare the action of $\bar{\partial}_J$ and $\left[\nabla^{1,0}, \frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2} \right]$ on 0-forms.

On 0-forms, the operator $\left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \nabla^{1,0} \right]$ acts as

$$b \mapsto \frac{J + \sqrt{-1}K}{2} \nabla^{1,0}(b).$$

Since $K = -JI$, and I acts on $(1, 0)$ -forms as $\sqrt{-1}$, we obtain that on 0-forms (5.2) holds.

Return to the proof of Proposition 5.1. Since $\bar{\partial}^2 = (\nabla^{1,0})^2 = 0$, the curvature can be written as

$$\Theta = \{ \nabla^{1,0}, \bar{\partial} \}.$$

Applying the operator $\left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \cdot \right]$ to both sides of this equation, and using Lemma 5.3 and the Jacobi identity for the super-commutator, we obtain

$$\left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \Theta \right] = \{ \bar{\partial}_J, \bar{\partial} \}. \quad (5.5)$$

Now, Θ has type $(1, 1)$, hence $\sqrt{-1}\mathcal{I}$ acts trivially on Θ . If another term of the $SL(2)$ -triple acts trivially on Θ , the whole $SL(2)$ -triple acts on Θ trivially. Therefore, Θ is $SU(2)$ -invariant if and only if

$$\left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \Theta \right] = \{ \bar{\partial}_J, \bar{\partial} \} = 0.$$

We proved Proposition 5.1 (i). Now, the operation of taking the trace of $\text{End}(B)$ -valued differential forms commutes with the $SU(2)$ -action, and therefore

$$\left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \Theta - \frac{1}{\text{rk } B} \text{Tr } \Theta \right] = \{ \bar{\partial}_J, \bar{\partial} \} - \frac{1}{\text{rk } B} \text{Tr}(\{ \bar{\partial}_J, \bar{\partial} \}). \quad (5.6)$$

The right hand side of (5.6) vanishes if and only if the $\text{End}(B)$ -valued 2-form $\{ \bar{\partial}_J, \bar{\partial} \}$ is scalar. Therefore, the form $\{ \bar{\partial}_J, \bar{\partial} \}$ is scalar if and only if $\Theta - \frac{1}{\text{rk } B}$ is $SU(2)$ -invariant. We proved Proposition 5.1.

§ 6. Projectively hyperholomorphic bundles on a product of two K3-surfaces

In this section we prove the following theorem.

Theorem 6.1. Let $M_1 \times M_2$ be a product of two compact hyperkähler manifolds. Assume that $h^1(M_1) = 0$ or $h^1(M_2) = 0$. Fix an induced complex structure I on $M_1 \times M_2$, and let B be a projective hyperholomorphic bundle over $(M_1 \times M_2, I)$. Consider the projection map $\pi: M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$, and let $R^i\pi_*B$ be the derived direct image of B . Then $R^i\pi_*B$ is equipped with a projectively hyperholomorphic connection, outside of singularities.

The proof of Theorem 6.1 takes the rest of this section.

6.1. Decomposition of the exterior algebra and the Laplacian

Consider the decomposition

$$\Lambda^*(M_1 \times M_2) = \Lambda^*(M_1) \boxtimes \Lambda^*(M_2) \quad (6.1)$$

where \boxtimes denotes the exterior tensor product. We write

$$\Lambda^p(M_1) \boxtimes \Lambda^q(M_2) = \Lambda^{p+q}(M_1 \times M_2)_{p,q} \subset \Lambda^{p+q}(M_1 \times M_2).$$

Pick a projectively hyperholomorphic connection on B . We decompose the differentials $\bar{\partial}$ and $\bar{\partial}_J$ with respect to the $(\cdot)_{p,q}$ -decomposition:

$$\bar{\partial} = {}^1\bar{\partial} + {}^2\bar{\partial}, \quad \bar{\partial}_J = {}^1\bar{\partial}_J + {}^2\bar{\partial}_J,$$

with ${}^1\bar{\partial}, {}^1\bar{\partial}_J$ increasing the first index of $(\cdot)_{p,q}$ by 1, and ${}^2\bar{\partial}, {}^2\bar{\partial}_J$ increasing the second index of $(\cdot)_{p,q}$ by 1. Denote by

$${}^1\Delta_{\bar{\partial}} := {}^1\bar{\partial}{}^1\bar{\partial}^* + {}^1\bar{\partial}^*{}^1\bar{\partial}$$

the fiberwise Laplace operator on M_1 . Clearly, ${}^2\bar{\partial}$ commutes with ${}^1\Delta_{\bar{\partial}}$, thus giving the holomorphic structure on the derived direct image

$$R^i\pi_*B = \ker {}^1\Delta_{\bar{\partial}} \Big|_{\Lambda^{i,0}(M_{i,0} \times B)}.$$

To prove Theorem 6.1 it suffices to show that ${}^2\bar{\partial}_J$ commutes with ${}^1\Delta_{\bar{\partial}}$. Indeed, in this case, ${}^2\bar{\partial}, {}^2\bar{\partial}_J$ act on $\ker {}^1\Delta_{\bar{\partial}} = R^\bullet\pi_*B$, and we have

$$\{ {}^2\bar{\partial}, {}^2\bar{\partial}_J \} \Big|_{\ker {}^1\Delta_{\bar{\partial}}} = \{ {}^2\bar{\partial} \Big|_{\ker {}^1\Delta_{\bar{\partial}}}, {}^2\bar{\partial}_J \Big|_{\ker {}^1\Delta_{\bar{\partial}}} \}. \quad (6.2)$$

By Proposition 5.1, the right hand side of (6.2) is a multiplication by a scalar form. We obtain that the bundle $R^\bullet\pi_*B = \ker {}^1\Delta_{\bar{\partial}}$ on M_2 is equipped

with a pair of operators $\bar{\partial}, \bar{\partial}_J$ with the commutator given by a scalar $(0, 2)$ -form. Using Proposition 5.1 again, we obtain that $R^\bullet \pi_* B$ is projectively hyperholomorphic. We reduced Theorem 6.1 to the following

Proposition 6.2. We work in assumptions of Theorem 6.1. Consider the hyperholomorphic Yang—Mills connection on B given by the Uhlenbeck—Yau theorem (Theorem 3.5). Let ${}^i\bar{\partial}, {}^i\bar{\partial}_J, i = 1, 2$ be the differentials constructed above. Consider the fiberwise Laplace operator ${}^1\Delta_{\bar{\partial}} := \{{}^1\bar{\partial}, {}^1\bar{\partial}^*\}$. Then ${}^1\Delta_{\bar{\partial}}$ commutes with ${}^2\bar{\partial}_J$.

We prove Proposition 6.2 in Section 6.2.

6.2. Hyperkähler Kodaira—Nakano identity

We work in the assumptions of Proposition 6.2. Since the connection on B is Yang—Mills, its curvature is harmonic. Therefore, $\text{Tr } \Theta$ is a harmonic 2-form on $M_1 \times M_2$ (Lemma 4.10). Since the $SU(2)$ -action commutes with the Laplacian on differential forms, the $(0, 2)$ -form

$$\{\bar{\partial}, \bar{\partial}_J\} = \left[\frac{\mathcal{J} + \sqrt{-1}\mathcal{K}}{2}, \Theta \right]$$

is also harmonic. Since $H^1(M_1) = 0$ or $H^1(M_2) = 0$, the space $H^{0,2}(M_1 \times M_2)$ is (by Künneth formula) generated by the pullbacks $\bar{\Omega}_1$ and $\bar{\Omega}_2$ of the harmonic $(0,2)$ -forms from M_1, M_2 . Therefore,

$$\{\bar{\partial}, \bar{\partial}_J\} = a_1\bar{\Omega}_1 + a_2\bar{\Omega}_2,$$

where $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. This implies

$$\{{}^1\bar{\partial}, {}^1\bar{\partial}_J\} = a_1\bar{\Omega}_1.$$

The following result is a hyperkähler version of the classical Kodaira—Nakano theorem.

Proposition 6.3. Let M be a hyperkähler manifold, I, J, K the standard triple of induced complex structures, B a Hermitian holomorphic vector bundle on (M, I) , and

$$\bar{\partial}, \bar{\partial}_J: \Lambda^{0,i}(M, I) \otimes B \longrightarrow \Lambda^{0,i+1}(M, I) \otimes B$$

the operators defined above. Assume that $\{\bar{\partial}, \bar{\partial}_J\} = c\bar{\Omega}$, where

$$\Omega := \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$$

is the standard holomorphic symplectic form on (M, I) . Let $\Delta_{\bar{\partial}}, \Delta_{\bar{\partial}_J}$ be the Laplacians associated with $\bar{\partial}, \bar{\partial}_J$. Then

$$\Delta_{\bar{\partial}} - \Delta_{\bar{\partial}_J} = cH\Omega, \tag{6.3}$$

where H_Ω is a scalar operator mapping $\eta \in \Lambda^{0,p}(M) \otimes B$ to $\frac{\dim_{\mathbb{H}} M - p}{\text{rk } B} \eta$.

We prove Proposition 6.3 at the end of this section. Presently we deduce Proposition 6.2 from Proposition 6.3. In assumptions of Proposition 6.2, we need to show that ${}^1\Delta_{\bar{\partial}}$ commutes with ${}^2\bar{\partial}_J$. Since B is holomorphic, ${}^2\bar{\partial}$ commutes with the $\bar{\partial}$ -Laplacian ${}^1\Delta_{\bar{\partial}}$. Similarly, we have

$$[{}^1\Delta_{\partial}, {}^2\nabla^{1,0}] = 0, \quad (6.4)$$

where ${}^2\nabla^{1,0}$ is the $(\cdot)_{0,1}$ -component of the $(1, 0)$ -part of the connection ∇ in B , and ${}^1\Delta_{\partial}$ the Laplacian associated with ${}^1\nabla^{1,0}$. Twisting (6.4) with J , we obtain

$$[{}^1\Delta_{\bar{\partial}_J}, {}^2\bar{\partial}_J] = 0. \quad (6.5)$$

The difference between ${}^1\Delta_{\bar{\partial}_J}$ and ${}^1\Delta_{\bar{\partial}}$, is by Proposition 6.3, a scalar. Therefore, (6.5) implies that the operators ${}^1\Delta_{\bar{\partial}}$ and ${}^2\bar{\partial}_J$ commute. We have shown that Proposition 6.3 implies Proposition 6.2.

To prove Proposition 6.2 and Theorem 6.1 it remains to prove Proposition 6.3.

Proposition 6.3 is the analogue of the Kodaira—Nakano theorem, which states the following. Let X be a Kähler manifold, and B a holomorphic Hermitian vector bundle with the curvature $\Theta = c\omega \cdot Id_B$, where ω is the Kähler form. Consider the differentials $\bar{\partial}$ and $\nabla^{1,0}$ and the associated Laplacians $\Delta_{\bar{\partial}}$ and Δ_{∂} . Then the difference $\Delta_{\partial} - \Delta_{\bar{\partial}}$ is a scalar. To prove Proposition 6.3 we modify the proof of Kodaira—Nakano as follows.

Denote by $L_{\bar{\Omega}}$ the operator of exterior multiplication by $\bar{\Omega}$, where $\Omega \in \Lambda^{2,0}(M)$ is the standard holomorphic symplectic form on (M, I) . We denote by $\Lambda_{\bar{\Omega}} = *L_{\bar{\Omega}}*$ the Hermitian adjoint operator, and by

$$H_{\bar{\Omega}} := [L_{\bar{\Omega}}, \Lambda_{\bar{\Omega}}]$$

their commutator. Writing the 2-form Ω in coordinates, it is easy to check that $H_{\bar{\Omega}}$ acts on $\Lambda^{0,p}$ as the multiplication by $\dim_{\mathbb{H}} M - p$. Therefore,

$$L_{\bar{\Omega}}, H_{\bar{\Omega}}, \Lambda_{\bar{\Omega}}$$

is an $SL(2)$ -triple (this is similar to the standard calculation used to prove the Lefschetz theorem).

Clearly,

$$[H_{\bar{\Omega}}, \bar{\partial}] = \bar{\partial}, \quad [H_{\bar{\Omega}}, \bar{\partial}_J] = \bar{\partial}_J. \quad (6.6)$$

Since $\bar{\Omega}$ is $\bar{\partial}$ and $\bar{\partial}_J$ -closed, we have

$$[L_{\bar{\Omega}}, \bar{\partial}] = [L_{\bar{\Omega}}, \bar{\partial}_J] = 0. \quad (6.7)$$

Comparing (6.6) and (6.7), we obtain that $\bar{\partial}$, $\bar{\partial}_j$ are the highest weight vectors in a weight 1 representation of $SL(2)$, associated with the $SL(2)$ -triple $L_{\bar{\Omega}}$, $H_{\bar{\Omega}}$, $\Lambda_{\bar{\Omega}}$. One has the following identities analogous to (and implied by) the usual Kodaira identities (see [24]).

$$[\Lambda_{\bar{\Omega}}, \bar{\partial}] = \bar{\partial}_j^*, \quad [\Lambda_{\bar{\Omega}}, \bar{\partial}_j] = -\bar{\partial}^*. \quad (6.8)$$

Applying the operator $[\Lambda_{\bar{\Omega}}, \cdot]$ to the identity $\{\bar{\partial}, \bar{\partial}_j\} = cL_{\bar{\Omega}}$ and using the Jacobi identity for a supercommutator and (6.8), we obtain

$$[\Lambda_{\bar{\Omega}}, cL_{\bar{\Omega}}] = [\Lambda_{\bar{\Omega}}, \{\bar{\partial}, \bar{\partial}_j\}] = -\{\bar{\partial}, \bar{\partial}^*\} + \{\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_j^*\} = \Delta_{\bar{\partial}_j} - \Delta_{\bar{\partial}}. \quad (6.9)$$

Since $[\Lambda_{\bar{\Omega}}, cL_{\bar{\Omega}}] = -cH_{\bar{\Omega}}$, (6.9) implies

$$cH_{\bar{\Omega}} = \Delta_{\bar{\partial}} - \Delta_{\bar{\partial}_j}.$$

We proved the hyperkähler version of the Kodaira—Nakano theorem (Proposition 6.3). This also proves Proposition 6.2 and Theorem 6.1.

6.3. Fourier—Mukai transform and projectively hyperholomorphic bundles

Now we can prove Theorem 1.1. On a K3 surface, every stable bundle is projectively hyperholomorphic (Claim 4.7), hence B_1 is projectively hyperholomorphic. By Proposition 4.14, the bundle \tilde{B} is projectively hyperholomorphic. A pullback of a projectively hyperholomorphic bundle is projectively hyperholomorphic; also a product of two such bundles is projectively hyperholomorphic. This implies that $\tilde{B} \otimes \pi_1^*(B_1)$ is projectively hyperholomorphic.

Since M_1 is a K3 surface, we have $H^1(M_2) = 0$. This allows us to apply Theorem 6.1 and obtain that the sheaves

$$FM^i(B_1) := R^i(\pi_2)_*(\tilde{B} \otimes \pi_1^*(B_1))$$

are equipped with a projectively hyperholomorphic connection outside of singularities. Whenever a sheaf $FM^i(B_1)$ is smooth, it is projectively hyperholomorphic, by Theorem 6.1, hence polystable (Claim 4.8).

This proves Theorem 1.1.

Acknowledgements

I am grateful to K. Yoshioka for invaluable correspondence.

Bibliography

1. Beauville A. *Varieties Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*. J. Diff. Geom. **18**, pp.755–782 (1983).
2. Besse A., *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, New York (1987)
3. Bartocci C.; Bruzzo U.; Hernandez Ruiperez D. *A Fourier—Mukai transform for stable bundles on K3 surfaces*, J. Reine Angew. Math. **486** (1997), 1–16.
4. Bartocci C.; Bruzzo U.; Hernandez Ruiperez D. *Existence of stable vector bundles on K3 surfaces and the Fourier—Mukai transform*, Algebraic geometry (Catania, 1993/Barcelona, 1994), 245–257, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 200, Dekker, New York, 1998.
5. Bartocci C., Bruzzo U., Hernandez Ruiperez D. *A hyper-Kähler Fourier transform*, Differential Geom. Appl. **8** (1998), No. 3, 239–249.
6. A. Bondal, D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, alg-geom/9506012
7. Bridgeland T., *Equivalences of triangulated categories and Fourier—Mukai transforms*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 25–34.
8. Bridgeland T., Maciocia A., *Fourier—Mukai transforms for K3 and elliptic fibrations*, math. AG/9908022
9. Calabi E., *Métriques kähleriennes et fibrès holomorphes*, Ann. Ecol. Norm. Sup. **12** (1979), 269–294.
10. Figueroa-O’Farrill, J. M., Koehl C., Spence B., *Supersymmetry and the cohomology of (hyper)Kähler manifolds*, Nuclear Phys. B **503** (1997), No. 3, 614–626.
11. Griffiths Ph., Harris J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, New York, 1978.
12. Kobayashi S., *Differential geometry of complex vector bundles*, Princeton University Press, 1987.
13. Kontsevich M., *Homological algebra of mirror symmetry*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.
14. Maciocia, Antony, *Gieseker stability and the Fourier—Mukai transform for abelian surfaces* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **47** (1996), No. 185, 87–100.
15. Markman E., *Generators of the cohomology ring of moduli spaces of sheaves on symplectic surfaces*, math. AG/0009109 (also in: Journal für die reine und angewandte Mathematik, Volume 544 (March 2002), pp.61–82).
16. Mukai S., *Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. (1981), 153–175.

17. Mukai S., *On the moduli space of bundles on K3 surfaces. I*, Vector bundles on algebraic varieties (Bombay, 1984), 341–413, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., 11, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1987.
18. Mukai S., *Fourier functor and its application to moduli of bundles on an abelian variety*, Adv. in Pure Math. (1987), 515–550.
19. Mukai S., *Duality of polarized K3 surfaces*, London Math. Soc. Lect. Notes Series 264, 311–326
20. Christian Okonek, Michael Schneider, Heinz Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*. Progress in mathematics, vol. 3, Birkhauser, 1980.
21. Orlov D., *Equivalences of derived categories and K3 surfaces*, J. Math. Sci. (NY), **84** (1997) 1361–1381
22. Positselski L., *All strictly exceptional collections in $D_{coh}^b(P^m)$ consist of vector bundles*, alg-geom/9507014
23. Uhlenbeck K., Yau S. T., *On the existence of Hermitian Yang–Mills connections in stable vector bundles*, Comm. on Pure and Appl. Math., **39**, p. S257–S293 (1986).
24. Verbitsky M., *Hyperholomorphic bundles over a hyperkähler manifold*, alg-geom electronic preprint 9307008 (1993), 43 pages, LaTeX, also published in: Journ. of Alg. Geom., **5** No. 4 (1996) pp. 633–669.
25. Verbitsky M., *Projective bundles over hyperkähler manifolds and stability of Fourier–Mukai transform*, math. AG/0107196, 60 pages.
26. Yau S. T., *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation I*, Comm. on Pure and Appl. Math. **31**, 339–411 (1978).
27. Yoshioka K., *A note on Fourier–Mukai transform*, 10 pages, math. AG/0112267
28. Yoshioka K., *Twisted stability and Fourier–Mukai transform*, 28 pages, math. AG/0106118.
29. Yoshioka K., *Some examples of Mukai’s reflections on K3 surfaces*, J. reine angew. Math. **515** (1999), 97–123
30. Yoshioka K., *An application of exceptional bundles to the moduli of stable sheaves on a K3 surface*, 12 pages, alg-geom/9705027

А. М. Вершик

Случайные и универсальные метрические пространства

Аннотация

Мы определяем модель множества всех польских (= сепарабельных полных метрических) пространств, а именно, конус \mathcal{R} матриц расстояний, и рассматриваем геометрические и вероятностные задачи, связанные с этим объектом. Вводится понятие универсальной матрицы расстояний и доказывается, что множество таких матриц есть всюду плотное G_δ множество в слабой топологии конуса \mathcal{R} , а также, что универсальность матрицы расстояний есть необходимое и достаточное условие на матрицу расстояний счётного всюду плотного подмножества универсального метрического пространства, которое было определено П. С. Урысоном в 1924 году в его последней работе. Это означает, что *пространство Урысона является типичным в множестве всех польских пространств*. Затем рассматриваются метрические пространства с мерой (метрические тройки) и определяется их полный инвариант относительно изометрий, сохраняющих меру, так называемое матричное распределение. Мы даём внутреннюю характеристику множества матричных распределений как вероятностных мер на пространстве матриц и, с помощью эргодических теорем, доказываем новым способом «теорему реконструкции» Громова. Дается естественная конструкция широкого класса мер на \mathcal{R} , для которых *с вероятностью единица матрица расстояний порождает пространство Урысона*. Имеется тесная связь этих вопросов с метрической классификацией измеримых функций нескольких аргументов и классификацией действий бесконечной симметрической группы ([4, 8]).

§ 1. Введение: конус \mathcal{R} матриц расстояний как множество всех оснащённых польских пространств

Рассмотрим множество всех бесконечных вещественных матриц вида

$$\mathcal{R} = \left\{ r = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty} : r_{i,i} = 0, r_{i,j} \geq 0, r_{i,j} = r_{j,i}, \right. \\ \left. r_{i,k} + r_{k,j} \geq r_{i,j}, \text{ для } i, j, k = 1, 2, \dots \right\}.$$

Будем называть элементы множества \mathcal{R} *матрицами расстояний*. Каждая матрица расстояний определяет полуметрику на множестве натуральных чисел \mathbb{N} (мы допускаем нули вне главной диагонали; если их нет, то матрица называется *собственной матрицей расстояний*). Множество \mathcal{R} всех матриц расстояний есть слабо замкнутый выпуклый конус в вещественном векторном пространстве матриц $\text{Mat}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$, снабжённом обычной слабой топологией. Мы будем называть этот конус *конусом матриц расстояний* и рассматривать его в слабой топологии. Подмножество собственных матриц расстояний есть открытый слабо плотный подконус в \mathcal{R} .

Если матрица расстояний r собственная, то пополнение метрического пространства (\mathbb{N}, r) есть полное сепарабельное метрическое (= польское) пространство (X_r, ρ_r) , оснащённое счётным всюду плотным вполне упорядоченным подмножеством $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, которое суть образ множества натуральных чисел в пополнении. Произвольная матрица расстояний (с возможными нулями вне главной диагонали) определяет полуметрику на натуральном ряде, в этом случае пополнение строится после предварительной факторизации по разбиению на классы точек с нулевым расстоянием. Например, нулевой матрице отвечает одноточечное метрическое пространство, поэтому, конечные метрические пространства также включаются в наше рассмотрение.

Предположим теперь, что имеется польское пространство (X, ρ) , оснащённое счётным всюду плотным вполне упорядоченным подмножеством $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ в нём. Собственная матрица расстояний $r = \{r_{i,j}\} \in \mathcal{R}$, где $r_{i,j} = \rho(x_j, x_i)$, $i, j = 1 \dots$, определяет метрику на натуральном ряде. Очевидно, эта матрица, *подобно матрице структурных констант в алгебраической ситуации*, содержит всю информацию об исходном метрическом пространстве (X, ρ) , которое может быть получено как пополнение натурального ряда по метрике r . Всякое инвариантное свойство метрического пространства (топологическое, гомологическое и т. д.) может быть высказано в терминах матрицы расстояний любого счётного всюду плотного множества.

Мы можем рассматривать конус \mathcal{R} как пространство, расслоённое над базой — множеством всех индивидуальных польских пространств (заметим для дальнейшего, что в силу универсальности пространства Урысона (см. далее), — можно считать, что в качестве базы расслоения можно рассматривать совокупность всех замкнутых подмножеств этого пространства), при этом слой над данным пространством есть множество всех его счётных упорядоченных всюду плотных подмножеств. Таким образом, конус \mathcal{R} становится *универсумом польских пространств*, и мы будем изучать свойства этих пространств и всю их совокупность с помощью этого конуса.

Возникает естественный вопрос: какие матрицы расстояний и, тем самым, какие метрические пространства являются «типичными» в смысле топологий конуса \mathcal{R} . Один из главных результатов работы (теорема 1, § 3) обобщает результат Урысона и утверждает, что *пространство Урысона является типичным*, т. е. соответствующие матрицы расстояний образуют всюду плотное G_δ множество. Основное понятие здесь — универсальная матрица расстояний. Пример такой матрицы неявно использовался Урысоном в его пионерской работе для доказательства существования универсального пространства. Мы даём новую версию этого результата и новое доказательство существования такой матрицы и, тем самым, существования универсального пространства — основного результата работы [3] (§ 3). Групповая формулировка понятия универсальности дана в Утверждении 1 (§ 3). По поводу построения пространства Урысона см. [13], а также работы [2, 14, 15, 16]. Замечу попутно, что тот факт, что работа [3] выпала на 70 лет из поля зрения математиков и, в первую очередь, топологов, и не упоминалась нигде, насколько я знаю, до 80-х гг., а её конструкция не вошла ни в одну (из мне известных) монографий по теоретико-множественной топологии, — трудно объяснить.

Рассмотрим разбиение ξ конуса \mathcal{R} на классы эквивалентности матриц расстояний, порождающих изометричные пополнения натурального ряда. Фактор-пространство по этому разбиению есть пространство классов изометричных польских пространств. Но, как предположено в [4] и доказано недавно в [1], это фактор-пространство не имеет хорошей борелевской структуры (не является «гладким») и проблема классификации польских пространств с точностью до изометрий — «дикая»; в то же время ограниченная проблема — классификации компактных метрических пространств — является гладкой (см. [2]). Удивительным образом, гладкой является и другая классификация — всех польских пространств с борелевской вероятностной мерой (классификация метрических троек) с точностью до изометрий, сохраняющих меру, см. [2, 4]; мы рассматриваем её подробно в § 4, где детально описываем полный метрический инвариант

эквивалентности — «матричное распределение». Полнота инварианта по существу эквивалентна теореме реконструкции Громова [2], но доказывается она здесь с помощью эргодической теоремы. Для завершения классификации мы описываем далее в §4, какие в точности меры на пространстве матриц расстояний \mathcal{R} могут быть матричными распределениями.

§2 посвящён элементарной геометрии конуса \mathcal{R} , она используется далее, особенно в §5, в котором мы с помощью некоторого общего метода, строим различные конкретные примеры вероятностных мер на конусе. Эти меры на множестве матриц расстояния есть случайные метрики на множестве натуральных чисел. Тем самым, мы конструируем «случайное» метрическое пространство как результат пополнения множества натуральных чисел по случайной метрике с помощью естественной индуктивной процедуры. Почти все матрицы расстояний по этим мерам являются универсальными в смысле §3, и поэтому с вероятностью 1 они порождают опять пространство Урысона. Можно сказать, что в естественном смысле *случайное пространство есть универсальное пространство* ([17]).

Один из аналогов такого утверждения известен в теории графов, это теорема Эрдёша—Реньи (см. [5, 6]). Результат нашей работы о топологической (Теорема 1) и вероятностной (Теорема 7) типичности пространства Урысона аналогичен более простому результату [5] о том, что случайный граф с вероятностью 1 есть универсальный граф (см. §5). По-видимому, это совпадение имеет место и в других категориях. В качестве сходных фактов назовём универсальность симплекса Полсена (Poulsen) см. [18], и банахова пространства Гуария [19] (сообщено Y. Beniamini), а также существование универсальной в классе всех конечных групп однородной группы Холла и др.

Много вопросов о свойствах пространства Урысона остаются открытыми; неясно, стягиваемо ли оно, а главное, пока нет удобной его модели. Основным вопросом является также построение естественных вероятностных мер на этом пространстве. Обратим ещё внимание на необходимость изучения группы всех изометрий пространства Урысона (см. также [15, 16]). Мы вернёмся к обсуждению этих вопросов в другом месте.

§ 2. Геометрия и топология конуса \mathcal{R}

2.1. Выпуклая структура

Аналогично определению конуса \mathcal{R} можно определить конечномерные конусы \mathcal{R}_n матриц расстояний порядка n . Конус \mathcal{R}_n есть полиэдральный

конус, лежащий внутри положительного октанта пространства матриц $\text{Mat}_n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$. Определим подпространство $\mathbf{M}_n^s(\mathbb{R}) \equiv \mathbf{M}_n^s$ пространства симметрических матриц, состоящее из *симметрических матриц с нулями на главной диагонали*. Конус содержится в этом пространстве, $\mathcal{R}_n \subset \mathbf{M}_n^s$, причём это пространство матриц, очевидно, есть линейная оболочка конуса: $\text{span}(\mathcal{R}_n) = \mathbf{M}_n^s$, так как внутренность конуса \mathcal{R}_n непуста. Ясно, что $\text{span}(\mathcal{R}) \subset \mathbf{M}_{\mathbb{N}}^s$, где $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}^s$ пространство всех вещественных симметрических матриц с нулями на главной диагонали; геометрия конуса \mathcal{R} весьма нетривиальна. Каждая матрица расстояний $r \in \mathcal{R}_n$ определяет (полу)метрику на пространстве X_r из n точек.

Определим проекции

$$p_{m,n}: \mathbf{M}_m^s \longrightarrow \mathbf{M}_n^s, \quad m > n,$$

которые сопоставляют матрице r порядка m её NW-угол (= северо-восточный угол) порядка n . Конусы \mathcal{R}_n согласованы с этими проекциями, т. е. $p_{m,n}(\mathcal{R}_m) = \mathcal{R}_n$. Проекция $p_{n,m}$ естественно продолжается на пространство бесконечных симметрических матриц с нулевой диагональю, $p_n: \mathbf{M}_{\mathbb{N}}^s \longrightarrow \mathbf{M}_n^s(\mathbb{R})$ и p_n также сохраняет конусы: $p_n(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_n$. Ясно, что \mathcal{R} , как топологическое пространство (в слабой топологии) есть обратный предел последовательности $(\mathcal{R}_n, \{p_n\})$.

Очевидное, но важное свойство конусов \mathcal{R}_n — их инвариантность относительно действия симметрической группы S_n , элементы которой одновременно переставляют строки и столбцы матриц.

Рассмотрим геометрическую структуру конусов $\mathcal{R}_n, \mathcal{R}$. В первых размерностях имеем $\mathcal{R}_1 = \{0\}$ и $\mathcal{R}_2 = \mathbb{R}$. Описание экстремальных лучей (в смысле выпуклой геометрии) выпуклого полиэдрального конуса \mathcal{R}_n , $n = 3, \dots, \infty$ есть известная и трудная комбинаторно-геометрическая проблема (см. [11, 12] и список литературы в них). Каждый экстремальный луч в \mathcal{R}_n , $n \leq 4$, имеет вид $\{\lambda \cdot l: \lambda \geq 0\}$, где l есть симметрическая матрица с элементами 0 и 1, т. е. матрица расстояний, соответствующая полуметрике на пространстве, метрическое фактор-пространство которого состоит из двух различных точек. Но для $n \geq 5$ уже существуют экстремальные лучи, состоящие из собственных метрик. Полное описание множества экстремальных лучей для общей размерности неизвестно. Наиболее интересны асимптотические свойства конусов \mathcal{R}_n и в особенности описание экстремальных лучей конуса \mathcal{R} . Может случиться, что множество этих лучей есть плотное G_δ -множество в \mathcal{R} , а некоторые из них состоят из универсальных матриц расстояний (см. § 3). Это согласуется с оценками роста числа экстремальных лучей конуса \mathcal{R}_n , данными в [12]. Алгебро-геометрическая структура и стратификация конусов \mathcal{R}_n , как полуалгебраических множеств, по-видимому, не изучалась.

Для изучения топологической и выпуклой структур конусов \mathcal{R}_n мы будем использовать их *индуктивное описание*, которое приводится в нижеследующем разделе.

2.2. Допустимые векторы и структура конуса \mathcal{R}_n

Пусть $r = \{r_{i,j}\}_1^n$ есть матрица расстояний порядка n ($r \in \mathcal{R}_n$); выберем вектор $a \equiv \{a_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ таким образом, чтобы присоединение его к матрице r в качестве последних столбца и строки с нулём на диагонали порождало снова матрицу расстояний порядка $n + 1$. Будем называть такие векторы *допустимыми* для данной фиксированной матрицы расстояний r , и обозначим множество допустимых векторов для r через $A(r)$. Обозначим через r^a матрицу расстояний порядка $n + 1$, полученную из матрицы r приписыванием вектора $a \in A(r)$ в последние строку и столбец; очевидно, $p_n(r^a) = r$. Матрица r^a имеет форму

$$r^a = \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & \dots & r_{1,n} & a_1 \\ r_{1,2} & 0 & \dots & r_{2,n} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1,n} & r_{2,n} & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix}.$$

(Полу)метрическое пространство X_{r^a} , отвечающее матрице r^a , есть расширение пространства X_r : мы добавляем к X_r одну новую точку x_{n+1} , а числа $a_i, i = 1, \dots, n$, есть расстояния между x_{n+1} и точками x_i . Допустимость вектора a эквивалентна следующей совокупности неравенств: вектор $a = \{a_i\}_{i=1}^n$, при фиксированной матрице $\{r_{i,j}\}_{i,j=1}^n$, должен удовлетворять серии неравенств треугольника для всех $i, j = 1, 2 \dots n$:

$$|a_i - a_j| \leq r_{i,j} \leq a_i + a_j. \tag{2.1}$$

Таким образом, для матрицы расстояний r порядка n множество допустимых векторов есть $A(r) = \{\{a_i\}_{i=1}^n : |a_i - a_j| \leq r_{i,j} \leq a_i + a_j, i, j = 1 \dots n\}$. Стоит заметить, что можно смотреть на вектор $a = \{a_i\}$ как на *функцию Липшица* $f(\cdot)$ на пространстве $X_r = \{1, 2 \dots n\}$ с метрикой $r, f_a(i) = a_i$, с константой Липшица, равной 1. С этой точки зрения полезно рассматривать расширения метрических пространств (см. [13, 2]).

Геометрически множество $A(r)$ может быть идентифицировано с пересечением конуса \mathcal{R}_{n+1} и аффинного подпространства, которое состоит из матриц порядка $n + 1$ с данной подматрицей r в качестве NW-угла порядка n . Ясно, что из линейности неравенств вытекает, что множество $A(r)$ есть неограниченное замкнутое полиэдральное выпуклое

множество в \mathbb{R}^n . Если $r_{i,j} \equiv 0$, $i, j = 1 \dots n \geq 1$, то $A(r)$ есть диагональ: $A(0) = \Delta_n \equiv \{(\lambda, \dots, \lambda) : \lambda \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+^n$. Опишем структуру множеств $A(r)$ более подробно.

Лемма 1. *Для каждой собственной матрицы расстояний r порядка n множество допустимых векторов $A(r)$ есть замкнутое полиэдральное множество, лежащее в октанте \mathbb{R}_+^n , а именно, сумма Минковского*

$$A(r) = M_r + \Delta_n,$$

где Δ_n есть полупрямая постоянных векторов в пространстве \mathbb{R}_+^n , а M_r есть выпуклый компактный политоп размерности n , являющийся выпуклой оболочкой экстремальных точек всего полиэдра $A(r)$: $M_r = \text{conv}(\text{ext } A(r))$.

Доказательство. Множество $A(r) \subset \mathbb{R}^n$ есть пересечение конечного числа замкнутых полупространств, и, очевидно, не содержит прямых. По общим теоремам выпуклой геометрии множество $A(r)$ есть сумма выпуклого многогранника (политопа), являющегося выпуклой оболочкой множества экстремальных (крайних) точек множества $A(r)$, и замкнутого полиэдрального конуса, не содержащего прямых линий с вершиной в начале координат. Осталось заметить, что этот конус вырождается в диагональ положительного октанта, т.е. в полупрямую векторов с одинаковыми координатами в \mathbb{R}^n . Действительно, если бы конус содержал иную полупрямую, то неравенство треугольника нарушилось бы: разность координат $a_i - a_j$ могла бы стать произвольно большой хотя бы для одной пары (i, j) . Размерность множества $A(r)$ равна n для собственной матрицы расстояний; в общем случае она зависит от матрицы r и может быть меньше n для некоторых r ; размерность множества M_r равна $\dim A(r)$ или $\dim A(r) - 1$. \square

Следующая лемма утверждает, что соответствие $r \rightarrow A(r)$ ковариантно относительно действия симметрической группы в \mathbb{R}^n . Её доказательство очевидно.

Лемма 2. *Для всякой матрицы $r \in \mathcal{R}_n$ следующие множества совпадают: $A(grg^{-1}) = g(A(r))$, где $g \in S_n$ есть элемент симметрической группы S_n , которая действует естественным образом на пространстве матриц $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ и на пространстве выпуклых подмножеств векторного пространства \mathbb{R}^n .*

Выпуклая структура многогранных множеств M_r , $A(r)$ очень интересна и, как будто бы, ранее не изучалась. Для размерностей выше 3

комбинаторный тип политопа M_r существенно зависит от r , но для размерности 3 этот комбинаторный тип, и следовательно, тип множества $A(r)$ одинаков для всех собственных матриц расстояний; опишем этот результат подробнее.

Пример. Для $n = 3$ описание множества $A(r)$ и экстремальных точек многогранника M_r таково. Пусть r собственная матрица расстояний

$$r = \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{1,2} & 0 & r_{2,3} \\ r_{1,3} & r_{2,3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $r_{1,2} = \alpha$, $r_{1,3} = \beta$, $r_{2,3} = \gamma$, тогда

$$r^a = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & a_1 \\ \alpha & 0 & \gamma & a_2 \\ \beta & \gamma & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$. Имеется семь экстремальных точек $a = (a_1, a_2, a_3)$ политопа $A(r)$: первая вершина — ближайшая к началу координат, $(\delta - \gamma, \delta - \beta, \delta - \alpha)$, три других есть невырожденные экстремальные точки (метрики) $(\delta, \delta - \alpha, \delta - \gamma)$, $(\delta - \beta, \delta, \delta - \alpha)$, $(\delta - \gamma, \delta - \beta, \delta)$, остальные три вырождены, $(0, \alpha, \beta)$, $(\alpha, 0, \gamma)$, $(\beta, \gamma, 0)$.

Если $\alpha = \beta = \gamma = 1$, то эти семь точек таковы: $(1/2, 1/2, 1/2)$, $(3/2, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 3/2, 1/2)$, $(1/2, 1/2, 3/2)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$.

Заметим, что все невырожденные экстремальные точки задают на множестве из четырёх точек структуру метрического пространства, которое не может быть изометрично погружено в евклидово пространство.

2.3. Проекция и изоморфизмы

Пусть r матрица расстояний порядка N и $p_n(r)$ её NW-угол порядка $n < N$. Тогда мы можем определить проекцию χ_n^r из $A(r)$ на $A(p_n(r))$, $\chi_n^r: (b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_N) \mapsto (b_1 \dots b_n)$. (Мы опускаем индекс N в обозначении χ_n^r). Следующая простая лемма играет очень важную роль в нашей дальнейшей конструкции.

Лемма 3. Пусть $r \in \mathcal{R}_n$ — матрицы расстояний порядка n . Для любых двух векторов $a = (a_1, \dots, a_n) \in A(r)$ и $b = (b_1, \dots, b_n) \in A(r)$ существует такое вещественное неотрицательное число $h \in \mathbb{R}$, что вектор $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n, h) \in A(r^a)$ (а также $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n, h) \in A(r^b)$).

Следствие 1. Для каждой матрицы $r \in \mathcal{R}_n$ и $a \in A(r)$ отображение $\chi_{n+1,n}^r: (b_1, \dots, b_n, b_{n+1}) \mapsto (b_1 \dots b_n)$, $A(r^a) \rightarrow A(r)$ есть эпиморфизм $A(r^a)$ на $A(r)$ (по определению $p_{n+1,n}(r^a) = r$).

Доказательство. Утверждение леммы следует из простого геометрического наблюдения: рассмотрим два конечных метрических пространства $X = \{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ с метрикой ρ_1 и $Y = \{y_1, \dots, y_{n-1}, y_n\}$ с метрикой ρ_2 . Предположим, что подпространства первых $n-1$ точек $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ и $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ изометричны, т.е. $\rho_1(x_i, x_j) = \rho_2(y_i, y_j)$, $i, j = 1, \dots, n-1$. Тогда существует третье пространство $Z = \{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1}\}$ с метрикой ρ и две изометрии I_1, I_2 обоих пространств X и Y в пространство Z , что $I_1(x_i) = z_i, I_2(y_i) = z_i, i = 1, \dots, n-1, I_1(x_n) = z_n, I_2(y_n) = z_{n+1}$. Для того, чтобы доказать существование такого Z , мы должны показать, что возможно определить одно неотрицательное число h , которое будет расстоянием $\rho(z_n, z_{n+1}) = h$ между z_n и z_{n+1} (образами x_n и y_n в Z соответственно) т.е., чтобы были выполнены все неравенства треугольника в пространстве Z . Существование такого h следует из неравенств

$$\begin{aligned} \rho_1(x_i, x_n) - \rho_2(y_i, y_n) &\leq \rho_1(x_i, x_j) + \rho_1(x_j, x_n) - \rho_2(y_i, y_n) = \\ &= \rho_1(x_j, x_n) + \rho_2(y_i, y_j) - \rho_2(y_i, y_n) \leq \rho_1(x_j, x_n) + \rho_2(y_j, y_n) \end{aligned}$$

для всех $i, j = 1, \dots, n-1$. Следовательно

$$\max_i |\rho_1(x_i, x_n) - \rho_2(y_i, y_n)| \equiv M \leq m \equiv \min_j (\rho_1(x_j, x_n) + \rho_2(y_j, y_n)).$$

Таким образом, в качестве числа h можно взять произвольное число из непустого замкнутого интервала $[M, m]$, и мы положим $\rho(z_n, z_{n+1}) \equiv h$; из его определения следует, что все неравенства треугольника выполнены. Теперь предположим, что r — матрица расстояний порядка $n-1$, и $a \in A(r)$ — допустимый вектор; пусть расстояния между первыми $n-1$ точками пространств $\{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ задаются матрицей r , а метрика всего пространства — расширенной матрицей r^a . Мы можем выбрать ещё один произвольный допустимый вектор $b \in A(r)$ и получить матрицу расстояний r^b пространства $\{y_1, \dots, y_{n-1}, y_n\}$, где совокупность первых $n-1$ точек изометрична пространству $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Как было доказано выше, существует пространство Z , матрица расстояний которого \bar{r} имеет порядок $n+1$ и обеспечивает требуемое свойство. \square

Теперь мы можем сформулировать общее утверждение о проекции χ^r .

Лемма 4. Для произвольных натуральных чисел N и $n < N$ и любой матрицы $r \in \mathcal{R}_N$ отображение χ_n^r есть эпиморфизм $A(r)$ на $A(p_n(r))$. Другими словами, для каждого $a = (a_1, \dots, a_n) \in A(p_n(r))$ существует такой вектор (b_{n+1}, \dots, b_N) , что $b = (a_1, \dots, a_n, b_{n+1}, \dots, b_N) \in A(r)$.

Доказательство. Доказательство предыдущей леммы показывает, как определить первое число b_{n+1} . Но проекция χ_n^r есть отображение из $A(r)$, $r \in \mathcal{R}_N$, в $A(p_n(r))$ и является произведением проекций $\chi_n^r \cdots \chi_{N-1}^r$, каждая из которых есть эпиморфизм; и поэтому произведение также эпиморфно. \square

Для дальнейшего удобно представлять бесконечную матрицу $r \equiv \{r_{i,j}\} \in \mathcal{R}$ как последовательность допустимых векторов возрастающей длины

$$\begin{aligned} r(1) &= \{r_{1,2}\}, r(2) = \{r_{1,3}, r_{2,3}\}, \dots, \\ r(k) &= \{r_{1,k+1}, r_{2,k+1}, \dots, r_{k,k+1}\} \dots, k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{2.2}$$

удовлетворяющих условиям $r(k) \in A(p_k(r))$ (напомним, что $p_k(r)$ есть NW-проекция, т. е. взятие NW-угла матрицы, r на пространство \mathbf{M}_k^s), т. е. каждый вектор $r(k)$ является допустимым для *предшествующей матрицы расстояний* $p_k(r)$.

Мы можем рассмотреть следующую последовательность конусов и отображений:

$$0 = \mathcal{R}_1 \xleftarrow{p_2} \mathcal{R}_2 = \mathbb{R}_+ \xleftarrow{p_3} \mathcal{R}_3 \xleftarrow{\dots} \mathcal{R}_{n-1} \xleftarrow{p_n} \mathcal{R}_n \xleftarrow{\dots}; \tag{2.3}$$

здесь проекция p_n есть ограничение определённой выше проекции, на конус \mathcal{R}_n . Прообраз точки $r \in \mathcal{R}_{n-1}$ (слой над r) есть множество $A(r)$, которое определено леммой 1. Заметим, что последовательность (3) не есть последовательность расслоений в обычном смысле: прообразы различных точек r могут быть даже не гомеоморфны (даже размерность может быть разной). Но эта последовательность задаёт конус \mathcal{R} как обратный предел конусов \mathcal{R}_n . Мы используем последовательность (3) для определения мер на конусе \mathcal{R} в духе теории марковских процессов.

§ 3. Универсальность и пространство Урысона

3.1. Универсальные матрицы расстояний

Следующее определение играет центральную роль.

Определение 1. 1. *Бесконечная матрица расстояний $r = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^\infty \in \mathcal{R}$ называется универсальной матрицей расстояний, если выполнено следующее условие:*

для любого $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и всякого вектора $a = \{a_i\}_{i=1}^n \in A(p_n(r))$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\max_{i=1, \dots, n} |r_{i,m} - a_i| < \epsilon$.

Другими словами, для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество векторов $\{\{r_{i,j}\}_{i=1}^n\}_{j=n+1}^\infty$ всюду плотно в множестве допустимых векторов $A(p_n(r))$.

2. Бесконечная собственная матрица расстояний $r = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^\infty \in \mathcal{R}$ называется слабо универсальной матрицей расстояний, если для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество всех её подматриц вида $\{r_{i_k, i_s}\}_{k,s=1}^n$ порядка n по всем наборам $\{i_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{N}$ плотно в конусе \mathcal{R}_n .

Обозначим множество универсальных матриц расстояний через \mathcal{M} . Мы докажем, что \mathcal{M} не пусто, но вначале опишем некоторые свойства универсальных матриц.

Лемма 5. *Каждая универсальная матрица расстояний — слабо универсальна. Существует неуниверсальная, но слабо универсальная матрица расстояний.*

Доказательство. Выберем любую матрицу расстояний $q \in \mathcal{R}_n$; докажем, что для данного положительного ϵ можно найти такое множество $\{i_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{N}$, что $\max_{k,s=1,\dots,n} |r_{i_k, i_s} - q_{k,s}| < \epsilon$. Поскольку $r^1 = \{r_{1,1} = 0\}$, мы заключаем, что $A(r^1) = \mathbb{R}_+$ (см. 2.2), и по универсальности r последовательность $\{r_{1,n}\}_{n=2}^\infty$ должна быть плотной в \mathbb{R}_+ . Поэтому мы можем выбрать некоторое i_1 так, что $|r_{1,i_1} - q_{1,2}| < \epsilon$, и затем, используя плотность столбцов длины 2, которая следует из условия универсальности, выберем такое натуральное число i_2 , что $|r_{1,i_2} - q_{1,3}| < \epsilon$, $|r_{2,i_2} - q_{2,3}| < \epsilon$. Повторяя этот процесс для последовательных столбцов матрицы $q \in \mathcal{R}_n$, получим нужную подматрицу матрицы r .

Имеется много примеров слабо универсальных матриц, не являющихся универсальными; в частности, матрица расстояний любого всюду плотного счётного подмножества универсального, но не однородно универсального (см. ниже) польского пространства (например банахова пространства $C([0, 1])$) даёт такой контрпример. Но наиболее простой пример — матрица расстояний дизъюнктного объединения всех конечных метрических пространств с рациональными расстояниями (пример предложен Б. Вейссом); и слабая универсальность, и неуниверсальность следуют из определения. \square

Следующее свойство универсальности полезно для изучения пространства Урысона:

Следствие 2 (об ϵ -продолжении изометрий). *Пусть r есть бесконечная матрица расстояний и q — такая конечная матрица расстояний порядка N , что для некоторого $n < N$, $r_{i,j} = q_{i,j}$,*

$i, j = 1 \dots n$. Положим $i_k = k$, $k = 1 \dots n$. Тогда для положительного ϵ существуют такие натуральные числа $i_{n+1} \dots i_N$, что $\max_{k,s=1 \dots N} |r_{i_k, i_s} - q_{k,s}| < \epsilon$. Другими словами, можно расширить множество первых n натуральных чисел некоторым набором из $N - n$ натуральных чисел i_{n+1}, \dots, i_N так, что полученная матрица расстояний порядка N с индексами $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_n = n, i_{n+1}, \dots, i_N$ будет отличаться от матрицы расстояний q (по произвольной норме) меньше, чем на ϵ .

Обратно, если для любой конечной матрицы расстояний q и любого положительного ϵ бесконечная матрица расстояний r обладает подобным свойством, то она универсальна.

Доказательство. Для $N = n + 1$ утверждение непосредственно следует из определения универсальности r , применим индукцию по N . Второе утверждение следует из определения. \square

Еще одна полезная переформулировка понятий универсальности и слабой универсальности использует групповые термины. Пусть $q \in \mathcal{R}_n$; обозначим через $\mathcal{R}^n(q)$ множество всех $r \in \mathcal{R}$, у которых NW-угол равен матрице q . Рассмотрим группу S_∞^n подстановок, оставляющих неподвижными первые n строк и столбцов матриц из \mathcal{R} и, тем самым, переводящих $\mathcal{R}^n(q)$ в себя. Непосредственно из определений следует критерий универсальности:

Утверждение 1. Матрица $r \in \mathcal{R}$ универсальна тогда и только тогда, когда для всякого n её орбита под действием группы S_∞^n всюду плотна в $\mathcal{R}^n(r^n)$ в слабой топологии (здесь $r^n =$ NW-угол матрицы r порядка n). Матрица $r \in \mathcal{R}$ слабо универсальна тогда и только тогда, когда её орбита под действием всей группы S_∞ всюду плотна в конусе \mathcal{R} .

В то же время существование универсальной матрицы расстояний, что, как мы увидим, эквивалентно существованию универсального пространства Урысона, совершенно неочевидно. Мы несколько упрощаем аргументы Урысона из [3] и доказываем не только существование универсальных матриц, но и более сильный факт:

Теорема 1. Множество \mathcal{M} универсальных матриц непусто. Более того, это множество есть всюду плотное G_δ -множество в конусе \mathcal{R} в слабой топологии.

Доказательство. Для доказательства существования хотя бы одной универсальной матрицы расстояний в конусе \mathcal{R} мы будем использовать

описанное в леммах предыдущего параграфа представление матриц расстояний.

Зафиксируем последовательность $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ натуральных чисел, в которой каждое натуральное число повторяется бесконечно много раз, причём выполнено неравенство $m_n \leq n$; $m_1 = 1$. Для каждой конечной собственной матрицы расстояний $r \in \mathcal{R}_n$, $n = 1, \dots$, выберем произвольно упорядоченное счётное подмножество $\Gamma_r \subset A(r)$ множества всех допустимых векторов с положительными координатами: $\Gamma_r = \{\gamma_k^r\}_{k=1}^{\infty} \subset A(r) \subset \mathbb{R}^n$; зафиксируем евклидову метрику в векторных пространствах $\mathbb{R}^n \supset A(r)$ для всех n .

Первый шаг доказательства состоит в выборе положительного вещественного числа $\gamma_1^1 \in \Gamma_1 \subset A(0) = \mathbb{R}_+^1$; тем самым, мы выбрали матрицу расстояний r порядка 2 с элементом $r_{1,2} = \gamma_1^1$.

Наша конструкция универсальной матрицы r является индуктивной и использует представление матрицы как последовательности допустимых векторов $\{r(1), r(2), \dots\}$ увеличивающейся длины (формула (2)). Условие на последовательные векторы таково: $r(k) \in A(p_k(r_{k+1}))$. Последовательность соответствующих матриц r_n , $n = 1, \dots$, определяет бесконечную матрицу r .

Предположим, что после $(n-1)$ -го шага мы получили конечную матрицу r_{n-1} ; выберем новый допустимый вектор $r(n) \in A(r_{n-1})$. Выбор этого вектора (обозначим его через a) определяется условиями: расстояние (по выбранной норме) между проекцией $\chi_{m_n}^r(a)$ вектора a на подпространство допустимых векторов $A(r_{m_n})$ и точкой $\gamma_s^{m_n} \in \Gamma_{r_{m_n}} \subset A(r_{m_n})$ должно быть меньше, чем 2^{-n} , где $s = |i: m_i = m_n, 1 \leq i \leq n| + 1$:

$$\|\chi_{m_n}^r(a) - \gamma_s^{m_n}\| < 2^{-n}.$$

Напомним, что проекция $\chi_{m_n}^r$ есть эпиморфизм $A(r)$ на $A(p_{m_n}(r))$ (лемма 4), поэтому вектор $a \in A(r_n)$ с нужным свойством существует. Число s есть число точек множества $\Gamma_{r_{m_n}}$, которые встретились на предыдущих шагах конструкции.

Продолжая неограниченно последовательность таких шагов, мы получим матрицу расстояний r . Её универсальность очевидна, так как проекция χ_n^r векторов $r(k)$, $k = n+1, \dots$, есть всюду плотное множество в $A(r_n)$ в силу конструкции. Таким образом, доказано существование универсальной матрицы.

Заметим теперь, что универсальность матрицы есть свойство, сохраняющееся под действием одновременной конечной перестановки строк и столбцов матрицы, а также при NW-сдвиге, который сокращает некоторое (одинаковое) количество первых строк и столбцов матрицы. Кроме того, универсальность сохраняется при изменении конечного числа эле-

ментов матрицы. Следовательно, \mathcal{M} содержит вместе с данной матрицей все её перестановки и NW-сдвиги. Отсюда, а также из того, что слабая универсальность следует из универсальности, вытекает, что орбита универсальной матрицы r относительно группы подстановок $S_{\mathbb{N}}$ всюду плотна в \mathcal{R} в слабой топологии. Тем самым, \mathcal{M} всюду плотно в \mathcal{R} .

Наконец, следующая формула непосредственно следует из определения универсальности и показывает, что множество \mathcal{M} универсальных матриц есть всюду плотное G_{δ} -множество:

$$\mathcal{M} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{a \in A(r^n) \cap \mathbb{Q}^{n^2}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}, m > n} \left\{ r \in \mathcal{R} : \max_{i=1, \dots, n} |r_{i,m} - a_i| < \frac{1}{k} \right\}. \quad \square$$

Зафиксируем некоторую универсальную собственную матрицу расстояний r и снабдим множество всех натуральных чисел \mathbb{N} метрикой r . Обозначим метрическое пространство, являющееся пополнением пространства (\mathbb{N}, r) относительно метрики r , через (\mathcal{U}_r, ρ_r) . Очевидно, это польское пространство.

Лемма 6. *Матрица расстояний любого счётного всюду плотного подмножества $\{u_i\}$ пространства \mathcal{U}_r — универсальна.*

Доказательство. отождествим множество \mathbb{N} с $\{x_i\} \subset \mathcal{U}_r$. По определению, $\rho(x_i, x_j) = r_{i,j}$. Поскольку матрица r универсальна, для всякого n имеет место свойство (здесь Cl обозначает замыкание): $Cl(\bigcup_{j>n} \{\{\rho(x_i, x_j)\}_{i=1}^n\}) = A(p_n(r))$. Поскольку множество $\{u_i\}$ всюду плотно в (\mathcal{U}_r, ρ_r) , мы можем заменить предыдущее множество на следующее: $Cl(\bigcup_{j>n} \{\{\rho(x_i, u_j)\}_{i=1}^n\}) = A(p_n(r))$. Но так как $\{x_i\}$ также всюду плотно в (\mathcal{U}_r, ρ_r) , можно написать $Cl(\bigcup_{j>n} \{\{\rho(u_i, u_j)\}_{i=1}^n\}) = A(p_n(r'))$, где r' — матрица расстояний последовательности $\{u_i\}$. \square

Мы увидим, что пространство (\mathcal{U}_r, ρ_r) и есть так называемое универсальное пространство Урысона, которое определено ниже, а универсальность матрицы расстояний есть необходимое и достаточное условие, гарантирующее, что пополнение по ней натурального ряда есть пространство Урысона.

3.2. Универсальное пространство Урысона и универсальные матрицы

Определим теперь пространство Урысона. В своей последней работе [3], напечатанной уже после его трагической смерти, Павел Самуилович

Урысон (1898–1924) дал конструкцию универсального польского пространства, которое сейчас называется «пространством Урысона». Построение было ответом на вопрос об универсальном пространстве Банаха, поставленный М. Fréchet. Позднее Банах и Мазур доказали, что существуют универсальные банаховы пространства (например, $C([0, 1])$), но ответ Урысона был более глубок. Фактически он доказал несколько теорем, которые мы объединяем и обобщаем в следующей теореме:

Теорема 2 (Урысон [3]). *А. Существует польское (= полное сепарабельное метрическое) пространство \mathcal{U} со свойствами:*

1) (Универсальность) *Для всякого польского пространства X существует изометрическое вложение X в пространство \mathcal{U} ;*

2) (Однородность) *Для любых двух изометричных конечных подмножеств $A = (a_1 \dots a_m)$ и $B = (b_1 \dots b_m)$ пространства \mathcal{U} существует изометрия J всего пространства \mathcal{U} , которая переводит A в B : $JX = Y$;*

В. (Единственность) Любые два польских пространства, удовлетворяющих условиям 1) и 2) предыдущего пункта, изометричны.

В условиях теоремы свойство 2) может быть усилено: конечные подмножества можно заменить в нём на компактные; таким образом, группа изометрий пространства действует транзитивно на изометричных компактах пространства; но заменить компакты в этой формулировке на замкнутые подмножества уже нельзя. Можно эквивалентным образом сформулировать условие 2) как условие продолжения изометрий с компактов на всё пространство. Фактически мы доказываем это ниже.

Главный результат этого параграфа заключён в следующей теореме, включающей в себя предыдущую.

Теорема 3. 1. *Полношение (\mathcal{U}_r, ρ_r) множества натуральных чисел (\mathbb{N}, r) по метрике, задаваемой любой универсальной собственной матрицей расстояний r , удовлетворяет свойствам 1) и 2) предыдущей теоремы, т. е. является пространством Урысона.*

2. (Единственность.) *Для любых двух универсальных собственных матриц расстояний r and r' полношения пространств (\mathbb{N}, r) и (\mathbb{N}, r') изометричны.*

Следствие 3. *Изометрический тип пространства (\mathcal{U}_r, ρ_r) не зависит от выбора универсальной матрицы r . Универсальность является необходимым и достаточным условием на матрицу расстояний любого счётного всюду плотного подмножества пространства Урысона.*

Следствие вытекает из теоремы 3 и леммы 6. Доказательство теоремы 3, которое даётся ниже, отчасти повторяет и упрощает аргументы работы Урысона, однако в его работе не использовались бесконечные матрицы расстояний и, в частности, полезное понятие универсальной матрицы расстояний.

Доказательство. Предположим, что матрица $r = \{r(i, j)\}_{i,j=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$ собственная универсальная матрица расстояний (удобно писать $r(i, j)$ вместо $r_{i,j}$) и пространство \mathcal{U}_r есть пополнение счётного метрического пространства (\mathbb{N}, r) ; обозначим соответствующую метрику на \mathcal{U}_r через ρ_r , опуская иногда индекс r .

1. Прежде всего докажем, что метрическое пространство (\mathcal{U}, ρ) универсально в смысле пункта 1) теоремы 2 и что оно однородно в смысле пункта 2) этой теоремы.

Пусть (Y, q) произвольное польское пространство. Для того, чтобы доказать, что существует изометрическое вложение (Y, q) в (\mathcal{U}, ρ) , достаточно доказать существование изометрического вложения произвольного счётного плотного подмножества $\{y_n\}_1^{\infty}$ пространства (Y, q) в (\mathcal{U}, ρ) . Тем самым, нужно доказать, что для любой бесконечной собственной матрицы расстояний $q = \{q(i, j)\} \in \mathcal{R}$ существует счётное подмножество $\{u_i\} \subset \mathcal{U}$ с матрицей расстояний, равной q . В свою очередь это означает, что мы должны построить множество фундаментальных последовательностей в пространстве (\mathbb{N}, r) , назовём их, $N_i = \{n_i^{(m)}\}_{m=i}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots$, таких, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r(n_i^{(m)}, n_j^{(m)}) = q(i, j), \quad i, j = m, \dots$$

и для всех i имеем

$$\lim_{m,k \rightarrow \infty} r(n_i^{(m)}, n_i^{(k)}) = 0.$$

Сходимость $N_i = \{n_i^{(m)}\}_{m=i}^{\infty}$ в пространстве (\mathcal{U}, ρ) при $m \rightarrow \infty$ к некоторой точке $u_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \dots$, следует из фундаментальности последовательности, т. е. из второго равенства; из первого же равенства следует, что матрица расстояний предельных точек $\{u_i\}$ совпадает с матрицей q . Переходим к построению N_i , $i = 1, \dots$. Мы конструируем нужные последовательности $\{N_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ по индукции.

Выберем произвольно точку $n_1^{(1)} \in \mathbb{N}$ и предположим, что для данного $m > 1$ мы уже определили конечные фрагменты $L_k = \{n_i^{(k)}\}_{i=1}^k \subset \mathbb{N}$ первых m множеств $\{N_i\}_{i=1}^m$ для $k = 1, 2, \dots, m$ со свойством:

$$\max_{i,j=1,\dots,k} |r(n_i^{(k)}, n_j^{(k)}) - q(i, j)| = \delta_k < 2^{-k}, \quad k = 1, \dots, m,$$

и множества L_k попарно не пересекаются.

Наша конструкция множества L_{m+1} зависит только от множества L_m , поэтому мы можем для простоты перенумеровать множества L_m : $n_i^{(m)} = i$, $i = 1, \dots, m$.

Будем строить новое множество $L_{m+1} = \{n_i^{(m+1)}\}_{i=1}^{m+1} \subset \mathbb{N}$ с необходимыми свойствами следующим образом. Рассмотрим конечное метрическое пространство (V, d) из $2m + 1$ точек $y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_m, z_{m+1}$ с расстояниями:

$$\begin{aligned} d(y_i, y_j) &= r_{i,j}, \quad i, j = 1 \dots m, \\ d(z_i, z_j) &= q(i, j), \quad i, j = 1, \dots, m + 1; \\ d(y_i, z_j) &= q(i, j), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m + 1; \quad i \neq j, \\ d(y_i, z_i) &= \delta_m, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{для некоторого } \delta_m. \end{aligned}$$

Легко проверить, что это корректное определение расстояний. Обозначим матрицу расстояний пространства (V, d) через q_m . Применим следствие 2 (об ϵ -продолжении изометрий) и расширим множество $L_m = \{1, 2, \dots, m\}$ с помощью нового множества L_{m+1} , состоящего из $m + 1$ натуральных чисел $\{n_i^{(m+1)}\}_{i=m+1}^{2m+1} \subset \mathbb{N}$ так, чтобы матрица расстояний нового пространства L_{m+1} отличалась от NW-угла порядка $m + 1$ матрицы q не более, чем на δ_m , которое меньше, чем $2^{-(m+1)}$:

$$\max_{i,j} |r(n_i^{(m+1)}, n_j^{(m+1)}) - q_m(i, j)| = \delta_{m+1} < 2^{-(m+1)}$$

(напомним, что NW-углы порядка m матрицы q_m и матрицы r совпадают по построению). Мы видим, что для каждого i последовательность $\{n_i^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна и $\lim_{m \rightarrow \infty} r(n_i^{(m)}, n_j^{(m)}) = q(i, j)$. Таким образом, мы доказали, что всякое польское пространство может быть изметрично вложено в (\mathcal{U}_r, ρ_r) .

Теперь мы можем существенно усилить следствие 2:

Следствие 4 (о продолжении изометрий). *Пространство (\mathcal{U}_r, ρ_r) обладает следующим свойством: для всякого конечного множества $A = \{a_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{U}_r$ и матрицы расстояний q порядка N , $N > n$ с NW-углом порядка n , равным матрице расстояний $\{\rho(a_i, a_j)\}_{i,j=1}^n$, существуют такие точки $a_{n+1} \dots a_N$, что матрица расстояний всего множества $\{a_i\}_{i=1}^N$ равна q .*

Доказательство параллельно доказательству следствия 2 и использует аргументы, аналогичные приведённым выше.

Замечание 1. *Существует много различных (неизометричных) универсальных, но неоднородных польских пространств (например*

банахово пространство $C([0, 1])$). Вышеприведенное следствие показывает, что главное различие между такими универсальными пространствами и пространством Урысона в следующем: можно изометрически вложить любое польское пространство в любое универсальное пространство, но в случае пространства Урысона можно сделать гораздо большее: точки образа вкладываемого пространства могут иметь заданные расстояния до точек заранее фиксированного конечного (и даже компактного) подмножества.

Продолжим доказательство Теоремы 3.

2. Для того, чтобы доказать однородность, зафиксируем два конечных n -точечных подмножества $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ и $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ в (\mathcal{U}_r, ρ_r) и построим два изометричных упорядоченных счётных подмножества C и D , каждое из которых всюду плотно в \mathcal{U} , и C начинается с множества A , а D начинается с множества B . Метод построения хорошо известен и называется «back and forth». Сначала мы фиксируем счётное всюду плотное подмножество F в (\mathcal{U}_r, ρ_r) , $F \cap A = F \cap B = \emptyset$, и представляем его как возрастающее объединение: $F = \cup F_n$. Положив $C_1 = A \cup F_1$, находим такое множество $D_1 = B \cup F'_1$ что изометрия A и B продолжается на F_1 и F'_1 . Таким образом, D_1 изометрично C_1 . Это возможно сделать по следствию 4 (расширение изометрий).

Затем выберем $D_2 = D_1 \cup F_2$ и $C_2 = C_1 \cup F'_2$ и опять расширим изометрию с той части множества, на котором была определена, на всё множество. Тем самым, мы построили изометрию между D_2 и C_2 и т. д. Альтернирующий процесс даёт нам два всюду плотных счётных изометричных множества $\cup C_i$ and $\cup D_i$, при этом изометрия между ними продолжает изометрию A и B .

3. Единственность. Пусть r и r' — две универсальные собственные матрицы расстояний и пространства (\mathcal{U}_r, ρ_r) and $(\mathcal{U}'_r, \rho'_r)$ есть соответствующие пополнения натурального ряда.

Построим соответственно в этих пространствах два счётных всюду плотных подмножества F_1 и F_2 так, что изометрия между ними продолжается до изометрии пространств. Обозначим через $\{x_i\}$ и $\{u_i\}$ всюду плотные подмножества (\mathcal{U}_r, ρ_r) и $(\mathcal{U}'_r, \rho'_r)$, которые порождают соответственно матрицы r and r' . Теперь мы повторяем те же аргументы что и в доказательстве первой части теоремы. Мы начинаем с конечного числа точек $\{x_i\}_{i=1}^{n_1}$ в (\mathcal{U}_r, ρ_r) , и добавляем к нему множество точек $\{u'_i\}_{i=1}^{m_1} \subset \mathcal{U}'_r$ с той же матрицей расстояний, что и матрица расстояний множества точек $\{u_i\}_{i=1}^{m_1}$; это возможно в силу универсальности (\mathcal{U}_r, ρ_r) (свойство 1), которое уже доказано). Теперь добавим к множеству $\{u_i\}_{i=1}^{m_2}$, $m_2 > m_1$, в пространстве \mathcal{U}'_r множество точек $\{x'_i\}_{i=1}^{n_2}$, $n_2 > n_1$, та-

ким образом, чтобы матрица расстояний подмножества $\{u_i\}_{i=1}^{m_1} \cup \{x'_i\}_{i=1}^{n_1}$ множества $\{u_i\}_{i=1}^{m_2} \cup \{x'_i\}_{i=1}^{n_2}$ совпадала с матрицей расстояний множества $\{u'_i\}_{i=1}^{m_1} \cup \{x_i\}_{i=1}^{n_1}$, и т. д. продолжая этот процесс до бесконечности, получаем требуемые два множества — первое $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{u'_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}_r$ и второе $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{x'_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}'_r$ — которые являются всюду плотными в своих пространствах и изометричны. Таким образом, мы закончили доказательство теоремы. \square

Теоремы 1 и 3 дают следующий замечательный факт:

Следствие 5. *Типичная («generic») матрица расстояний есть универсальная матрица, и, следовательно, типичное метрическое польское пространство (в смысле нашей модели — конуса \mathcal{R}) есть пространство Урысона \mathcal{U} .*

В своей работе П. Урысон дал пример счётного пространства с рациональной матрицей расстояний (в действительности — универсальное неполное метрическое пространство в классе метрик с рациональными числами \mathbb{Q}). Наш метод конструирования чуть более общий: мы строим универсальную матрицу, основываясь на геометрии конуса \mathcal{R} , что даёт необходимые и достаточные условия на матрицу расстояний любого всюду плотного счётного множества. В § 5 мы используем эту конструкцию пространства Урысона в вероятностном контексте: мы даём метрическую (= теоретико-мерную) версию универсальности в терминах метрических пространств с мерой.

П. Урысон в [3] обращает внимание на то, что существует универсальное пространство диаметра 1 (или любого данного диаметра). Если мы определим аналогичным образом универсальные матрицы расстояний с элементами из интервала $[0, 1]$, то соответствующее пополнение и будет универсальным пространством для польских пространств диаметра 1, а утверждения всех теорем этого параграфа остаются верными после тривиальных изменений.

§ 4. Матричные распределения как полный инвариант метрических троек и их характеристика

4.1. Матричные распределения и теорема единственности

Будем рассматривать метрическое пространство с мерой и случайные метрики на натуральном ряде.

Предположим, что (X, ρ, μ) есть польское пространство с метрикой ρ и с борелевской вероятностной мерой μ . Назовем его *метрической*

тройкой (в [2] они названы «mm-space» = metric-measure space; другие термины — «вероятностное метрическое пространство», тройки Громова). Две метрические тройки (X_1, ρ_1, μ_1) и (X_2, ρ_2, μ_2) *изоморфны*, если существует изометрия $V: X_1 \rightarrow X_2$, которая сохраняет меру:

$$\rho_2(Vx, Vy) = \rho_1(x, y), V\mu_1 = \mu_2.$$

Как уже упоминалось, классификация (некомпактных) польских пространств является «дикой» задачей. Удивительно, что классификация метрических троек есть «ручная» задача и уже есть обозримый ответ в терминах действия бесконечной группы подстановок S_∞ и S_∞ -инвариантных мер на конусе \mathcal{R} .

Для метрической тройки $T = (X, \rho, \mu)$ определим бесконечное произведение с бернуллиевской мерой $(X^\mathbb{N}, \mu^\mathbb{N})$ и отображение $F_T: X^\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$ следующим образом:

$$F_T(\{x_i\}_{i=1}^\infty) = \{\rho(x_i, x_j)\}_{i,j=1}^\infty \in \mathcal{R}.$$

F_T -образ меры $\mu^\mathbb{N}$, который мы обозначаем D_T , назовём *матричным распределением метрической тройки T* : $F_T\mu^\infty \equiv D_T$.

Группа S_∞ всех конечных подстановок натуральных чисел (= бесконечная симметрическая группа $S_\mathbb{N}$) действует как на $\mathbf{M}_\mathbb{N}(\mathbb{R})$, так и на конусе \mathcal{R} матриц расстояний как группа одновременных подстановок строк и столбцов матриц.

Лемма 7. *Мера D_T есть борелевская мера на \mathcal{R} , инвариантная и эргодическая относительно действия бесконечной симметрической группы и действия NW -сдвига (одновременного сдвига бесконечной матрицы в вертикальном (вверх) и горизонтальном (влево) направлении: $(NW(r))_{i,j} = r_{i+1,j+1}$; $i, j = 1, 2, \dots$).*

Доказательство. Все факты следуют из аналогичных свойств меры μ^∞ , которая инвариантна относительно сдвига и подстановок координат, и того, что отображение F_T коммутирует с действием сдвига и подстановок. \square

Назовем меру на метрическом пространстве *невыврожденной*, если всякое непустое открытое множество имеет положительную меру.

Теорема 4. *Две метрические тройки $T_1 = (X_1, \rho_1, \mu_1)$ и $T_2 = (X_2, \rho_2, \mu_2)$ с невырожденными мерами эквивалентны тогда и только тогда, когда их матричные распределения совпадают как меры на конусе \mathcal{R} : $D_{T_1} = D_{T_2}$.*

Доказательство. Необходимость совпадения матричных распределений эквивалентных троек — очевидна: если существует изометрия $V: X_1 \rightarrow X_2$ между T_1 и T_2 , сохраняющая меру, то её бесконечная степень V^∞ сохраняет бернуллиевскую меру: $V^\infty(\mu_1^\infty) = \mu_2^\infty$ и поэтому в силу равенства $F_{T_2}X_2^\infty = F_{T_2}(V^\infty X_1^\infty)$, образы этих мер одинаковы: $D_{T_2} = D_{T_1}$. Предположим, что $D_{T_2} = D_{T_1} = D$. Тогда D -почти все матрицы расстояний r являются образами при отображениях F_{T_1} и F_{T_2} некоторых последовательностей, например, $r_{i,j} = \rho_1(x_i, x_j) = \rho_2(y_i, y_j)$, но это означает что отождествление $x_i \in X_1$ и $y_i \in X_2$ для всех i есть изометрия V между этими счётными множествами. Главный аргумент: по эргодической теореме (по отношению к NW-сдвигу) μ_1 -почти все последовательности $\{x_i\}$ и μ_2 -почти все последовательности $\{y_i\}$ равномерно распределены на X_1 и X_2 соответственно. Это означает, что μ_1 -мера каждого шара $B^l(x_i) \equiv \{z \in X_1 : \rho_1(x_i, z) < l\}$ равна

$$\mu_1(B^l(x_i)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{[0,l]}(\rho_1(x_k, x_i)).$$

Но в силу изометричности V ($r_{i,j} = \rho_1(x_i, x_j) = \rho_2(y_i, y_j)$, см. выше) то же выражение есть μ_2 -мера шара: $B^l(y_i) \equiv \{u \in X_2 : \rho_2(y_i, u) < l\}$,

$$\mu_2(B^l(y_i)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{[0,l]}(\rho_2(y_k, y_i)) = \mu_1(B^l(x_i)).$$

Наконец, обе меры невырождены, поэтому каждая последовательность $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ всюду плотна в своём пространстве. Поэтому совпадение значений (борелевских) мер на всех шарах означает их равенство. \square

Следствие 6. *Матричное распределение есть полный инвариант классов эквивалентности (с точностью до изометрии, сохраняющей меру) метрических троек с невырожденными мерами.*

Мы называем эту теорему «теоремой единственности», поскольку она утверждает единственность с точностью до эквивалентности метрической тройки с заданным матричным распределением. Первоначально в другой формулировке под названием «Reconstruction Theorem» она была доказана в книге [2] с. 117–123. Она формулировалась в терминах конечномерных распределений того, что выше названо матричным распределением, а её доказательство использовало аналитические методы. «Эргодическое» доказательство, приведённое выше, было ответом на вопрос, поставленный Громовым в 1997 году: как можно избежать громоздких рассуждений. Это доказательство было приведено также в [4] и цитировано в книге [2] (с. 122–123). Там же читатель приглашается

сравнить оба доказательства и объяснить, каким образом эргодическая теорема заменяет аналитические аргументы (теорему Вейерштрасса, метод моментов). Объяснение состоит в том, что применение эргодической теоремы позволяет вместо аппроксимационных методов перейти к бесконечному (предельному) объекту (бесконечным орбитам, мерам на предельном пространстве и т. д.) и использовать свойства (равномерную распределенность, например), которые нельзя даже сформулировать для конечных объектов. В нашем случае рассмотрение бесконечных матриц и конуса \mathcal{R} с инвариантной мерой даёт возможность редуцировать проблему к изучению эргодического действия бесконечной симметрической группы. В [8, 9] мы используем эту эргодическую технику для получения гораздо более общего результата — классификации произвольных измеримых функций нескольких аргументов; выше рассмотрен частный случай: метрика есть функция двух аргументов на метрическом пространстве с мерой.

4.2. Свойства матричного распределения и теорема существования

Матричное распределение метрической тройки $T = (X, \rho, \mu)$ с невырожденной мерой μ есть, по определению, мера D_T на конусе \mathcal{R} . Мы получаем вероятностное распределение на матрицах и, тем самым, случайную матрицу расстояний на множестве натуральных чисел. В этом пункте мы рассматриваем те случайные матрицы (или те меры на \mathcal{R}), которые могут быть матричными распределениями, другими словами, распределения на матрицах расстояний, которые могут появиться как матрицы расстояний последовательности независимо выбранных точек $\{x_i\}$ некоторого метрического пространства (X, ρ) , распределённых по какой-либо мере μ на этом пространстве. Характеризация образа необходима ещё и для того, чтобы утверждать, что задача классификации действительно «гладкая», т. е. множество инвариантов явно описано. Мы покажем, что множество матричных распределений есть борелевское подмножество пространства всех вероятностных мер на конусе \mathcal{R} .

Как упоминалось (лемма 7), всякая мера D_T должна быть инвариантной и эргодической относительно действия симметрической группы и NW-сдвига. Но этого недостаточно, и имеются дополнительные условия на меру. Далее даются необходимые и достаточные условия на меру (см. также [9]), но мы начнём с контрпримеров.

Примеры.

1. Тривиальный пример инвариантной эргодической меры на конусе, которая не является матричным распределением, таков. Обозначим r^0

матрицу расстояний: $r_{i,j}^0 = \delta(i-j)$ (где $\delta(n) = 1$, если $n = 0$, и нулю в остальных случаях); это матрица расстояний счётного множества, расстояние между любыми двумя разными точками равно 1. Пусть мера μ^0 есть дельта мера в r^0 . Очевидна инвариантность и эргодичность μ^0 , но она не есть матричное распределение никакой метрической тройки.

2. Пример общего типа таков. Заметим сначала, что каждая симметрическая матрица с нулями на главной диагонали и с элементами $r_{i,j}$ из интервала $[1/2, 1]$ при $i \neq j$ есть собственная матрица расстояний; в этом случае неравенство треугольника автоматически справедливо для любой тройки индексов. Для любой вероятностной меры m с носителем на интервале $[1/2, 1]$, и не сосредоточенной в одной точке, рассмотрим продакт-меру m^∞ с множителем m на $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}^s(\mathbb{R})$ (это означает, что все элементы матрицы выше главной диагонали независимы и одинаково распределены). Такая мера имеет носителем конус \mathcal{R} . Очевидно она обладает нужными инвариантностями и эргодична. В то же время это непрерывная (недискретная) мера. Но она не может быть матричным распределением ни для какой матричной тройки; действительно, с m^∞ -вероятностью равной единице матрица расстояний определяет дискретную топологию на натуральных числах \mathbb{N} , поскольку нет нетривиальных фундаментальных последовательностей в \mathbb{N} , и, следовательно, пополнение \mathbb{N} есть \mathbb{N} , поэтому матричное распределение не может быть непрерывной мерой, но продакт-мера m^∞ , как было отмечено, непрерывна.

Этот эффект станет ясным из доказательства следующей теоремы, которая даёт характеристику матричных распределений.

Теорема 5 (Существование метрической тройки с заданным матричным распределением). Пусть D — вероятностная борелевская мера на конусе матриц расстояний \mathcal{R} , инвариантная и эргодическая относительно действия бесконечной симметрической группы.

1) Следующее условие является необходимым и достаточным для того, чтобы указанная мера D была матричным распределением для некоторой метрической тройки $T = (X, \rho, \mu)$, т. е. $D = D_T$: для каждого $\epsilon > 0$ существует такое целое число $N = N(\epsilon)$, что

$$D\{r = \{r_{i,j}\} \in \mathcal{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{j : 1 \leq j \leq n, \min_{1 \leq i \leq N} r_{i,j} < \epsilon\}|}{n} > 1 - \epsilon\} > 1 - \epsilon. \quad (4.1)$$

2) Следующее более сильное условие является необходимым и достаточным для того, чтобы мера D была матричным распределением метрической тройки $T = (X, \rho, \mu)$ с компактным метрическим пространством (X, ρ) :

для каждого $\epsilon > 0$ существует такое целое число $N = N(\epsilon)$, что

$$D\{r = \{r_{i,j}\} \in \mathcal{R} : \text{для всех } j > N, \min_{1 \leq i \leq N} r_{i,j} < \epsilon\} > 1 - \epsilon. \quad (4.2)$$

Доказательство. А. Необходимость. В случае компактного пространства необходимость очевидна: условие (5) выражает тот факт, что достаточно длинная последовательность независимых (по отношению к невырожденной мере μ) равномерно распределённых точек распределённых по мере μ содержит ϵ -сеть компактного метрического пространства для любого ϵ . Необходимость условия (4) в общем случае следует автоматически из хорошо известного свойства борелевских мер в польских пространствах: а именно, множество полной меры есть сигма-компакт (так называемая «регулярность меры»), следовательно, для каждого $\epsilon > 0$ существует компакт, имеющий меру $> 1 - \epsilon$. Поэтому в силу счётной аддитивности меры для каждого $\epsilon > 0$ существует такое конечное число точек, что мера объединения ϵ -шаров с центрами в этих точках больше $1 - \epsilon$, и, используя эргодическую теорему, можно утверждать, что условие в скобках в (4) выполнено для матриц расстояний из множества меры большей $1 - \epsilon$.

В. Достаточность. Предположим теперь, что D есть инвариантная и эргодическая мера на конусе \mathcal{R} , удовлетворяющая условию (4). План доказательства таков: мы выразим все нужные свойства меры D в терминах одной «типичной» матрицы расстояний r , а затем построим некоторое метрическое пространство с мерой — метрическую тройку, — используя только эту матрицу расстояний r .

Инвариантность меры D по отношению к действию группы S_∞ (одновременной перестановке строк и столбцов) влечёт инвариантность ограничений (проекции) меры D на подматрицы $\{r_{i,j} : i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots\}$ по отношению к сдвигу по строкам $j \rightarrow j + 1$ для любых n . Используя эргодическую теорему для сдвига (который, вообще говоря, неэргодичен!), мы можем найти множество $F \subset \mathcal{R}$ полной D -меры таких матриц расстояний $r = \{r_{i,j}\}$, для которых следующий предел существует для всех натуральных k и положительного чисел $\{h_i\} i = 1, 2, \dots, k$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^k 1_{[0, h_i]}(r_{i, j+i}) \equiv \mu^{h_1, \dots, h_k}. \quad (4.3)$$

Используем S_∞ -инвариантность меры D ; но эргодической теореме (более точно, по теореме о сходимости мартингалов) для действия группы S_∞ , поскольку группа S_∞ локально конечна, мы можем утверждать, что для почти всех r и фиксированного борелевского множества $B \in \mathcal{R}_n$

следующий предел существует:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 1/N! \sum_{g \in S_N} 1_B(g(r^{(N)})) \equiv \Lambda_r^{(N)}(B); \quad (4.4)$$

здесь $g(r^{(n)}) = \{r_{g(i),g(j)}\}_{i,j=1}^n$, g — подстановка, т. е. элемент S_N , который переставляет первые N натуральных чисел, а 1_B — характеристическая функция борелевского множества $B \subset \mathcal{R}_n$; мера $\Lambda_r^{(n)}(\cdot)$ на \mathcal{R}_n называется эмпирическим распределением матрицы $r \in \mathcal{R}_n$. Совокупность этих эмпирических распределений, как семейство мер на конусах \mathcal{R}_n , согласована относительно проекций p_n (см. §2) и, следовательно, определяет S_∞ -инвариантную меру \mathcal{R} . Наши предположения о матрице r состоят в том, что эта мера совпадает с мерой D ; это есть следствие эргодичности действия группы S_∞ и эргодической теоремы. Если мы выберем счётный базис борелевских множеств $\{B_i^n\}_{i=1}^\infty$ в \mathcal{R}_n , $n = 1, 2, \dots$, то для D -почти всех r и для всех множеств B_i^n , $i, n = 1, 2, \dots$ существование пределов имеет место.

Наконец, обратимся к условию (4) и сформулируем его в терминах матриц расстояний. Из (4) следует, что для D -почти всех r следующее соотношение имеет место: для каждого k существует такое целое N , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{j: 1 \leq j \leq n, \min_{1 \leq i \leq n} r_{ij} < k^{-1}\}|}{n} > 1 - k^{-1}. \quad (4.5)$$

Зафиксируем одну из таких матриц расстояний $r = \{r_{ij}\}$, которая удовлетворяет всем условиям (6–8), и рассмотрим её как метрику на множестве натуральных чисел. Обозначим через X_r пополнение метрического пространства (\mathbb{N}, r) , метрику пополнения обозначим через $\rho_r \equiv \rho$, и образ натуральных чисел в пополнении X_r — как x_1, x_2, \dots . Пусть $B^h(x)$ шар радиуса h с центром в точке x в пространстве X_r , и пусть \mathcal{A} есть алгебра подмножеств пространства X_r , порождённая всеми шарами с центрами в точках x_i , $i = 1, 2, \dots$ и произвольным радиусом. По определению, мера μ_r конечного пересечения шаров есть

$$\mu_r \left(\bigcap_{i=1}^k B^{h_i}(x_i) \right) = \mu^{h_1, \dots, h_k}. \quad (4.6)$$

Легко проверить, что это равенство корректно определяет неотрицательную конечно-аддитивную нормированную меру μ_r на алгебре \mathcal{A} множеств, порождённых системой указанных шаров, но вообще говоря, эта мера не является счётно-аддитивной и, следовательно, не может быть распространена на сигма-алгебру всех борелевских множеств в X_r , как настоящая вероятностная мера. Это иллюстрируется примером, при-

ведённым выше: мы построили счётное пространство с мерой, которая принимает значение нуль на любом конечном множестве и единица на всём пространстве ¹.

Используем условие (4) в форме (8) для матрицы r . Выберем $\epsilon > 0$; условие (8) позволяет найти для каждого k конечное объединение шаров — S в X_r , мера которого больше, чем $1 - \epsilon$. Отнормируем эту меру на S на 1, и обозначим через $\bar{\mu}_r$. Используя индукцию по k , построим множество шаров радиуса 2^{-k} так, что пересечение объединений C_k и S имеет $\bar{\mu}_r$ -меру большую, чем $1 - 2^{-k}\epsilon$; $k = 1, 2, \dots$. Это означает, что пересечение всех этих множеств $S \cap (\bigcap_k C_k)$ имеет $\bar{\mu}_r$ -меру, большую, чем $1 - 2\epsilon$, и само является вполне ограниченным (т. е. имеет конечную ϵ -сеть при всех ϵ); в силу полноты X_r это пересечение есть компакт. Но каждая конечно-аддитивная мера, определённая на всюду плотной подалгебре сигма-алгебры борелевских множеств некоторого компакта, — счётно-аддитивна. Поэтому мы нашли компакт S в X_r , имеющий μ -меру, не меньшую чем $1 - 3\epsilon$. В силу произвольности ϵ мы доказали, что мера μ в X_r есть счётно-аддитивная мера с сигма-компактным носителем. Если использовать вместо условий (4) или (8) более сильное условие (5) и его индивидуализацию для матрицы r , то мы получим, используя ту же конструкцию, компакт полной меры в пространстве X_r .

Мы построили метрическую тройку $T_r = (X_r, \rho_r, \mu_r)$, где мера μ_r есть борелевская вероятностная мера с полным носителем в польском пространстве (X_r, ρ_r) , в котором выделено счётное всюду плотное множество $\{x_i\}$, равномерно распределённое по мере μ_r и удовлетворяющее условию (7). Заключительная часть доказательства состоит в проверке того, что матричное распределение D_{T_r} метрической тройки $T_r = (X_r, \rho_r, \mu_r)$ и мера D совпадают, как меры на конусе \mathcal{R} . Сформулируем это утверждение; оно полезно и в более общей ситуации. Лемма завершает доказательство теоремы. \square

Лемма 8. *Предположим, что для матрицы $r \in \mathcal{R}$ существуют пределы (6) и равенства (7), (8) выполнены. Построим метрическую тройку $T_r = (X_r, \rho_r, \mu_r)$, используя уравнения (6) и (8), как в доказательстве теоремы. Тогда матричное распределение D_{T_r} метри-*

¹В определённом смысле мы находимся в ситуации, сходной с той, которая возникает в связи с классической теоремой Колмогорова о продолжении мер и её обобщениями: там мы определяем меру на алгебре цилиндрических множеств и после проверки счётной аддитивности на алгебре продолжаем её на сигма-алгебру до настоящей вероятностной меры. По теореме Колмогорова это всегда возможно в векторном пространстве R^∞ , однако в других пространствах это верно не для всех цилиндрических мер. Здесь меры определены на алгебре, порождённой шарами, но счётная аддитивность имеет место не всегда, и условие (4) гарантирует её. Однако и здесь в некоторых пространствах оно выполнено автоматически.

ческой тройки совпадает с S_∞ -инвариантной мерой, которая порождается матрицей r по формуле (7).

Доказательство. Для доказательства мы должны проверить совпадение конечномерных распределений обеих мер. Проиллюстрируем это на распределении элемента $r_{1,2}(n=2)$; проверка случая произвольного n аналогична. Имеем

$$\int_{X_r} \int_{X_r} \mathbf{1}_B(\rho_r(u, z)) d\mu_r(u) d\mu_r(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_B(r_{i,j}) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{1}_B(r_{i,j}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (N!)^{-1} \sum_{g \in S_N} \mathbf{1}_B(r_{g(1),g(2)}) = \Lambda_r^{(2)}(B).$$

Здесь $B \subset \mathbb{R}_+$; последнее равенство следует из (7); предыдущие равенства используют равномерность последовательности $\{x_i\}$ в пространстве (X_r, μ_r) . Но по условию (7) S_∞ -инвариантная мера на \mathcal{R} , порождённая матрицей r , есть мера D , что и завершает доказательство. \square

Замечание 2. 1. Структура необходимых и достаточных условий на меру в доказанной теореме показывает, что матричные распределения образуют борелевское подмножество в множестве всех вероятностных борелевских мер на конусе \mathcal{R} .

2. Условие (4) может быть заменено другим условием из работы [9] (так называемая «простота» S_∞ -инвариантной меры). Это условие гарантирует тот факт, что мера D есть матричное распределение произвольной измеримой функции двух переменных, а этого, в силу теоремы единственности, достаточно для наших целей.

4.3. Теоретико-метрическое пространство метрических троек

Мы обобщаем понятие метрического пространства (см. § 1) и вводим сходное пространство метрических троек. Вместо обычной точки зрения, согласно которой рассматривается множество всех борелевских мер на данном топологическом или метрическом пространстве, мы, напротив, фиксируем структуру пространства с мерой (пространства Лебега) и рассматриваем на нём все измеримые (полу)метрики. (см. [10], § 6).

Предположим, что (X, μ) есть пространство Лебега с конечной или сигма-конечной мерой μ (например, интервал $[0,1]$ с лебеговой мерой или натуральный ряд с равномерной мерой) и $S_\mu(X)$ — пространство всех

классов $\text{mod } 0$ измеримых функций на (X, μ) ; определим $\mathcal{R}^c \subset S_\mu(X)$ — конус измеримых метрик, т. е. конус классов $\text{mod } 0$ совпадающих симметрических функций двух аргументов $\rho: (X \times X, \mu \times \mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$$

для $(\mu \times \mu \times \mu)$ -почти всех

$$(x, y, z) \in (X \times X \times X).$$

Естественно считать также, что $\mu \times \mu\{(x, y): \rho(x, y) = 0\} = 0$.

Существенно, что ρ есть не индивидуальная функция, но класс $\text{mod } 0$ совпадающих функций, поэтому не очевидно априори, что она определяет структуру (полу)метрического пространства на X в буквальном смысле. Если мера μ дискретна, то конус \mathcal{R}^c есть конус обычных метрик, а если X — натуральный ряд, то мы получаем конус \mathcal{R} матриц расстояний из § 1. Таким образом, конус \mathcal{R}^c есть непрерывное обобщение конуса \mathcal{R} на случай непрерывной меры μ .

Предположим теперь, что мера μ конечна и $\rho \in \mathcal{R}^c$ есть *чистая* функция (см. [9])², а мера D_ρ на пространстве $\mathbf{M}_\infty(\mathbb{R})$ есть матричное распределение измеримой функции ρ (см. определение в предыдущем пункте). Из эргодической теоремы следует, что $D_\rho(r \in \mathcal{R}: r_{i,k} + r_{j,k} \geq r_{i,k}) = 1$ для любых $i, j, k \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $D_\rho(\mathcal{R}) = 1$. Используя данную ранее характеристику матричных распределений, мы получаем следующее утверждение

Лемма 9. *Мера D_ρ сосредоточена на \mathcal{R} (т. е. $D_\rho(\mathcal{R}) = 1$) и является эргодической S_∞ -инвариантной мерой. Следовательно, каждая чистая функция $\rho \in \mathcal{R}^c$ на $(X \times X, \mu \times \mu)$ определяет (полу)метрику $\text{mod } 0$ на пространстве (X, μ) .*

Следствие 7. *Класс измеримых полуметрик на пространстве Лебега с непрерывной мерой совпадает с классом $\text{mod } 0$ совпадающих метрических троек с непрерывной (конечной) мерой.*

Это следствие показывает, что язык матричных распределений, сосредоточенных на конусе \mathcal{R} , даёт инвариантный способ изучения (полу)метрических троек. Оказывается, иногда удобно фиксировать пространство с мерой и варьировать измеримым образом метрику вместо

²Измеримая функция двух аргументов $f(x, y)$, заданная в квадрате с лебеговой мерой, называется чистой, если для почти всех пар (x_1, x_2) (соотв. (y_1, y_2)) функции одной переменной $f(x_1, \cdot)$ и $f(x_2, \cdot)$ (соотв. $f(\cdot, y_1)$ и $f(\cdot, y_2)$) различаются на каком-либо множестве положительной меры. Очевидно, собственная метрика на пространстве с мерой есть чистая функция.

того, чтобы рассматривать разные метрические пространства; общность рассмотрений остаётся той же. Этот приём использован в [10].

§ 5. Общая классификация мер на конусе матриц расстояний, примеры

5.1. Определения

Будем рассматривать произвольные вероятностные борелевские меры на конусе \mathcal{R} или, иначе, произвольные случайные метрики на множестве натуральных чисел. Заметим, что конус \mathcal{R} в слабой топологии метризуем и сепарабелен, т. е. становится польским пространством при фиксации метрики совместимой со слабой топологией.

Обозначения. Обозначим через \mathcal{V} множество всех вероятностных борелевских мер¹ на конусе \mathcal{R} и снабдим это множество слабой топологией. Это симплекс, являющийся обратным пределом симплексов вероятностных мер на конечномерных конусах \mathcal{R}_n . Сходимость в слабой топологии есть сходимость на цилиндрических множествах с открытыми базами. Все подклассы мер также рассматриваются в слабой топологии. Заметим ещё, что множество невырожденных (т. е. положительных на непустых открытых множествах) мер есть всюду плотное G_δ -множество в \mathcal{V} .

Пусть \mathcal{D} подмножество мер из \mathcal{V} , являющихся матричными распределениями; как мы доказали (теорема 4 и следствие 7), оно находится в биективном соответствии с классами изоморфных метрических троек. Конструктивное описание матричных распределений дано в § 4).

Подмножество $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ состоит из мер, которые сосредоточены на множестве \mathcal{M} универсальных матриц расстояний: $\nu \in \mathcal{P}$ означает $\nu(\mathcal{M}) = 1$ см. § 3.

Подмножество $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{V}$ состоит из мер, которые сосредоточены на слабо универсальных матрицах. Оба множества являются выпуклыми (незамкнутыми) подмножествами в симплексе \mathcal{V} всех мер на конусе \mathcal{R} . Можно дать прямую характеристику таких мер аналогичную критерию универсальности из утверждения 1.

Утверждение 2. *Рассмотрим для каждого n разбиение конуса \mathcal{R} на множества $\mathcal{R}^n(q)$, $q \in \mathcal{R}_n$ (см. обозначения перед утверждением 1 в § 3). Мера μ принадлежит множеству \mathcal{P} , т. е. сосредоточена на множестве универсальных матриц, тогда и только тогда, когда для всех n и для почти всякого по этой мере элемента разбиения*

¹В дальнейшем «мера» всегда означает «борелевская вероятностная мера».

$\mathcal{R}^n(q)$ (т. е. для почти всякой конечной матрицы расстояний q) носитель условной меры на этом элементе есть всё множество $\mathcal{R}^n(q)$, иначе говоря, условные меры не вырождаются. Принадлежность меры μ множеству $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{V}$ равносильна тому, что носитель меры μ есть весь конус \mathcal{R} .

Доказательство утверждения следует из определений описываемых множеств и доказательства утверждения 1.

Подмножество $\mathcal{Q} \subset \mathcal{D}$ состоит из мер, которые отвечают матричным распределениям метрических троек $T = (\mathcal{U}, \rho, \mu)$, в которых \mathcal{U} есть пространство Урысона.

Наконец, обозначим через \mathcal{H} множество мер $\mu \in \mathcal{V}$, которые обладают следующим свойством: μ -почти все матрицы расстояний порождают изометричные метрические пространства. Меры $\mu \in \mathcal{H}$ индуцируют случайные всюду плотные последовательности точек данного пространства. С этой точки зрения элементы множества \mathcal{D} индуцируют случайные всюду плотные последовательности специального типа, — а именно, бесконечные независимые выборки точек относительно данной меры в метрическом пространстве, а элементы \mathcal{Q} индуцируют случайную независимую выборку точек в пространстве Урысона с невырожденной мерой.

Имеются очевидные включения:

$$\mathcal{V} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{D} \supset \mathcal{Q} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}; \quad \mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \mathcal{D}.$$

По теореме 4 каждая мера из множества \mathcal{D} определяет класс изоморфных метрических троек и, в частности, меры из \mathcal{Q} определяют класс невырожденных метрических троек с невырожденными мерами на пространстве Урысона, т. е. орбиту группы всех изометрий в пространстве невырожденных мер на пространстве Урысона.

Теорема 6. 1. Подмножество $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ есть всюду плотное G_δ -множество в \mathcal{V} . Таким образом, относительно типичной меры ν на \mathcal{R} ν -почти все матрицы расстояний универсальны, и, следовательно, определяют метрику r на натуральном ряде, пополнение по которой есть пространство Урысона.

2. Подмножество $\mathcal{Q} \subset \mathcal{D}$ есть всюду плотное G_δ -подмножество в \mathcal{D} . Это означает, что типичная метрическая тройка $T = (X, \rho, \mu)$ имеет пространство Урысона в качестве (X, ρ) .

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 1, которая утверждает в частности, что множество универсальных матриц расстояний является G_δ -подмножеством в \mathcal{R} , а также из того общего факта,

что множество всех мер, заданных на польском пространстве, сосредоточенных на фиксированном всюду плотном G_δ -подмножестве (в нашем случае на \mathcal{M}), само является всюду плотным в слабой топологии G_δ -подмножеством пространства всех мер.

Второе утверждение вытекает из того, что пересечение G_δ -подмножества с произвольным подпространством польского пространства есть снова G_δ -подмножество в этом подпространстве в индуцированной топологии. \square

5.2. Примеры мер, сосредоточенных на универсальных матрицах

Дадим теперь конструкцию вероятностных (марковских) мер на конусе \mathcal{R} и, в частности, примеры мер из множества $\mathcal{P} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}$. Это даст новое доказательство существования пространства Урысона. Фактически мы используем те же аргументы, что и в §3, но в вероятностном контексте. Наш метод даёт конкретную иллюстрацию того, как строить случайные метрические пространства.

Пусть γ произвольная непрерывная мера на полупрямой \mathbb{R}_+^1 с полным носителем, например, гауссова мера на полупрямой. Определим по индукции меру ν на конусе \mathcal{R} матриц расстояний с помощью её конечномерных проекций на конусы \mathcal{R}_n , иначе говоря, зададим совместные конечномерные распределения элементов случайных матриц. В качестве распределения элемента $r_{1,2}$ случайной матрицы возьмём меру γ на полупрямой. Тем самым, определена мера на \mathcal{R}_2 , обозначим её через ν_2 . Предположим, что уже определено совместное распределение элементов $\{r_{i,j}\}_{i,j=1}^n$, т. е. мера ν_n на \mathcal{R}_n^0 . По лемме 4 конус \mathcal{R}_{n+1} есть расслоение над конусом \mathcal{R}_n со слоем множество допустимых векторов $A(r)$ для матрицы $r \in \mathcal{R}_n$. Для построения следующего совместного распределения мы используем лишь структуру этого расслоения, точнее, проекцию $\mathcal{R}_n \xleftarrow{\mathcal{R}_{n+1}} \mathcal{R}_{n+1}$, которая позволит определить меру на \mathcal{R}_{n+1} с заданной проекцией.

Поэтому достаточно определить *условные меры* на $A(r)$ для всех $r \in \mathcal{R}_n$, измеримо зависящие от r . С вероятностной точки зрения это означает, что мы определяем переходную вероятность от матрицы расстояний r порядка n к матрице расстояний r^a порядка $n+1$ (см. п. 2.3) или переходную вероятность от n -точечного метрического пространства к $n+1$ -точечному. Напомним геометрическую структуру множества допустимых векторов, т. е. слоя $A(r)$: это сумма Минковского

$$A(r) = M_r + \Delta_n,$$

(см. п. 2.2) или проекция прямой суммы $\pi: M_r \times \Delta_n \rightarrow M_r + \Delta_n = A(r)$. Рассмотрим на $M_r \times \Delta_n$ прямое произведение мер $\gamma_r = m_r \times \gamma$, где m_r есть, например, нормализованная мера Лебега на многограннике M_r или иная мера с полным носителем на M_r , удовлетворяющая условиям, формулируемым ниже.

Пусть $\pi\gamma_r$ есть проекция меры γ_r на $A(r)$. Мы определяем условные меры на $A(r)$ как $\pi\gamma_r$. Тем самым мы имеем

$$\text{Prob}(r^{da} | r) = \pi(m_r \times \gamma)(da).$$

Условия на меру m_r таковы: на каждом шаге конструкции для любых N и $n > N$ проекция меры m_r , $r \in \mathcal{R}_n$, на множество допустимых векторов $A(p_N(r))$ равномерно положительна на всяком открытом множестве из $A(p_N(r))$; это означает, что для всякого открытого множества $B \subset A(p_N(r))$ существует такое $\epsilon > 0$, что для всякого $n > N$ значение проекции меры m_r , $r \in \mathcal{R}_n$ на множестве B больше ϵ . Тем самым, определена мера L_n на \mathcal{R}_{n+1} . По построению меры согласованы по n и, поэтому определяют некоторую меру на конусе \mathcal{R} . Обозначим эту меру через $L = L(\gamma, \{m_r: r \in \mathcal{R}_n, n = 1, 2, \dots\})$.

Более наглядный и комбинаторный способ описания мер таков: к n -точечному метрическому пространству случайно добавляется следующая $n + 1$ -я точка; при этом вектор расстояний между новой и предыдущими точками (т. е. допустимый вектор) имеет равномерно положительную вероятность на непустых открытых подмножествах множества допустимых векторов.

Теорема 7. *Меры L , построенные выше, сосредоточены на множестве универсальных матриц, т. е. лежат в множестве \mathcal{P} , следовательно, пополнение множества натуральных чисел по почти любой матрице относительно таких мер есть пространство Урысона.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условия утверждения 2. Но по теореме о сходимости мартингалов условная мера на почти всех элементах разбиения, т. е. $\mathcal{R}^n(q)$, есть предел условных мер на элементах разбиений $\mathcal{R}^n(q) \cap \mathcal{R}_N$ при $N \rightarrow \infty$. Поэтому то, что носители почти всех условных мер будут полными, есть следствие наложенного выше условия равномерной положительности вероятностей на допустимых векторах. \square

Таким образом, случайное счётное метрическое пространство изометрично всюду плотно подмножеству пространства Урысона или, иначе, пополнение случайного счётного метрического простран-

ства есть с вероятностью единица пространство Урысона. В обеих формулировках «случайность» понимается относительно любой меры из множества \mathcal{P} , т. е. из множества, которое по теореме 6 является всюду плотным G_δ -подмножеством в пространстве всех мер на конусе \mathcal{R} .

Более сложная проблема — построить меру на конусе \mathcal{R} из множества \mathcal{Q} , т. е. матричное распределение для некоторой невырожденной меры на пространстве Урысона \mathcal{U} . Свойства мер на пространстве Урысона весьма интригующи. Однако, поскольку у нас нет удобной модели этого пространства, представляется полезным использовать непрямой путь построения таких мер: построить меру на конусе \mathcal{R} , лежащую в \mathcal{Q} , т. е. построить матричное распределение; оно определяет изометрический класс мер на \mathcal{U} . В свою очередь для такого описания можно взять меру из множества \mathcal{P} и построить по ней S_∞ -инвариантную эргодическую меру. Облегчающее обстоятельство состоит в том, что дополнительное условие (4) из теоремы 5 на меру на конусе, гарантирующее, что мера на \mathcal{R} есть матричное распределение, уже не нужно:

Утверждение 3. *Всякая S_∞ -инвариантная эргодическая мера из множества \mathcal{P} есть матричное распределение (т. е. лежит в \mathcal{Q}). Это означает, что S_∞ -оболочка (= инвариантная эргодическая мера, порождённая данной мерой) меры из пространства \mathcal{P} , которое мы построили выше, определяет изометрический класс мер на пространстве Урысона.*

Доказательство этого утверждения опирается на критерий так называемой простоты меры из работы [9], и мы рассмотрим вопрос более подробно в другом месте.

Анализ мер на матрицах расстояний полезен в задачах интегрирования по метрическим пространствам в духе статистической физики. Построенные здесь меры интересны также с точки зрения теории случайных матриц. В частности, представляется интересным изучать спектры случайных (симметричных) матриц расстояний. По-видимому, до сих пор такие задачи не изучались. Уже простейшие примеры, скажем, вычисление совместных распределений расстояний между независимыми точками по равномерной мере на компактных однородных пространствах и спектров соответствующих случайных матриц, представляют большие трудности.

В заключение, возвращаясь к теореме 7, напомним аналогию рассматриваемых здесь вопросов с одной старой теоремой Эрдёша—Реньи [5] о случайных графах. Она утверждает, что с вероятностью единица случайный граф является универсальным графом, см. определения и детали в [7, 6]. Эта несложная теорема является простейшим случаем в развиваемом здесь контексте, поскольку бесконечный граф порождает

метрическое пространство, и в данном случае расстояния между различными вершинами графа принимают лишь два значения, 1 и 2. Тем самым, случайный граф в смысле [5] порождает меру на матрицах расстояний, относительно которой все элементы $r_{i,j}$, $i > j$ распределены на $\{1, 2\}$ с вероятностями $(1/2, 1/2)$ (или более общим образом). Такие матрицы лежат в конусе \mathcal{R} (см. пример в § 4). С другой стороны, очевидно, что такой случайный граф с вероятностью единица универсален в классе конечных графов, и его матрицы расстояний универсальны в нашем смысле, если рассматривать понятие универсальности только для матриц расстояний со значениями $(1, 2)$.

Литература

1. J. Clemens, S. Gao, A. Kechris. Polish metric spaces: their classification and isometry groups. *Bull. Symb. Logic*, 7(30), 361–375, 2001.
2. Misha Gromov. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Birkhuaser, 1998.
3. P. S. Urysohn. Sur un espace metrique universel. *Bull. Sci. Math.*, 51, 1–38, 1927.
4. А. Вершик. Универсальное пространство Урысона, тройки Громова, и случайные метрики на натуральном ряде. *Успехи мат. наук.*, 53, 5, 57–64, 1998.
5. P. Erdős, A. Rényi. Asymmetric graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 14, 295–315, 1963.
6. P. Cameron. The random graphs. *The Mathematics of Paul Erdos*. (J. Nešetřil, R. L. Graham, eds) 331–351 Springer, 1996.
7. R. Rado. Universal graphs and universal functions. *Acta Arith.*, 9, 331–340, 1964.
8. А. Вершик. Классификация измеримых функций нескольких переменных и инвариантно распределенные случайные матрицы. *Функц. анал. и его прил.*, 2, 36, 1–16, 2002.
9. A. Vershik. Classification of the measurable functions of several arguments and invariant distributions of random matrices. *Functional anal. and its appl.*, 2, 36, 1–16, 2002.
10. А. Вершик. Динамическая теория роста в группах: энтропия, граница, примеры. *Успехи мат. наук*, 55,4(434),60–128, 2000.
11. M. Deza, M. Laurent. *Geometry of cuts and metrics*. Springer-Verlag, Berlin 1997.

12. D. Avis. On the extreme rays of the metric cone. *Canad. J. Math.* 8,1, 126–144 1980.
13. M. Katetov. On universal metric spaces. in: Proc. Sixth Prague Topological Symposium 1986, Frolik (ed.) Helderman Verlag Berlin, 1988, p. 323–330.
14. С. А. Богатый. Компактная однородность универсального метрического пространства Урысона. *Успехи мат. наук.* v. 55, № 2, 2000, p. 131–132.
15. V. V. Uspenskij. Compactification of topological groups. Preprint. October 2001.
16. V. Pestov. Ramsey-Molman phenomenon, Urysohn metric spaces, and extremely amenable groups. *Israel J. Math.* (to appear), e-print <http://xxx.lanl.gov/abs/math.FA/9810168>.
17. А. Вершик. Случайное метрическое пространство есть пространство Урысона. *Докл. Российской Акад. Наук* В печати.
18. J. Lindensrauss, G. Olsen, Y. Sterfeld. The Poulsen simplex. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 28(1) (1978), 91–114
19. W. Lusku. The Gurarij spaces are unique. *Arch der Mathematik* 27(6) (1976), 627–635.

С.-Петербургское отделение Математического Института Российской Академии наук, Фонтанка 27, 119011 Ст. Петербург, Россия. E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

P. Grozman, D. Leites, I. Shchepochkina

The analogs of the Riemann tensor for exceptional structures on supermanifolds

Abstract

H. Hertz called any manifold M with a given nonintegrable distribution *nonholonomic*. Vershik and Gershkovich proved that the space of germs of any nonholonomic distribution on M possessing an open and dense orbit of the diffeomorphism group is either (1) a distribution of hyperplanes or (2) an Engel distribution.

No analog of this statement for supermanifolds is formulated yet, we only have some examples: our list (an analog of É. Cartan's classification) of simple Lie superalgebras of vector fields with polynomial coefficients and a particular (Weisfeiler) grading contains 16 series similar to contact ones and 11 exceptional algebras preserving nonholonomic structures.

Here we compute the cohomology corresponding to the analog of the Riemann tensor for the *supermanifolds* associated with the 15 exceptional simple vectorial Lie superalgebras, 11 of which are nonholonomic. The cohomology for analogs of the Riemann tensor for the manifolds with an exceptional Engel manifolds are computed in [13]; for the 16 series of contact-like distributions on supermanifolds see [11].

Introduction

The main result

In this paper the ground field is \mathbb{C} . Here, for each of the 15 exceptional simple infinite dimensional vectorial Lie superalgebras $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq -d} \mathfrak{g}_i$ in their Weisfeiler grading we have computed $H^i(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g})$ for $i = 0, 1, 2$, where $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{i < 0} \mathfrak{g}_i$. The cohomology are especially interesting for $i = 2$. If $d = 1$, then $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g})$ can be interpreted as the space of values of the curvature tensor for the G -structure, where G is a Lie supergroup whose Lie superalgebra is

\mathfrak{g}_0 ; if $d > 1$ we interpret $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g})$ as the space of values of the recently introduced *nonholonomic curvature* for the nonintegrable distribution.

To make the text of interest to a wider audience, we would like to review the list of simple vectorial Lie superalgebras and some not so known background, cf. [4], but had to delete it from this text for the lack of space; for the same reason we skipped the results of computations of $H^i(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g})$ for $i = 0, 1$ (these results will be preprinted; $H^1(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g})$, though not so interesting, perhaps, as $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g})$, also has an interpretation of interest: its elements represent derivations of \mathfrak{g}_- into \mathfrak{g} , cf. [2].)

The results demonstrate one more range of applicability of the SuperLie package designed for various computations with Lie superalgebras, not only for computation of (co)homology; for other results and comparison with hand-made calculations, see, e.g., [10]. SuperLie is *Mathematica*-based. This facilitates its usage but imposes in-build *Mathematica* restrictions. We hope to draw attention to possibilities SuperLie (now installed at MPIM, Bonn; LPT, ENS; Department of Mathematics, University of Stockholm) reveals to its user.

In particular, our results (as well as similar results of Poletaeva [22] — [24] performed by bare hands) vividly demonstrate that in the absence of complete reducibility computer-aided study is indispensable.

§ 0.1. A result of Vershik and Gershkovich. Nonholonomic curvature

Let W_n^k be the space of germs of k -dimensional distributions at $0 \in \mathbb{C}^n$. (In [32] the real case is considered but the result is the same.) The group Diff_n of germs of diffeomorphisms of \mathbb{C}^n acts on W_n^k and it is interesting to study the generic orbits of this action. Vershik and Gershkovich showed that *if $1 < k < n - 1$ and $(k, n) \neq (2, 4)$, then any orbit of Diff_n -action on W_n^k has an infinite codimension in the orbit space.*¹

The exceptional case $k = 1$ is trivial. Two other exceptions (1) $k = n - 1$ (for n odd this is the contact structure) and (2) $(k, n) = (2, 4)$ (the Engel distribution) give examples of germs of nonholonomic distribution with an open and dense orbit of the diffeomorphism group.

These cases are considered in [13], where the notion of *nonholonomic curvature* is introduced. It turns out that the nonholonomic curvature vanishes if $k = n - 1$ (this is a reformulation of Darboux theorem on a canonical form of the contact form for n odd) whereas for $(k, n) = (2, 4)$ — the Engel distribution — $\dim H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g}) = 2$.

¹A more delicate theorem concerning these orbits was stated in [33] and proved in [21].

Observe that the (infinite dimensional) algebra of symmetries of the exceptional (case (1) or (2)) nonholonomic distribution is simple only if the distribution is of codimension 1 and n is odd. Contemporary mathematicians are often more than necessary fixed on simple Lie algebras and this is, perhaps, an explanation why the Lie algebra preserving an Engel structure (cf. [13]) was neglected for a long time. The differential geometers, though mildly interested in the cases when the total algebra of symmetries is simple, are more interested in the cases when it is of finite dimension (simple or not), and therefore their interests are orthogonal to ours as is clear from motivations and results reviewed, e.g., in [36].

We do not know any super version of the above result of Vershik and Gershkovich [32] but we classified simple Lie superalgebras of vector fields ([16], [17], [18], cf. [12]) and, we see that, unlike non-super case, there are 16 series and 11 exceptional simple vectorial Lie superalgebras that preserve nonholonomic distributions. The series will be considered elsewhere.

§ 0.2. A nonholonomic analog of the Riemann tensor

H. Hertz called any manifold with a given nonintegrable distribution a *nonholonomic* one. Until 1989, there was no general definition of the analog of the Riemann tensor for nonholonomic manifolds, cf. lamentations in [32] and [34], though all the ingredients had been discovered ([30], [36]). Vershik even conjectured [31] that such a general definition does not exist, though in particular cases of small dimension the nonholonomic curvature tensor was computed. In particular, it was computed for supergravity.

Recall that $SUGRA(N)$ is a supergravity theory (or equations thereof) on an N -extended Minkowski superspace. Whatever $SUGRA(N)$ and Minkowski superspace are², they are superizations of the gravity theory (in other words, Einstein-Hilbert's equations) on the Minkowski space. So the problem whose existence Wess honestly acknowledged in his lectures [34] "We do not know how to write the super Riemann tensor" on $N > 2$ extended Minkowski superspaces sounds strange: take any textbook on differential geometry (say, [29]) and superize definition of the Riemann tensor or, more generally, structure functions — analogs of the Riemannian tensor — for any G -structure according to Sign Rule. This was precisely what A. Schwarz with his colleagues and students suggested to do [25], see

²There are several versions of the definition and, unless $N = 1$, there is no consensus among physicists which of the definitions is "it". Mathematicians not restrained by (mainly unjustified, at least for the mathematician) physical arguments suggest still other — "exotic" — versions of Minkowski superspaces, and this list of *ad hoc* superizations of Minkowski space will, clearly, be continued, see e.g., distinct models in [20], [9].

also [1], and what was performed in a series of Poletaeva's papers [22]–[24] and generalized in for various cases but along the same line of thought [15].

The results of such an approach, however, seem to coincide with the equations physicists write from their mysterious physical considerations only for $N = 1$ (but actually do not even in this case, cf. [25], [1] with [7]).

In [7], [8] it was indicated that the roots of the problem Wess addressed lie not in the prefix “super” which only causes some signs in the classical definitions of the structure functions. The point is that every of numerous versions of Minkowski superspace is *nonholonomic*, unlike Minkowski space, and since there was no general recipe for computing nonholonomic analog of the curvature tensor, it was a problem to write SUGRA(N) equations or even determine what is N -extended Minkowski superspace (which of the versions satisfies some natural requirements).

Here we will reproduce the definition ([13], [14], [7]) of the Riemann tensor R in terms of Lie algebra cohomology rather than in terms of Spencer cohomology (cf. [5], [29]) and give its generalization to nonholonomic case.

Namely, fix a point on the nonholonomic (super)manifold with a nonintegrable distribution D . Let D be given by a system of Pfaff equations and let \mathfrak{G} be the filtered Lie superalgebra preserving this system of equations, \mathfrak{m} the associated graded one. Set $\mathfrak{m}_- = \bigoplus_{i < 0} \mathfrak{m}_i$; by default we let $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m}_0$, the Lie superalgebra of grading preserving derivations of $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{m}_-$. Clearly, \mathfrak{m}_- is nilpotent, see [33], [36]. Very often an additional structure on D is given; if this is the case, we take for \mathfrak{g}_0 a subalgebra of \mathfrak{m}_0 that preserves this additional structure. Let \mathfrak{g} be the defined below generalized Cartan prolong of the pair $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)$. Then, by the same arguments as in [29], **the possible values of the nonholonomic Riemann tensor R at the point span the superspace $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g})$.**

§ 0.3. The projective connections and their nonholonomic analogs

The projective connection on the n -dimensional manifold is the one whose group of automorphisms is locally isomorphic to $\mathfrak{sl}(n+1) = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{gl}(n) \oplus (\mathfrak{g}_-)^*$, cf. [5]. The corresponding structure functions are from $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{sl}(n+1))$.

Similarly, for any \mathbb{Z} -graded Lie superalgebra \mathfrak{g} of finite depth (i. e. with finit number of components of negative degree), let $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ be a subalgebra with the same nonpositive part. Then the elements of $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{h})$ are analogs of the projective structure functions, especially resembling them if $\dim \mathfrak{h} < \infty$. Such cohomology is considered in [11].

§ 1. Description of simple vectorial Lie superalgebras

For the lack of space we deleted all the preliminaries. The reader willing to see them is referred to [28], [27] and [18]. For a detailed background see a preprinted version at www.mpim-bonn.mpg.de. Observe only that Π is the shift of parity functor on superspaces, Vol is the space of densities with the generator vol in a fixed coordinate system.

§ 1.1. The exceptional vectorial Lie subsuperalgebras

Here are the terms \mathfrak{g}_i for $i \leq 0$ of 14 of the 15 exceptional algebras, the last column gives $\dim \mathfrak{g}_-$. Here $\Lambda(n)$ is the Grassmann superalgebra with n generators; id is the identity representation, $\Lambda(\text{id})$ its exterior algebra; Vol_0 is the space of densities with integral 0; and $T_0^0(\vec{0}) = Vol_0/\text{const}$ is well-defined only as module over \mathfrak{svect} :

\mathfrak{g}	\mathfrak{g}_{-2}	\mathfrak{g}_{-1}	\mathfrak{g}_0	$\dim \mathfrak{g}_-$
$\mathfrak{vle}(4 3)$	—	$\Pi(\Lambda(3)/\mathbb{C}1)$	$\mathfrak{c}(\mathfrak{vect}(0 3))$	4 3
$\mathfrak{vle}(4 3; 1)$	$\mathbb{C} \cdot 1$	$\text{id} \otimes \Lambda(2)$	$\mathfrak{c}(\mathfrak{sl}(2) \otimes \Lambda(2) \oplus T^{1/2}(\mathfrak{vect}(0 2)))$	5 4
$\mathfrak{vle}(4 3; K)$	$\text{id}_{\mathfrak{sl}(3)}$	$\text{id}_{\mathfrak{sl}(3)} \otimes \text{id}_{\mathfrak{sl}(2)} \otimes 1$	$\mathfrak{sl}(3) \oplus \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{C}z$	3 6
$\mathfrak{vas}(4 4)$	—	spin	as	4 4
\mathfrak{fas}	$\mathbb{C} \cdot 1$	$\Pi(\text{id})$	co(6)	1 6
$\mathfrak{fas}(\cdot; 1)$	$\Lambda(1)$	$\text{id}_{\mathfrak{sl}(2)} \otimes \text{id}_{\mathfrak{sl}(2)} \otimes \Lambda(1)$	$(\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{gl}(2) \otimes \Lambda(1)) \oplus \mathfrak{vect}(0 1)$	5 5
$\mathfrak{fas}(\cdot; 3\xi)$	—	$\Lambda(3)$	$\Lambda(3) \oplus \mathfrak{sl}(1 3)$	4 4
$\mathfrak{fas}(\cdot; 3\eta)$	—	$Vol_0(0 3)$	$\mathfrak{c}(\mathfrak{vect}(0 3))$	4 3
$\mathfrak{mb}(4 5)$	$\Pi(\mathbb{C} \cdot 1)$	$Vol(0 3)$	$\mathfrak{c}(\mathfrak{vect}(0 3))$	4 5
$\mathfrak{mb}(4 5; 1)$	$\Lambda(2)/\mathbb{C} \cdot 1$	$\text{id}_{\mathfrak{sl}(2)} \otimes \Lambda(2)$	$\mathfrak{c}(\mathfrak{sl}(2) \otimes \Lambda(2) \oplus T^{1/2}(\mathfrak{vect}(0 2)))$	5 6
$\mathfrak{mb}(4 5; K)$	$\text{id}_{\mathfrak{sl}(3)}$	$\Pi(\text{id}_{\mathfrak{sl}(3)} \otimes \text{id}_{\mathfrak{sl}(2)} \otimes \mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(3) \oplus \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{C}z$	3 8
$\mathfrak{ksle}(9 6)$	$\mathbb{C} \cdot 1$	$\Pi(T_0^0(\vec{0}))$	$\mathfrak{svect}(0 4)_{3,4}$	9 6
$\mathfrak{ksle}(9 6; 2)$	$\text{id}_{\mathfrak{sl}(3 1)}$	$\text{id}_{\mathfrak{sl}(2)} \otimes \Lambda(3)$	$(\mathfrak{sl}(2) \otimes \Lambda(3)) \oplus \mathfrak{sl}(1 3)$	11 9
$\mathfrak{ksle}(9 6; K)$	id	$\Pi(\Lambda^2(\text{id}))$	$\mathfrak{sl}(5)$	5 10

Observe that none of the simple W -graded vectorial Lie superalgebras is of depth > 3 and only two algebras are of depth 3: one of the above, $\mathfrak{mb}(4|5; K)$, for which we have $\mathfrak{mb}(4|5; K)_{-3} \cong \Pi(\text{id}_{\mathfrak{sl}(2)})$, and another one, $\mathfrak{ksle}(9|6; CK) = \mathfrak{ct}(9|11)$.

This $\mathfrak{ct}(9|11)$ is the 15-th exceptional simple vectorial Lie superalgebra; its non-positive terms are as follows (we assume that the $\mathfrak{sl}(2)$ - and $\mathfrak{sl}(3)$ -

modules are purely even):

$$\mathfrak{c}\mathfrak{k}((9|11)_0) \simeq (\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(3) \otimes \Lambda(1)) \oplus \mathfrak{vect}(0|1);$$

$$\mathfrak{c}\mathfrak{k}((9|11)_{-1}) \simeq \text{id}_{\mathfrak{sl}(2)} \otimes (\text{id}_{\mathfrak{sl}(3)} \otimes \Lambda(1));$$

$$\mathfrak{c}\mathfrak{k}((9|11)_{-2}) \simeq \text{id}_{\mathfrak{sl}(3)}^* \otimes \Lambda(1);$$

$$\mathfrak{c}\mathfrak{k}((9|11)_{-3}) \simeq \Pi(\text{id}_{\mathfrak{sl}(2)} \otimes \mathbb{C}).$$

§ 1.2. A description of \mathfrak{g} as $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ and $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$

In [3] the exceptional algebras are described as $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$. For several series such description is of little value because each homogeneous component $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ and $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ has a complicated structure. For the exceptions (and for twisted polyvector fields) the situation is totally different! Apart from being beautiful, such description (from [3]) is useful for the construction of simple Volichenko algebras, cf. [19].

Recall in this relation a theorem [6] that completely describes bilinear differential operations on tensor fields and invariant under all changes of coordinates. It turned out that almost all of the first order operations (i. e. operations depending only on 1-jets of their arguments) determine a Lie superalgebra on its domain. Some of these superalgebras are simple or close to simple. In the constructions below we use some of these invariant operators.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{ksle}(5|10)$: $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{svect}(5|0) \simeq d\Omega^4$, $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \Pi(d\Omega^1)$ with the natural $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -action on $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ (the Lie derivative) and the bracketing of odd elements being twice their product. (We identify:

$$\partial_i = \text{sign}(ijklm) dx_j dx_k dx_l dx_m \quad \text{for any permutation } (ijklm) \text{ of } (12345).)$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{vas}(4|4)$: $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{vect}(4|0)$, and $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \Omega^1 \otimes \text{Vol}^{-1/2}$ with the natural $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -action on $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ and the bracketing of odd elements being

$$[\omega_1 \otimes \text{vol}^{-1/2}, \omega_2 \otimes \text{vol}^{-1/2}] = (d\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\omega_2) \otimes \text{vol}^{-1},$$

where we identify

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \otimes \text{vol}^{-1} = \text{sign}(ijkl) \partial_l \text{ for any permutation } (ijkl) \text{ of } (1234).$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{vle}(3|6)$: $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{vect}(3|0) \oplus \mathfrak{sl}(2)_{\geq 0}^{(1)}$, where $\mathfrak{g}_{\geq 0}^{(1)} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$, and $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \left(\Omega^1 \otimes \text{Vol}^{-1/2} \right) \otimes \text{id}_{\mathfrak{sl}(2)_{\geq 0}^{(1)}}$ with the natural $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -action on $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$.

Recall that $\text{id}_{\mathfrak{sl}(2)}$ is the irreducible $\mathfrak{sl}(2)$ -module L^1 with highest weight 1; its tensor square splits into $L^2 \simeq \mathfrak{sl}(2)$ and the trivial module L^0 ; accordingly, denote by $v_1 \wedge v_2$ and $v_1 \bullet v_2$ the projections of $v_1 \otimes v_2 \in L^1 \otimes L^1$ onto the skew-symmetric and symmetric components, respectively. For $f_1, f_2 \in \Omega^0$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1$ and $v_1, v_2 \in L^1$ we set

$$[(\omega_1 \otimes v_1)v\text{ol}^{-1/2}, (\omega_2 \otimes v_2)v\text{ol}^{-1/2}] = (\omega_1 \wedge \omega_2) \otimes (v_1 \wedge v_2) + d\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\omega_2 \otimes (v_1 \bullet v_2)) v\text{ol}^{-1},$$

where we identify Ω^0 with $\Omega^3 \otimes_{\Omega^0} \text{Vol}^{-1}$ and $\Omega^2 \otimes_{\Omega^0} \text{Vol}^{-1}$ with $\mathbf{vect}(3|0)$ by setting

$$dx_i \wedge dx_j \otimes v\text{ol}^{-1} = \text{sign}(ijk) \frac{\partial}{\partial x_k} \text{ for any permutation } (ijk) \text{ of } (123).$$

$\mathfrak{g} = \mathbf{mb}(3|8) : \mathfrak{g}_0 = \mathbf{vect}(3|0) \oplus \mathfrak{sl}(2)_{\geq 0}^{(1)}$, and $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$, where

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left(\Pi \text{Vol}^{-1/2} \right) \otimes \text{id}_{\mathfrak{sl}(2)_{\geq 0}^{(1)}} \quad \text{and} \quad \mathfrak{g}_1 = \left(\Omega^1 \otimes \text{Vol}^{-1/2} \right) \otimes \text{id}_{\mathfrak{sl}(2)_{\geq 0}^{(1)}};$$

clearly, one can interchange $\mathfrak{g}_{\pm 1}$.

Multiplication is similar to that of $\mathfrak{g} = \mathbf{vle}(3|6)$. For $f_1, f_2 \in \Omega^0$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1$ and $v_1, v_2 \in L^1$ we set

$$[(\omega_1 \otimes v_1)v\text{ol}^{-1/2}, (\omega_2 \otimes v_2)v\text{ol}^{-1/2}] = 0, \\ [(f_1 \otimes v_1)v\text{ol}^{-1/2}, (f_2 \otimes v_2)v\text{ol}^{-1/2}] = (df_1 \wedge df_2) \otimes (v_1 \wedge v_2)v\text{ol}^{-1},$$

$$[(f_1 \otimes v_1)v\text{ol}^{-1/2}, (\omega_1 \otimes v_2)v\text{ol}^{-1/2}] = (f_1 \omega_1 \otimes (v_1 \wedge v_2) + (df_1 \omega_1 + f_1 d\omega_1) \otimes (v_1 \bullet v_2)) v\text{ol}^{-1}.$$

$\mathfrak{g} = \mathbf{kas} : \mathfrak{g}_0 = \mathbf{vect}(1|0) \oplus \mathfrak{sl}(4)_{\geq 0}^{(1)}$, and $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$, where $\mathfrak{g}_{-1} = \Pi \left(\Lambda^2(\text{id}_{\mathfrak{sl}(2)_{\geq 0}^{(1)}}) \right)$ and $\mathfrak{g}_1 = \Pi \left(S^2(\text{id}_{\mathfrak{sl}(2)_{\geq 0}^{(1)}}) \right)$; clearly, one can interchange $\mathfrak{g}_{\pm 1}$.

§ 2. Main result

The above description of the exceptional algebras is nice to visualize them, but in calculations we have used sometimes the description of the

elements from [28], which we do not reproduce to save space.

Theorem . *The \mathfrak{g}_0 -modules $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g})$ are given by the lists of modules over the semisimple part of $(\mathfrak{g}_0)_0$ given in §3.*

Comments. 1) **important:** observe that if the \mathfrak{g}_0 -module from $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g})$ is indecomposable, then, in equations like Einstein equations or Wess-Zumino constraints, there is no need to vanish all its irreducible components: it suffices to vanish only the modules that generate all.

2) Below, the highest weights are given with respect to the standard basis of Cartan subalgebra of the maximal semisimple part of $(\mathfrak{g}_0)_0$, or, if this part is $\mathfrak{sl}(n)$, with respect to the matrix units E_{ii} of the $\mathfrak{gl}(n)$. The degree of the cocycle is given relative to the grading of \mathfrak{g} . The weight of vector A is denoted by $\omega(A)$. Below, “mult” denotes the multiplicity of the corresponding module in the space of closed/exact forms. If it is not equal to $r/0$, the respective cohomologies are not pure (are defined up to a coboundary) and it may well happen that our choice of the representative may be beautified. The expression $d[v]^2$ means $(dv)^2$. Few more notations appear in respective places.

3) For \mathfrak{g} of depth d the degrees of cohomology (interpreted as orders k of the structure functions responsible for obstructions to flattening the structure under investigation up to k th infinitesimal neighborhood, cf. [29]) may range from $2 - d$, which we will indicate for $d > 1$. Recall that the structure functions of order k are defined provided structure functions of lesser orders vanish. It happens sometimes (the case of Riemannian metric) that in these lesser orders there are no cohomology (torsion-free property of Levi-Civita connection). Otherwise that vanishing conditions on low-order structure functions are analogs of Wess-Zumino constraints in supergravity, cf. [35].

4) Due to a theorem formulated only for $d = 1$ (by Serre for Lie algebras and by Serganova for superalgebras, cf. [15]), the order of nonzero structure functions from $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g})$ is always equal to 1 under certain conditions (*involutivity*). As we will see, the considered Lie superalgebras of depth 1 are all involutive. The yet nonexistent analog of Serre’s theorem for $d > 1$ is more complicated: cohomology may be non-vanishing in several degrees. If the lowest degrees are absent, we indicate this by writing “torsion-free” by analogy with the Riemannian manifolds.

§ 3. The \mathfrak{g}_0 -modules $H^2(\mathfrak{g}_-; \mathfrak{g})$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{vle}(4|3)$$

Cohomology: a single irreducible \mathfrak{g}_0 -module in $\text{deg} = 1$, $\text{dim} = (24|24)$.

Set: $\omega(u_i) = (1, 1, 1) - \varepsilon_i$, $\omega(y) = (0, 0, 0)$, $\omega(\xi_i) = \varepsilon_i$ and $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, $\delta_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. The $\mathfrak{gl}(3)$ -highest vectors are:

$\mathfrak{gl}(3)$ -highest vectors	$\mathfrak{gl}(3)$ -weight	dim	mult
$\partial_1 d[\partial_2] \wedge d[\partial_3]$	$(2, 0, 0)$	$(6 0)$	$3/2$
$\partial_0 d[\partial_0] \wedge d[\delta_1]$	$(1, 0, 0)$	$(0 3)$	$5/4$
$\partial_1 d[\partial_3] \wedge d[\delta_1]$	$(2, 0, -1)$	$(0 15)$	$2/1$
$\partial_1 d[\partial_3] \wedge d[\partial_0]$	$(1, 0, -1)$	$(8 0)$	$3/2$
$\partial_1 d[\delta_1] \wedge d[\delta_1]$	$(2, -1, -1)$	$(10 0)$	$1/0$
$\partial_1 d[\partial_0] \wedge d[\delta_1]$	$(1, -1, -1)$	$(0 6)$	$1/0$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4|3; 1)$

$2 - d = 0$.

Cohomology in $\text{deg} = 1$, torsion-free, $\text{dim} = (20|20)$:

The $(\mathfrak{g}_0)_0$ -highest weight vectors (with respect to $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{gl}(2)$) are as follows: (the first coordinate of the weight is given with respect to a copy of $\mathfrak{sl}(2)$ realized as $\mathfrak{o}(3)$, with half-integer weights; the last two coordinates are with respect to a copy of $\mathfrak{gl}(2)$). In this realization $\omega(u_1) = (1, 1, 1)$, $\omega(u_2) = (1, 0, 1)$, $\omega(u_3) = (1, 1, 0)$, $\omega(y) = (-1, 0, 0)$, $\omega(\xi_1) = (0, 0, 0)$, $\omega(\xi_2) = (0, 1, 0)$, $\omega(\xi_3) = (0, 0, 1)$. Denote the elements of \mathfrak{g}_- as follows: $g_1 = \partial_2$; $g_2 = \partial_3$; $g_3 = \delta_2$; $g_4 = \delta_3$; $g_5 = -u_2\partial_1 + \xi_1\delta_2$; $g_6 = -u_3\partial_1 + \xi_1\delta_3$; $g_7 = -y\delta_3 - \xi_1\partial_2 + \xi_2\partial_1$; $g_8 = y\delta_2 - \xi_1\partial_3 + \xi_3\partial_1$; $g_9 = \partial_1$. We have

N	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{gl}(2)$ -highest vectors	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{gl}(2)$ -weight	dim	mult
[1]	$2 \partial_2 dg_1 \wedge dg_5 + \partial_2 dg_2 \wedge dg_6 + \partial_3 dg_2 \wedge dg_5$	$(0, 1, 0)$	$(2 0)$	$5/4$
[2]	$\partial_2 dg_2 \wedge dg_5 -$	$(0, 2, -1)$	$(4 0)$	$2/1$
[3]	$-\delta_3 dg_3 \wedge dg_8 + (y\delta_3 - \xi_1\partial_2 + \xi_2\partial_1) dg_8 \wedge dg_8$	$(1, 2, -1)$	$(0 8)$	$3/2$
[4]	$\partial_2 dg_5 \wedge dg_6$	$(0, 1, 0)$	$(2 0)$	$1/0$
[5]	$2\partial_2 dg_5 \wedge dg_7 + \partial_2 dg_6 \wedge dg_8 + \partial_3 dg_5 \wedge dg_8$	$(1, 1, 0)$	$(0 4)$	$2/1$
[6]	$\partial_2 dg_5 \wedge dg_8$	$(1, 2, -1)$	$(0 8)$	$1/0$
[7]	$-\delta_3 dg_5 \wedge dg_8 - \partial_2 dg_8 \wedge dg_8$	$(2, 2, -1)$	$(12 0)$	$1/0$

\mathfrak{g}_0 -modules:

$[A] = [2] + [3] + [6] + [7]$ of $\text{dim} = (16|16)$ and $[B] = [A] + [1] + [4] + [5]$ of $\text{dim} = (20|20)$; the modules $[A]$ and $[B]/[A]$ are irreducible.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4|3; K)$

$2 - d = 0$.

The \mathfrak{g}_0 -highest weight vectors are as follows: $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{gl}(3)$; the first coordinate of the weight is given with respect to $\mathfrak{sl}(2)$ realized as $x_- = \partial_y$, $x_+ = y^2 \partial_y + y \sum_i \xi_i \delta_i + \xi_1 \xi_2 \partial_3 - \xi_1 \xi_3 \partial_2 + \xi_2 \xi_3 \partial_1$; $\mathfrak{gl}(3)$ is realized as $x_j^i = -u_j \partial_i + \xi_i \delta_j$ ($i \neq j$) and $x_i^i = -u_i \partial_i + \xi_i \delta_i + \sum_k u_i \partial_k$. In this realization $\omega(u_1) = (2, 0, 1, 1)$, $\omega(u_2) = (2, 1, 0, 1)$, $\omega(u_3) = (2, 1, 1, 0)$, $\omega(y) = (-2, 0, 0, 0)$, $\omega(\xi_1) = (0, -1, 0, 0)$, $\omega(\xi_2) = (0, 0, -1, 0)$, $\omega(\xi_3) = (0, 0, 0, -1)$.

Cohomology: a single irreducible \mathfrak{g}_0 -module in $\text{deg} = 0$, $\text{dim} = (30|0)$:

$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{gl}(3)$ -highest vectors	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{gl}(3)$ -weight	dim	mult
$\partial_1 d[\delta_1]^2$	$(2, 2, -1, -1)$	$(30 0)$	1/0

$\mathfrak{g} = \mathfrak{vas}(4|4)$

The weights are given relative to $\mathfrak{gl}(4) \subset \mathfrak{g}_0$. In this realization, the weight of u_i is $\varepsilon_i - \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$ and the weight of ξ_i is $-\varepsilon_i$; we set $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, $\delta_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ for $1 \leq i \leq 4$.

Cohomology: in $\text{deg} = 1$, $\text{dim} = (40|40)$:

N	$\mathfrak{gl}(4)$ -highest vectors	weight	dim	mult
[1]	$\delta_1 d[\partial_2] \wedge d[\partial_3] - \delta_2 d[\partial_1] \wedge d[\partial_3] + \delta_3 d[\partial_1] \wedge d[\partial_2]$	$(0, 0, 0, -1)$	$(0 4)$	4/3
[2]	$\partial_4 d[\partial_1] \wedge d[\partial_2]$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	$(20 0)$	3/2
[3]	$\partial_4 d[\delta_4] \wedge d[\delta_4]$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$	$(20 0)$	1/0
[4]	$\delta_1 d[\delta_4] \wedge d[\delta_4]$	$(1, 0, 0, -2)$	$(0 36)$	2/1

The module is reducible but indecomposable. Vector [1] is the highest weight vector in the quotient module.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{kas}$

$2 - d = 0$. For brevity, instead of K_f we write simply f and df^2 means $(df)^2$.

Cohomology: a single irreducible module in $\text{deg} = 1$, hence torsion free. The $\mathfrak{o}(6)$ -weights are:

$\mathfrak{o}(6)$ -highest vectors	$\mathfrak{o}(6)$ -weight	dim	mult
$\xi_1 \xi_2 d[\xi_3] \wedge d[\eta_1] - \xi_1 \eta_3 d[\eta_1] \wedge d[\eta_2] + \xi_2 \eta_3 d[\eta_1] \wedge d[\eta_1]$	$(2, 1, -1)$	$(45 0)$	1/0

$\mathfrak{g} = \mathfrak{kas}(; 1)$

$2 - d = 0$. Nontrivial cohomology are in degrees 0 and 1.

The weights are given relative to $\mathfrak{o}(6)$, but the corresponding vectors are highest only with respect to $\mathfrak{o}(4) = \mathfrak{o}(6) \cap \mathfrak{g}_0$.

Cohomology in $\text{deg} = 0$, $\text{dim} = (6|6)$:

N	$\mathfrak{o}(4)$ -highest vectors	$\mathfrak{o}(6)$ -weight	dim	mult
[1]	$d[\xi_1\xi_2] \wedge d[\xi_1\eta_2]$	$(-2, 1, -1)$	$(3 0)$	1/0
[2]	$d[\xi_1\eta_2] \wedge d[\xi_1\eta_3]$	$(-2, 1, 1)$	$(3 0)$	1/0
[3]	$\xi_1 d[\xi_1\xi_3] \wedge d[\xi_1\eta_2]$	$(-1, 1, -1)$	$(0 3)$	2/1
[4]	$\xi_1 d[\xi_1\eta_2] \wedge d[\xi_1\eta_3]$	$(-1, 1, -1)$	$(0 3)$	2/1

$[2] \oplus [4]$ is \mathfrak{g}_0 -irreducible; [1] and [3] are glued as \mathfrak{g}_0 -modules.

Cohomology in $\text{deg} = 1$, $\text{dim} = (8|8)$:

N	$\mathfrak{o}(4)$ -highest vectors	$\mathfrak{o}(6)$ -weight	dim	mult
[1]	$\xi_1 d[\xi_1\eta_2] \wedge (\xi_2 d[\xi_3] - \eta_3 d[\eta_2])$	$(0, 2, -1)$	$(0 8)$	2/1
[2]	$\xi_1 d[\eta_2] \wedge (\xi_2 d[\xi_3] - \eta_3 d[\eta_2])$	$(1, 2, -1)$	$(8 0)$	1/0

A single irreducible \mathfrak{g}_0 -module.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{kas}(\cdot; 3\eta)$

Cohomology in degrees 1 and 2.

$\text{deg} = 1$: a single irreducible \mathfrak{g}_0 -module of $\text{dim} = (12|12)$ (the vectors are highest with respect to $\mathfrak{gl}(3) = \mathfrak{o}(6) \cap \mathfrak{g}_0$, the weights are the same as in $\mathfrak{o}(6)$):

N	$\mathfrak{gl}(3)$ -highest vectors	weight	dim	mult
[1]	$d[\eta_1\eta_2] \wedge d[\eta_1\eta_3]$	$(2, 1, 1)$	$(3 0)$	1/0
[2]	$d[\eta_1] \wedge d[\eta_2\eta_3] - d[\eta_2] \wedge d[\eta_1\eta_3] + d[\eta_3] \wedge d[\eta_1\eta_2]$	$(1, 1, 1)$	$(0 1)$	2/1
[3]	$d[\eta_1] \wedge d[\eta_1\eta_2]$	$(2, 1, 0)$	$(0 8)$	2/1
[4]	$d[1] \wedge d[\eta_1\eta_2]$	$(1, 1, 0)$	$(3 0)$	3/2
[5]	$d[\eta_1]^2$	$(2, 0, 0)$	$(6 0)$	3/2
[6]	$d[1] \wedge d[\eta_1]$	$(1, 0, 0)$	$(0 3)$	5/4

$\text{deg} = 2$: $\text{dim} = (15|16)$, a single irreducible \mathfrak{g}_0 -module:

N	$\mathfrak{gl}(3)$ -highest vectors	weight	dim	mult
[1]	$\xi_1\eta_3 d[\eta_2] \wedge d[\eta_1\eta_2] - \xi_2\eta_3 d[\eta_1] \wedge d[\eta_1\eta_2]$	$(2, 2, -1)$	$(0 10)$	1/0
[2]	$-\xi_1\eta_3 d[\eta_1] \wedge d[\eta_2] + \xi_2\eta_3 d[\eta_1]^2 + \xi_1\eta_1\eta_3 d[\eta_1] \wedge d[\eta_1\eta_2]$ $+ 2\xi_1\eta_2\eta_3 d[\eta_2] \wedge d[\eta_1\eta_2] - \xi_2\eta_2\eta_3 d[\eta_1] \wedge d[\eta_1\eta_2]$	$(2, 1, -1)$	$(15 0)$	2/1
[3]	$\eta_3(\eta_1 d[\eta_1] + \eta_2 d[\eta_2]) \wedge (\xi_1 d[\eta_2] - \xi_2 d[\eta_1])$	$(1, 1, -1)$	$(0 6)$	3/2

$\mathfrak{g} = \mathfrak{kas}(\cdot; 3\xi)$

Cohomology in $\text{deg} = 1$, $\text{dim} = (52|52)$ (the vectors are highest with respect to $\mathfrak{gl}(3) = \mathfrak{o}(6) \cap \mathfrak{g}_0$, the weights are given with respect to $\mathfrak{o}(6)$):

N	$\mathfrak{gl}(3)$ -highest vectors	weight	dim	mult
[1]	$d[\xi_1\xi_2\xi_3]^2$	$(-2, -2, -2)$	(1 0)	1/0
[2 ₁]	$d[\xi_2\xi_3] \wedge d[\xi_1\xi_2\xi_3]$	$(-1, -2, -2)$	$2 \cdot (0 3)$	2/0
[2 ₂]	$\xi_1 d[\xi_1\xi_2\xi_3]^2$			
[3 ₁]	$d[\xi_3] \wedge d[\xi_1\xi_2\xi_3]$	$(-1, -1, -2)$	$3 \cdot (3 0)$	4/1
[3 ₂]	$d[\xi_1\xi_3] \wedge d[\xi_2\xi_3]$			
[3 ₃]	$\xi_1\xi_2 d[\xi_1\xi_2\xi_3]^2$			
[4]	$\xi_1 d[\xi_2\xi_3] \wedge d[\xi_1\xi_2\xi_3]$	$(0, -2, -2)$	(6 0)	1/0
[5 ₁]	$d[1] \wedge d[\xi_1\xi_2\xi_3]$	$(-1, -1, -1)$	$3 \cdot (0 1)$	6/3
[5 ₂]	$d[\xi_1] \wedge d[\xi_2\xi_3] - d[\xi_2] \wedge d[\xi_1\xi_3] + d[\xi_3] \wedge d[\xi_1\xi_2]$			
[5 ₃]	$\xi_1\xi_2\xi_3 d[\xi_1\xi_2\xi_3]^2$			
[6 ₁]	$d[\xi_3] \wedge d[\xi_2\xi_3]$	$(0, -1, -2)$	$2 \cdot (0 8)$	4/2
[6 ₂]	$\xi_1\xi_2 d[\xi_2\xi_3] \wedge d[\xi_1\xi_2\xi_3]$			
[7 ₁]	$d[1] \wedge d[\xi_2\xi_3]$	$(0, -1, -1)$	$2 \cdot (3 0)$	7/5
[7 ₂]	$\xi_1 d[1] \wedge d[\xi_1\xi_2\xi_3]$			
[8 ₁]	$d[\xi_3]^2$	$(0, 0, -2)$	$2 \cdot (6 0)$	4/2
[8 ₂]	$\xi_1\xi_2 d[\xi_1\xi_3] \wedge d[\xi_2\xi_3]$			
[9 ₁]	$d[1] \wedge d[\xi_3]$	$(0, 0, -1)$	$2 \cdot (0 3)$	8/6
[9 ₂]	$\xi_1\xi_2\xi_3 d[\xi_1\xi_3] \wedge d[\xi_2\xi_3]$			
[10]	$\xi_1 d[\xi_3]^2$	$(1, 0, -2)$	(0 15)	2/1
[11]	$\xi_1 d[1] \wedge d[\xi_3]$	$(1, 0, -1)$	(8 0)	4/3
[12]	$\xi_1\xi_2 d[\xi_3]^2$	$(1, 1, -2)$	(10 0)	1/0
[13]	$\xi_1\xi_2 d[1] \wedge d[\xi_3]$	$(1, 1, -1)$	(0 6)	1/0

\mathfrak{g}_0 -modules:

$[A] = [2'] + [3'] + [4] + [5'] + [6'] + [7']$ of $\dim = (12|12)$, where $[2']$, $[3']$, $[5']$, $[6']$, $[7']$ are generated by $[2_1] - [2_2]$, $[3_1] - 2[3_2] + [3_3]$, $2[5_1] - [5_2] + [5_3]$, $[6_1] + [6_2]$, and $[7_1] + [7_2]$, respectively;

$[B] = [8'] + [9'] + [10] + [11] + [12] + [13]$ of $\dim = (24|24)$, where $[8']$ and $[9']$ are generated by $[8_1] + 2[8_2]$, and $[9_1] + 2[9_2]$, respectively;

$[C] = [B] + [3''] + [5''] + [6_1] + [7_1] + [8_1] + [9_1]$ of $\dim = (36|36)$, where $[3'']$ and $[5'']$ are generated by $[3_1] - [3_2]$ and $[5_2] - 3[5_1]$, respectively;

$[D] = [A] + [C]$ of $\dim = (48|48)$;

$[E] = [D] + [1] + [2''] + [3'''] + [5''']$ of $\dim = (52|52)$.

The modules $[A]$, $[B]$, $[C]/[B]$ and $[E]/[D]$ are irreducible, $\dim([C]/[B]) = (12|12)$ and $\dim([E]/[D]) = (4|4)$.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{mb}(4|5)$$

$2 - d = 0$. Here $w(u_0) = 0$, $w(u_1) = (1, 0)$, $w(u_2) = (-1, 1)$, $w(u_3) = (0, -1)$, $w(\xi_i) = -w(u_i)$.

Cohomology: in $\text{deg} = 1$, hence, torsion free. A single irreducible \mathfrak{g}_0 -module of $\text{dim} = (12|12)$ glued of the following $\mathfrak{sl}(3)$ -modules:

N	$\mathfrak{gl}(3)$ -highest vectors	weight	dim	mult
[1]	$u_0 d[u_0] \wedge d[\xi_0]$	(0, 0)	(0 1)	4/3
[2]	$u_0 d[u_0] \wedge d[u_3] - \xi_0 d[u_3] \wedge d[\xi_0]$	(0, 1)	(3 0)	6/5
[3]	$u_0 d[u_3] \wedge d[\xi_0]$	(0, 1)	(0 3)	3/2
[4]	$u_0 d[\xi_0] \wedge d[\xi_1]$	(1, 0)	(3 0)	3/2
[5]	$u_0 d[u_3] \wedge d[\xi_1] + u_1 d[u_3] \wedge d[\xi_0]$	(1, 1)	(0 8)	3/2
[6]	$u_0 d[u_3]^2 - \xi_3 d[u_3] \wedge d[\xi_0]$	(0, 2)	(6 0)	1/0

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{mb}(4|5; 1)$$

$$2 - d = 0.$$

Cohomology in $\text{deg} = 0$, $\text{dim} = (22|22)$:

N	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ -highest vectors	weight	dim	mult
[1]	$\xi_1 d[u_2 \xi_1] \wedge d[u_3 \xi_1]$	(0, 0)	(0 1)	6/5
[2 ₁]	$d[u_2] \wedge d[u_0 u_3 - \xi_1 \xi_2] - d[u_3] \wedge d[u_0 u_2 + \xi_1 \xi_3]$	(0, 1)	$2 \times (2 0)$	6/4
[2 ₂]	$d[u_2 \xi_1] \wedge d[u_3 \xi_1]$			
[3]	$d[u_0 u_2 + \xi_1 \xi_3] \wedge d[u_3 \xi_1] - d[u_0 u_3 - \xi_1 \xi_2] \wedge d[u_2 \xi_1]$	(0, 2)	(0 3)	2/1
[4]	$d[\xi_2] \wedge d[u_3 \xi_1]$	(2, 1)	(6 0)	4/3
[5 ₁]	$d[\xi_2] \wedge d[u_0 u_3 - \xi_1 \xi_2]$	(2, 2)	$2 \times (0 9)$	3/1
[5 ₂]	$d[u_0 u_3 - \xi_1 \xi_2] \wedge d[u_3 \xi_1]$			
[6]	$d[u_0 u_3 - \xi_1 \xi_2]^2$	(2, 3)	(12 0)	1/0

\mathfrak{g}_0 -modules:

[A] = [4] + [5₁] + [5₂] + [6] of $\text{dim} = 18|18$;

[B] = [2₂] + [3] + [A] of $\text{dim} = 20|21$;

[C] = [1] + [2₁] + [B] of $\text{dim} = 22|22$.

Irreducible modules: [A], [B]/[A] (of $\text{dim} = 2|3$) and [C]/[B] (of $\text{dim} = 2|1$).

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{mb}(4|5; K)$$

$$2 - d = -1.$$

The \mathfrak{g}_0 -highest weight vectors are as follows: $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{gl}(3)$; the first coordinate of the weight is given with respect to $\mathfrak{sl}(2)$ realized as $x_+ = q_0(\tau + q_0\xi_0 - \sum_{i=1}^3 q_i\xi_i) + 2\xi_1\xi_2\xi_3$, $x_- = \xi_0$; $\mathfrak{gl}(3)$ is realized as $x_j^i = q_i\xi_j$ ($i \neq j$) and $x_i^i = \tau + q_i\xi_i - q_0\xi_0$. In this realization $\omega(q_0) = (1, -1, -1, -1)$, $\omega(u_1) = (-1, 1, 0, 0)$, $\omega(u_2) = (-1, 0, 1, 0)$, $\omega(u_3) = (-1, 0, 0, 1)$, $\omega(\xi_0) = (-2, 1, 1, 1)$, $\omega(\xi_1) = (0, -1, 0, 0)$, $\omega(\xi_2) = (0, 0, -1, 0)$, $\omega(\xi_3) = (0, 0, 0, -1)$.

Cohomology: a single irreducible module in $\text{deg} = -1$:

$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{gl}(3)$ -highest vectors	weight	dim	mult
$u_0 dq_3 \wedge dq_3$	$(3, 0, 0, -2)$	$(24 0)$	$1/0$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{ksle}(9|6; K)$

$2 - d = 0$. Cohomology are in degrees 0 and 1 and constitute irreducible modules. (The weights are given in \mathfrak{gl} -basis of matrix diagonal units.)

deg	$\mathfrak{gl}(5)$ -highest vectors	$\mathfrak{gl}(5)$ -weight	dim	mult
0	$\partial_5 d[\pi dx_4 dx_5]^2$	$(0, 0, 0, -2, -3)$	$(175 0)$	$1/0$
1	$\sum \partial_i d[\pi dx_4 dx_5] \wedge d[\partial_i] +$ $+ \sum \pi dx_i dx_j (d[\pi dx_i dx_4] \wedge d[\pi dx_j dx_5] -$ $- d[\pi dx_i dx_5] \wedge d[\pi dx_j dx_4] -$ $- d[\pi dx_i dx_j] \wedge d[\pi dx_4 dx_5])$	$(0, 0, 0, -1, -1)$	$(0 10)$	$3/2$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{ksle}(9|6)$

$2 - d = 0$. Cohomology in $\text{deg} = 1$, hence, torsion-free. $\text{dim} = (168|167)$

N	$\mathfrak{gl}(3)$ -highest vectors	weight	dim	mult
[1]	$\sum (-1)^{\rho(\sigma)} \partial_{\sigma(1)} d[\pi dx_{\sigma(2)} dx_{\sigma(3)}] \wedge d[x_{\sigma(4)} \partial_5] -$ $2 \sum \pi dx_i dx_j d[x_i \partial_5] \wedge d[x_j \partial_5]$	$(0, 0, 0)$	$(0 1)$	$2/1$
[2 ₁]	$\sum \partial_i d[\partial_i] \wedge d[x_4 \partial_5] + \partial_4 d[\partial_i] \wedge d[x_i \partial_5]$	$(0, 0, 1)$	$2 \times (4 0)$	$5/3$
[2 ₂]	$2\partial_4 (-d[\pi dx_1 dx_2] \wedge d[\pi dx_3 dx_4] +$ $+ d[\pi dx_1 dx_3] \wedge d[\pi dx_2 dx_4] -$ $d[\pi dx_1 dx_4] \wedge d[\pi dx_2 dx_3]) +$ $+ \sum \pi dx_i dx_j d[\pi dx_i dx_j] \wedge d[x_4 \partial_5]$			
[3]	$\sum \partial_4 d[\partial_i] \wedge d[\pi dx_i dx_4] -$ $- \sum \pi dx_{\sigma(1)} dx_{\sigma(2)} d[\partial_{\sigma(3)}] \wedge d[x_4 \partial_5]$	$(0, 0, 2)$	$(0 10)$	$2/1$

[4 ₁]	$\sum_{1 \leq i \leq 4} (\partial_i d[\partial_i] \wedge d[\pi dx_3 dx_4] + \pi dx_1 dx_2 d[\partial_i] \wedge d[x_i \partial_5])$	(0, 1, 0)	$2 \times (0 6)$	6/4
[4 ₂]	$\sum \pi dx_i dx_j d[\pi dx_i dx_j] \wedge d[\pi dx_3 dx_4] - 2 \sum (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \pi dx_1 dx_2 + d[\pi dx_1 dx_{\sigma(2)}] \wedge d[\pi dx_{\sigma(3)\sigma(4)}]$			
[5 ₁]	$\partial_4 d[x_3 \partial_5] \wedge d[x_4 \partial_5]$	(0, 1, 1)	$2 \times (20 0)$	4/2
[5 ₂]	$-2\partial_4 d[\partial_1] \wedge d[\partial_2] - x_1 \partial_5 d[\partial_2] \wedge d[x_4 \partial_5] + x_2 \partial_5 d[\partial_1] \wedge d[x_4 \partial_5]$			
[6]	$\partial_4 d[\pi dx_3 dx_4] \wedge d[x_4 \partial_5]$	(0, 1, 2)	(0 45)	1/0
[7]	$\pi dx_1 dx_2 d[x_3 \partial_5] \wedge d[x_4 \partial_5] - \partial_3 d[\pi dx_3 dx_4] \wedge d[x_4 \partial_5] + \partial_4 d[\pi dx_3 dx_4] \wedge d[x_3 \partial_5]$	(0, 2, 0)	(0 20)	2/1
[8]	$\pi dx_1 dx_2 d[\pi dx_3 dx_4] \wedge d[x_4 \partial_5] - \partial_4 d[\pi dx_3 dx_4]^2$	(0, 2, 1)	(60 0)	1/0
[9]	$\sum (\partial_i d[\partial_i] \wedge d[\partial_i] + x_1 \partial_5 d[\partial_i] \wedge d[x_i \partial_5])$	(1, 0, 0)	(4 0)	5/4
[10]	$\sum (-1)^{\rho(\sigma)} (\partial_{\sigma(2)} d[\pi dx_{\sigma(3)} dx_{\sigma(4)}] \wedge d[x_4 \partial_5] + \partial_4 d[\pi dx_{\sigma(2)} dx_{\sigma(3)}] \wedge d[x_{\sigma(3)} \partial_5])$	(1, 0, 1)	(0 15)	4/3
[11]	$\partial_4 d[\partial_1] \wedge d[x_4 \partial_5]$	(1, 0, 2)	(36 0)	4/3
[12]	$2x_1 \partial_5 d[x_3 \partial_5] \wedge d[x_4 \partial_5] - \partial_3 d[\partial_1] \wedge d[x_4 \partial_5] + \partial_4 d[\partial_1] \wedge d[x_3 \partial_5]$	(1, 1, 0)	(20 0)	4/3
[13]	$\pi dx_1 dx_2 d[\partial_1] \wedge d[x_4 \partial_5] + \partial_4 d[\partial_1] \wedge d[\pi dx_3 dx_4]$	(1, 1, 1)	(0 64)	3/2

\mathfrak{g}_0 -modules:

$[A] = [2'] + [4'] + [9]$, $\dim = (8|6)$, where $[2']$ and $[4']$ are generated by $2[2_1] - [2_2]$ and $2[4_1] - [4_2]$, respectively;

$[B] = [A] + [1]$, $\dim = (8|7)$;

$[C] = [1] + \dots + [13]$, $\dim = (168|167)$.

The modules $[A]$, $[B]/[A]$ (of $\dim = (0|1)$), and $[C]/[B]$ (of $\dim = (160|160)$) are irreducible.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{ksl}(9|6; CK)$

$2 - d = -1$. Cohomology are in degrees $-1, 0$, and 1 .

Cohomology in $\text{deg} = -1$, $\dim = (36|36)$:

N	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(3)$ -highest vectors	weight	dim	mult
[1]	$\partial_2 d[\pi dx_2 dx_5]^2$	(3, 0, 2)	(24 0)	1/0
[2]	$\partial_2 d[\pi dx_2 dx_5] \wedge d[x_5 \partial_1]$	(3, 0, 2)	(0 24)	1/0
[3]	$\partial_2 d[x_4 \partial_1] \wedge d[x_5 \partial_1]$	(3, 1, 0)	(12 0)	1/0
[4]	$\partial_2 d[\pi dx_2 dx_4] \wedge d[x_5 \partial_1] - \partial_2 d[\pi dx_2 dx_5] \wedge d[x_4 \partial_1]$	(3, 1, 0)	(0 12)	1/0

\mathfrak{g}_0 -modules:

$[A] = [1] + [2]$ of $\dim = 24|24$;

$[B] = [A] + [3] + [4]$ of $\dim = 36|36$.

Irreducible modules: $[A]$ and $[B]/[A]$ (of $\dim = 12|12$).

Cohomology in $\deg = 0$, single \mathfrak{g}_0 -module, $\dim = 10|10$:

N	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(3)$ -highest vectors	weight	dim	mult
[1]	$\partial_5 d[x_5 \partial_1] \wedge d[x_5 \partial_2]$	(0, 0, 3)	(10 0)	1/0
[2]	$\partial_5 d[\pi dx_1 dx_5] \wedge d[x_5 \partial_1] + \partial_5 d[\pi dx_2 dx_5] \wedge d[x_5 \partial_2] -$ $\pi dx_3 dx_4 d[x_5 \partial_1] \wedge d[x_5 \partial_2]$	(0, 0, 3)	(0 10)	1/0

Cohomology: in $\deg = 1$, a single \mathfrak{g}_0 -module, $\dim = (6|6)$:

N	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(3)$ -highest vectors	weight	dim	mult
[1]	$-\partial_2 d[x_5 \partial_2] \wedge d[\partial_1] + \sum \partial_i d[x_5 \partial_i] \wedge d[\partial_i] +$ $+\sum (\pi dx_1 dx_j d[\pi dx_i dx_j] \wedge d[x_5 \partial_i]$ $+ x_j \partial_i d[x_j \partial_1] \wedge d[x_5 \partial_i])$	(1, 0, 1)	(6 0)	8/7
[2]	$-\sum \partial_i d[\pi dx_2 dx_5] \wedge d[\partial_i] +$ $+\sum \pi dx_i dx_j d[\pi dx_2 dx_5] \wedge d[\pi dx_i dx_j] -$ $-\sum_{1 \leq i < j \leq 2} \sum_{3 \leq k \leq 5} x_j \partial_i d[\pi dx_2 dx_5] \wedge d[x_j \partial_i]$	(1, 0, 1)	(0 6)	8/7

$\mathfrak{g} = \mathfrak{ksle}(9|6; 2)$

$2 - d = 0$. Cohomology are in degrees 0 and 1.

Cohomology in $\deg = 0$, $\dim = (140|140)$:

N	$\mathfrak{sl}(3) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ -highest vectors	weight	dim	mult*
[1]	$\pi dx_4 dx_5 d[\pi x_5 dx_4 dx_5]^2$	(0, 0, 2)	(0 3)	2/1
[2]	$\partial_3 d[\partial_4] \wedge d[\pi x_4 dx_4 dx_5] + \partial_3 d[\partial_5] \wedge d[\pi x_5 dx_4 dx_5]$	(0, 1, 0)	(0 3)	4/3
[3 ₁]	$\partial_3 d[\partial_4] \wedge d[\pi x_5 dx_4 dx_5]$	(0, 1, 2)	$2 \cdot (0 9)$	5/3
[3 ₂]	$\pi dx_4 dx_5 d[x_5 \partial_1] \wedge d[x_5 \partial_2]$			
[3 ₃]	$\partial_3 d[\pi x_5 dx_4 dx_5]^2$	(0, 1, 2)	(9 0)	2/1
[4]	$\partial_3 d[\pi dx_3 dx_4] \wedge d[\pi x_5 dx_4 dx_5] -$ $\partial_3 d[\pi dx_3 dx_5] \wedge d[\pi x_4 dx_4 dx_5]$	(0, 2, 0)	(6 0)	1/0
[5 ₁]	$\partial_3 d[\partial_4] \wedge d[\pi dx_3 dx_5]$	(0, 2, 2)	(0 18)	2/0
[5 ₂]	$\partial_3 d[\pi dx_3 dx_5] \wedge d[\pi x_5 dx_4 dx_5]$	(0, 2, 2)	$2 \cdot (18 0)$	2/1
[5 ₃]	$\partial_3 d[x_5 \partial_1] \wedge d[x_5 \partial_2]$			

*The column "mult" shows the multiplicity of the homogeneous (even or odd) component of given weight.

[6]	$\partial_3 d[\pi dx_3 dx_5]^2$	(0, 3, 2)	(30 0)	1/0
[7]	$\pi dx_4 dx_5 d[x_4 \partial_1] \wedge d[\pi x_5 dx_4 dx_5] - \pi dx_4 dx_5 d[x_5 \partial_1] \wedge d[\pi x_4 dx_4 dx_5]$	(1, 0, 0)	(3 0)	3/2
[8]	$\pi dx_4 dx_5 d[x_5 \partial_1] \wedge d[\pi x_5 dx_4 dx_5]$	(1, 0, 2)	(9 0)	3/2
[9 ₁]	$\partial_3 d[\partial_4] \wedge d[x_4 \partial_1] + \partial_3 d[\partial_5] \wedge d[x_5 \partial_1]$	(1, 1, 0)	(8 0)	3/2
[9 ₂]	$\partial_3 d[x_4 \partial_1] \wedge d[\pi x_5 dx_4 dx_5] - \partial_3 d[x_5 \partial_1] \wedge d[\pi x_4 dx_4 dx_5]$	(1, 1, 0)	(0 8)	1/0
[10 ₁]	$\partial_3 d[\partial_4] \wedge d[x_5 \partial_1]$	(1, 1, 2)	(24 0)	3/2
[10 ₂]	$\partial_3 d[x_5 \partial_1] \wedge d[\pi x_5 dx_4 dx_5]$	(1, 1, 2)	(0 24)	1/0
[11]	$\partial_3 d[\pi dx_3 dx_4] \wedge d[x_5 \partial_1] - \partial_3 d[\pi dx_3 dx_5] \wedge d[x_4 \partial_1]$	(1, 2, 0)	(0 15)	1/0
[12]	$\partial_3 d[\pi dx_3 dx_5] \wedge d[x_5 \partial_1]$	(1, 2, 2)	(0 45)	1/0
[13]	$\pi dx_4 dx_5 d[x_4 \partial_1] \wedge d[x_5 \partial_1]$	(2, 0, 0)	(0 6)	2/1
[14]	$\partial_3 d[x_4 \partial_1] \wedge d[x_5 \partial_1]$	(2, 1, 0)	(15 0)	1/0

\mathfrak{g}_0 -modules:

[A] = [3₁ - 3₂] + [5₁] + [5₂ + 5₃] + [6] + [10₁] + [12] of dim = 72|72;

[B] = [A] + [2] + [4] + [7] + [9₁] + [9₂] + [11] + [13] + [14] of dim = 104|104;

[C] = all.

The modules [A], [B]/[A] (of dim = (32|32)), and [C]/[B] (of dim = (36|36)) are irreducible.

Cohomology in deg = 1, dim = (8|8): the $\mathfrak{sl}(3) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ -highest weights are as follows: even ones are (0, 0, 1), (1, 0, 1); odd ones are (0, 0, 1), (0, 1, 1). The corresponding highest weight vectors are too complicated to be included here.

Acknowledgment. P. G., D. L. and I. Shch. acknowledge financial support of TBSS, Stockholm; Université Marseille-Aix and MPIM, Bonn, where the final molding had been performed; and RFBR grant 01-01-00490a, respectively.

Bibliography

1. Castellani L., D’Auria R., Fré P. *Supergravity and superstrings. A geometric perspective*. Vol. 1–3. Superstrings. World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1991. pp. i–xvi and 1–2162
2. Cheng Shun-Jen; Kac V. Generalized Spencer Cohomology and filtered Deformations of \mathbb{Z} -graded Lie Superalgebras, math-RT/9805039; Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998), No. 5, 1141–1182

3. Cheng S., Kac V. Structure of some \mathbb{Z} -graded Lie superalgebras of vector fields, Transformation groups, v. 4, 1999, 219–272
4. Deligne P. et al (eds.) *Quantum fields and strings: a course for mathematicians*. Vol. 1, 2. Material from the Special Year on Quantum Field Theory held at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1996–1997. AMS, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 1999. Vol. 1: xxii+723 pp.; Vol. 2: pp. i–xxiv and 727–1501
5. Goncharov A. Infinitesimal structures related to hermitian symmetric spaces, *Funct. Anal. Appl.*, 15, No.3 (1981), 23–24 (in Russian); a detailed version: id., Generalized conformal structures on manifolds. In: [L3], #11 and *Selecta Math. Soviet.* 6, 1987, No. 4, 307–340
6. Grozman P. Classification of bilinear invariant operators on tensor fields. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 14 (1980), No. 2, 58–59; English translation: *Functional Anal. Appl.* 14 (1980), No. 2, 127–128
7. Grozman P., Leites D. Supergravities and N -extended Minkowski superspaces for any N . In: Wess J., Ivanov E. (eds.) *Supersymmetries and quantum symmetries*. Proc. International Conference in memory of V. Ogievetsky, June 1997, Lecture Notes in Physics 524, Springer, 1999, 58–67
8. Grozman P., Leites D. *Mathematica*-aided study of Lie algebras and their cohomology. From supergravity to ball bearings and magnetic hydrodynamics In: Keränen V. (eds.) *The second International Mathematica symposium*, Rovaniemi, 1997, 185–192
9. Grozman P., Leites D. An unconventional supergravity, In: S. Duplij and J. Wess (eds.) *Noncommutative structures in mathematics and physics* Proc. NATO Advanced Research Workshop, Kiev, 2000. Kluwer, 41–48; hep-th/0202115
10. Grozman P., Leites D., Shchepochkina I. Invariant differential operators on supermanifolds and The Standard Model. math. RT/0202193; In: M. Olshanetsky, A. Vainstein (eds.) *Multiple facets of quantization and supersymmetry. Michael Marinov Memorial Volume*, World Sci., 2002
11. Grozman P., Leites D., Shchepochkina I. The analogs of the Riemann tensor for the 16 series of nonholonomic structures on supermanifolds, in preparation
12. Kac V. Classification of infinite-dimensional simple linearly compact Lie superalgebras. *Adv. Math.* 139 (1998), No. 1, 1–55; Kac V., Classification of infinite-dimensional simple groups of supersymmetries and quantum field theory. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). *Geom. Funct. Anal.* 2000, Special Volume, Part I., 162–183
13. Leites D. The Riemann tensor for nonholonomic manifolds, *Homology, Homotopy and Applications*, vol. 4 (2), 2002, 397–407 (math. RT/0202213)
14. Leites D., Poletaeva E. Supergravities and contact type structures on supermanifolds. Second International Conference on Algebra (Barnaul, 1991), *Contemp. Math.*, 184, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 267–274

15. Leites D., Poletaeva E., Serganova V. On Einstein equations on manifolds and supermanifolds, *J. Nonlinear Math. Phys.*, v. 9, No. 4, 2002, 394–425
16. Leites D., Shchepochkina I. Towards classification of simple vectorial Lie superalgebras. In: [L5], 31/1988–14; Leites D., Toward classification of classical Lie superalgebras. In: Nahm W., Chau L. (eds.) *Differential geometric methods in theoretical physics* (Davis, CA, 1988), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 245, Plenum, New York, 1990, 633–651; Leites D., Shchepochkina I., Quivers and Lie superalgebras, *Czech. J. Phys.* v. 47, No. 12, 1997, 1221–1229
17. Leites D., Shchepochkina I. Classification of simple Lie superalgebras of vector fields, preprint mpim-bonn, no.
18. Leites D., Shchepochkina I. How to quantize antibracket, preprint ESI-875 (www.esi.ac.at); *Theor. and Math. Physics*, v. 126, No. 3, 339–369; math. RT/0202181
19. Leites D., Serganova V. Symmetries wider than supersymmetries (with V. Serganova) In: S. Duplij and J. Wess (eds.) *Noncommutative structures in mathematics and physics*, Proc. NATO Advanced Research Workshop, Kiev, 2000. Kluwer, 13–30; Leites D., Kochetkov Yu., Simple finite dimensional Lie algebras in characteristic 2 related to superalgebras and on a notion of finite simple group. In: L. A. Bokut', Yu. L. Ershov and A. I. Kostrikin (eds.) *Proceedings of the International Conference on Algebra. Part 1., Novosibirsk, August 1989*, Contemporary Math. 131, Part 1, AMS, 1992, 59–67 MR 93g:17035
20. Manin Y.I. *Gauge field theory and complex geometry*. Translated from the 1984 Russian original by N. Koblitz and J. R. King. Second edition, 289. Springer-Verlag, Berlin, 1997. xii+346 pp
21. Montgomery R. Generic distributions and Lie algebras of vector fields. *J. Differential Equations* 103 (1993), No. 2, 387–393
22. Poletaeva E. Spencer cohomology of some Lie superalgebras. In: A. L. Onishchik et. al. (eds.) *Problems in group theory and homological algebra*, Yaroslavl Gos. Univ., Yaroslavl, 1988, 162–167; id., Spencer cohomology of Lie superalgebras of vector fields. In: A. L. Onishchik et. al. (eds.) *Problems in group theory and homological algebra*, Yaroslavl Gos. Univ., Yaroslavl, 1990, 168–169
23. Poletaeva E. Structure functions on the usual and exotic symplectic and periplectic supermanifolds. U. Bruzzo et. al.(eds.) *Differential geometric methods in theoretical physics*, Lecture Notes in Physics **375**, Springer, Berlin, 1991, 390–395
24. Poletaeva E. Analogues of the Riemann tensors for the odd metric on supermanifolds. *Acta Appl. Math.* **31**, No. 2, 1993, pp. 137–169; id., Penrose's tensors on supergrassmannians. *Math. Scand.* **72**, 1993, No. 2, pp. 161–190; id., Penrose's tensors. II. *Math. Scand.* **72**, 1993, No. 2, 191–211
25. Schwarz A. S. Supergravity, complex geometry and G -structures. *Comm. Math. Phys.* 87 (1982/83), No. 1, 37–6; Rosly A. A.; Schwarz A. S. Geometry of $N = 1$

- supergravity. *Comm. Math. Phys.* 95 (1984), No. 2, 161–184. II. *Comm. Math. Phys.* 96 (1984), No. 3, 285–309. Baranov M. A.; Roslyi A. A.; Shvarts A. S. The relation between gravity and supergravity. *Teoret. Mat. Fiz.* 64 (1985), No. 1, 7–16. English translation: *Theoret. and Math. Phys.* 64 (1985), No. 1, 649–655
26. Serganova V. Automorphisms of simple Lie superalgebras. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 48 (1984), No. 3, 585–598; Feigin B. L., Leites D. A., Serganova, V. V., *Kac-Moody superalgebras. Group theoretical methods in physics, Vol. 1–3 (Zvenigorod, 1982), 631–637, Harwood Academic Publ., Chur, 1985*
27. Shchepochkina I. The five exceptional simple Lie superalgebras of vector fields, hep-th 9702120; id., Five simple exceptional Lie superalgebras of vector fields. *Funktional. Anal. i Prilozhen.* 33 (1999), No. 3, 59–72, 96; translation in *Funct. Anal. Appl.* 33 (1999), No. 3, 208–219
28. Shchepochkina I. Five exceptional simple Lie superalgebras of vector fields and their fourteen regradings. *Representation Theory (electronic journal of AMS), v. 3, 1999, 3 (1999), 373–415*
29. Sternberg S. *Lectures on differential geometry*, Chelsey, 2nd edition, 1985
30. Tanaka N. differential systems, graded Lie algebras and pseudogroups. *J. Math. Kyoto Univ.* 10, 1970, 1–82; id., On infinitesimal automorphisms of Siegel domains, *J. Math. Soc. Japan* 22, 1970, 180–212; id., On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras. *Hokkaido Math. J.*, 8 (1979), No. 1, 23–84
31. Vershik A. M. Classical and nonclassical dynamics with constraints. (Russian) In: Yu. Borisovich, Yu. Gliklikh (eds.) *Geometry and topology in global nonlinear problems*, 23–48, *Novoe Global. Anal., Voronezh. Gos. Univ., Voronezh, 1984* English translation in: *Lect. Notes in Math.*, 1108, 1984, 278–301
32. Vershik A. M., Gershkovich V. Ya. Estimation of the functional dimension of the orbit space of germs of distributions in general position. (Russian) *Mat. Zametki* 44, No. 5, 1988, 596–603, 700; English translation in: *Math. Notes* 44, No. 5–6, 1988, 806–810
33. Vershik A. M., Gershkovich V. Ya. A bundle of nilpotent Lie algebras over a non-holonomic manifold (nilpotentization). (Russian) *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* 172 (1989), *Differentsialnaya Geom. Gruppy Li i Mekh. Vol. 10*, 21–40, 169 translation in *J. Soviet Math.* 59 (1992), No. 5, 1040–1053; id., Nonholonomic manifolds and nilpotent analysis. *J. Geom. Phys.* 5 (1988), No. 3, 407–452
34. Wess J., Bagger J. *Supersymmetry and supergravity*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1983. i+180 pp
35. Wess J., Zumino B. *Supergauge transformations in four dimensions*. *Nuclear Phys.* **B70** (1974), 39–50; Wess J., *Supersymmetry-supergravity. Topics in quantum field theory and gauge theories* (Proc. VIII Internat. GIFT Sem.

- Theoret. Phys., Salamanca, 1977), pp.81–125, Lecture Notes in Phys., 77, Springer, Berlin–New York, 1978; Wess J., Zumino B., *Superspace formulation of supergravity*. Phys. Lett. **B 66** (1977), No. 4, 361–364; Wess J., *Supersymmetry/supergravity. Concepts and trends in particle physics* (Schladming, 1986), 29–58, Springer, Berlin, 1987; Wess J., *Introduction to supersymmetric theories. Frontiers in particle physics '83* (Dubrovnik, 1983), 104–131, World Sci. Publishing, Singapore, 1984; Wess J., Bagger J., *Supersymmetry and supergravity*. Second edition. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. x+259 pp.
36. Yamaguchi K. Differential systems associated with simple graded Lie algebras. *Progress in differential geometry*, Adv. Stud. Pure Math., 22, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1993, 413–494

D. L.: Department of Mathematics, University of Stockholm, Roslagsv. 101, Kräftriket hus 6, SE-106 91, Stockholm, Sweden; mleites@matematik.su.se;

I. Shch.: Independent University of Moscow, Bolshoj Vlasievsky per, dom 11, RU-119002 Moscow, Russia; E-mail: Ira@Paramonova.mccme.ru

С. М. Гусейн-Заде, В. Эбелинг

Об индексах 1-форм на изолированных особенностях полных пересечений

Введение (1-формы против векторных полей)

Имеется ряд работ, посвящённых определению и вычислению индекса аналитического векторного поля на вещественном аналитическом пространстве с изолированными особыми точками ([8], [12], [14], [4]). В [15] и [20] было определено понятие индекса голоморфного векторного поля на изолированной особенности полного пересечения (*uonn*). Можно сказать, что целью введения этого понятия была надежда на то, что оно может быть использовано для вычисления индекса векторного поля на вещественной *uonn*.

Мы предлагаем другой подход. Вместо рассмотрения векторных полей мы рассматриваем 1-формы. Можно определить понятия индексов вещественной 1-формы на ростке вещественно аналитического пространства с изолированной особой точкой и голоморфной 1-формы на (комплексной) *uonn*. (Для краткости мы иногда будем называть эти два понятия вещественным и комплексным индексами соответственно.) Векторному полю на ростке вещественного пространства $(V, 0) \subset (\mathbb{R}^n, 0)$ (или на ростке комплексно аналитического пространства $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$) можно сопоставить 1-форму на нём (зависящую от выбора координат на $(\mathbb{R}^n, 0)$ или на $(\mathbb{C}^n, 0)$). Если векторное поле имеет алгебраически изолированную особую точку на $(V, 0)$ (в комплексной постановке это просто означает изолированность), то при выборе координат общего вида соответствующая 1-форма также имеет алгебраически изолированную особую точку. Это соответствие не действует в противоположном направлении. При этом индекс векторного поля на вещественно аналитическом про-

пространстве с изолированной особой точкой совпадает с индексом соответствующей 1-формы. Понятие индекса голоморфной 1-формы на $uonp$ несколько более естественно, чем голоморфного векторного поля: в некотором смысле оно «более комплексно аналитично» (не использует комплексное сопряжение для своего определения) и «более геометрично» (использует объекты одного и того же тензорного типа). Более того, индекс изолированной особой точки голоморфной 1-формы на комплексной $uonp$ может быть описан как размерность некоторой алгебры. Наконец, вещественный индекс 1-формы на вещественной $uonp$ (с алгебраически изолированной особой точкой) плюс–минус эйлерова характеристика (вещественного) сглаживания $uonp$ может быть выражен в терминах сигнатуры (невырожденной) квадратичной формы на пространстве, размерность которого равна (комплексному) индексу соответствующей комплексификации.

Идея рассмотрения (в некоторых ситуациях) индексов 1-форм вместо индексов векторных полей впервые была сформулирована В. И. Арнольдом [1]. Наши результаты могут рассматриваться как частичное решение его задачи: «Определить и исследовать индексы особых точек 1-форм на многообразиях с особенностями» [2, Задача 1977-7]. Мы благодарны Э. Лойенге, М. Мерлю и Ж. Бриансону за полезные обсуждения. В частности, замечания Э. Лойенги помогли нам доказать Теорему 1.

§ 1. Индексы вещественных 1-форм на особых многообразиях

Многообразие с изолированными особенностями — это топологическое пространство M , которое наделено структурой гладкого (C^∞ -) многообразия вне дискретного подмножества S (*множества особых точек* многообразия M). *Диффеоморфизм* между двумя такими многообразиями — это гомеоморфизм, который переводит множество особых точек на множество особых точек и является диффеоморфизмом вне них. Мы говорим, что M имеет *конусоподобную особенность* в (особой) точке $P \in S$, если существует окрестность точки P диффеоморфная конусу $CW_P = (I \times W_P)/(\{0\} \times W_P)$ ($I = [0, 1]$) над гладким многообразием W_P (W_P называется *зацеплением* точки P). В дальнейшем мы предполагаем все многообразия имеющими только конусоподобные особенности. В [12] мы обсуждали понятие векторного поля на многообразии с изолированными особенностями и понятие индекса его особой точки. Здесь мы приспособим соответствующие определения к случаю 1-форм. 1-форма (гладкая или непрерывная) на многообразии M с изо-

лированными особенностями — это (гладкая или непрерывная) 1-форма на множестве $M \setminus S$ регулярных точек многообразия M . Множество особых точек S_ω 1-формы ω на (особом) многообразии M — это объединение множества обыкновенных особых точек формы ω на $M \setminus S$ (т. е. точек, в которых ω обращается в нуль) и множества S особых точек самого многообразия M .

Для изолированной *обыкновенной* особой точки P 1-формы ω определён её индекс $\text{ind}_P \omega$ (степень отображения $\omega/\|\omega\|: \partial B \rightarrow S^{n-1}$ границы малого шара B с центром в точке P в координатной окрестности точки P в единичную сферу S^{n-1} в двойственном пространстве; $n = \dim M$). Если многообразие M замкнуто (т. е. — компактное, без края) и не имеет особенностей ($S = \emptyset$), а 1-форма ω на M имеет только изолированные особенности, то

$$\sum_{P \in S_\omega} \text{ind}_P \omega = \chi(M) \quad (1.1)$$

($\chi(M)$ — эйлерова характеристика многообразия M).

Пусть (M, P) — конусоподобная особенность (т. е. — росток многообразия с такой особой точкой) и пусть ω — 1-форма определённая на открытой окрестности U точки P . Предположим, что форма ω не имеет особых точек на $U \setminus \{P\}$. Пусть V — замкнутая конусоподобная окрестность точки P в U ($V \cong CW_P$, $V \subset U$). На конусе $CW_P = (W_P \times I)/(W_P \times \{0\})$ ($I = [0, 1]$) определена естественная 1-форма dt (t — координата на отрезке I). Пусть ω_{rad} — соответствующая 1-форма на V . Пусть $\tilde{\omega}$ — 1-форма на U , совпадающая с формой ω около границы ∂U окрестности U и с формой ω_{rad} на V и имеющая только изолированные особые точки.

Определение: Индекс $\text{ind}_P \omega$ 1-формы ω в точке P равен

$$1 + \sum_{Q \in S_{\tilde{\omega}} \setminus \{P\}} \text{ind}_Q \tilde{\omega}$$

(сумма берётся по всем особым точкам Q 1-формы $\tilde{\omega}$ кроме самой точки P).

Для конусоподобной особенности в точке $P \in S$ зацепление W_P и структура конуса на окрестности определены, вообще говоря, неоднозначно (конусы над различными многообразиями могут быть *локально* диффеоморфны). Однако, нетрудно показать, что индекс $\text{ind}_P \omega$ не зависит от выбора структуры конуса на окрестности точки P и от выбора 1-формы $\tilde{\omega}$.

Предложение 1. Для 1-формы ω с изолированными особыми точками на замкнутом многообразии M с изолированными особенностями имеет место равенство (1.1).

Определение: Говорят, что особая точка P многообразия M (локально диффеоморфного конусу CW_P над многообразием W_P) *сглаживаема*, если многообразие W_P является краем гладкого компактного многообразия \tilde{V}_P .

В дальнейшем мы будем называть \tilde{V}_P сглаживанием особенности (V, P) . Класс сглаживаемых особенностей включает, в частности, класс (вещественных) *ионп*. На окрестности такой *ионп* имеется выделенная конусоподобная структура.

Пусть (M, P) — сглаживаемая особенность (т. е. — росток многообразия с такой особой точкой) и пусть ω — 1-форма на (M, P) с изолированной особой точкой в P . Пусть $V = CW_P$ — замкнутая конусоподобная окрестность точки P ; предполагается, что форма ω не имеет особых точек на $V \setminus \{P\}$. Предположим, что зацепление W_P точки P является краем компактного многообразия \tilde{V}_P . отождествляя $\partial\tilde{V}_P = W_P \subset W_P \times \{1/2\}$ и производя сглаживание, можно рассматривать объединение $\tilde{V}_P \cup_{W_P} (W_P \times [1/2, 1])$ многообразий \tilde{V}_P и $W_P \times [1/2, 1] \subset CW_P$, склеенных вдоль общей границы, как гладкое многообразие (с краем $W_P \times \{1\}$). Ограничение 1-формы ω на $W_P \times [1/2, 1] \subset CW_P = V$ может быть продолжено до гладкой 1-формы $\tilde{\omega}$ на $\tilde{V}_P \cup_{W_P} (W_P \times [1/2, 1])$, имеющей только изолированные особые точки.

Предложение 2. Индекс $\text{ind}_P \omega$ 1-формы ω в точке P равен

$$\sum_{Q \in S_{\tilde{\omega}}} \text{ind}_Q \tilde{\omega} - \chi(\tilde{V}_P) + 1$$

(сумма берётся по всем особым точкам формы $\tilde{\omega}$ на \tilde{V}_P).

Пусть $(V, 0) \subset (\mathbb{R}^n, 0)$ — росток вещественного $(n - k)$ -мерного (в том числе и с топологической точки зрения) аналитического пространства с изолированной особенностью в начале координат. Пусть X — аналитическое векторное поле на $(V, 0)$, т. е. ограничение аналитического векторного поля $\sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (которое мы также будем обозначать через X), определённого на окрестности начала координат в \mathbb{R}^n и касающегося многообразия V (вне начала координат). Предположим, что начало координат является изолированной особой точкой векторного поля X на V , т. е. X не имеет нулей на V вне начала координат (в некоторой его окрестности). В этой ситуации определён индекс $\text{ind}_0 X$ векторного поля X (на V) в начале координат (см. [12]). Пусть ω — 1-форма $\sum X_i dx_i$. 1-форма ω на многообразии V также имеет изолированную особую точку в начале координат. При этом $\text{ind}_0 \omega = \text{ind}_0 X$. Таким образом, в этом случае задача вычисления индекса векторного поля может быть сведена к задаче вычисления

индекса 1-формы. Это соответствие не действует в противоположном направлении: для 1-формы $\omega = \sum A_i dx_i$ векторное поле $\sum A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, вообще говоря, не касается многообразия V .

Замечание. Описанная 1-форма ω , соответствующая векторному полю X на V , зависит от выбора координат на $(\mathbb{R}^n, 0)$.

Можно надеяться получить алгебраическую формулу для индекса векторного поля или 1-формы на особом аналитическом пространстве $(V, 0) \subset (\mathbb{R}^n, 0)$ с изолированной особой точкой в начале координат в духе формулы Эйзенбуда—Левина—Химшиашвили ([13], [6]) только если начало координат является алгебраически изолированной особой точкой векторного поля или 1-формы. Это означает, что комплексификация векторного поля (или 1-формы) на комплексификации $(V_{\mathbb{C}}, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ пространства $(V, 0)$ не имеет нулей на $V_{\mathbb{C}}$ вне начала координат (вне некоторой его окрестности; предполагается, что само V имеет алгебраически изолированную особую точку в начале координат, т. е. что $V_{\mathbb{C}}$ имеет изолированную особую точку в начале координат). Предположим, что векторное поле $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ на V имеет алгебраически изолированную особую точку в начале координат. В этом случае 1-форма $\omega = \sum X_i dx_i$ на $V_{\mathbb{C}}$ может иметь неизолированную особую точку в нём. Например, это имеет место для $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$. В таком случае трудно надеяться на существование алгебраической формулы для индекса $\text{ind}_0 \omega$ 1-формы ω . Следующее утверждение позволяет обойти эту трудность.

Лемма 1. Пусть $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ — векторное поле, касающееся V и имеющее алгебраически изолированную (на V) особую точку в начале координат. Тогда возможно после аналитической замены координат в $(\mathbb{R}^n, 0)$ (в действительности, после замены общего вида), соответствующая 1-форма $\omega = \sum X_i dx_i$ на V также имеет алгебраически изолированную особую точку в начале координат.

Доказательство. Рассмотрим подмножество Ξ пространства $J^1(V_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \mathbb{C}^n)$ 1-струй отображений из $V_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ в \mathbb{C}^n , которое состоит из струй $(F(x), dF(x))$ ($x \in V_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, $F(x) \in \mathbb{C}^n$, $dF(x) : T_x V_{\mathbb{C}} \rightarrow T_{F(x)} \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$), таких что $dF(x)(X(x))$ ортогонально к $\text{Im } dF(x)$ в смысле квадратичной формы $\sum_{i=1}^n z_i^2$ на \mathbb{C}^n . Ξ является подмногообразием в $J^1(V \setminus \{0\}, \mathbb{C}^n)$ коразмерности $n - k = \dim V_{\mathbb{C}}$. Для иммерсии $F : V_{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n$ точки пересечения образа струйного расширения $J^1 F$ отображения F с Ξ — это в точности те точки, в которых 1-форма, соответствующая векторному полю $F_* X$, равна нулю на $T_{F(x)} F(V_{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$. Из сильной теоремы трансверсальности

вытекает, что для общей замены координат образ пространства $V_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ пересекает Σ (трансверсально) в изолированных точках. Теперь тот факт, что после замены координат 1-форма, соответствующая рассматриваемому векторному полю, имеет алгебраически изолированную особую точку в начале координат, следует из леммы об отборе кривых. \square

§ 2. Индекс голоморфной 1-формы на *иопн*

Пусть $f = (f_1, \dots, f_k): (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ — росток аналитического отображения, которое определяет $(n - k)$ -мерную *иопн* $V = f^{-1}(0) \subset \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ ($f_i: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$).

Для роста голоморфного векторного поля X , касательного к V и имеющего изолированную особую точку на V в начале координат, в [15] и [20] был определён некий индекс. Напомним его определение. Пусть U — окрестность начала координат в \mathbb{C}^n , в которой определены все функции f_i ($i = 1, \dots, k$) и векторное поле X . Пусть $S_\delta \subset U$ — сфера достаточно малого радиуса с центром в начале координат, пересекающая многообразие V трансверсально. Пусть $K = V \cap S_\delta$ — зацепление *иопн* $(V, 0)$. Определим $\text{grad } f_i$ как

$$\text{grad } f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right).$$

Имеется отображение

$$(X, \text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_k): K \rightarrow W_{k+1}(\mathbb{C}^n),$$

где $W_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ — многообразие Штифеля $(k + 1)$ -реперов в пространстве \mathbb{C}^n . Хорошо известно, что многообразие $W_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ $(2(n - k) - 2)$ -связно и что $H_{2(n-k)-1}(W_{k+1}(\mathbb{C}^n)) \cong \pi_{2(n-k)-1}(W_{k+1}(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{Z}$ (см., например, [7]). С другой стороны, K является гладким многообразием размерности $2(n - k) - 1$, имеющим естественную ориентацию как край комплексного многообразия $V \setminus \{0\}$. Поэтому для отображения из K в $W_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ определена степень. Индекс голоморфного векторного поля X на V в начале координат определяется как степень указанного отображения.

Замечание. Обратите внимание, что в этом определении используется комплексное сопряжение, а компоненты описанного отображения имеют разную тензорную природу. В то время, как X — векторное поле, градиент $\text{grad } f_i$ более подобен ковектору.

Приспособим определение индекса голоморфного векторного поля к случаю голоморфной 1-формы на V . Пусть $\omega = \sum A_i dx_i$ ($A_i = A_i(x)$) —

росток голоморфной 1-формы на $(\mathbb{C}^n, 0)$, которая как 1-форма на V имеет (не более чем) изолированную особую точку в начале координат (и таким образом не обращается в нуль на касательном пространстве $T_P V$ к многообразию V во всех точках P из проколотой окрестности начала координат в V). 1-формы $\omega, df_1, \dots, df_k$ линейно независимы во всех точках $P \in K$. Таким образом, определено отображение

$$(\omega, df_1, \dots, df_k): K \rightarrow W_{k+1}(\mathbb{C}^n).$$

Определение: Мы определяем индекс 1-формы ω на V в начале координат 0, $\text{ind}_{\mathbb{C},0} \omega$, как степень отображения

$$(\omega, df_1, \dots, df_k): K \rightarrow W_{k+1}(\mathbb{C}^n)$$

(здесь $W_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ — многообразие Штифеля $(k+1)$ -реперов в двойственном пространстве \mathbb{C}^n).

Замечание. Многообразие Штифеля $W_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ $(k+1)$ -реперов в пространстве \mathbb{C}^n гомотопически эквивалентно многообразию (Штифеля) $\widetilde{W}_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ ортонормированных (по отношению к эрмитову скалярному произведению $\sum x_i \bar{y}_i$) $(k+1)$ -реперов в \mathbb{C}^n . Гомотопическая эквивалентность определяется с помощью процесса Грама-Шмидта. Поэтому в определении можно заменить многообразие $W_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ на многообразие $\widetilde{W}_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ и отображение

$$(\omega, df_1, \dots, df_k): K \rightarrow W_{k+1}(\mathbb{C}^n)$$

на соответствующее отображение

$$(\omega, df_1, \dots, df_k)^\sim: K \rightarrow \widetilde{W}_{k+1}(\mathbb{C}^n).$$

Однако, $\widetilde{W}_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ не является комплексно аналитическим многообразием и поэтому отображение

$$(\omega, df_1, \dots, df_k)^\sim: U \setminus \{0\} \rightarrow \widetilde{W}_{k+1}(\mathbb{C}^n)$$

проколотой окрестности $U \setminus \{0\}$ начала координат в V не является комплексно аналитическим (в отличие от отображения $(\omega, df_1, \dots, df_k): U \setminus \{0\} \rightarrow W_{k+1}(\mathbb{C}^n)$). Мы предпочитаем давать «более комплексно аналитическое» определение, иногда используя отображение в $\widetilde{W}_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ для вычислений.

Пример. Пусть $n = 2, k = 1, f_1(x, y) = x^2 + y^3$ и рассмотрим 1-форму

$$\omega = 3y^2 dx - 2x dy.$$

Форма ω на $V = \{f_1 = 0\}$ имеет изолированный нуль в начале координат. Нетрудно вычислить, что степень отображения

$$(\omega, df_1)^\sim: K \rightarrow \widetilde{W}_2(\mathbb{C}^2) \cong U(2)$$

равна 6. Поэтому $\text{ind}_{\mathbb{C},0} \omega = 6$ (см. также Утверждение 3). Эта 1-форма (в описанном выше смысле) соответствует векторному полю

$$X = 3y^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Это векторное поле оказывается касающимся гиперповерхности $V = \{f_1 = 0\}$ и имеет изолированную особую точку в начале координат на ней, но его индекс равен 0, поскольку отображение

$$(X, \text{grad } f_1)^\sim: K \rightarrow \widetilde{W}_2(\mathbb{C}^2) \cong U(2)$$

переводит K в односвязное многообразие $SU(2)$.

Пусть B_δ — шар радиуса δ с центром в начале координат в пространстве \mathbb{C}^n с краем S_δ . Предположим, что функции f_1, \dots, f_k и 1-форма ω определены на окрестности шара B_δ и пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \mathbb{C}^k$ достаточно мало (так что множество уровня $V_\varepsilon := f^{-1}(\varepsilon) \cap B_\delta$ трансверсально к сфере S_δ) и такое, что множество уровня V_ε неособо.

Определение: Пусть M — (неособое) комплексное m -мерное многообразие и пусть η — голоморфная 1-форма на M . Говорят, что нуль $P \in M$ 1-формы η невырожден, если в локальных координатах y_1, \dots, y_m на M в окрестности точки P , в которых 1-форма η записывается в виде $\eta = C_1 dy_1 + \dots + C_m dy_m$, гессиан формы η в точке P , т. е. определитель матрицы

$$\left(\frac{\partial C_i}{\partial y_j}(P) \right)_{i,j=1,\dots,m},$$

не равен нулю.

Существует шевеление $\tilde{\omega}$ 1-формы ω , имеющее только невырожденные нули на многообразии V_ε . (В действительности шевеление формы *omega* общего вида и, в частности, шевеление вида $\tilde{\omega} = \omega - \lambda \eta$ для 1-формы η общего вида с постоянными коэффициентами на \mathbb{C}^n (где $\lambda \neq 0$ достаточно мало) обладает этим свойством.)

Предложение 3. *Индекс $\text{ind}_{\mathbb{C},0} \omega$ 1-формы ω на иопп V в начале координат равен количеству нулей формы ω на многообразии V_ε , считаемых с кратностями. Он также равен количеству нулей формы $\tilde{\omega}$ на многообразии V_ε для малого шевеления $\tilde{\omega}$ 1-формы ω , имеющего только невырожденные нули на многообразии V_ε .*

Доказательство. Пусть P_1, \dots, P_ν — нули формы ω на многообразии V_ε . Пусть в локальных координатах $y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n$ с центром в точке P_i , таких что $V_\varepsilon = \{y_1 = \dots = y_k = 0\}$ (можно взять $y_i = f_i - \varepsilon_i$ для $1 \leq i \leq k$), $\omega|_{V_\varepsilon} = C_{k+1}dy_{k+1} + \dots + C_ndy_n$. Пусть B_i — маленький открытый шар с центром в точке P_i . Степень отображения $(\omega, df_1, \dots, df_k): \partial B_i \cap V_\varepsilon \rightarrow W_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ равна степени отображения $S^{2(n-k)-1} \rightarrow S^{2(n-k)-1}$, определяемого как

$$x \mapsto (C_{k+1}, \dots, C_n) / \|(C_{k+1}, \dots, C_n)\|,$$

и поэтому равна кратности μ_i нуля P_i (см., например, [3]). Рассмотрим многообразие

$$M := V_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_i.$$

Поскольку 1-форма ω не имеет нулей на многообразии M , степень отображения

$$(\omega, df_1, \dots, df_k): \partial M \rightarrow W_{k+1}(\mathbb{C}^n)$$

равна нулю. Поэтому

$$\text{ind}_{\mathbb{C},0} \omega = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i.$$

Если $\tilde{\omega}$ — шевеление 1-формы ω , имеющее только невырожденные нули на многообразии V_ε , то оно имеет ровно μ_i невырожденных нулей в шаре $B_i \cap V_\varepsilon$. \square

§ 3. Алгебраическая формула для индекса

В этом разделе нашей целью является вывод следующей алгебраической формулы для комплексного индекса.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ — алгебра ростков голоморфных функций в начале координат на пространстве \mathbb{C}^n и пусть $I \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ — идеал, порождённый функциями f_1, \dots, f_k и $(k+1) \times (k+1)$ -минорами матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \\ A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\text{ind}_{\mathbb{C},0} \omega = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I.$$

Замечание. Соответствующий результат для случая когда 1-форма ω является дифференциалом df_{k+1} функции f_{k+1} первыми доказали Ле Дунг Транг [5] и Г.-М. Грюэль [16, Лемма 1.9]. Г.-М. Грюэль указал нам, что его рассуждения из [16] подходят и для доказательства Теоремы 1.

Доказательство будет опираться на фундаментальный факт, который мы хотим сформулировать.

Пусть $F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^M, 0)$ — версальная деформация отображения $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$, пусть $N := n + M$, $K := k + M$. Той же самой буквой F мы обозначаем представитель $U \rightarrow \mathbb{C}^K$ деформации, определённый в малой открытой окрестности $U \subset \mathbb{C}^N$ начала координат. Пусть $A_i = 0$ для $i = n + 1, \dots, N$ и пусть $\eta = \sum_{i=1}^N B_i dx_i$ — такая 1-форма, что для регулярного значения $s \in F(U)$ отображения F и для $\lambda \in W$, $\lambda \neq 0$, где $W \subset \mathbb{C}$ — подходящая малая открытая окрестность начала координат, форма $\omega - \lambda\eta$ имеет только изолированные нули на $F^{-1}(s)$.

Рассмотрим матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_K}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_K}{\partial x_N} \\ A_1 - \lambda B_1 & \dots & A_N - \lambda B_N \end{pmatrix}.$$

Пусть \mathbb{C}^{N+1} — векторное пространство с координатами x_1, \dots, x_N, λ . Пусть $\mathcal{C}(U \times W)$ обозначает идеал в алгебре $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{N+1}}(U \times W)$, порождённый $(K + 1) \times (K + 1)$ -минорами матрицы Φ . Пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{N+1}}$ обозначает соответствующий пучок идеалов и пусть $C \subset U \times W$ — аналитическое пространство, определённое пучком \mathcal{C} . Пространство C состоит из тех точек $x \in U \times W$, в которых отображение F не является субмерсией или форма $\omega - \lambda\eta$ имеет неизолированный нуль в точке $F^{-1}(F(x))$. Пусть $\mathcal{O}_C := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{N+1}}/\mathcal{C}$ — структурный пучок пространства C .

Пусть $\tilde{F}: U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{K+1}$ — отображение, определённое тем, что $(x, \lambda) \mapsto (F(x), \lambda)$. Пусть $\Sigma := \tilde{F}(C)$ и пусть $\pi := \tilde{F}|_C: C \rightarrow \Sigma$. Тогда Σ является аналитическим пространством, снабжённым структурным пучком $\mathcal{O}_\Sigma := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{K+1}}/\mathcal{F}_0(\pi_*(\mathcal{O}_C))$ (ограниченным на $\pi(C)$), где через \mathcal{F}_0 обозначается нулевой идеал Фиттинга (ср. [18, 4.E]). Отображение $\pi: C \rightarrow \Sigma$ является конечнолистным.

Теорема 1 будет выведена из следующей.

Теорема 2. Для любой точки $x \in C$ $\mathcal{O}_{C,x}$ является плоским $\mathcal{O}_{\Sigma, \pi(x)}$ -модулем.

Доказательство. Доказательство следует той же схеме, что [18, (4.4) и (4.8)].

Пусть $x \in C$ и $s = \pi(x)$. Миноры матрицы Φ обращаются в нуль в точке $x \in U \times W$ тогда и только тогда, когда матрица $\Phi(x)$ имеет не максимальный ранг. Множество $(N + 1) \times (K + 1)$ комплексных матриц ранга $< K + 1$ является аффинным алгебраическим пространством коразмерности $N - K + 1$ в множестве всех $(N + 1) \times (K + 1)$ комплексных матриц. Поэтому пространство C имеет размерность, равную K . Отсюда следует, что $\text{depth}(C_x; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{N+1}, x}) = N - K + 1$. Вследствие [10, Следствие (2.7)] отсюда вытекает, что гомологическая размерность $\text{hd} C_x$ идеала C_x равна $N - K + 1$.

По формуле Ауслендера—Бухсбаума (см., например, [19, с. 4]) имеем

$$\text{depth } \mathcal{O}_{C,x} = N + 1 - (N - K + 1) = K.$$

Поскольку также $\dim \mathcal{O}_{C,x} = K$, отсюда следует, что $\mathcal{O}_{C,x}$ является кольцом Коэна—Маколея.

Поскольку отображение $\tilde{F}|_C: C \rightarrow \mathbb{C}^{K+1}$ является конечнолистным, $\mathcal{O}_{C,x}$ является $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{K+1}, s}$ -модулем конечного типа. Поэтому $\mathcal{O}_{C,x}$ является модулем Коэна—Маколея над кольцом $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{K+1}, s}$ и

$$\text{depth}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{K+1}, s}} \mathcal{O}_{C,x} = \dim \mathcal{O}_{C,x} = K.$$

Поскольку $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{K+1}, s}$ является $(K + 1)$ -мерным регулярным кольцом, из формулы Ауслендера—Бухсбаума вытекает, что гомологическая размерность $\mathcal{O}_{C,x}$ как $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{K+1}, s}$ -модуля равна 1. Это означает, что существует точная последовательность $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{K+1}, s}$ -модулей

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{K+1}, s}^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{K+1}, s}^p \rightarrow \mathcal{O}_{C,x} \rightarrow 0.$$

При этом q должно быть равно p и нулевой идеал Фиттинга $\mathcal{O}_{C,x}$, рассматриваемый как $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{K+1}, s}$ -модуль порождён определителем отображения α . Следовательно Σ — гиперповерхность, а $\mathcal{O}_{\Sigma, s}$ также является кольцом Коэна—Маколея.

Поскольку отображение $\pi: C \rightarrow \Sigma$ является конечнолистным, $\mathcal{O}_{C,x}$ также является $\mathcal{O}_{\Sigma, s}$ -модулем конечного типа. С другой стороны конечно порождённый $\mathcal{O}_{\Sigma, s}$ -модуль является плоским тогда и только тогда, когда он свободен (см., например, [19, (3.G) Предложение]). Поэтому достаточно показать, что $\mathcal{O}_{C,x}$ является свободным $\mathcal{O}_{\Sigma, s}$ -модулем. По формуле Ауслендера—Бухсбаума имеем

$$\text{hd}_{\mathcal{O}_{\Sigma, s}} \mathcal{O}_{C,x} + \text{depth}_{\mathcal{O}_{\Sigma, s}} \mathcal{O}_{C,x} = \text{depth } \mathcal{O}_{\Sigma, s}.$$

Поскольку $\text{depth}_{\mathcal{O}_{\Sigma,s}} \mathcal{O}_{C,x} = \text{depth} \mathcal{O}_{\Sigma,s} = \dim \mathcal{O}_{\Sigma,s} = K$, отсюда вытекает что $\text{hd}_{\mathcal{O}_{\Sigma,s}} \mathcal{O}_{C,x} = 0$. Но это означает, что $\mathcal{O}_{C,x}$ является свободным $\mathcal{O}_{\Sigma,s}$ -модулем. \square

Доказательство Теоремы 1. Рассмотрим опять отображение $\pi: C \rightarrow \Sigma$ и пусть $s \in \Sigma$. Для любой точки $x \in C(s) := \pi^{-1}(s) \subset \mathbb{C} \otimes_{\mathcal{O}_{\Sigma,s}} \mathcal{O}_{C,x}$ является конечномерным векторным пространством над полем \mathbb{C} . Обозначим его размерность через $\nu(x)$. Положим

$$\nu(s) = \sum_{x \in C(s)} \nu(x).$$

По Теореме 2 и [11, §5, Теорема 1], $\nu(s)$ — локально постоянная функция точки s . Для точки $s = (s', \lambda)$, где s' — регулярное значение отображения F , $\nu(s) = \text{ind}_{\mathbb{C},0} \omega$ в соответствии с Предложением 3. С другой стороны $\nu(0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C^n,0}/I$. \square

§ 4. Вещественный индекс как сигнатура семейства квадратичных форм

Здесь мы хотим обсудить индекс вещественно аналитической 1-формы ω на вещественной *ионн* $(V, 0) = \{f_1 = \dots = f_k = 0\} \subset (\mathbb{R}^n, 0)$ (с алгебраически изолированной особой точкой в начале координат). 1-форма ω на многообразии V является ограничением аналитической 1-формы $\sum_{i=1}^n A_i dx_i$, определённой на пространстве \mathbb{R}^n в некоторой окрестности начала координат (эту 1-форму мы также обозначаем через ω). Мы рассматриваем (аналитические) функции f_1, \dots, f_k и 1-форму ω как определённые также на некоторой окрестности начала координат в пространстве \mathbb{C}^n . Пусть $\delta > 0$ достаточно мало так, что функции f_1, \dots, f_k и 1-форма ω определены на шаре B_δ радиуса δ с центром в начале координат в пространстве \mathbb{C}^n и для любого положительного $\delta' < \delta$ многообразие $V_{\mathbb{C}} = \{f_1 = \dots = f_k = 0\} \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ пересекает сферу $S_{\delta'}$ радиуса δ' с центром в начале координат трансверсально. Для достаточно малого $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ ($|\varepsilon| \ll \delta$), положим $V_{\mathbb{C},\varepsilon} = \{f = \varepsilon\} \cap B_\delta \subset \mathbb{C}^n$, для вещественного ε положим $V_\varepsilon = V_{\mathbb{C},\varepsilon} \cap \mathbb{R}^n$. Пусть $\Sigma \subset (\mathbb{C}^k, 0)$ — бифуркационная диаграмма отображения f (множество значений $\varepsilon \in (\mathbb{C}^k, 0)$, критических для отображения f), $\Sigma_{\mathbb{R}} = \Sigma \cap (\mathbb{R}^k, 0)$.

В соответствии с Предложением 2, для вещественного ε вне бифуркационной диаграммы (т. е. для $\varepsilon \in \mathbb{R}^k \setminus \Sigma_{\mathbb{R}}$), (вещественный) индекс $\text{ind}_0 \omega$ отличается от суммы индексов нулей 1-формы ω на вещественном глад-

ком многообразии V_ε на $(\chi(V_\varepsilon) - 1)$. В соответствии с Предложением 3 комплексный индекс $\text{ind}_{\mathbb{C},0} \omega$ считает число нулей той же 1-формы на комплексном многообразии $V_{\mathbb{C},\varepsilon}$. Эйлерова характеристика $\chi(V_\varepsilon)$ вещественного многообразия уровня V_ε различна для различных $\varepsilon \in \mathbb{R}^k \setminus \Sigma_{\mathbb{R}}$ (по крайней мере для чётного $n - k$). Она постоянна на каждой компоненте дополнения бифуркационной диаграммы $\Sigma_{\mathbb{R}}$. Поэтому не следует надеяться получить (вещественный) индекс $\text{ind}_0 \omega$ 1-формы ω как сигнатуру невырожденной квадратичной формы на векторном пространстве размерности $\text{ind}_{\mathbb{C},0} \omega (= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I)$. Такая сигнатура может быть равна $\text{ind}_0 \omega + (\chi(V_\varepsilon) - 1)$ и поэтому должна быть различной для различных компонент дополнения к бифуркационной диаграмме. Мы хотим получить несколько более точное описание.

Теорема 3. *Существует семейство Q_ε квадратичных форм на пространстве \mathbb{C}^L размерности $L = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I$ (т. е. — семейство симметричных $L \times L$ -матриц) определённых для ε из окрестности начала координат в пространстве \mathbb{C}^k и аналитически зависящих от ε , такое что:*

- 1) для ε из дополнения к бифуркационной диаграмме Σ квадратичная форма Q_ε невырождена;
- 2) для вещественного ε квадратичная форма (т. е. матрица) Q_ε вещественна и для вещественного ε вне бифуркационной диаграммы (т. е. для $\varepsilon \in \mathbb{R}^k \setminus \Sigma_{\mathbb{R}}$) её сигнатура равна

$$\sum_{P \in V_\varepsilon} \text{ind}_P \omega = \text{ind}_0 \omega + (\chi(V_\varepsilon) - 1). \quad (4.1)$$

Доказательство. Удобно будет определить семейство Q_ε для большего пространства параметров. Пусть $F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^M, 0)$ — вещественная (т. е. инвариантная по отношению к комплексному сопряжению) версальная деформация отображения $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$, $F(x, \varepsilon') = (f_{\varepsilon'}(x), \varepsilon')$, $f_0 = f$. Здесь $\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_{k+M}$ — координаты на пространстве \mathbb{C}^M , $\varepsilon' = (\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_{k+M}) \in \mathbb{C}^M$; пусть $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_{k+M}) \in \mathbb{C}^{k+M} = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^M$. Пусть \mathbb{C}_α^n — n -мерное аффинное пространство с координатами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, пусть $\varkappa = (\hat{\varepsilon}, \alpha)$ ($\varkappa \in \mathbb{C}_\varkappa^{k+M+n} = \mathbb{C}^{k+M} \times \mathbb{C}_\alpha^n$). Обозначим той же буквой F тривиальное продолжение $(\mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_{\varepsilon'}^M \times \mathbb{C}_\alpha^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}_\varepsilon^k \times \mathbb{C}_{\varepsilon'}^M \times \mathbb{C}_\alpha^n, 0) = (\mathbb{C}_\varkappa^{k+M+n}, 0)$ выбранной версальной деформации: $F(x, \varepsilon', \alpha) = (f_{\varepsilon'}(x), \varepsilon', \alpha)$. Пусть Ω — 1-форма на пространстве $(\mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_{\varepsilon'}^M \times \mathbb{C}_\alpha^n, 0)$, определённая равенством

$$\Omega = \omega - \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i = \sum_{i=1}^n (A_i - \alpha_i) dx_i.$$

Пусть $J_P = \mathcal{O}_{P,\mathcal{X}}/I_P$. Из доказательства Теоремы 1 следует, что:

$$1) \sum_{P \in V_{\mathbb{C},\mathcal{X}}} \dim_{\mathbb{C}} J_P = \text{const} = \dim_{\mathbb{C}} J_0;$$

2) если $\varphi_1, \dots, \varphi_L$ — вещественные элементы кольца $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, являющиеся представителями базиса фактор-алгебры J_0 , (рассматриваемые как аналитические функции определённые на общей окрестности начала координат в пространстве \mathbb{C}^n), то для достаточно малого \mathcal{X} мультиростки функций $\varphi_1, \dots, \varphi_L$ являются представителями базиса алгебры $J_{\mathcal{X}} = \bigoplus_{P \in V_{\mathbb{C},\mathcal{X}}} J_P$. Таким образом, алгебры $J_{\mathcal{X}}$ образуют тривиальное векторное расслоение над окрестностью начала координат в пространстве \mathbb{C}^{k+M+n} и выбор (вещественных) представителей элементов базиса алгебры J_0 фиксирует тривиализацию этого расслоения, согласованную с вещественной структурой.

Как это обычно в подобных ситуациях, квадратичная форма $Q_{\mathcal{X}}$ на алгебре $J_{\mathcal{X}}$ определяется формулой

$$Q_{\mathcal{X}}(\psi_1, \psi_2) = \ell_{\mathcal{X}}(\psi_1 \psi_2),$$

где $\ell_{\mathcal{X}}$ — линейная функция на векторном пространстве $J_{\mathcal{X}}$, $\psi_1 \psi_2$ означает произведение в алгебре $J_{\mathcal{X}}$.

Пусть $\mathcal{X} \in (\mathbb{C}^{k+M+n}, 0)$ таково, что $\Delta(P) \neq 0$ для всех особых точек P 1-формы $\Omega|_{V_{\mathbb{C},\mathcal{X}}}$. В частности, это означает, что \mathcal{X} не принадлежит дискриминанту Σ деформации и гессиан h определён в окрестности каждой особой P . Для особой точки P 1-формы $\Omega|_{V_{\mathbb{C},\mathcal{X}}}$ положим $\tilde{h}_P := h \cdot \Delta(P)^2$. Для $\psi \in J_{\mathcal{X}}$ определим $\ell_{\mathcal{X}}(\psi)$ как

$$\sum_{P \in V_{\mathbb{C},\mathcal{X}}} \tilde{\ell}_P(\psi),$$

где $\tilde{\ell}_P(\psi) = 0$ для ψ из слагаемого $J_{P'}$ для $P' \neq P$,

$$\tilde{\ell}_P(\psi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \sum \frac{\psi(a_i)}{\tilde{h}_P(a_i)}$$

для $\psi \in J_P$, $\beta = \beta_{k+1} dx_{k+1} + \dots + \beta_n dx_n$, сумма берётся по всем простым (т. е. невырожденным) нулям 1-формы $\Omega - \beta$, которые рождаются из (вообще говоря, вырожденного) нуля P для β общего положения. Выражение под знаком предела определено для β общего положения (т. е. для общего β форма $\Omega - \beta$ имеет только невырожденные нули). То, что: оно имеет конечный предел при β стремящемся к нулю (как точка из \mathbb{C}^{n-k}), этот предел аналитически зависит от \mathcal{X} , соответствующая квадратичная форма невырожденна, вещественна для вещественного \mathcal{X} и в последнем случае

сигнатура соответствующей вещественной квадратичной формы равна

$$\sum_{P \in V_\varepsilon} \text{ind}_P \omega = \text{ind}_0 \omega + (\chi(V_\varepsilon) - 1)$$

— следует из известных свойств аналогичных объектов в «гладком случае» (см., например, [3], § 5).

В настоящий момент требуемые линейные функции ℓ_x (и таким образом, квадратичные формы Q_x) определены для x вне дискриминанта Σ и множества Ξ тех x , для которых на многообразии $V_{\mathbb{C},x}$ имеется нуль P формы $\Omega|_{V_{\mathbb{C},x}}$ с $\Delta(P) = 0$ (Σ и Ξ — гиперповерхности в \mathbb{C}^{k+M+n}). Мы хотим показать, что на самом деле это семейство линейных функций аналитически продолжается также и на эти два подмножества. При этом мы должны будем проконтролировать продолжение на последнее подмножество, чтобы убедиться, что квадратичная форма Q_x там не вырождается.

Чтобы показать, что построенное семейство линейных функций ℓ_x аналитически продолжается на множество $\Xi \setminus \Sigma$ тех значений $x \in \mathbb{C}^{k+M+n} \setminus \Sigma$, для которых существует нуль P формы $\Omega|_{V_{\mathbb{C},x}}$ с $\Delta(P) = 0$, достаточно доказать, что для невырожденного нуля P формы $\Omega|_{V_{\mathbb{C},x}}$ с $\Delta(P) = 0$ линейная функция $\tilde{\ell}_{P'}(\psi)$ имеет конечный, отличный от нуля предел при P' стремящемся к P , где P' — особая точка 1-формы $\Omega|_{V_{\mathbb{C},F(P')}}$, $F(P') \notin \Xi$. В этом случае $\dim_{\mathbb{C}} J_P = \dim_{\mathbb{C}} J_{P'} = 1$, векторные пространства J_P и $J_{P'}$ порождены одним элементом $\varphi \equiv 1$, $\tilde{\ell}_{P'}(1) = \frac{1}{h_{P'}(P')}$ и достаточно показать, что $\tilde{h}_{P'}(P')$ имеет конечный ненулевой предел при $P' \rightarrow P$. Пусть $\sigma = \{j_1, \dots, j_n\}$ — такая перестановка индексов $1, \dots, n$, что в точке P (и поэтому во всех точках) якобиан Δ' функций f_1, \dots, f_k по отношению к переменным x_{j_1}, \dots, x_{j_k} отличен от нуля. В этом случае $x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_n}$ являются локальными координатами на многообразии $V_{\mathbb{C},x}$ в точке P и поэтому во всех точках P' , близких к P (на соответствующем многообразии уровня). В точке P' близкой к P и такой, в которой также $\Delta(P') \neq 0$ (и поэтому где $x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_n}$ также являются локальными координатами) якобиан замены координат $x_{k+1}, \dots, x_n \mapsto x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_n}$ равен $\text{sgn}(\sigma) \cdot \frac{\Delta'(P')}{\Delta(P')}$. Таким образом, значение гессиана ограничения формы Ω на соответствующее многообразие в координатах $x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_n}$ в точке P' равен

$$\frac{h(P')\Delta(P')^2}{\Delta'(P')^2}$$

и поэтому отличается от $\tilde{h}(P')$ на ненулевой аналитический множитель, что завершает доказательство в этом случае.

Чтобы показать, что построенное семейство линейных функций $\ell_{\mathcal{X}}$ аналитически продолжается на дискриминант Σ , достаточно доказать следующее. Пусть P — точка, в которой соответствующее многообразие уровня $V_{\mathbb{C}, \mathcal{X}}$ имеет особенность типа A_1 , 1-форма Ω (как 1-форма на \mathbb{C}^{n+M+n}) не обращается в нуль, а её нулевая гиперплоскость находится в общем положении по отношению к касательному конусу к пространству $V_{\mathbb{C}, \mathcal{X}}$ в точке P . В этом случае $\dim_{\mathbb{C}} J_P = 2$. Пусть $\tilde{\mathcal{X}}$ из окрестности точки \mathcal{X} имеет вид $(\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_{k+M}, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (т. е. $\tilde{\mathcal{X}}$ отличается от \mathcal{X} только первыми k координатами: значениями функций f_1, \dots, f_k) и такая, что $\tilde{\mathcal{X}} \notin \Sigma$. 1-форма $\Omega|_{V_{\mathbb{C}, \tilde{\mathcal{X}}}}$ имеет два невырожденных нуля $P_1 = P_1(\tilde{\mathcal{X}})$ и $P_2 = P_2(\tilde{\mathcal{X}})$. Достаточно показать, что линейная функция $\tilde{\ell}_{P_1} + \tilde{\ell}_{P_2}$ имеет конечный предел при $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$.

Без потери общности можно предполагать, что $k = 1$, $n \geq 2$, точка P является началом координат в пространстве \mathbb{C}^n , $f_1 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $\mathcal{X} = 0$, $\omega(0) = dx_1$. Последнее равенство означает, что $\omega = (1 + C_1)dx_1 + \dots + C_n dx_n$, где $C_i \in \mathfrak{m}$, т. е. $C_i(0) = 0$. Пусть $\tilde{\mathcal{X}} = \varepsilon^2$. В качестве базиса алгебры J_P (как векторного пространства) и поэтому и алгебры $J_{P_1} \oplus J_{P_2}$ можно взять $\varphi_1 \equiv 1$ и $\varphi_2 = x_1$. Для координат точек P_1 и P_2 имеем $x_1 = \pm \varepsilon + o(\varepsilon)$, $x_i = o(\varepsilon)$ при $i \geq 2$. Здесь и далее все ряды являются степенными рядами по переменной ε и поэтому, например, $o(\varepsilon)$ означает $a_2 \varepsilon^2 +$ члены более высокой степени. Нетрудно вычислить, что $h(P_i) = (-1)^{n-1} (\pm \varepsilon)^{1-n} +$ члены более высокой степени и следовательно $\tilde{h}(P_i) = (-1)^{n-1} (\pm \varepsilon)^{3-n} + \dots$. Поэтому $\tilde{\ell}_{P_1}(1) + \tilde{\ell}_{P_2}(1) = (-1)^{n-1} (\varepsilon^{n-3} + (-\varepsilon)^{n-3}) + \dots$, $\tilde{\ell}_{P_1}(x_1) + \tilde{\ell}_{P_2}(x_1) = (-1)^{n-1} (\varepsilon^{n-2} + (-\varepsilon)^{n-2}) + \dots$. Оба выражения имеют конечные пределы при ε стремящемся к нулю (при $n = 2$ члены ε^{-1} и $(-\varepsilon)^{-1}$ дают в сумме нуль). \square

Замечания. 1) Чтобы доказать Теорему 3, в действительности не обязательно проводить точные вычисления для случая A_1 . Ясно, что компоненты линейной функции $\ell_{\mathcal{X}}$ (её значения на элементах базиса) могут иметь только степенные асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому умножая построенные функции на подходящую степень уравнения дискриминанта, мы получаем требуемое семейство.

2) Приведенные выше вычисления для особенности A_1 показывают, что при $n - k = 1$, т. е. для кривых, построенное семейство квадратичных форм нигде не вырождается (включая дискриминант) и, в частности, квадратичная форма Q_0 (определённая на алгебре J_0) невырождена и её сигнатура равна тому же выражению (4.1).

3) В [22] было доказано в некотором роде подобное утверждение, которое в наших терминах может рассматриваться как частный случай

когда 1-форма ω является дифференциалом функции df_{k+1} . Однако, определённое там семейство квадратичных форм (параметризованных точками образа отображения $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$) может вырождаться в точках $\varepsilon \in \mathbb{C}^k$, для которых существует нуль P 1-формы ω на многообразии уровня $V_{\mathbb{C}, \varepsilon} \subset \Delta(P) = 0$ (и, возможно, где-нибудь ещё). (Между прочим, в некоторых специальных случаях все точки ε из образа \mathbb{C}^k могут обладать этим свойством.) Поэтому можно сказать, что наш результат даёт некоторое усиление результата из [22] также и для случая $\omega = df_{k+1}$.

§ 5. Особые точки и индексы мероморфных 1-форм

Для голоморфной 1-формы с изолированными нулями на компактном многообразии M сумма индексов нулей равна характеристическому числу $c_n(T^*M)[M] = (-1)^n \chi(M)$, где T^*M — кокасательное расслоение (формула типа Пуанкаре—Хопфа). Пусть V^n — полное пересечение в проективном пространстве $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+k}$ с изолированными особенностями и пусть α — голоморфная 1-форма на V (это означает, что росток формы α в любой точке голоморфен). Особые точки формы α — это особые точки самого пространства V и нули формы α на гладкой части пространства V . Предположим, что особые точки 1-формы α изолированы. Тогда сумма их индексов равна характеристическому числу $c_n(T^*\tilde{V})[\tilde{V}] = (-1)^n \chi(\tilde{V})$ сглаживания \tilde{V} пространства V .

Ненулевые 1-формы на компактном комплексном многообразии редко существуют. Поэтому интересно рассмотреть мероморфные 1-формы, которых имеется множество (по крайней мере на проективных многообразиях). Этим же аргументировалось изучение мероморфных векторных полей в [9].

Пусть α — мероморфная 1-форма на компактном комплексном многообразии M^n , что означает, что α — голоморфная 1-форма вне положительного дивизора D и в окрестности любой точки многообразия M форма α может быть записана в виде $\hat{\alpha}/F$, где $F = 0$ — локальное уравнение дивизора D , а $\hat{\alpha}$ — голоморфная 1-форма. Пусть L — линейное расслоение, соответствующее дивизору D , т. е. L имеет голоморфное сечение s , дивизор нулей которых совпадает с D . Тогда $\omega = s\alpha$ является голоморфным сечением векторного расслоения $T^*M \otimes L$. В некоторых конструкциях (например, в [9]) мероморфная 1-форма на M определяется просто как голоморфное сечение тензорного произведения $T^*M \otimes L$ для некоторого голоморфного линейного расслоения L . Это определение несколько отличается от сформулированного. Например, в этом случае

определён только класс дивизора полюсов мероморфной 1-формы, а не сам дивизор. Более того, при такой постановке значение мероморфной 1-формы на векторном поле является не функцией, а сечением линейного расслоения L . В последующем мы используем обозначение ω для сечения векторного расслоения $T^*M \otimes L$, для краткости также называя его мероморфной 1-формой. Если сечение ω имеет изолированные нули, то сумма их индексов равна характеристическому числу $c_n(T^*M \otimes L)[M]$ и значит зависит от L .

Для мероморфной 1-формы на неособой компактной комплексной кривой M характеристическое число $c_1(T^*M)[M] = -\chi(M)$ равно количеству нулей минус количество полюсов, считаемых с кратностями. Поэтому, для того чтобы выразить эйлерову характеристику компактного многообразия в терминах особенностей мероморфной 1-формы, необходимо учитывать и дивизор D её полюсов. Если мероморфная 1-форма на многообразии M^n определена просто как сечение расслоения $T^*M \otimes L$, дивизор полюсов не определён и поэтому нельзя определить и особые точки формы на её множестве полюсов.

Для того чтобы привести формулу типа Пуанкаре—Хопфа для мероморфных 1-форм, т. е. чтобы выразить эйлерову характеристику компактного комплексного многообразия или сглаживания полного пересечения в терминах особенностей мероморфной 1-формы, мы вводим подходящее понятие индекса роста мероморфной 1-формы (с некоторой дополнительной структурой) на *иопн* так, что сумма индексов особых точек равна (плюс—минус) эйлеровой характеристике сглаживания.

Можно сказать, что формула типа Пуанкаре—Хопфа описывает локализацию инварианта (например, эйлеровой характеристики) многообразия в особых точках, скажем, векторного поля или 1-формы, т. е. его представление в виде суммы целочисленных инвариантов («индексов»), соответствующих особым точкам. Поэтому сначала следует определить особые точки. Пусть M^n — компактное комплексное многообразие, L — линейное расслоение над M , ω — голоморфное сечение векторного расслоения $T^*M \otimes L$. Нули формы ω на M определены, однако, множество полюсов формы ω не является корректно определённым. Для того чтобы обсуждать особые точки формы ω на множестве её полюсов (что, как следует из примера когда M — кривая), следует зафиксировать это множество. Это означает, что следует выбрать голоморфное сечение $s = s_1$ линейного расслоения L или выбрать его дивизор нулей $D = D_1$. Можно сказать, что следует рассматривать форму $\alpha = \omega/s$, т. е. пользоваться нашим исходным определением 1-формы.

Предположим на некоторое время, что дивизор D полюсов 1-формы ω неособый (в частности, приведённый). Это здесь не очень существен-

но, но делает обсуждение проще. Поскольку D является подмногообразием в M , корректно определено отображение $T^*M|_D \rightarrow T^*D$ и поэтому $(T^*M \otimes L)|_D \rightarrow T^*D \otimes L|_D$ (ограничение мероморфной 1-формы на D). (Используя 1-форму α , также можно определить только сечение векторного расслоения $T^*D \otimes L|_D$, а не мероморфную 1-форму на D с определённым множеством полюсов.)

Пусть ω_1 — ограничение ω на D_1 . Оно является голоморфным сечением векторного расслоения $T^*D \otimes L|_D$. Его нули корректно определены и должны рассматриваться как особые точки мероморфной 1-формы ω на множестве её полюсов. Для того чтобы рассматривать особые точки ω_1 на её множестве полюсов, мы снова должны зафиксировать дивизор полюсов. Предположим, что существует (положительный) дивизор D_2 на M , который является дивизором нулей другого сечения s_2 того же линейного расслоения L и который пересекает дивизор D_1 трансверсально (это, в частности, означает, что D_2 является неособым в точках его пересечения с дивизором D_1 и пересечение $D_1 \cap D_2$ также неособо). Имеется ограничение ω на пересечение $D_1 \cap D_2$ и его нули там.

Продолжая так же, мы приходим к ситуации, когда зафиксированы n дивизоров D_1, \dots, D_n (нулей сечений s_1, \dots, s_n линейного расслоения L) так что для любого $i = 1, \dots, n$, пересечение $D_1 \cap \dots \cap D_i$ неособо. Множество особых точек 1-формы ω — это объединение нулей самой ω и ограничений формы ω на пересечения $D_1 \cap \dots \cap D_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. (Для $i = n$ пересечение $D_1 \cap \dots \cap D_n$ нульмерно и все его точки должны рассматриваться как нули.) Можно сказать, что следует рассматривать набор мероморфных 1-форм $\omega/s_1, \dots, \omega/s_n$ на M , пропорциональных друг другу.

Предположим, что все нули самой формы ω и её ограничений на подмногообразия $D_1 \cap \dots \cap D_i, i = 1, \dots, n$, изолированы. Пусть m_0 (соответственно $m_i, i = 1, \dots, n$) — количество нулей формы ω (соответственно её ограничения на пересечение $D_1 \cap \dots \cap D_i$), считаемых с кратностями. В частности, m_n — количество точек в $D_1 \cap \dots \cap D_n$.

Теорема 4. $c_n(T^*M)[M] = (-1)^n \chi(M^n) = m_0 - m_1 + \dots + (-1)^n m_n$.

Замечания. 1. Можно показать, что

$$m_0 = (-1)^n (\chi(M) - \chi(D)) = (-1)^n \chi(M \setminus D).$$

Предположим, что все нули формы ω находятся вне D (это может рассматриваться как ситуация общего положения). Пусть s — голоморфное сечение линейного расслоения L с нулями на D . Тогда $\alpha = \omega/s$ — голоморфная 1-форма на $M \setminus D$ с простыми полюсами вдоль D . Поэтому в

данном случае количество m_0 нулей голоморфной 1-формы α на $M \setminus D$ совпадает с $(-1)^n \chi(M \setminus D)$. Такое соотношение выполняется для голоморфных 1-форм на компактных многообразиях ($M \setminus D$ некомпактно).

2. В [9] рассматривались мероморфные векторные поля на комплексных многообразиях. Для того, чтобы сформулировать вариант Теоремы 4 для векторных полей, необходимо определить нули векторного поля на дивизоре его полюсов. Однако, (в отличие от 1-форм) ограничение векторного поля на подмногообразия не определено (как векторное поле на подмногообразии). Для этого можно использовать проекцию векторного поля на подмногообразие. Однако, эта операция не является комплексно аналитической и поэтому после проектирования нужно рассматривать нули немероморфных векторных полей. Эти нули должны иметь знаки и должны считаться с ними.

Пример. Пусть

$$\alpha = \frac{xdy - ydx + dz}{x^2 + 4y^2 + z^2 + 1}$$

— мероморфная 1-форма на проективном пространстве $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ (x, y и z — аффинные координаты). Нетрудно увидеть, что нули соответствующей (формы) ω на $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ и также нули $\omega|_D$, $D = D_1 = \{x^2 + 4y^2 + z^2 + 1 = 0\}$, изолированы и $m_0 = 0$, $m_1 = 4$. Чтобы определить другие особые точки, нужно выбрать дивизоры D_2 и D_3 (например, $D_2 = \{x^2 + y^2 + 4z^2 = 0\}$, $D_3 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$). Имеем $m_2 = 8$, $m_3 = 8$, $0 - 4 + 8 - 8 = -4 = (-1)^3 \chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^3)$. Обратите внимание, что, в качестве мероморфной 1-форма на $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ с полюсами на гиперповерхности $P_d(x, y, z) = 0$, $\deg P_d = d$, естественно взять

$$\frac{A_{d-2}dx + B_{d-2}dy + C_{d-2}dz}{P_d},$$

где A_{d-2} , B_{d-2} и C_{d-2} — многочлены от x, y и z степени $d - 2$ (α — не этого вида). Однако можно показать, что такая форма имеет неизоллированные нули на проективном пространстве $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ (на бесконечности).

Пусть V^n — компактное аналитическое подпространство комплексного многообразия M^{n+k} , которое в окрестности любой точки является полным пересечением в M , имеющим только изолированные особенности (M не предполагается компактным). Пусть ω — мероморфная 1-форма на M , т. е. голоморфное сечение расслоения $T^*M \otimes L$, где L — линейное расслоение на M , имеющее ненулевые голоморфные сечения. Под сглаживанием \tilde{V} пространства V мы понимаем гладкое (C^∞) многообразие, получаемое из V сглаживанием его особых точек (которые являются *uonn*) обычным образом (как комплексных *uonn*). (Если V — полное

пересечение в проективном пространстве $\mathbb{C}P^{n+k}$, сглаживание V может быть также получено как аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}P^{n+k}$.)

Мы хотим сформулировать формулу типа Пуанкаре—Хопфа для эйлеровых характеристик пространства V и его сглаживания \tilde{V} в терминах особых точек 1-формы ω на V . Как и ранее, предполагаем, что существуют n голоморфных сечений s_1, \dots, s_n линейного расслоения L с дивизорами нулей D_1, \dots, D_n , такие что для каждого $i = 1, \dots, n$ пересечение $V \cap D_1 \cap \dots \cap D_i$ имеет размерность $n - i$ и только изолированные особенности (и поэтому приведено при $i < n$). Мы также предполагаем, что ограничение формы ω на множество неособых точек пространства V и её ограничение на множество неособых точек пересечения $V \cap D_1 \cap \dots \cap D_i$ ($i = 1, \dots, n$) имеет только изолированные нули. В качестве особых точек 1-формы ω на V мы рассматриваем все нули её ограничений на множества неособых точек пространства V и пересечений $V \cap D_1 \cap \dots \cap D_i$ ($i = 1, \dots, n$) и также все особые точки пространства V и пересечений $V \cap D_1 \cap \dots \cap D_i$.

Пусть P — особая точка 1-формы ω на V . Предположим, что дивизоры D_1, \dots, D_ℓ ($0 \leq \ell \leq n$) проходят через точку P , а (если $\ell < n$) $D_{\ell+1}$ не проходит. В окрестности точки P в локальных координатах на M , центрированных в точке P , имеется следующая ситуация. Пространство $(uonn) V$ (возможно, неособое) определено k уравнениями $f_1 = \dots = f_k = 0$. Пусть дивизоры D_1, \dots, D_ℓ определяются уравнениями $f_{k+1} = 0, \dots, f_{k+\ell} = 0$. Напомним, что для любого $i = 0, 1, \dots, \ell$ $\{f_1 = \dots = f_k = f_{k+1} = \dots = f_{k+i} = 0\}$ является $uonn$. После выбора локальной тривиализации линейного расслоения L 1-форма ω может быть записана как $\sum_{i=1}^{n+k} A_i(x) dx_i$, где коэффициенты $A_i(x)$ голоморфны. Можно сказать, что мы рассматриваем набор $\omega/f_{k+1}, \dots, \omega/f_{k+\ell}$ мероморфных форм на V , пропорциональных друг другу. Обозначим набор локальных данных $(V, \omega, f_{k+1}, \dots, f_{k+\ell})$ через Ω .

Пусть $\text{ind}^{(0)}\Omega$ (соответственно $\text{ind}^{(i)}\Omega$, $i = 1, \dots, \ell$) — индекс голоморфной 1-формы ω на V (соответственно на $uonn V \cap D_1 \cap \dots \cap D_i$).

Определение: Альтернированная сумма

$$\text{ind}_P \Omega = \text{ind}^{(0)}\Omega - \text{ind}^{(1)}\Omega + \dots + (-1)^\ell \text{ind}^{(\ell)}\Omega$$

называется индексом 1-формы ω в точке P по отношению к дивизорам D_1, \dots, D_n .

В соответствии с вышеизложенным имеются следующие три эквивалентных описания индекса $\text{ind}_P \Omega$.

В соответствии с вышеизложенным индекс $\text{ind}_P \Omega$ может быть описан как альтернированная сумма количества нулей формы ω на сглажива-

ниях $\text{uonn } V$ и $V \cap D_1 \cap \dots \cap D_i$, как альтернированная сумма индексов соответствующих отображений в многообразия Штифеля, либо как альтернированная сумма размерностей алгебр, определённых в Теореме 1.

Вернемся к рассматриваемой глобальной ситуации.

Теорема 5.

$$\sum_P \text{ind}_P \Omega = (-1)^n \chi(\tilde{V}),$$

где \tilde{V} — сглаживание пространства V .

Для того, чтобы получить эйлерову характеристику самого пространства V , нужно подправить формулу Теоремы Theorem 5, учитывая числа Милнора особых точек пространства V . Для $P \in V$ пусть μ_P — число Милнора $\text{uonn } V$ в точке P (см., например, [18]). Заметим, что если V неособо в точке P , то $\mu_P = 0$.

Theorem 2'

$$(-1)^n \chi(V) = \sum_P (\text{ind}_P \Omega - \mu_P).$$

Замечание. Число Милнора μ_P также может быть написано как альтернированная сумма индексов голоморфных 1-форм на нескольких uonn . Можно сказать, что члены μ_P соответствуют различиям двух возможных определений индекса как в [21, Предложение 1.4].

В некоторых случаях естественно рассматривать ситуацию, когда множество нулей мероморфной 1-формы ω является кратным неприводимого дивизора. Примеры:

- 1) Полиномиальная 1-форма на аффинном пространстве \mathbb{C}^n является мероморфной 1-формой на проективном пространстве $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, дивизор полюсов которой является кратным бесконечноудаленной гиперплоскости $\mathbb{C}\mathbb{P}_\infty^{n-1}$.
- 2) Пусть f — мероморфная функция с дивизором полюсов kD , где D — неприводимый дивизор (т. е. в окрестности любой точки функция f может быть записана в виде \tilde{f}/F^k , где функция \tilde{f} голоморфна, а $F=0$ — локальное уравнение дивизора D). Тогда её дифференциал df — мероморфная 1-форма с дивизором полюсов $(k+1)D$ (т. е. в окрестности любой точки df может быть записан в виде $\tilde{\omega}/F^{k+1}$, где $\tilde{\omega}$ — голоморфная 1-форма). Полиномиальная функция степени k на \mathbb{C}^n является мероморфной функцией на проективном пространстве $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ с дивизором нулей $k\mathbb{C}\mathbb{P}_\infty^{n-1}$.

Сформулируем вариант Теоремы 4 для этого случая. Тот факт, что дивизор полюсов 1-формы является кратным, означает, что соответствующее линейное расслоение является степенью другого расслоения. Пусть ω — мероморфная 1-форма на компактном комплексном многообразии M^n , т.е. голоморфное сечение векторного расслоения $T^*M \otimes L$, где $L = \lambda^k$, $k > 1$. Предположим, что $D_1 = D, D_2, \dots, D_n$ — дивизоры нулей голоморфных сечений линейного расслоения λ , таких что для любого $i = 1, \dots, n$ пересечение $D_1 \cap \dots \cap D_i$ неособо и сама форма ω и её ограничения на $D_1 \cap \dots \cap D_i$ имеют только изолированные нули. Пусть m_0 (соответственно $m_i, i = 1, \dots, n$) — количество нулей 1-формы ω (соответственно её ограничения на $D_1 \cap \dots \cap D_i$), считаемых с кратностями.

Теорема 6.

$$c_n(T^*M)[M] = (-1)^n \chi(M) = m_0 - km_1 + \dots + (-1)^n km_n.$$

Замечание. В [17, Теорема 3.1] дана формула для суммы вычетов, соответствующих особым точкам слоения на проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, заданного уравнением $df = 0$, где f — полиномиальная функция степени k на \mathbb{C}^2 (которая определяет мероморфную функцию на $\mathbb{C}P^2$). В наших терминах это — формула для количества m_0 нулей мероморфной 1-формы df , дивизор полюсов которой равен $k + 1$ раз бесконечноудаленная прямая. Поэтому Теорема 6 может рассматриваться как обобщение Теоремы 3.1 из [17] на высшие размерности и на 1-формы, которые, вообще говоря, не являются дифференциалами функций.

Литература

1. Арнольд, В. И.: Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порождённых отражениями, и особые проекции гладких поверхностей. *Успехи матем. наук* **34:2**, 3–38 (1979).
2. Задачи Арнольда. М.: Фазис, 2000.
3. Арнольд, В. И., Варченко, А. Н., Гусейн-Заде, С. М.: Особенности дифференцируемых отображений, том I, М.: Наука, 1982.
4. Гомес-Монт, Х., Мардесич, П.: Индекс векторного поля, касательного к нечетномерной гиперповерхности, и сигнатура относительного гессиана. *Функц. анализ и его прил.* **33**, № 1, 1–13 (1999).
5. Ле Дунг Транг: Вычисление числа Милнора изолированной особенности полного пересечения. *Функц. анализ и его прил.* **8**, № 2, 45–49 (1974).
6. Химшиашвили, Г. Н.: О локальной степени гладкого отображения. *Сообщения АН Груз. ССР* **85**, № 2, 309–311 (1977).

7. Хьюзмоллер, Д.: Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
8. Aguilar, M. A., Seade, J. A., Verjovsky, A.: Indices of vector fields and topological invariants of real analytic singularities. *J. reine angew. Math.* **504**, 159–176 (1998).
9. Baum, P. F., Bott, R.: On the zeros of a meromorphic vector field. In: *Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)*, Springer, New York, 1970, pp.29–47.
10. Buchsbaum, D. A., Rim, D. S.: A generalized Koszul complex. II. Depth and multiplicity. *Trans. Am. Math. Soc.* **111**, 197–224 (1964).
11. Douady, A.: Flatness and privilege. *L'Enseignement Math.* **14**, 47–74 (1968).
12. Ebeling, W., Gusein-Zade, S. M.: On the index of a vector field at an isolated singularity. In: *The Arnoldfest: Proceedings of a Conference in Honour of V.I. Arnold for his Sixtieth Birthday* (E. Bierstone, B. Khesin, A. Khovanskii, J. Marsden, eds.), Fields Institute Communications, Vol. **24**, Am. Math. Soc., Providence 1999, 141–152.
13. Eisenbud, D., Levine, H. : An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ. *Ann. Math.* **106**, 19–38 (1977).
14. Gómez-Mont, X., Mardešić, P.: The index of a vector field tangent to a hypersurface and the signature of the relative Jacobian determinant. *Ann. Inst. Fourier* **47**, 1523–1539 (1997).
15. Gómez-Mont, X., Seade, J., Verjovsky, A.: The index of a holomorphic flow with an isolated singularity. *Math. Ann.* **291**, 737–751 (1991).
16. Greuel, G.-M.: Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten. *Math. Ann.* **214**, 235–266 (1975).
17. T. Honda, T. Suwa: Residue formulas for meromorphic functions on surfaces. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6) **7**, 443–463 (1998).
18. Looijenga, E. J. N.: Isolated singular points on complete intersections. *London Math. Soc. Lecture Note Series 77*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
19. Matsumura, H.: *Commutative algebra*. Second edition. Benjamin/Cummings, Reading, Massachusetts 1980.
20. Seade, J. A., Suwa, T.: A residue formula for the index of a holomorphic flow. *Math. Ann.* **304**, 621–634 (1996).
21. Seade, J., Suwa, T.: An adjunction formula for local complete intersections. *Intern. J. Math.* **9**, 759–768 (1998).
22. Szafraniec, Z.: On topological invariants of real analytic singularities. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **130**, 13–24 (2001).

С. М. Г.-З.: Московский Государственный Университет,
механико-математический факультет, Москва, 119992, Россия.
E-mail: sabir@mccme.ru

В. Э.: Universität Hannover, Institut für Mathematik, Postfach 6009, D-30060
Hannover, Germany. E-mail: ebeling@math.uni-hannover.de

Ю. С. Ильяшенко

Столетняя история 16-й проблемы Гильберта

Аннотация

Во второй части 16-й проблемы Гильберта речь идёт о полиномиальных дифференциальных уравнениях на плоскости. Даже для квадратичных полиномов проблема остаётся широко открытой. Неоднократные попытки её решения не привели к успеху. Тем не менее, они стимулировали развитие новых областей в геометрической теории дифференциальных уравнений на плоскости, теории бифуркаций, теории нормальных форм, аналитических слоений, а также некоторых разделов алгебраической геометрии. Драматическая история этой проблемы и связанные с ней исследования описаны в предлагаемой статье.

§ 1. Формулировка проблемы и её варианты

*Что можно сказать о числе и расположении предельных циклов полиномиального векторного поля степени n на плоскости? (Предельным циклом называется изолированная замкнутая фазовая кривая векторного поля.) Эта задача, известная как *вторая часть 16-й проблемы Гильберта*, остаётся одной из наиболее неприступных задач в знаменитом списке Гильберта [99], уступая первое место лишь гипотезе Римана о нулях ζ -функции.*

Работа выполнена при частичной поддержке грантами NSF DMS 997-0372, NSF 0010404, CRDF RM1-2086. Статья представляет собой перевод обзора Yu. Ilyashenko, Centennial history of Hilbert's 16th problem, Bulletin of the AMS, 39 No. 3, 301–354. Доклад под этим названием был прочтён впервые на коллоквиуме в Корнельском университете, декабрь 1999, а затем в Бостоне, на объединённом коллоквиуме Гарварда, МИТ, Брандейса и Северо-восточного университетов, ноябрь 2000. Автор благодарен д-ру С. Гельфанду, который присутствовал на последнем докладе и предложил идею написания этого обзора. Перевод выполнен при частичной поддержке грантом РФФИ 02-01-00482.

По традиции, проблема Гильберта подразделяется на три; положительное решение каждой влечёт решение предыдущей.

Проблема 1.1 (проблема конечности). Верно ли, что полиномиальное векторное поле на плоскости имеет лишь конечное число предельных циклов?

Проблема 1.2. Верно ли, что число предельных циклов полиномиального векторного поля оценивается сверху константой, зависящей лишь от степени полинома?

Верхняя граница в проблеме 1.2 называется обычно *гильбертовым числом* и обозначается $H(n)$ (n — степень векторного полинома). Линейные векторные поля не имеют предельных циклов; поэтому $H(1) = 0$. До сих пор неизвестно, существует ли число $H(2)$.

Проблема 1.3. Указать явную оценку сверху для $H(n)$.

Только первая из этих проблем (положительно) решена [104], [85]. Проблемы 1.1 и 1.2 имеют аналитические аналоги.

Проблема 1.4. Верно ли, что аналитическое векторное поле на двумерной сфере имеет лишь конечное число предельных циклов?

Аналитическим семейством векторных полей называется конечно-параметрическое семейство аналитических векторных полей, аналитически зависящих от параметра.

Проблема 1.5. Верно ли, что для любого аналитического семейства векторных полей на двумерной сфере с компактной базой (пространством параметров) число предельных циклов уравнений семейства равномерно ограничено?

Проблема 1.4 решена теми же авторами, что и проблема 1.1. Фактически, оба доказательства относятся к аналитическим векторным полям; полиномиальный случай получается как следствие аналитического.

Положительный ответ в проблеме 1.5 влечёт аналогичный ответ в проблемах 1.1, 1.2 и 1.4. Это очевидно для проблемы 1.4, и доказывается с помощью компактификации Пуанкаре для проблем 1.1 и 1.2. Проблемы 1.3 и 1.5 независимы.

Компактификация Пуанкаре переводит полиномиальное векторное поле на плоскости в аналитическое векторное поле на двумерной сфере. Рассмотрим плоскость, касающуюся сферы в южном полюсе, и проекцию сферы без экватора на эту плоскость вдоль прямых, проходящих через центр. Обратное к этой проекции отображение является диффеоморфизмом на северной и южной полусферах, взятых отдельно. Полиномиальное

векторное поле на плоскости поднимается до аналитического векторного поля на каждой из полусфер; при стремлении точки к экватору, длина соответствующего вектора стремится к бесконечности. Умножение на подходящую степень расстояния до плоскости, проходящей через экватор, делает наше векторное поле аналитическим на всей сфере, за исключением конечного числа особых точек, лежащих на экваторе. Число предельных циклов у нового поля по меньшей мере вдвое больше, чем у исходного. Следовательно, оценка сверху числа предельных циклов нового поля автоматически даёт оценку числа циклов исходного поля.

Заметим также, что умножение на ненулевую постоянную не меняет числа циклов полиномиального векторного поля. Поэтому пространство параметров полиномиальных векторных полей фиксированной степени на плоскости совпадает с фактором пространства коэффициентов многочленов по умножению на постоянную. Это проективное пространство, и следовательно, компактно. Таким образом, проблемы 1.1 и 1.2 сводятся к проблеме 1.5.

Можно говорить о гладком аналоге проблемы Гильберта (если класс гладкости не указан явно, то под термином *гладкий* подразумевается *бесконечно гладкий*).

С одной стороны, несложно построить гладкое векторное поле на двумерной сфере с бесконечным числом предельных циклов. Достаточно рассмотреть следующее поле, записанное в полярных координатах:

$$\dot{r} = f(r), \quad \dot{\varphi} = 1,$$

где f — C^∞ функция, равная нулю вне отрезка $[1, 2]$ и обладающая бесконечным числом изолированных нулей на $[1, 2]$. С другой стороны, верен следующий общий принцип:

В типичном конечнопараметрическом семействе гладкая функция ведёт себя как аналитическая.

Для примера рассмотрим k -параметрическое семейство гладких функций на прямой. Малой деформацией семейства можно добиться выполнения следующего требования: *Все функции семейства имеют только изолированные нули. Кратность этих нулей не превосходит $k + 1$.* Это прямое следствие теоремы Тома о трансверсальности.

Проблема 1.6 (Проблема Гильберта—Арнольда). Верно ли, что в типичном конечнопараметрическом семействе гладких векторных полей на двумерной сфере с компактным пространством параметров число предельных циклов уравнений семейства равномерно ограничено по параметрам?

Проблема 1.6 решена лишь в ослабленной формулировке, см. параграф 2.

Следует подчеркнуть, что аналитический и гладкий варианты 16-й проблемы Гильберта, — проблемы 1.4 и 1.6 выше, — независимы от её исходного, полиномиального, варианта — проблемы 1.3.

§ 2. Обзор истории проблемы

Как это часто происходит с проблемами Гильберта, 16-я охватывает сразу несколько областей математики и открывает новые направления развития. Её история драматична: несколько попыток доказательства было опубликовано и затем опровергнуто (см. рисунок 1).

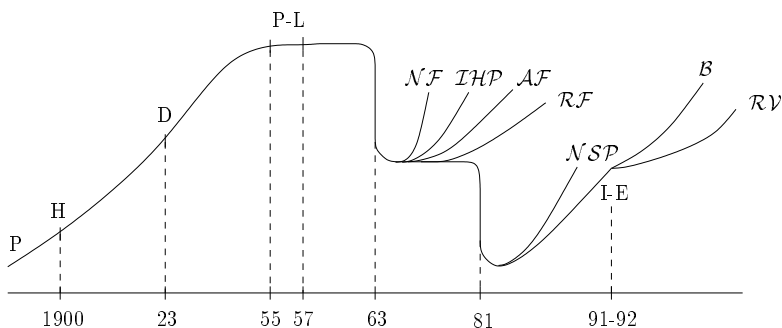


Рис. 1. Краткий обзор истории 16-й проблемы Гильберта. Печатными буквами обозначены имена, рукописными — новые направления развития математики. *P* — Пуанкаре; *H* — Гильберт, *D* — Дюлак, *P-L* — Петровский—Ландис, *E* — Экаль, *I* — Ильяшенко; *NF* — нормальные формы, *AF* — аналитические слоения, *IHP* — инфинитезимальная проблема Гильберта, *NSP* — нелинейное явление Стокса, *RF* — ресургентные функции, *B* — бифуркации, *RV* — ослабленные версии 16-й проблемы Гильберта.

Впервые эта задача была поставлена Гильбертом. Однако уже Пуанкаре рассматривал полиномиальные векторные поля на плоскости в рамках предложенной им программы развития геометрической теории дифференциальных уравнений. Он ввёл понятие предельного цикла, и доказал, что *полиномиальное векторное поле на плоскости без седловых связок имеет не более конечного числа предельных циклов.*

В 1923 году вышла в свет работа Дюлака [72] содержащая решение проблемы 1.1. В середине 50-х Петровский и Ландис опубликовали решение проблемы 1.3, [43], [44]: $H(n) \leq P_3(n)$ (полином третьей степени),

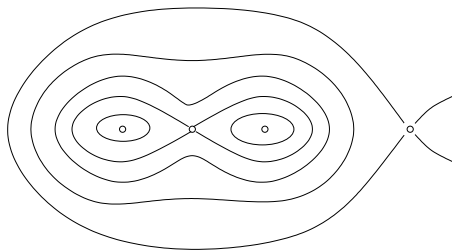


Рис. 2. Овалы многочлена

и $H(2) = 3$. Однако, в начале 60-х годов, С. П. Новиковым и автором была найдена ошибка в их доказательстве. В работах [71] и [152] построены квадратичные векторные поля с четырьмя предельными циклами. В 1981 был обнаружен пробел в доказательстве Дюлака, см. [27], [29]. Так, после восьмидесяти лет исследований, наши знания о 16-й проблеме Гильберта оказались почти на том же уровне, что и во времена постановки проблемы.

Ниже перечислены основные результаты, касающиеся 16-й проблемы Гильберта.

Теорема 2.1 (Теорема конечности для предельных циклов, [85], [104]). *Полиномиальное векторное поле на плоскости имеет не более конечного числа предельных циклов. То же утверждение верно для аналитических векторных полей на двумерной сфере.*

Несколько ключевых идей и история доказательства этой теоремы изложены в параграфах 3 и 4.

Ввиду неприступности 16-й проблемы Гильберта, естественно начать с рассмотрения нескольких упрощённых её вариантов, [149]. В числе таковых, мы обсудим проблему Гильберта—Арнольда в параграфе 5, уравнения Абеля и Льенара в параграфе 6, и инфинитезимальную проблему Гильберта в параграфе 7. Последняя имеет дело с деформациями интегрируемых векторных полей, и формулируется следующим образом.

Рассмотрим вещественный многочлен H степени $n + 1$ на плоскости. Назовем *овалом* многочлена H замкнутую связную компоненту линии уровня $H = t$; обозначим её через $\gamma(t)$. Такие овалы образуют непрерывные семейства, см. рис. 2.

Пусть $\omega = A dx + B dy$ — вещественная 1-форма с полиномиальными коэффициентами степени не выше n . Положим

$$I(t) = \int_{\gamma(t)} \omega. \quad (2.1)$$

Проблема 2.1 (Инфинитезимальная 16-я проблема Гильберта). Найти верхнюю границу $V(n)$ числа вещественных нулей интеграла (2.1). Оценка должна быть равномерной относительно выбора многочлена H , семейства овалов $\{\gamma(t)\}$ и формы ω и зависеть только от степени n .

Самый общий результат, относящийся к этой проблеме таков:

Теорема 2.2 ([16], [50]). Для любого n верхняя граница $V(n)$ в инфинитезимальной 16-й проблеме Гильберта существует.

Некоторые оценки числа нулей интеграла (2.1), зависящие от H , но независимые от ω , приведены в параграфе 7. Доказательство теоремы 2.2 основано на применении теории малочленов Хованского. Краткий набросок основ этой теории можно найти в параграфе 5.4.

Нули абелевых интегралов (2.1) связаны с предельными циклами следующим образом.

Рассмотрим деформацию уравнения в полных дифференциалах:

$$dH + \varepsilon\omega = 0, \quad (2.2)$$

где H и ω такие же, как выше. Скажем, что овал $\gamma(t)$ порождает предельный цикл системы (2.2), если найдётся непрерывное семейство замкнутых кривых $l(\varepsilon)$, определённых при малых ε , таких что $l(\varepsilon)$ — предельный цикл системы (2.2) при $\varepsilon \neq 0$, и $l(0) = \gamma(t)$.

Критерий Понтрягина. Если овал $\gamma(t)$ многочлена H порождает предельный цикл системы (2.2), то $I(t) = 0$. Обратно, если $I(t) = 0$ and $I'(t) \neq 0$, то овал $\gamma(t)$ порождает предельный цикл системы (2.2).

Теория бифуркаций тесно связана с 16-й проблемой Гильберта. В самом деле, точки разрыва функции «число предельных циклов уравнения» соответствуют тем уравнениям, чьи деформации порождают при бифуркациях предельные циклы. Предельные циклы могут рождаться при бифуркациях полициклов. Полициклом называется связанное конечное объединение особых точек и соединяющих их траекторий, образующих подобие многоугольника (более подробное описание в п. 3.1). Циклическостью полицикла в семействе уравнений называется максимальное число предельных циклов, рождающихся при бифуркации полицикла в этом семействе.

Проблема 2.2. Верно ли, что полицикл, возникающий в конечнопараметрическом семействе аналитических векторных полей на плоскости, имеет лишь конечную циклическость в этом семействе?

Проблема 2.3. Верно ли, что полицикл, возникающий в типичном k -параметрическом семействе гладких векторных полей на плоскости, порождает при бифуркации лишь конечное число предельных циклов, причём верхняя оценка этого числа зависит только от k ? (Последняя величина обозначается $B(k)$).

Положительный ответ в проблеме 2.2 влечёт за собой существование числа $H(n)$ для любого n . Из положительного ответа в проблеме 2.3 следует положительный ответ в проблеме Гильберта—Арнольда. Эти импликации доказываются применением простых соображений компактности, принадлежащих Руссари [145]. Обе проблемы пока остаются открытыми. Проблема 2.3 кажется проще предыдущей, и она частично решена (см. ниже, теоремы 2.3 и 2.4).

Определение 2.1. Неподвижная точка векторного поля на плоскости называется *элементарной*, если линеаризация векторного поля в этой точке имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение. Полицикл называется *элементарным*, если он содержит только элементарные особые точки.

Определение 2.2. Обозначим через $E(k)$ максимальное число предельных циклов, возникающих при бифуркации элементарного полицикла в типичном k -параметрическом семействе гладких векторных полей на плоскости.

Теорема 2.3 ([112]). Для любого k , число $E(k)$ существует.

Следствие 2.1. Проблема Гильберта—Арнольда имеет положительное решение для семейств векторных полей, имеющих только элементарные полициклы.

Теорема 2.4 ([117]). Для любого k , $E(k) \leq 2^{25k^2}$.

Теорема 2.4 впервые сформулирована в [107] и доказана в [117]. Оценка, даваемая этой теоремой, не претендует на реалистичность. Однако, это одно из первых полученных на сегодняшний день *гильбертовых чисел*. Другие гильбертовы числа мы приведём в параграфах 6 и 7.

Статья организована следующим образом. Основной результат Дюлака и ошибка в его доказательстве теоремы конечности обсуждаются в параграфе 3; там же приведён набросок доказательства теоремы 1 для полей, обладающих только гиперболическими особыми точками.

Другие компоненты доказательства теоремы конечности, включая нелинейное явление Стокса, описаны в параграфе 4. Он посвящён теории

нормальных форм, как гладкой, так и аналитической. Не только теорема 1, но и решение проблемы Гильберта—Арнольда для векторных полей, имеющих только элементарные особые точки (теоремы 3 и 4), опирается на результаты этого параграфа.

Параграф 5 содержит обзор теории бифуркаций векторных полей на плоскости, а также основные идеи доказательства теорем 3 и 4. При доказательстве во многом используется *теория малочленов* Хованского, вкратце обрисованная в параграфе 5.4.

В параграфе 6 описан подход, основанный на *теореме о росте и нулях* для голоморфных функций, дающей оценку числа нулей функции в меньшей области в терминах её роста в большей области и геометрии этих двух областей; подробную формулировку см. в п. 6.4. Эта теорема используется при оценке числа предельных циклов уравнений Абеля и Льенара, причём *ограничение на коэффициенты включено в оценку*. Следовательно, названный подход не приводит к решению 16-й проблемы Гильберта даже для этих специальных классов уравнений, ибо требуемая оценка должна зависеть только от степеней многочленов, см. ниже проблемы 6.1 и 6.2. Однако, эти оценки числа предельных циклов уравнений Абеля и Льенара *произвольно большой степени* на всей плоскости \mathbb{R}^2 — единственные имеющиеся на настоящий момент.

Материал параграфа 7 находится на стыке между алгебраической геометрией и дифференциальными уравнениями. В нём содержатся результаты о *свободном расположении предельных циклов*, полученные комплексно-аналитическими методами, а также основные идеи доказательства теоремы 2.2, принадлежащей Варченко и Хованскому, о существовании универсальной оценки числа нулей вещественных абелевых интегралов. Там же мы приводим явные оценки числа нулей интеграла (2.1), носящие, однако, лишь ограниченный характер. Ограничение связано с выбором функции Гамильтона H , определяющей овалы $\gamma(t)$ в (2.1): это должна быть функция *специального вида*, хотя и *произвольной степени*. Полиномиальная 1-форма ω выбирается произвольно, но степень её полиномиальных коэффициентов не должна превосходить $\deg H$.

Параграф 8 целиком посвящён обзору глобальной теории аналитических слоений в комплексной плоскости. Основы этой теории были заложены в [43]; её развитие было в сильной степени мотивировано 16-й проблемой Гильберта. В последние три десятилетия она превратилась в независимую область исследований, в рамках которой решаются новые задачи; их обзор можно найти в параграфе 8. Там же обсуждаются возможные приложения этой теории к изучению вещественных предельных циклов.

Настоящая работа не содержит подробных доказательств. Мы при-

водим лишь их наброски для иллюстрации основных идей и связей между различными областями теории.

§ 3. Теоремы конечности для предельных циклов

Основные идеи и история доказательства теоремы 2.1 содержатся в этом и следующем параграфах.

3.1. Теорема о ненакоплении

Предположим, что теорема 2.1 неверна, то есть аналитическое векторное поле на двумерной сфере может иметь бесконечное число предельных циклов. Будем считать, что у рассматриваемого векторного поля не более конечного числа особых точек (в противном случае разделим все компоненты поля на общий множитель). Скажем, что два вложенных предельных цикла принадлежат одному *гнезду* если между ними нет особых точек. В нашем случае хотя бы одно гнездо содержит бесконечное число предельных циклов, которые должны накапливаться к некоторому предельному множеству из-за компактности сферы. Это предельное множество является объединением особых точек и соединяющих траекторий.

Приведенные рассуждения справедливы как для гладких, так и для аналитических векторных полей. Теперь мы подходим к основному различию между этими случаями. Для гладких векторных полей описанное предельное множество может содержать счётное число траекторий, начинающихся и заканчивающихся в одной особой точке, наподобие лепестков. *В аналитическом случае такое предельное множество может содержать лишь конечное число траекторий.* Это следует из теоремы о разрешении особенностей, см. параграф 3.5. Следовательно, в аналитическом случае предельное множество является *полициклом*, то есть конечным объединением особых точек и соединяющих их траекторий. Точнее, полициклом векторного поля называется конечное множество особых точек (с возможными повторениями) и циклически упорядоченное множество непересекающихся траекторий поля, соединяющих особые точки следующим образом: ориентированная временем j -я траектория соединяет j -ю и $(j + 1)$ -ю особые точки. Мы свели теорему 2.1 к следующей:

Теорема о ненакоплении 3.5. *Предельные циклы аналитических векторных полей на двумерной сфере не могут накапливаться к полициклу этого поля.*

3.2. Теорема Дюлака

Предположим теперь, что теорема о ненакоплении не верна. Тогда найдутся полицикл γ и полутрансверсаль (то есть полуинтервал с вершиной на полицикле, трансверсальный к векторному полю вне этой вершины) такие, что эта трансверсаль пересекает счётное число предельных циклов. Обозначим через P отображение первого возвращения, связанное с этой полутрансверсалью (оно также называется отображением Пуанкаре). Отображение P имеет счётное число неподвижных точек, накапливающихся к вершине. Оно аналитично вне вершины, но, в общем случае, не продолжается за вершину. Наша задача показать, что отображение Пуанкаре не может иметь бесконечного числа неподвижных точек, накапливающихся к вершине полутрансверсали.

Допустим для начала, что γ состоит из единственной периодической траектории. Тогда P аналитически продолжается через вершину полутрансверсали. Следовательно, неподвижные точки отображения P накапливаются к внутренней точке его области определения. По теореме единственности для голоморфных функций, P совпадает с тождественным отображением. Но тогда у P нет изолированных неподвижных точек, и окрестность кривой γ не содержит предельных циклов, что противоречит предположению.

Дюлак пытался обобщить это рассуждение на случай произвольного полицикла. Его целью было нахождение класса отображений полуинтервала, для которых, с одной стороны, имела бы место единственность, как для аналитических отображений. С другой стороны, этот класс должен содержать отображения Пуанкаре полициклов аналитических векторных полей.

Определение 3.3. Росток отображения $f: (\mathbb{R}^+, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^+, 0)$ называется *полурегулярным* если он гладок вне нуля и допускает следующее асимптотическое разложение:

$$\hat{f}(x) = cx^{\nu_0} + \sum_j P_j(\ln x)x^{\nu_j}, \quad (3.1)$$

где $c > 0$, $0 < \nu_j \nearrow \infty$, и $j \geq 0$; P_j — вещественные многочлены.

По определению, \hat{f} задаёт асимптотическое разложение роста f , если для любого $\nu > 0$ найдётся частная сумма \hat{f} , приближающая f с точностью, лучше x^ν , при стремлении x к 0.

Теорема 3.6 (Теорема Дюлака [72]). *Для любого полицикла аналитического векторного поля сечение с вершиной на полицикле можно выбрать так, что соответствующее отображение Пуанкаре*

будет либо плоским, либо обратным к плоскому, либо полурегулярным.

Напомним, что росток $f: (\mathbb{R}^+, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^+, 0)$ называется *плоским* если все его производные в нуле равны нулю.

3.3. Лемма Дюлака и контрпример к ней

Лемма 3.1 ([72]). *Предположим, что полурегулярное отображение f обладает бесконечным числом неподвижных точек (для краткости, $f \in \text{Fix}_\infty$). Тогда f совпадает с тождественным отображением.*

Доказательство. Допустим, что $f \neq \text{id}$, (3.1) задаёт асимптотический ряд для f , и $cx^{p_0} \neq x$. Тогда f не имеет неподвижных точек вблизи 0.

Пусть $cx^{p_0} \equiv x$. Тогда $f(x) - x = P_1(\ln x)x^{p_1}(1 + o(1))$. Правая часть снова не имеет нулей вблизи начала координат, так как каждый из трех членов равенства обладает этим свойством.

Мы пришли к противоречию с предположением о том, что $f \neq \text{id}$. \square

Из теоремы Дюлака и леммы 3.1 следует теорема о ненакоплении. В самом деле, допустим, что эта теорема не верна. Выберем сечение как в теореме Дюлака. Соответствующее отображение Пуанкаре не может быть ни плоским, ни обратным к плоскому, ибо в этом случае у него не было бы неподвижных точек вблизи нуля. Итак, оно полурегулярно, и применима лемма Дюлака. Но тогда $P = \text{id}$, и мы приходим к противоречию.

Таков, в основных чертах, ход доказательства в мемуаре Дюлака [72]. В течение более 60 лет это рассуждение считалось верным. Причина в том, что мемуар [72] изложен в достаточно запутанной манере, а часть приведенного выше рассуждения не написана явно.

Доказательство Дюлака не верно. Действительно, отображение $f = x + (\sin \frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ служит контрпримером к утверждению леммы. Приведенные рассуждения доказывают, на самом деле, следующее более слабое утверждение.

Модифицированная лемма Дюлака 3.2. *Если f полурегулярно и обладает бесконечным числом неподвижных точек, то $\hat{f} = \text{id}$.*

О неподвижных точках полурегулярного отображения, чей асимптотический ряд состоит из единственного члена x , нельзя сказать ничего. Поэтому класс полурегулярных отображений недостаточен для доказательства теоремы о ненакоплении.

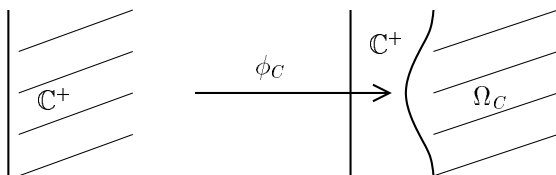


Рис. 3. Стандартная квадратичная область Ω_C .

3.4. Почти регулярные ростки и теорема о ненакоплении для гиперболических полициклов

Как мы покажем в п. 4.4, утверждение теоремы Дюлака относится скорее к гладкой, чем к аналитической теории дифференциальных уравнений. А для доказательства теоремы о ненакоплении нужно использовать аналитичность. Это мотивирует следующие определения.

Определение 3.4. Пусть $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$; положим $\Phi_C: \zeta \mapsto \zeta + C\sqrt{\zeta^2 + 1}$ для любого $C > 0$. Множество $\Omega_C = \Phi_C(\mathbb{C}^+)$ называется *стандартной квадратичной областью*, см. рис. 3.

Пусть $\xi = -\log x$ — *логарифмическая карта* на $(\mathbb{R}^+, 0)$; $\xi: (\mathbb{R}^+, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \infty)$. В логарифмической карте полурегулярный росток $f: (\mathbb{R}^+, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^+, 0)$ принимает вид $\tilde{f}: (\mathbb{R}^+, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \infty)$. Асимптотический ряд Σ для \tilde{f} в логарифмической карте примет вид:

$$\Sigma(\xi) = \alpha\xi + \beta + \sum_j Q_j(\xi)e^{-\mu_j\xi}, \quad (3.2)$$

где $0 < \mu_j \nearrow \infty$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, and Q_j — вещественные многочлены.

Определение 3.5. Росток на бесконечности отображения

$$\tilde{f}: (\mathbb{R}^+, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \infty)$$

называется *почти регулярным*, если

- некоторые из его представителей голоморфно продолжаются в стандартную квадратичную область Ω_C для некоторого C ;
- ряд

$$\Sigma(z) = \alpha z + \beta + \sum_j Q_j(z)e^{-\mu_j z}, \quad (3.3)$$

является асимптотическим для продолженного ростка в (Ω_C, ∞) ; здесь α , β , Q_j и μ_j те же, что и в (3.2).

Замечание. Можно предположить, что, называя свои ростки «полурегулярными», Дюлак хотел указать на то, что они ведут себя несколько хуже аналитических; слово «регулярность» в то время использовалось для обозначения аналитичности. Определенные выше ростки «лучше полурегулярных», и мы назвали их «почти регулярными», следуя той же идеологии.

Теорема 3.7 (Теорема единственности для почти регулярных ростков). *Почти регулярный росток на бесконечности однозначно определяется своим асимптотическим рядом.*

Доказательство. Пусть f и g — ростки, удовлетворяющие условию теоремы. Обозначим теми же буквами продолжения их представителей в какую-нибудь стандартную квадратичную область $\Omega_C = \Phi_C(\mathbb{C}^+)$. Положим

$$h = f - g, H = h \circ \Phi_C.$$

Асимптотический ряд функции h в (Ω_C, ∞) нулевой. Следовательно, она ограничена в Ω_C и убывает в (\mathbb{R}^+, ∞) быстрее любой показательной функции $e^{-\mu\xi}$, $\mu > 0$. Поэтому функция H голоморфна и убывает с суперэкспоненциальной скоростью на (\mathbb{R}^+, ∞) .

Остается применить одну из версий теоремы Фрагмена—Линделефа. Теоремы этого типа утверждают, что если функция f , голоморфная в некоторой области, убывает быстрее определённой функции, зависящей от области, то f тождественно равна нулю.

Теорема 3.8 ([48]). *Если ограниченная функция голоморфна в \mathbb{C}^+ и убывает на (\mathbb{R}^+, ∞) быстрее любой показательной функции, то она тождественно равна нулю.*

Из 3.4 вытекает, что $H \equiv 0$. Таким образом, теорема 3.3 доказана. \square

Определение 3.5'. Почти регулярным ростком в нуле $f: (\mathbb{R}^+, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^+, 0)$ называется росток, который, после перехода к логарифмической карте, становится почти регулярным ростком на бесконечности.

Лемма 3.3. *Почти регулярные ростки образуют группу с операцией суперпозиции.*

Это утверждение непосредственно следует из определения. В самом деле, если два ростка имеют представителей, голоморфных в двух квадратичных областях $\Omega_{C_1}, \Omega_{C_2}$, причём каждый из ростков является суммой аффинного и стремящегося к нулю на бесконечности, то их суперпозиция голоморфна в третьей квадратичной области $\Omega_{C_3}, C_3 \gg C_1, C_3 \gg C_2$.

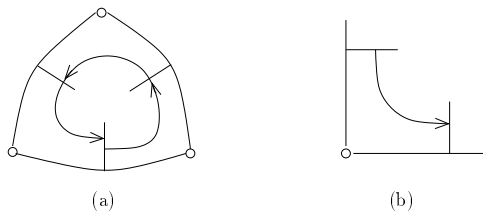


Рис. 4. (а) Разложение отображения Пуанкаре полицикла. (б) Отображение соответствия.

Подстановка одного формального ряда вида (3.3) в другой даёт ряд того же вида. Таким образом, суперпозиция двух почти регулярных ростков почти регулярна. Аналогично доказывается почти регулярность ростка, обратного к почти регулярному.

Почти регулярные ростки используются при доказательстве теоремы, стоящей в заголовке этого параграфа.

Теорема 3.9 ([28]). *Предельные циклы аналитического векторного поля на двумерной сфере не могут накапливаться к полициклу этого поля, если все вершины полицикла — гиперболические седла.*

Первый шаг доказательства — стандартный при работе с полициклами: отображение Пуанкаре полицикла представляется в виде композиции так называемых *отображений соответствия*, см. рис. 4. Отображение соответствия особой точки — это отображение вдоль траекторий поля полутрансверсали, через которую траектории входят в окрестность особой точки, на полутрансверсаль, через которую они её покидают, см. рис. 3, *b*. Первое из этих сечений представляет собой полуинтервал, трансверсальный к векторному полю с вершиной на *сепаратрисе, входящей* в особую точку при $t \rightarrow +\infty$. Второе сечение — аналогичный интервал с вершиной на *выходящей* сепаратрисе.

Передем к основному этапу доказательства.

Лемма 3.4 ([28]). *Отображение соответствия гиперболического седла аналитического векторного поля на плоскости почти регулярно.*

Доказательство опирается на применение теории нормальных форм.

Из лемм 3.4 и 3.3 вытекает, что отображение последования P гиперболического полицикла γ аналитического векторного поля почти регулярно.

Предположим, что предельные циклы накапливаются к γ . Тогда P имеет бесконечное число неподвижных точек. В таком случае, по теореме

Дюлака 3.2 и модифицированной лемме Дюлака 3.2, асимптотический ряд отображения P тождественный: $\hat{P}(x) = x$. Итак, два почти регулярных ростка, P и x , имеют один и тот же асимптотический ряд (3.3) в логарифмической карте, равный z . По теореме единственности 3.3, такие ростки должны совпадать. Следовательно, $P \equiv \text{id}$, и вблизи γ нет предельных циклов, что противоречит предположению.

3.5. Теорема о разрешении особенностей для сложных особых точек векторных полей на плоскости

Доказательство теоремы о ненакоплении в общем случае следует прежней стратегии. Отображение Пуанкаре полицикла разбивается в композицию отображений соответствия особых точек (вершин полицикла). Дополнительное препятствие заключается в том, что в типичном случае эти особые точки могут быть очень сложными, и описание их отображений соответствия на первый взгляд кажется безнадежным. Следующая теорема позволяет преодолеть эту трудность.

Разрешением особенности называется последовательность *раздутий*, заменяющая исходную особую точку конечным числом элементарных особых точек. Проще всего описать один шаг этого процесса в полярных координатах (r, φ) . Рассмотрим аналитическое векторное поле v с изолированной особой точкой. Примем эту особую точку за начало координат, и отобразим её проколотую окрестность в кольцо:

$$(r, \varphi) \mapsto (r+1, \varphi),$$

$$\{(r, \varphi) \mid r \in (0, \varepsilon), \varphi \in S^1\} \mapsto \{(r, \varphi) \mid r \in (1, 1+\varepsilon), \varphi \in S^1\}.$$

При этом исходное векторное поле v перейдет в новое поле \bar{v} , аналитически продолжающееся через *вклеенную окружность* $S^1 = \{r=1\}$ на кольцо $r \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\varphi \in S^1$. В общем случае, \bar{v} обращается в ноль во всех точках вклеенной окружности. Разделив \bar{v} на подходящую степень $(r-1)$, мы получим новое векторное поле V , обладающее лишь конечным числом особых точек на S^1 . Поле V и есть результат раздутия v .

Если в результате остаются неэлементарные особые точки, процесс следует повторить.

Теорема 3.10 (Теорема о разрешении особенностей). *Пусть комплексификация вещественно-аналитического векторного поля имеет изолированную особую точку. Тогда эту особую точку за конечное число раздутий можно рассыпать на конечное число элементарных особых точек.*

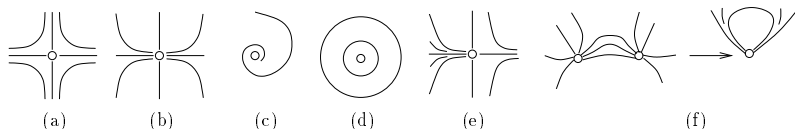


Рис. 5. а–е. Фазовые портреты элементарных особых точек: (а) седло, (б) узел, (с) фокус, (д) центр, (е) седлоузел; (ф) схлопывание: результат раздутия проектируется в исходное векторное фазовое пространство.

Предположение теоремы не является обременительным: если оно нарушается, векторное поле можно разделить на вещественную функцию так, что частное будет удовлетворять предположению теоремы.

Композиция раздутий, упомянутых в теореме, называется *хорошим раздутием*.

Элементарные особые точки определены выше, см. определение 2.1. С помощью гомеоморфной замены координат и, в случае необходимости, замены времени, изолированную элементарную особую точку можно перевести в линейное седло, узел, фокус, центр, или стандартный седлоузел $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = -y$, см. рис. 4.

Приведенное *топологическое описание элементарных особых точек* восходит к Бендиксону [56], его прозрачное изложение можно найти в [29].

Доказательство этой теоремы имеет долгую историю. Бендиксон [56] сформулировал результат, но не предложил доказательства. Насколько известно, до 60-х годов этим результатом пользовался только Дюлак. Полные доказательства для аналитического случая были даны Зайдельбергом [150] и Лефшецем [121]; обобщение на гладкий случай получено Дюмортье [74]. Первое прозрачное доказательство принадлежит Ван ден Эссену и изложено в [130]. До сих пор эта теорема не вошла ни в один учебник.

Теперь мы можем объяснить, почему предельное множество, построенное в п. 3.1, содержит не более конечного числа траекторий. Это всё равно, что объяснить, почему в особой точке аналитического векторного поля сходится лишь конечное число лепестков. Каждый лепесток образован двумя узлами или седлоузлами хорошего раздутия и семейством связок между ними; см. рис. 5, *f*. При схлопывании, обратном композиции раздутий, два узла или седлоузла совпадают, и их связки образуют лепесток. Но хорошее раздутие имеет лишь конечное число особых точек; поэтому исходная особая точка имеет лишь конечное число лепестков.

Теорема о разрешении особенностей — один из основных фактов локальной теории дифференциальных уравнений на плоскости. Все

локальные исследования вещественных и комплексных векторных полей на плоскости существенно используют эту теорему. Для доказательства теоремы о ненакоплении сложные особые точки полицикла должны быть рассыпаны на элементарные. Полицикл заменяется «более длинным», имеющим больше вершин, но теперь все они — элементарные особые точки. Теория нормальных форм даёт описание отображений соответствия для этих точек. После этого нужно изучить композицию описанных выше отображений соответствия.

Ниже даётся обзор теории нормальных форм, включая описание отображений соответствия. Исследование их композиций, нужное для доказательства теоремы 3.1, очень технично и выходит за рамки настоящего обзора.

3.6. Приложения к локальным исследованиям векторных полей на плоскости

Теорема о разрешении особенностей и теорема Дюлака дают подход к исследованию топологии фазовых портретов аналитических векторных полей на плоскости вблизи *любой* изолированной особой точки; здесь *изолированность* означает *изолированность в \mathbb{C}^2* . Проблема разделяется на две: исследование так называемых *характеристических* и *монотропных* особых точек. Первый случай полностью исследован, в то время, как второй, для сложных особых точек, оставался нетронутым, пока не была применена теорема Дюлака. В этом направлении получены следующие результаты.

Локальная задача называется *алгебраически разрешимой*, если ответ в этой задаче может получен за конечное число арифметических действий над тейлоровскими коэффициентами исходных данных всегда, за исключением вырожденных случаев коразмерности бесконечность.

Простейшие примеры локальных задач: *Имеет ли данная функция максимум в нуле? Является ли особая точка 0 векторного поля устойчивой по Ляпунову? Имеет ли поле фазовую кривую, входящую в особую точку по определённому направлению?* И т. д.

Теорема о разрешении особенностей зачастую позволяет полностью исследовать топологию фазового портрета вблизи сложной особой точки векторного поля на плоскости [74], [6].

Для каждого n рассмотрим J^n —пространство n -струй функций или векторных полей в начале координат. Струя называется положительной (отрицательной), если для всех её представителей ответ на изучаемый вопрос есть «да» («нет»). Струя называется нейтральной, если для некоторых её представителей ответ «да», а для некоторых других «нет». Про-

блема алгебраически разрешима, если выполнено следующее:

- Для каждого n множество нейтральных n -струй является полуалгебраическим (т. е. равно объединению множеств, задаваемых алгебраическими уравнениями и неравенствами вида $P > 0$, где P — полином).
- Коразмерность множества нейтральных n -струй стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

Например, рассмотрим задачу: *имеет ли функция одной переменной максимум в нуле?* Множество n -струй этих функций в нуле может быть отождествлено с множеством наборов их тейлоровских коэффициентов: (a_0, a_1, \dots, a_n) . Нейтральные n -струи — это те, для которых $a_1 = \dots = a_n = 0$. Рассматриваемая проблема алгебраически разрешима. Дальнейшие детали можно найти в [5].

Заменяя в предыдущем определении полиномы аналитическими функциями, можно получить определение *аналитически разрешимых* локальных задач.

Проблема топологического описания фазовых портретов вблизи особых точек векторных полей на плоскости не является алгебраически разрешимой [24], но существенная часть этой проблемы является таковой [74].

Особая точка векторного поля на плоскости называется *характеристической*, если у неё есть фазовая кривая, входящая в неё по определённому направлению в прямом или обратном времени. Особая точка называется *монотропной*, если орбиты обращаются вокруг неё, и на некотором полуинтервале с вершиной в этой точке определено отображение Пуанкаре.

Элементарная теорема [5, 5.3.1] утверждает, что *всякий неплоский росток гладкого векторного поля в особой точке на плоскости является либо характеристическим, либо монотропным*.

Из [74] вытекает, что следующие проблемы алгебраически разрешимы:

- различить монотропные и характеристические особые точки;
- описать топологию фазового портрета векторного поля вблизи характеристической особой точки.

Относительно монотропных особых точек отметим, что центр является вырождением коразмерности бесконечность. Более того, за исключением случаев коразмерности бесконечность, монотропная особая точка имеет очень простой фазовый портрет: это либо устойчивый, либо

неустойчивый фокус. Но проблема устойчивости для монодромных особых точек *алгебраически неразрешима* [24]. Однако есть надежда, что проблема устойчивости особых точек векторных полей на плоскости *аналитически разрешима*. Подход к исследованию этой проблемы, основанный на формулируемой ниже *теореме Дюлака*, может быть найден в [38].

Действительно, монодромная особая точка после разрешения особенностей заменяется элементарным полициклом с тем же отображением Пуанкаре. Вся предыдущая теория может быть применена для исследования этого отображения. Для так посторонних полициклов отображение Пуанкаре Δ является полурегулярным, и его главный член линеен [36]:

$$\Delta(x) = Cx + o(x).$$

Величина $\log C$ называется *обобщённой первой ляпуновской фокусной величиной*. Вычисление этой величины является сложной проблемой. Различные формулы для неё получены в [11], [90], [37], [38] и [47]. Заметим, что неравенство $\log C < 0$ ($\log C > 0$) влечёт устойчивость (соответственно, неустойчивость) сложной монодромной особой точки. Равенство $\log C = 0$ соответствует нейтральному случаю, который требует вычисления следующего ненулевого члена в разложении Дюлака для Δ . Основная проблема состоит в том, чтобы доказать, что все эти члены являются аналитическими функциями от тейлоровских коэффициентов исходного ростка, а также найти алгоритм для вычисления последовательных членов в ряде Дюлака для Δ . Это даст полное решение проблемы устойчивости для особых точек векторных полей на плоскости.

§ 4. Нормальные формы

В соответствии с принципом, восходящим к Пуанкаре, вместо того, чтобы решать дифференциальное уравнение (которое обычно не решается) следует искать замену координат, которая упрощает уравнение. В зависимости от класса замены возникают различные ветви теории. Мы будем рассматривать три из них: формальную, гладкую и аналитическую.

Результаты разделов 4.1 и 4.2 являются классическими. Они включены для полноты. Обзор результатов последних 20 лет начинается с п. 4.3.

4.1. Эквивалентность и орбитальная эквивалентность ростков векторных полей

Пусть H — росток диффеоморфизма в нуле, имеющий неподвижную точку 0 , v — росток векторного поля в нуле и ω — образ v под действи-

ем H . Тогда

$$\frac{\partial H}{\partial x} v = \omega \circ H. \quad (4.1)$$

Это мотивирует следующее определение.

Определение 4.6. Ростки векторных полей v и ω в нуле называются *эквивалентными*, если существует росток диффеоморфизма H с неподвижной точкой ноль, для которого выполняется (4.1). Если росток H — гладкий или аналитический, то v и ω называются *гладко*, соответственно *аналитически*, *эквивалентными*. Соотношение (4.1) имеет смысл и на формальном уровне, когда v , ω и H являются формальными рядами Тейлора. В этом случае v и ω называются *формально эквивалентными*.

Два векторных поля, которые различаются ненулевым функциональным множителем, имеют одинаковые фазовые портреты.

Определение 4.7. Ростки векторных полей v и ω называются *орбитально эквивалентными*, если существует росток диффеоморфизма H и росток ненулевой функции f , такие, что

$$\frac{\partial H}{\partial x} v = f \cdot \omega \circ H. \quad (4.2)$$

Орбитальная формальная, гладкая и аналитическая эквивалентность определяется теперь как и выше, только (4.1) заменяется на (4.2).

4.2. Резонансные нормальные формы

Рассмотрим росток аналитического векторного поля в особой точке. Одна из основных задач локального анализа состоит в том, чтобы сравнить росток с его линейной частью. Пуанкаре первым изучал следующий вопрос: когда росток векторного поля может быть приведён к его линейной части аналитической заменой координат? Он обнаружил, что препятствия возникают уже на формальном уровне: так называемые *резонансные соотношения*, или *резонансы*.

Определение 4.8. Рассмотрим росток v аналитического векторного поля в точке 0 пространства \mathbb{R}^n с линейной частью A . Пусть λ — спектр оператора A : $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Набор λ и росток v называются *резонансными*, если существует вектор $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $k_1 + \dots + k_n \geq 2$ такой, что

$$\lambda_j = (\lambda, k) \quad (4.3)$$

для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$. Соотношение (4.3) называется *резонансом*.

Теорема 4.11 (Пуанкаре). *Нерезонансный росток аналитического векторного поля формально эквивалентен своей линейной части.*

Возникает естественный вопрос: когда эта эквивалентность является аналитической? Это одна из знаменитых проблем, которая определила развитие теории нормальных форм более, чем на столетие. Первый существенный вклад был сделан Пуанкаре, недавний — Йокоссом и Перец-Марко [159], [143].

В резонансном случае некоторые нелинейные члены могут быть уничтожены формальной заменой координат.

Определение 4.9. Пусть Az — линейное векторное поле в \mathbb{C}^n ; матрица A приведена к жордановой нормальной форме. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — спектр A . Моном $z^k \frac{\partial}{\partial z_j}$ называется *резонансным членом* по отношению к A , если резонансное соотношение (4.3) выполняется для соответствующих k и j .

Теорема 4.12 (Теорема о резонансной нормальной форме). *Каждый росток аналитического векторного поля в особой точке 0 в \mathbb{C}^n формально эквивалентен ростуку с линейной частью Az , имеющей жорданову нормальную форму, и все нелинейные члены являются резонансными по отношению к A .*

Частные случаи этой теоремы сформулированы в [72]. Общая формулировка может быть найдена «между строк» в [155], [59]. Первая явная формулировка была дана в [7]. В [1] она называется *теоремой Пуанкаре—Дюлака*.

Формальные нормальные формы элементарных особых точек на плоскости допускают дальнейшие упрощения. Особые точки, которые могут быть вершинами полицикла, допускающего преобразование монодромии, особенно интересны. Они бывают трех типов: нерезонансные седла, резонансные седла и седлоузлы.

Теорема 4.13. *Перечисленные ниже элементарные особые точки аналитических векторных полей формально эквивалентны следующим орбитальным нормальным формам:*

— *нерезонансное седло:*

$$\omega = x \frac{\partial}{\partial x} - \lambda y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \lambda > 0, \quad (4.4)$$

где $\lambda \notin \mathbb{Q}$;

— резонансное седло:

$$\omega = x \left(1 \pm \frac{u^k}{1 + au^k} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{p}{q} y \frac{\partial}{\partial y}, \quad u = x^p y^q, \quad p > 0, \quad q > 0, \quad (4.5)$$

где p и q взаимно просты; или (4.4) с $\lambda = \frac{p}{q}$;

— седлоузел:

$$\omega = \pm \frac{x^{k+1}}{1 + ax^k} \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.6)$$

4.3. Гладкие орбитальные нормальные формы элементарных особых точек

Аналитические нормальные формы резонансных седел и седлоузлов гораздо более сложны, чем формальные; см. п. 4.6 ниже. В начале 70-х годов Брюно предположил, что гладкая классификация может быть гораздо проще, чем аналитическая. Действительно, гладкая орбитальная классификация элементарных особых точек совпадает с формальной.

Теорема 4.14. *Для ростков аналитических векторных полей на плоскости типа седло или седлоузел формальные нормальные формы из теоремы 4.3 совпадают с гладкими.*

Эта теорема может быть обобщена на все элементарные особые точки, но мы не нуждаемся в ней для случаев узлов, фокусов и центров. Более того, теорема 4.4 остаётся справедливой для *гладких* ростков, которые не принадлежат некоторому множеству коразмерности бесконечность. Оказывается, что гладкие орбитальные нормальные формы элементарных особых точек могут быть проинтегрированы в элементарных функциях [15]. В частности, это справедливо для нормальных форм (4.4)–(4.6). Утверждение очевидно для (4.4) и (4.6). Для (4.5) интегрирование производится следующим образом. Производная монома u вдоль векторного поля (4.5) равна

$$\dot{u} = pu^{k+1}(1 + au^k)^{-1}.$$

Следовательно, система (4.5) влечёт систему с разделяющимися переменными относительно (u, y) и, тем самым, интегрируется.

Тем самым, любое свойство седел и седлоузлов, которое сохраняется при гладких заменах координат, может быть проверено прямым вычислением. Например, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.5. *Отображение соответствия для седла аналитического векторного поля на плоскости полурегулярно.*

Лемма 4.6. *Отображение соответствия для изолированного седлоузла аналитического векторного поля на плоскости либо равно*

$$\Delta_c = f_0 \circ h, \quad f_0 = e^{-\frac{1}{x}}, \quad (4.7)$$

где h полурегулярно, либо является обратным к Δ_c .

Обе леммы справедливы для нормальных форм (4.4), (4.5) и (4.6). Гладкая замена координат сохраняет класс полурегулярных отображений. Это доказывает лемму 4.1. Как объяснено в следующем пункте, гладкие замены координат сохраняют класс отображений (4.7), которые называются *плоско-полурегулярными*. Это доказывает лемму 4.2.

Теорема 4.4 завершает длинную историю развития теории нормальных форм, описанную в конце этого пункта. Особые точки с ненулевыми вещественными частями собственных значений называются *гиперболическими*; частный случай — седла на плоскости.

Теорема 4.15 (теорема Стернберга [155]). *Росток гладкого векторного поля вне резонансной гиперболической особой точки гладко эквивалентен своей линейной части.*

Эта теорема немедленно влечёт теорему 4.4 для нерезонансных седел.

Теорема 4.16 (теорема Ченя [59]). *Предположим, что два ростка гладких векторных полей в гиперболической особой точке формально эквивалентны. Тогда они гладко эквивалентны.*

Аналог теоремы 4.3 для формальных, а не орбитальных формальных нормальных форм, даёт полиномиальную нормальную форму резонансного седла. Обозначим её W . По теореме Ченя исходный росток гладко эквивалентен W . Короткое вычисление показывает, что W орбитально эквивалентно нормальной форме (4.5). Это доказывает теорему 4.4 для резонансных седел.

Общий подход, позволяющий доказать утверждение «формальная эквивалентность влечёт гладкую» состоит в следующем. Рассмотрим уравнение (4.1) для формальных рядов:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} \hat{v} = \hat{\omega} \circ \hat{H}. \quad (4.8)$$

Здесь \hat{v} и $\hat{\omega}$ являются формальными рядами для гладких векторных полей v и ω , а \hat{H} — формальный ряд для замены координат.

По теореме Бореля существует гладкий росток замены координат H в нуле, формальный ряд которого совпадает с \hat{H} . Для такого ростка

$$\left(\frac{\partial H}{\partial v} v \right) \circ H^{-1} - \omega = R;$$

здесь R плоско в нуле, т. е. формальный ряд для R равен 0. Поэтому v и w гладко эквивалентны *по модулю плоского добавка*. Этот плоский добавок убивается с помощью гомотопического метода. Этот последний шаг использует специальные свойства ростков v и w и составляет наиболее содержательную часть доказательства.

Теоремы Стернберга и Ченя, так же, как и последнее утверждение теоремы 4.4, могут быть доказаны этим способом. Орбитальные нормальные формы седлоузлов были обнаружены Богдановым [14]; полное доказательство теоремы 4.4 содержится в [29].

4.4. набросок доказательства теоремы Дюлака

Современное доказательство теоремы Дюлака 3.2 может быть изложено следующим образом. Произвольный полицикл может быть заменён элементарным с помощью теоремы о разрешении особенностей. Отображение Пуанкаре Δ для этого модифицированного полицикла может быть разложено в произведение отображений соответствия для седел и седлоузлов, см. п. 3.5. Обозначим это разложение также через Δ . Если число отображений $f_0: x \mapsto \exp(1/x)$ в этом разложении больше, чем число отображений f_0^{-1} , то композиция является плоским ростком. В противоположном случае она является обратной к плоскому ростку.

Если число сомножителей f_0 и f_0^{-1} в разложении Δ одинаково, тогда отображение Δ полурегулярно. Действительно, полурегулярные отображения образуют группу. Это — прямое следствие определения и доказывается так же, как лемма 3.3. Следовательно, разложение Δ может быть укорочено так, чтобы множители f_0 и f_0^{-1} чередовались. После циклической перестановки сомножителей (которая соответствует правильному выбору трансверсального сечения к полициклу) можно добиться выполнения следующего требования: для каждого k произведение первых k сомножителей справа в разложении Δ содержит не меньше отображений f_0 , чем отображений f_0^{-1} . Сгруппируем члены в этом модифицированном разложении следующим образом. Откроем скобку перед каждым множителем f_0^{-1} и закроем скобку после каждого f_0 . Самые внутренние скобки содержат произведение

$$h_1 = f_0^{-1} \circ h \circ f_0, \quad (4.9)$$

в котором h полурегулярно.

Лемма 4.7. *Произведение (4.9) полурегулярно.*

Лемма 4.3 позволяет сократить разложение Δ , заменяя произведение (4.9) одним полурегулярным множителем; она доказана ниже. Теорема

Дюлака доказывается теперь индукцией по числу множителей в модифицированном разложении Δ .

Итак, теорема Дюлака доказана по модулю теоремы 4.4. Она основана на теореме о разрешении особенностей 3.6, которая справедлива в гладком случае так же, как и теорема 4.4 о нормальных формах. Следовательно, теорема Дюлака относится к гладкой, а не к аналитической теории и, тем самым, не может влечь теоремы о ненакоплении, которая в гладком случае не верна.

Мы можем теперь доказать утверждение, использованное выше в доказательстве леммы 4.2. Рассмотрим гладкую замену координат $g: (\mathbb{R}^+, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^+, 0)$, применённую к плоско-полурегулярному ростку (4.7). Получим

$$\Delta_1 = g^{-1} \circ f_0 \circ h \circ g = f_0 \circ (f_0^{-1} \circ g^{-1} \circ f_0) \circ (h \circ g).$$

Произведение в первых скобках полурегулярно по лемме 4.3; вторая скобка полурегулярна по лемме 4.1. Следовательно, росток Δ_1 плоско-полурегулярен, также как и Δ_c .

Доказательство леммы 4.3. Приводимое ниже вычисление удивительно, хотя и элементарно. Оно показывает, что асимптотический ряд (3.1) для h_1 зависит только от главного степенного члена отображения h . Все остальные члены в разложении для h забыты или, лучше сказать, определяют плоский добавок в отображении (4.9). Мы не исследуем этот плоский добавок, потому что он не меняет асимптотического ряда \hat{h}_1 для h_1 .

Чтобы написать этот последний ряд, обозначим через cx^ν главный степенной член ростка h . Тогда $h = cx^\nu(1 + o(x^\varepsilon))$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Следовательно,

$$h_1 = -1/\log[ce^{-\frac{\nu}{x}}(1 + o(e^{-\frac{\varepsilon}{x}}))] = \frac{x}{\nu - x \log c} + o(e^{-\frac{\varepsilon}{x}}).$$

Поэтому, росток h_1 полурегулярен; его асимптотический ряд \hat{h}_1 — это ряд Тейлора для функции $x/(\nu - x \log c)$. \square

4.5. Нормальные формы локальных семейств и их приложения

Для развития теории бифуркаций нужны нормальные формы ростков векторных полей, зависящих от параметров. Чтобы понять, какую форму может иметь ответ, можно применить формальную теорию. Деформация ростка $\dot{x} = v(x)$ — это семейство $\dot{x} = \omega(x, \varepsilon)$, $\omega(x, 0) = v(x)$. Добавление

уравнения $\dot{\varepsilon} = 0$ превращает это семейство в одно уравнение. Формальная нормальная форма для этого уравнения (с отброшенным уравнением $\dot{\varepsilon} = 0$) даёт желаемый модельный ответ.

Этот подход даёт орбитальные нормальные формы для деформаций следующих ростков (по модулю вырождений коразмерности бесконечность):

— нерезонансное седло:

$$\omega_\varepsilon = x \frac{\partial}{\partial x} - \lambda(\varepsilon)y \frac{\partial}{\partial y}; \quad (4.10)$$

— резонансное седло:

$$\omega_\varepsilon = x \left(1 \pm \frac{u^k}{1 + au^k} + P_{k-1}(u, \varepsilon) \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{p}{q} y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.11)$$

где $u = x^p y^q$, $p > 0$, $q > 0$, и дробь p/q несократима. Здесь P_{k-1} — многочлен Вейерштрасса, то есть многочлен от u , коэффициенты которого зависят от ε , причём $P_{k-1}(u, 0) \equiv 0$;

— седлоузел:

$$\omega_\varepsilon = \left(\pm \frac{x^{k+1}}{1 + ax^k} + P_{k-1}(x, \varepsilon) \right) \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.12)$$

где P_{k-1} — многочлен Вейерштрасса, как и выше.

Оказывается, что эти формулы имеют не только формальный, но и геометрический смысл. Основная задача состоит в том, чтобы найти правильное отношение эквивалентности между исходной деформацией и её нормальной формой. Это не может быть аналитическая или бесконечно гладкая эквивалентность. Действительно, даже для деформации нерезонансного седла отношение собственных значений принимает рациональные значения на плотном множестве в пространстве параметров. Следовательно, сколь угодно близко к $\varepsilon = 0$ деформация содержит резонансные ростки; даже формально они не эквивалентны своей линейной части.

Ответ подсказывается теорией конечно гладких нормальных форм. Простейший факт этой теории — конечно гладкий вариант теоремы Стернберга 4.5.

Теорема 4.17 ([155]). Для каждого набора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} \lambda_j \neq 0$ и для каждого K существует $N = N(K, \lambda)$, обладающее следующим свойством. Предположим, что λ не удовлетворяет резонансным соотношениям (4.3) при $|k| \equiv k_1 + \dots + k_n \leq N$.

Тогда любой росток векторного поля со спектром λ линейной части C^K -эквивалентен своей линейной части.

Другими словами, чем выше порядок резонанса, тем выше порядок гладкости замены, приводящей росток к линейной нормальной форме и «пренебрегающей» этим резонансом. Например, чем меньше окрестность нуля в пространстве параметров деформации нерезонансного седла, тем выше порядок резонансов, которые возникают в семействе. Следовательно, порядок гладкости замены, приводящей каждый из ростков семейства к линейной нормальной форме, также возрастёт. Это мотивирует следующее определение.

Определение 4.10. Два локальных семейства векторных полей в точке ноль *конечно гладко (орбитально) эквивалентны*, если для каждого K существуют две окрестности нуля в пространстве переменных и параметров, такие, что рассматриваемые семейства (орбитально) C^K -эквивалентны в этих окрестностях.

Грубо говоря, чем меньше область определения семейств, тем выше гладкость отображения, которое их сопрягает.

Теорема 4.18 ([33]). *Гладкие деформации гладких ростков плоских векторных полей типа седло или седлоузел, не принадлежащих к множеству вырожденных ростков коразмерности бесконечность, конечно гладко орбитально эквивалентны своим нормальным формам (4.10)–(4.12).*

Эта теорема даёт один из ключевых инструментов к исследованию проблемы Гильберта—Арнольда для векторных полей, имеющих только элементарные особые точки; см. § 5 ниже.

Фактически, в статье [33] даны все существующие интегрируемые нормальные формы для локальных семейств отображений и векторных полей. Эти нормальные формы дают мощное средство для изучения нелокальных бифуркаций в пространствах любой размерности. Описанный подход систематически применяется в книге [108].

Статья [33] завершает длинную серию результатов Белицкого, Богданова, Дюмортье, Костова, Самовола и Такенса; см. ссылки в [33].

4.6. Нелинейное явление Стокса

В аналитической теории нет аналога теоремы 4.4.

Нерезонансное седло орбитально аналитически эквивалентно своей линейной части в предположении, что отношение λ собственных значений имеет «хорошую» арифметику, т. е. не может быть слишком хорошо

приближено рациональными числами. Тонкое достаточное условие на λ было найдено Брюно в [8], [9]. Йокос [159] доказал, что это условие также необходимо.

Аналитическая классификация резонансных ростков векторных полей более сложна. Экаль [84] описал инварианты этой классификации с помощью созданной им теории ресургентных функций. Существенно раньше Брюно [8], [9], нашёл необходимые и достаточные условия, при которых формальная эквивалентность влечёт аналитическую. Эти условия выполняются очень редко. Для резонансных сёдел они требуют, чтобы орбитальная формальная нормальная форма не содержала резонансных членов, т. е. имела вид (4.4). Для седлоузлов эти условия требуют, чтобы седлоузел был неизолированным; его орбитальная формальная и аналитическая нормальная форма имеет вид

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -y.$$

Следовательно, для любой орбитальной формальной нормальной формы (4.5), (4.6) существуют ростки с этой формальной нормальной формой, которые не являются орбитально аналитически эквивалентными.

Мартине и Рамис [131], [132] обнаружили *функциональные модули* орбитальной аналитической классификации ростков седлоузлов и резонансных сёдел на комплексной плоскости. Эти модули имеют ту же природу, что и модули аналитической классификации так называемых *параболических неподвижных точек*. Аналитическая классификация ростков конформных отображений в этих точках описана ниже и даёт важное средство для доказательства теоремы о ненакоплении. Эта классификация была открыта независимо Мальгранжем [128] и Ворониным [17] с помощью теории квазиконформных отображений, а также Экалем [82], использовавшим преобразования Бореля—Лапласа.

Рассмотрим росток $f: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с линейной частью z :

$$f: z \mapsto z + \alpha z^{k+1} + \dots, \quad \alpha \neq 0. \quad (4.13)$$

Такие ростки называются *параболическими*. Проблема состоит в следующем: когда два параболических ростка аналитически сопряжены? (То есть, существует росток биголоморфного отображения $h: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ такой, что $h \circ f = g \circ h$.)

Росток (4.13) формально эквивалентен сдвигу за единичное время вдоль траекторий уравнения

$$\dot{z} = z^{k+1} + \beta z^{2k+1}; \quad (4.14)$$

комплексное число β является инвариантом формальной классификации. Оказывается, что формальные ряды, сопрягающие ростки f и g , как

правило, расходятся. Однако с ними связан описанный ниже геометрический объект.

Чтобы описать геометрию нормализующих преобразований рассмотрим фазовый портрет уравнения (4.14). В окрестности нуля он состоит из $2k$ лепестков, как показано на рис. 6.

Рассмотрим разбиение проколотого диска с центром в нуле на $2k$ равных секторов, один из которых имеет положительную полуось в качестве биссектрисы. Заменим каждый из этих секторов большим сектором с той же биссектрисой и углом $\alpha \in (\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k})$. Это покрытие проколотого диска равными секторами называется k -хорошим; см. рис. 6.

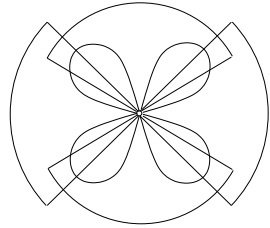


Рис. 6. Фазовый портрет уравнения (4.14) для $k = 2$. Секторы из теоремы о секториальной нормализации. Радиусы секторов взяты различными, чтобы легче различать секторы.

Теорема о секториальной нормализации

4.19. Рассмотрим росток (4.13) с $\alpha = 1$ (этого можно добиться заменой масштаба) и k -хорошее покрытие малого проколотого диска.

1. В каждом секторе S_j k -хорошего покрытия существует отображение $H_j: S_j \rightarrow \mathbb{C}$, $H_j(z) = z + o(z)$, которое сопрягает росток f с его формальной нормальной формой g — сдвигом за единичное время вдоль траектории уравнения (4.14).

2. Отображения H_j и H_{j+1} ($j+1$ берётся по модулю $2k$) в пересечении своих областей определения отличаются на экспоненциально убывающую поправку:

$$|H_j(z) - H_{j+1}(z)| < \exp\left(-\frac{C}{|z|^k}\right). \quad (4.15)$$

3. Все отображения H_j имеют одинаковый асимптотический ряд Тейлора в 0.

Утверждение 1 этой теоремы было известно ещё в XIX столетии [120]. Набор отображений

$$H = (H_1, \dots, H_{2k}), \quad (4.16)$$

каждое из которых определено в своей области, образует нормализующий атлас, или нормализующую коцень. Разные карты этого атласа рассматривались уже давно; однако функция перехода между этими картами была рассмотрена сравнительно недавно. Эти функции перехода

задают полный набор инвариантов аналитической классификации параболических ростков. Эти инварианты пробегают богатое функциональное пространство [17], [128].

В общем случае резонансные ростки отображений на прямой или векторных полей на плоскости порождают *нормализующий атлас* для некоторого покрытия проколотой окрестности положения равновесия. Функции перехода этого атласа пробегают богатое функциональное пространство. Этот эффект называется *нелинейным явлением Стокса*. Подробное изложение можно найти в [105].

Теорема о секториальной нормализации описывает новый класс локальных объектов в комплексном анализе, так называемые *функциональные коцепи*.

Определение 4.11. Набор (4.16) называется *функциональной коцепью*, если:

- каждая компонента H_j голоморфна в секторе S_j k -хорошего покрытия;
- разности $H_{j+1} - H_j$ удовлетворяют оценке (4.15) в своей области определения;
- все H_j имеют одинаковый асимптотический ряд Тейлора в нуле.

Нормализующие коцепи дают важный пример функциональных коцепей. Функциональные коцепи представляют собой не набор разрозненных компонент, а единое целое.

Теорема 4.20 ([32]). *Функциональная коцепь однозначно задаётся своим формальным рядом Тейлора.*

Эту утверждение можно переформулировать как теорему типа Фрагмена—Линделефа.

Теорема 4.21. *Функциональная коцепь, которая убывает вдоль $(\mathbb{R}^+, 0)$ быстрее любой степени z , тождественно равна нулю.*

Функциональные коцепи играют ключевую роль в доказательстве теоремы о ненакоплении и, тем самым, теоремы конечности 2.1.

4.7. Стратегия доказательства теоремы конечности

Теорема конечности для предельных циклов (теорема 2.1) сводится к теореме о ненакоплении 3.1, как описано в пункте 3.1 выше.

Начало доказательства последней теоремы — такое же, как и теоремы Дюлака. Рассматриваемый полицикл заменяется элементарным с тем же отображением Пуанкаре Δ . Это отображение разлагается в произведение отображений соответствия гиперболических сёдел и седлоузлов. Первые оказываются почти регулярными ростками, см. определение 3.3. Вторые являются плоскими или обратными плоским; см. лемму 4.2. Следующая теорема является аналитическим усилением этой леммы.

Теорема 4.22. *Плоское отображение соответствия вещественно-го аналитического седлоузла имеет вид*

$$F = g \circ f_0 \circ h_{k,a} \circ H. \quad (4.17)$$

Здесь g — росток голоморфной функции $g(0) = 0$, $g'(0) > 0$; $f_0 = e^{-\frac{1}{2}}$ как и выше;

$$h_{k,a} = \frac{kx^k}{1 - akx^k \ln x}$$

для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$; $a \in \mathbb{R}$; H — нормализующая коцепь для некоторого параболического ростка (4.13).

Более подробное описание коцепи H может быть найдено в [104, 0.4a]. Разложение (4.17), в котором участвует функциональная коцепь H , рассматривается на $(\mathbb{R}^+, 0)$ и определяется следующим образом. Набор H имеет две компоненты, скажем, H_1 и H_2 , определённые на положительной полуоси вблизи нуля. Росток F имеет разложение (4.17), в котором H заменено на H_1 , и аналогичное разложение с H_2 ; в последнем случае голоморфный росток g должен быть заменён другим голоморфным ростком с той же 1-струёй в нуле. Следовательно, (4.17) символизирует два разных разложения отображения F в произведение корректно определённых отображений.

Теорема 4.13 показывает, что функциональные коцепи возникают неизбежно при описании отображения Пуанкаре для элементарных полициклов.

Таким образом, теория нормальных форм сводит теорему о ненакоплении к чисто комплексно аналитической проблеме: доказать, что композиция конечного числа отображений из определённого класса не может иметь бесконечного множества изолированных неподвижных точек.

Рассматриваемые выше отображения Пуанкаре обладают двумя характеристическими свойствами. Во-первых, в их выражении участвуют функциональные коцепи. Во-вторых, как указано выше, их разность с тождественным отображением может быть плоской. На самом деле, она может даже убывать быстрее, чем башня экспонент с любым числом этажей.

Чтобы объяснить это, рассмотрим произведение

$$P = f_0^{-1} \circ f_0^{-1} \circ h \circ f_0 \circ f_0,$$

где $h(x) = x + x^2$ и $f_0 = e^{-\frac{1}{x}}$, как в (4.9). То же вычисление, что и в конце пункта 4.4, даёт:

$$h_1 = f_0^{-1} \circ h \circ f_0 = \frac{x}{1 - x \log(1 + f_0)},$$

$$P = f_0^{-1} \circ h_1 \circ f_0 = \frac{x}{1 - x \log(1 - e^{-\frac{1}{x}} \log(1 + f_0 \circ f_0))} = x + O(e^{-e^{\frac{1}{x}}}).$$

Итак, разность $P - x$ убывает как двойная экспонента. Аналогично, для любого n может быть построена композиция тех же отображений, которая отличается от тождественного на поправку, убывающую быстрее, чем башня из n экспонент $\exp(-\exp \circ \exp \circ \dots \circ \exp \frac{1}{x})$. Напомним, что f_0 — это отображение соответствия для простейшего седлоузла при правильно выбранных трансверселях. После этого стандартная техника склеек позволяет построить полицикл аналитического векторного поля, отображение Пуанкаре которого совпадает с отображением P , описанным выше; см. [28].

Свойства отображения Пуанкаре, указанные выше, служат источником существенных трудностей в доказательстве теоремы конечности.

Доказательство использует специальные асимптотические ряды для изучаемых суперпозиций. Члены этих рядов не колеблются. Следовательно, если отображение имеет поправку с бесконечным числом нулей, то асимптотический ряд для этой поправки равен нулю. Теорема Фрагмена—Линделефа для коцепей (более сложная, чем 4.12) утверждает, что такая поправка тождественно равна нулю. Этот подход осуществлён в [104].

Альтернативный подход к теории нормальных форм предложен Экалем, который создал теорию *ресургентных функций* [82], [83] и [84]. Используя эту теорию, он дал другое доказательство теоремы конечности [85].

§ 5. Шестнадцатая проблема Гильберта и теория бифуркаций

Начнем с основных результатов и проблем теории бифуркаций на плоскости. Затем дадим краткий обзор теории малочленов. Эта теория является одним из основных орудий в решении проблемы Гильберта—Арнольда для векторных полей с элементарными особыми точками. Набросок этого решения составляет основную часть параграфа.

5.1. Краткий обзор теории бифуркаций на плоскости

В развитии теории бифуркаций можно выделить три основных части.

1. Подробное исследование *локальных бифуркаций*, т. е. бифуркаций особых точек и периодических орбит в семействах с *малым числом параметров*.

2. Подробное исследование бифуркаций *полициклов* в семействах с *малым числом параметров*.

3. Формулировка и доказательство общих теорем о бифуркациях плоских векторных полей в семействах с *произвольно большим числом параметров*.

В этом контексте малыми являются числа 1, 2 и 3. Классическим результатом в первой части является знаменитая бифуркация *Андронава—Хопфа*: рождение предельного цикла при потере устойчивости особой точкой. Современный период в развитии теории отмечен прорывом, совершённым Богдановым и Такенсом, которые исследовали бифуркацию коразмерности 2 особой точки с ненулевой нильпотентной линейной частью [12], [13] и [157]. Хотя локальные бифуркации коразмерности 3 исследованы достаточно подробно [80] и [81], кажется абсолютно безнадёжным получить детальное описание бифуркаций в коразмерности 4.

Локальные бифуркации в плоских системах с симметриями образуют другую важную часть теории. Семейства такого типа возникают в результате факторизации типичных многопараметрических семейств, которые описывают потерю устойчивости пространственным периодическим решением, а также бифуркации коразмерности 2 в \mathbb{R}^3 и \mathbb{R}^4 , [1], [52], [21] и [162].

В настоящее время теория локальных бифуркаций *типичных семейств* векторных полей на плоскости практически закончена; см. [2] и [65] и приведённую там литературу. Последняя монография содержит полное описание основных результатов локальной теории бифуркаций на плоскости, полученных в 70-е и 80-е годы наряду с богатой библиографией вплоть до начала 90-х годов. Поэтому здесь мы упоминаем лишь несколько ссылок.

Исследование локальных бифуркаций *полиномиальных* векторных полей связано, в основном, с возмущениями особых точек типа центр. Знаменитая теорема Баутина [10] утверждает, что возмущение центра в семействе квадратичных векторных полей может породить не более трех предельных циклов малой амплитуды. Современное доказательство этой теоремы может быть найдено в [160].

Классические результаты теории нелокальных бифуркаций принадле-

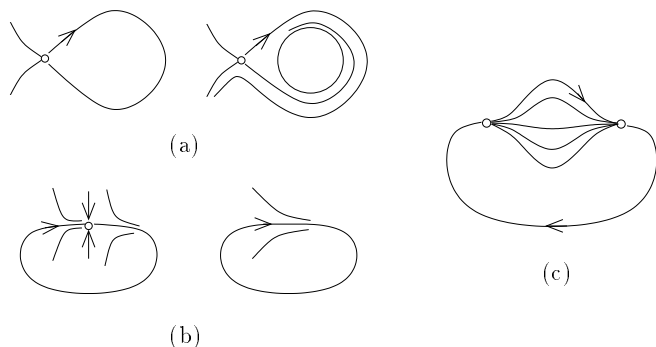


Рис. 7. (а) Бифуркация петли сепаратрисы. (б) Бифуркация гомоклинической орбиты седлоузла. (с) Ансамбль «губы»

жат Андронову и относятся к бифуркациям петли сепаратрисы и гомоклинической орбиты седлоузла; см. рис. 7, а, б. Список всех полициклов, которые могут возникнуть в типичных двух и трехпараметрических семействах (так называемый зоопарк Котовой), был получен лишь недавно; см [119]. Цикличность элементарных полициклов из этого списка была исследована в [49] и резюмирована в [107]. Бифуркации полициклов коразмерности 2 были исследованы в [79]; см. также [147] и указанную там литературу. Теория будет почти закончена, когда бифуркации всех полициклов из зоопарка Котовой будут описаны; это описание в настоящее время далеко от окончания.

Общая многопараметрическая теория находится в начальной стадии своего развития. Глобальная программа исследований в этой области ещё не предложена. Арнольд в [2] спрашивал *верно ли, что для любого числа параметров k список стандартных бифуркаций, которые могут возникнуть в типичных k -параметрических семействах, конечен?* Ответ оказался отрицательным даже для $k = 3$, см. [119]. Причина состоит в том, что вырождение коразмерности 3 приводит к возникновению непрерывного семейства полициклов, так называемого ансамбля «губы»; см. рис. 7, с. Для любого числа L вырожденное векторное поле может быть построено так, что бифуркации этого поля в типичном трехпараметрическом семействе породят более, чем L предельных циклов. При этом, более, чем L полициклов семейства, одновременно порождают предельный цикл, когда параметр меняется вблизи критического значения. Каждый полицикл ансамбля имеет цикличность не больше 3.

Некоторые бифуркации в многопараметрических семействах были

изучены в [34], [144], [133] и [116].

Проблема Гильберта—Арнольда, наряду с проблемой 2.3 из §2 представляется основной в этой области. Решение проблемы Гильберта—Арнольда для *элементарных полициклов*, [112], [107] и [117], намечено, начиная с пункта 5.3.

5.2. Программа-121 Дюмортье—Руссари—Руссо

Как указано в §2, проблема конечной цикличности полициклов тесно связана с 16-й проблемой Гильберта. В частности, приводимая ниже гипотеза, влечёт существование числа $H(2)$, (верхней границы числа предельных циклов квадратичных векторных полей на плоскости).

Гипотеза ([78]). Каждый полицикл, возникающий в семействе квадратичных векторных полей на плоскости

$$\dot{x} = P_2(x, y), \quad \dot{y} = Q_2(x, y) \quad (5.1)$$

имеет лишь конечную цикличность.

Квадратичные векторные поля относительно просты среди других полиномиальных векторных полей. Например, каждая замкнутая фазовая кривая такого поля выпукла и содержит не более одной особой точки внутри себя [68]. Представляется реалистичным дать полный список полициклов, которые могут возникнуть в семействе квадратичных векторных полей и доказать их конечную цикличность. Первый шаг этой программы был сделан в [78], где был составлен полный список из 121 полицикла, возникающих в семействе квадратичных векторных полей. В серии работ [78], [77], [97], [148] и [76] была доказана конечная цикличность 82 полициклов из этого списка. Можно надеяться, что на этом пути будет доказано существование числа $H(2)$. Однако совершенно ясно, что даже для $H(3)$ этот подход абсолютно нереалистичен.

5.3. Уравнения цикличности для элементарных полициклов

В остающейся части параграфа даётся набросок доказательства теорем 2.3 и 2.4. Он основан на *теории малочленов* Хованского [118], намеченной в следующем подпункте.

Пусть γ — полицикл, возникающий в типичном k -параметрическом семействе плоских векторных полей. Пусть ε — многомерный параметр семейства; $\varepsilon = 0$ соответствует уравнению с полициклом γ .

Рассмотрим зависящее от параметра отображение Пуанкаре $P(x, \varepsilon)$ полицикла γ . Уравнение цикличности позволяет найти неподвижные точ-

ки этого отображения:

$$P(x, \varepsilon) = x. \quad (5.2)$$

Заменяем это уравнение системой с большим числом уравнений, но более простой левой частью. Чтобы это сделать, отделим каждую вершину O_j , $j = 1, \dots, n$ полицикла двумя трансверсальями Γ_j^+ и Γ_j^- , так что траектории входят в окрестность точки O_j через Γ_j^+ и выходят через Γ_j^- . Пусть $\Delta_j: \Gamma_j^+ \rightarrow \Gamma_j^-$ — отображение соответствия вдоль орбит. Полицикл является элементарным; следовательно, его вершины — седла или седлоузлы. Деформации этих особых точек могут быть приведены к нормальной форме в соответствии с теоремой 4.9. Отображения $\Delta_{j,\varepsilon}$ соответствия для уравнений этих семейств в определённом смысле стандартны.

С другой стороны, пусть $f_{j,\varepsilon}: \Gamma_j^- \rightarrow \Gamma_{j+1}^+$ — отображения вдоль *регулярных частей* траекторий. Об этих отображениях ничего нельзя сказать, кроме того, что в типичных семействах они удовлетворяют условиям общности положения.

Пусть x_j и y_j — карты на Γ_j^+ и Γ_j^- соответственно. Предельные циклы, порождённые полициклом γ в рассматриваемом семействе, пересекают все отрезки Γ_j^\pm при малых ε . Точки пересечения $x_j \in \Gamma_j^+$, $y_j \in \Gamma_j^-$ удовлетворяют системе:

$$y_j = \Delta_{j,\varepsilon}(x_j), \quad x_{j+1} = f_{j,\varepsilon}(y_j). \quad (5.3)$$

Она называется уравнением цикличности; это название и упомянуто в заглавии раздела.

Число вершин полицикла, который возникает в типичном k -параметрическом семействе, не может быть больше, чем k . Сложность этих особых точек в определённом смысле также ограничена значением k . Поэтому семейства функций $\Delta_{j,\varepsilon}$ в системе (5.3) берутся из некоторого «стандартного списка», зависящего только от k и даваемого теоремой 4.9.

Однако эти функции трансцендентны, и с ними нелегко оперировать. В 88 году Яковенко предложил воспользоваться теорией малочленов Хованского, чтобы исследовать систему (5.3). Впервые теория малочленов была применена к исследованию предельных циклов Муссю и Рошем [134].

5.4. набросок теории малочленов [118]

Основная цель теории малочленов состоит в том, чтобы оценивать число решений систем через сложность самих систем. Например, число положительных нулей вещественного полинома от одной переменной не превосходит числа переменных знаков его коэффициентов при условии, что

члены упорядочены по степени (правило Декарта). Следовательно, число положительных корней многочлена не превосходит числа его членов, независимо от того, какова его степень. Это мотивирует название теории.

Теория основана на *процедуре исключения для функционально-пфаффовых уравнений*. Простейший пример состоит в следующем. Пусть $\omega = A dx + B dy$ — полиномиальная 1-форма. Обозначим через γ кривую, которая разделяет плоскость на две части, удовлетворяет уравнению $\omega = 0$, и не содержит особых точек формы ω , заданных уравнением $A = B = 0$. Пусть $l = \{F = 0\}$ — замкнутая алгебраическая кривая. Задача состоит в том, чтобы оценить число точек пересечения l и γ .

Предположим для простоты, что пересечения этих кривых трансверсальны; общий случай сводится к предыдущему. Выберем произвольную ориентацию на кривой l . Для любых двух соседних точек пересечения кривых l и γ значения формы ω на касательных векторах к кривой l в этих точках имеют разные знаки. Поэтому, по теореме Ролля, существует по крайней мере одна *точка контакта* между этими кривыми, а именно точка, где $\omega = 0$ на касательном векторе к l . В этой точке формы ω и dF линейно зависимы: $\omega \wedge dF = 0$. Следовательно,

$$\#\{\gamma \cap l\} \leq \{F = 0, *(\omega \wedge dF) = 0\}. \quad (5.4)$$

Оператор $*$ определён формулой: $\omega \wedge dF = *(\omega \wedge dF) dx \wedge dy$. Система в правой части (5.4) полиномиальна и число её решений может быть оценено сверху по теореме Безу.

Рассмотрим теперь систему, которая содержит трансцендентные функции, являющиеся решениями полиномиальных дифференциальных уравнений. Вместо этих трансцендентных функций можно рассматривать соответствующие дифференциальные уравнения. Это даёт так называемую *функционально-пфаффову* систему. С помощью процедуры исключения, идея которой описана в предыдущем примере, последняя система может быть заменена чисто функциональной с неменьшим числом решений. Если эта новая система полиномиальна, тогда число её решений может быть оценено сверху по теореме Безу.

Этот подход может быть применён в гораздо более широком контексте. Применение теории малочленов к системе (5.3) осуществляется следующим образом.

Теория нормальных форм, а именно теорема 4.9 даёт конечный список функций $\Delta_{j,\varepsilon}$, которые могут возникнуть в системе (5.3) для любого фиксированного числа параметров в соответствующем семействе. Каждая функция из этого списка является решением полиномиального дифференциального уравнения. Например, нерезонансное седло задаёт отображение соответствия $y = x^{\lambda(\varepsilon)}$. Эта функция является решением уравнения

$$x dy - \lambda(\varepsilon)y dx = 0.$$

Таким образом, используя теорему 4.9, мы можем заменить систему (5.3) функционально-пфаффовою системой с меньшим числом решений:

$$\omega_j(x_j, y_j, \varepsilon) = 0, \quad x_{j+1} = f_{j,\varepsilon}(y_j). \quad (5.5)$$

Здесь ω_j — полиномиальные 1-формы от x_j, y_j с коэффициентами, зависящими от параметра ε . Функции $y_j - \Delta_j(x_j, \varepsilon)$ удовлетворяют уравнениям $\omega_j = 0$. Формы ω_j берутся из конечного списка, зависящего только от числа параметров k .

Используя процедуру исключения Хованского, можно свести систему (5.5) к следующей:

$$P \circ j^m f = a. \quad (5.6)$$

В этой системе P — полиномиальное отображение из некоторого конечного, зависящего от k , списка;

$$f(y) = (f_{1,\varepsilon}(y_1), \dots, f_{n,\varepsilon}(y_n)); \quad (5.7)$$

m — натуральное число, зависящее от k . Набор f является типичным в классе всех отображений (5.7), где $f_{j,\varepsilon}$, при фиксированном ε , зависит только от y_j . Этот класс обозначается через C от Cartesian. Число m в системе (5.6) зависит от k , $j^m f$ — m -струя функции f в нуле, f рассматривается как вектор функция от y , и струя берётся по переменной y ; a — постоянный вектор. Процедура сведения гарантирует, что число решений системы (5.5) не превосходит числа решений (5.6), в предположении, что a меняется в пределах специального множества, напоминающего воронку с вершиной 0. Основная проблема состоит теперь в том, чтобы оценить число решений системы (5.6).

5.5. Цепные отображения и оценка сверху для $E(k)$

Нас интересует оценка сверху числа малых решений системы (5.6) для малых a . Другими словами, нас интересует число малых прообразов точки, близкой к 0, под действием цепного отображения $P \circ j^m f$, где P — фиксированное полиномиальное отображение, а f — типичное отображение из класса C . Малость a , вместе с формулируемыми ниже ограничениями на a , могут быть обеспечены в ходе применения процедуры исключения Хованского.

Существование границы, упомянутой выше, было доказано в [112]. Точная оценка была получена недавно Калошиным [107] и [117].

Ключевая идея Калошина, которая позволила ему оценить число решений системы (5.6), и, следовательно, получить верхнюю оценку для

$E(k)$, состоит в следующем. Поскольку отображение (5.6) имеет локальный характер, а набор f — общего положения, струя $j^m f$ может быть заменена линейным отображением без уменьшения числа решений. Эта редукция опирается на новые результаты в теории стратификаций, полученные Калошиным [117]. Следовательно, число решений системы (5.6), в соответствии с теоремой Безу, оценивается сверху произведением степеней компонент векторного многочлена P . Эти степени контролируются с помощью параметра k , начиная со списка систем (5.3), и в ходе всей процедуры исключения. Оценки этих степеней дают верхнюю границу для $E(k)$: $E(k) \leq 2^{25k^2}$; см. теорему 4 в параграфе 2.

Упомянутая выше ключевая идея может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 5.23 (теорема Безу для цепных отображений [117]). *Рассмотрим произвольное полиномиальное отображение $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющее в некоторых точках максимальный ранг n , причём $P(0) = 0$. Тогда существует следующий набор, зависящий только от P :*

- натуральные числа l и M ;
- алгебраическое подмножество Σ в пространстве струй $J^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$.

Этот набор имеет следующее свойство. Пусть $K_{\delta, M}$ — область типа воронки

$$K_{\delta, M} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid 0 < a_1 < \delta, 0 < a_{j+1} < (a_1 \dots a_j)^M, j = 1, \dots, n-1\}.$$

Тогда для каждого отображения $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ такого, что l -струйное расширение \hat{f} трансверсально Σ , существует окрестность U нуля в \mathbb{R}^n и положительное δ , такие, что число решений уравнения $P \circ \hat{f}(x) = a$, $x \in U$, для любого $a \in K_{\delta, M}$ не превосходит произведения степеней компонент векторного многочлена P .

Более сильный вариант этой теоремы, в котором f заменено на $j^m f$, и типичность заменяется типичностью в классе C , (см. (5.7)), также доказано в [117]. Он даёт предыдущую явную оценку числа $E(k)$.

§ 6. Ограниченные версии 16-й проблемы Гильберта

Поскольку исходная проблема Гильберта остаётся неприступной, естественно рассмотреть упрощённые её варианты. Неполный список соответствующих проблем таков:

- уравнение Абеля;
- уравнение Лъенара;
- инфинитезимальная проблема Гильберта;
- проблема Гильберта—Арнольда.

Две последних проблемы были сформулированы выше; первые две обсуждаются ниже.

6.1. Уравнение Абеля

Уравнение Абеля — это уравнение на цилиндре, полиномиальное по y и периодическое по x :

$$\frac{dy}{dx} = y^n + \sum_0^{n-1} a_j(x)y^j, \quad y \in \mathbb{R}, x \in S^1; \quad (6.1)$$

коэффициенты a_j считаются лишь непрерывными, если не оговорено противное.

Общая проблема состоит в том, чтобы получить оценку сверху для числа предельных циклов уравнения (6.1). Для малых значений n эта оценка может быть выражена только через n .

Теорема 6.24 ([151]). *Для $n \leq 3$ число предельных циклов уравнения (6.1) не превосходит n .*

При $n = 4$ происходит взрыв.

Теорема 6.25 ([123]). *При $n \geq 4$ уравнение Абеля может иметь сколь угодно много предельных циклов.*

Более того, не существует никаких ограничений на гомеоморфизм, являющийся отображением Пуанкаре для уравнений Абеля.

Теорема 6.26 ([41]). *Каждый гомеоморфизм отрезка может быть равномерно приближён отображением Пуанкаре для подходящего уравнения Абеля.*

Тем самым, чтобы получить верхнюю границу для числа предельных циклов, нужно наложить дополнительные предположения на коэффициенты.

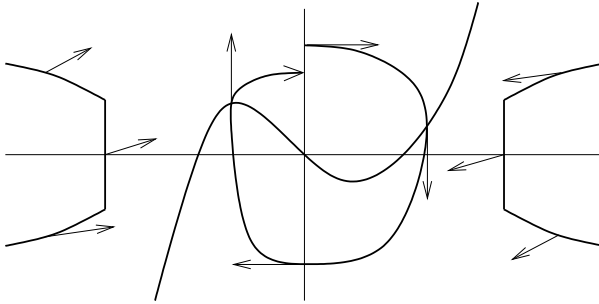


Рис. 8. Отображение Пуанкаре и выталкивающие секторы для уравнения Льенара

Проблема 6.1. Найти верхнюю границу числа предельных циклов уравнения Абеля (6.1), коэффициенты которого a_j — тригонометрические полиномы степени не выше m . Граница должна быть выражена только через n и m .

Эта проблема не решена даже при $m = 1$.

6.2. Уравнение Льенара

В своём списке проблем для XXI века Смейл [149] включил 16-ю проблему Гильберта. В качестве упрощённого варианта он указал на уравнение Льенара

$$\dot{x} = y - F_n(x), \quad \dot{y} = -x, \quad F_n(x) = x^n + \sum_1^{n-1} a_j x^j, \quad n \text{ нечётно.} \quad (6.2)$$

Свободный член многочлена F_n может быть сделан нулём с помощью переноса вдоль оси y . Единственная особая точка этого уравнения — 0. Следовательно, существует лишь одно гнездо предельных циклов.

Более того, уравнение (6.2) не имеет предельных циклов вблизи бесконечности. Действительно, элементарное исследование [122] показывает, что точка $(1 : 0)$ на бесконечности имеет тип «неустойчивый узел». Следовательно, существуют параболические секторы, с вершиной в этой точке на бесконечности, которые выталкивают все орбиты; см. рис. 8.

Проблема 6.2. Оценить сверху число предельных циклов уравнения Льенара (6.2) через степень n .

В качестве комментария процитируем параграф из статьи Смейла [149], слегка изменив обозначения, чтобы приспособить их к предыдущему тексту.

«Можно показать, что все решения уравнения (6.2) вращаются вокруг единственной неподвижной точки $(0, 0)$ по часовой стрелке. Эти кривые задают отображение Пуанкаре $P: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, где \mathbb{R}^+ — положительная полуось y . Предельные циклы системы (6.2) — это в точности неподвижные точки отображения P . В различных докладах я ставил вопрос об оценке числа этих неподвижных точек (с помощью какой-нибудь новой теоремы о неподвижных точках?) В ответ Линс, де Мело и Пью (1977) нашли примеры с $\frac{n-1}{2}$ предельными циклами и предположили, что число $\frac{n-1}{2}$ даёт верхнюю оценку. Однако до сих пор никакой верхней оценки вида $(\deg F)^d$ не найдено. Поскольку P аналитично, (6.2) имеет лишь конечное число предельных циклов для каждого F .»

Надо заметить, что никакой оценки сверху, зависящей от n , для числа предельных циклов уравнения Льенара не найдено вообще.

6.3. Оценки с дополнительными ограничениями

Первым шагом на пути к решению упрощённых вариантов 16-й проблемы Гильберта может быть решение так называемых *ограниченных версий* этих упрощённых вариантов. Для уравнений Абеля и Льенара это ограничение налагается на максимум модуля коэффициентов, и этот максимум входит в верхнюю оценку. Для инфинитезимальной проблемы Гильберта это — ограничение на выбор многочлена H . Для проблемы Гильберта—Арнольда это ограничение состоит в том, что все особые точки уравнения элементарны.

Эти ограниченные версии сейчас решены. Решение последней проблемы обсуждалось в § 5. Решение ограниченной инфинитезимальной проблемы Гильберта обсуждается в следующем параграфе. Для проблем Абеля и Льенара эти решения выглядят следующим образом.

Теорема 6.27 ([106]). *Рассмотрим уравнение Абеля (6.1) с ограничением*

$$|a_j(x)| < C. \quad (6.3)$$

Тогда число L предельных циклов уравнения (6.1), (6.3) ограничено сверху константой:

$$L \leq e^{e^{C^{3n}}}.$$

Теорема 6.28 ([109]). *Рассмотрим уравнение Льенара (6.2) с ограничением*

$$|a_j| < C, \quad C \geq 4. \quad (6.4)$$

Тогда число L предельных циклов уравнения (6.2), (6.4) оценивается сверху константой:

$$L \leq e^{e^{14n}}.$$

Оценки, даваемые этими теоремами, не претендуют на реалистичность. Однако это единственные известные в настоящее время оценки такого рода.

Подход к исследованию уравнений Абеля и Льенара также, как и абелевых интегралов, основан на обобщении неравенства Йенсена, описанном в следующем подпункте.

6.4. Теорема о нулях и росте для голоморфных функций

Рассмотрим два множества, U и K , расположенных на \mathbb{C} или на римановой поверхности. Предположим, что U односвязно и $K \subset U$ компактно и линейно связно. Пусть f — голоморфная функция в \bar{U} . *Индекс Бернштейна* функции f по отношению к U и K — это

$$B_{U,K}(f) = \log \frac{\max_{\bar{U}} |f|}{\max_K |f|}.$$

Теорема 6.29 ([115]). *Существует геометрическая константа $\gamma(U, K)$, такая, что*

$$\#\{z \in K \mid f(z) = 0\} \leq \gamma(U, K) B_{U,K}(f).$$

Значение $\gamma(U, K)$ может быть взято равным e^ρ , где ρ — диаметр компакта K в метрике Пуанкаре области U .

Диаметр ρ может быть оценён в терминах евклидовой, а не гиперболической геометрии. Действительно, пусть *расстояние во внутренней метрике* между двумя точками K равно инфимуму длин кривых в K , соединяющих эти точки. Пусть $d_{\text{int}}(K)$ — *внутренний диаметр* компакта K в смысле этой внутренней метрики. Определение имеет смысл как в случае, когда K расположено в \mathbb{C} , так и в случае, когда K принадлежит римановой поверхности над \mathbb{C} ; в последнем случае метрика поднимается с \mathbb{C} на риманову поверхность. Пусть ε — зазор между K и ∂U в смысле евклидовой метрики, поднятой с \mathbb{C} :

$$\varepsilon = d(K, \partial U).$$

Теорема 6.30 ([106], [94]). *Теорема 6.6 выполняется при*

$$\gamma(U, K) = e^{\frac{2d_{\text{int}}(K)}{\varepsilon}}.$$

6.5. Приложения к уравнениям Абеля и Лъенара

Ограничения (6.3) и (6.4) позволяют указать область U , в которой определено отображение Пуанкаре и множество K , которое пересекает все предельные циклы уравнения (6.1) или (6.2). Более подробно, пусть $\{x = 0\}$ — трансверсальное сечение и $P: y \mapsto P(y)$ — отображение Пуанкаре, рассматриваемое в своей области определения. Теорема о нулях и росте применяется к разности $f = P - y$, нули которой соответствуют предельным циклам.

Из оценки (6.3) следует, что уравнение Абеля (6.1) похоже на уравнение $\dot{y} = y^n$ вне отрезка $\sigma = \{|y| \leq 2C + 1\}$. Более подробно, все решения с начальными условиями на $\Gamma \setminus \sigma$ уходят на бесконечность раньше, чем успевают сделать один оборот вокруг цилиндра в прямом или обратном времени. Поэтому можно выделить отрезок $K \subset \sigma$, на котором определено отображение Пуанкаре уравнения (6.1), и такой, что все предельные циклы этого уравнения пересекают K . Длина K порядка C . Стандартная техника, основанная на неравенстве Гроунолла, позволяет продолжить отображение Пуанкаре уравнения (6.1) в ε -окрестность множества K в \mathbb{C} при $\varepsilon = \exp(-C^{2n})$. Приращение f этого продолженного отображения по-прежнему имеет порядок C . Поэтому индекс Бернштейна $B_{U,K}(f)$ порядка 1, а геометрическая константа γ порядка $e^{O(C)\varepsilon^{-1}}$. Этот множитель γ выражается тройной экспонентой из теоремы 6.4, если заменить $O(C)\varepsilon^{-1}$ большей величиной $\exp C^{3n}$.

Подход к уравнению Лъенара аналогичен. Неравенство (6.4) позволяет оценить размер выталкивающих секторов на бесконечности. Они имеют вид

$$D_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 2C, |y| \leq x^2\},$$

$$D_- = \{(-x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in D_+\};$$

см. рис. 8. После этого исследование уравнения Лъенара проводится так же, как и уравнения Абеля, только технические трудности несколько больше.

Естественная проблема состоит в том, чтобы отказаться от ограничений (6.3) и (6.4). Ограничение (6.3) должно быть заменено предположением, похожим на условие проблемы 6.1. Ограничение (6.4) должно быть просто снято. Кажется вероятным, что это можно сделать методами теории слоений на аналитические кривые, изложенными в § 8 ниже.

§ 7. Инфинитезимальная 16-я проблема Гильберта

Постановка проблемы приведена в § 2. Она напоминает и обобщается ниже.

7.1. Постановка проблемы

Рассмотрим, как и выше, вещественный многочлен H степени $n + 1$ на плоскости. Пусть $\gamma(t)$ — семейство его овалов; см. рис. 2. Пусть $\omega = A dx + B dy$ — полиномиальная 1-форма с коэффициентами произвольной степени m . Рассмотрим интеграл

$$I(t) = \int_{\gamma(t)} \omega \quad (7.1)$$

Проблема 7'. Найти верхнюю грань $V(n, m)$ числа вещественных изолированных нулей интеграла (7.1).

Для 16-й проблемы Гильберта важен только случай $n \geq m$. Действительно, в этом случае возмущение

$$dH + \varepsilon\omega = 0 \quad (7.2)$$

соответствует полиномиальному векторному полю степени n . Однако зависимость величины $V(n, m)$ от m представляет независимый интерес; см. п. 7.4 ниже.

Напомним, что число простых нулей абелева интеграла (7.1) не больше, чем число предельных циклов возмущения (7.2). Обратное соотношение обсуждается в пункте 7.8.

7.2. Теорема о точности и свободное разбрасывание предельных циклов

Определение 7.12. Комплексный многочлен H степени $n + 1$ называется *ультраморсовским*, если он имеет n^2 невырожденных критических точек с различными критическими значениями и его старшая однородная форма h имеет единственную критическую точку 0.

Предположение о критических точках и критических значениях определяет *морсовский многочлен*; второе требование выделяет более узкий класс; это мотивирует название. Ультраморсовские многочлены образуют открытое по Зарисскому множество в пространстве всех полиномов данной степени.

Теорема 7.31 (Теорема о точности, [22], [23] и [45]). Пусть в интеграле (7.1) кривые $\{\gamma(t)\}$ принадлежат семейству овалов вещественного ультра-морсовского многочлена H степени $n+1 \geq 3$. Пусть ω — полиномиальная 1-форма степени не больше, чем n . Если $I(t) \equiv 0$, тогда форма ω точна: $\omega = df$ для некоторого многочлена f .

Теорема о точности для рационального H , вместо полиномиального, доказана в [136].

Из теоремы 7.1 следует, что линейное пространство интегралов (7.1), соответствующих тем же семействам овалов и формам ω , которые описаны в теореме о точности, изоморфно фактору пространству полиномиальных форм по точным. Это последнее пространство изоморфно пространству многочленов двух переменных степени не выше, чем $n-1$. Размерность последнего пространства равняется $\frac{n^2+n}{2}$.

Предположим, что многочлен H из теоремы 7.1 имеет по крайней мере одно семейство вещественных овалов. Рассмотрим N овалов $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ ультраморсовского многочлена H , где $N = \frac{n^2+n}{2} - 1$. Не имеет значения, расположены ли эти овалы в одном семействе, или в нескольких разных. Теорема 7.1, вместе с критерием Понтрягина, см. §2, влечёт следующее утверждение:

Следствие 7.2. Пусть H , N и γ_j — те же, что и выше. Тогда для любого $\delta > 0$ существует возмущение (7.2), имеющее N предельных циклов L_1, \dots, L_N , таких, что расстояние по Хаусдорфу между L_j и γ_j меньше, чем δ .

Наметим доказательство. Размерность пространства всех полиномиальных 2-форм $P dx \wedge dy$ при $\deg P \leq n-1$ равняется $N+1$. Занумеруем мономы $x^k y^l$ степени меньше n как e_1, \dots, e_{N+1} в лексикографическом порядке: $e_i = x^{k(i)} y^{l(i)}$. Формы

$$\omega_i = \frac{y}{l(i)+1} e_i dx$$

образуют базис в факторе пространстве полиномиальных 1-форм степени меньше чем $n+1$ по модулю точных форм. Для любого семейства Γ овалов $\gamma(t)$ многочлена H рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbb{I}_\Gamma: t \mapsto \mathbb{I}_\Gamma(t) = \left(\int_{\gamma(t)} \omega_1, \dots, \int_{\gamma(t)} \omega_N \right).$$

Кривая $\mathbf{I}_\Gamma = \{\mathbb{I}_\Gamma(t)\}$ в \mathbb{R}^{N+1} параметризована значением t многочлена H на овале $\gamma(t)$. Обозначим через Γ_j непрерывное семейство овалов $\gamma_j(t)$, содержащее γ_j ; семейства Γ_j могут совпадать для различных значений j .

Овалы γ_j задают N точек A_j на кривых \mathbf{I}_{Γ_j} :

$$A_j = \left(\int_{\gamma_j} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_j} \omega_N \right).$$

Существует по крайней мере одна гиперплоскость \mathbb{L} в \mathbb{R}^{N+1} , проходящая через ноль и точки A_j . Она задаётся уравнением $\sum c_i x_i = 0$. По теореме 7.1 эта гиперплоскость не содержит ни одной из кривых \mathbf{I}_{Γ_j} . Если это не так, то компоненты вектор функции \mathbb{I}_{Γ_j} были бы линейно зависимы. Итак, точки пересечения $A_j \in L \cap \mathbf{I}_{\Gamma_j}$ изолированы в топологии кривой \mathbf{I}_{Γ_j} . Слегка возмущённая гиперплоскость $L' = \sum c'_i x_i$ имеет трансверсальные пересечения $A'_j = \mathbf{I}_{\Gamma_j}(t_j)$ с кривыми \mathbf{I}_{Γ_j} . Пусть $\omega = \sum c'_i \omega_i$. Тогда интегралы $I_j = \int_{\gamma_j(t)} \omega$ имеют простые нули в t_j . По критерию Понтрягина (§ 2) овалы $\gamma_j(t_j)$ порождают предельные циклы при возмущении (7.2), если форма ω выбрана как выше. С другой стороны овалы $\gamma_j(t)$ близки к овалам γ_j . Это доказывает следствие 7.1.

Предыдущее следствие даёт богатые возможности для расположения предельных циклов полиномиальных векторных полей на вещественной плоскости. Оно также даёт нижнюю границу $H(n) \geq \frac{n^2}{2} + O(n)$. Более сильная оценка

$$H(n) \geq \frac{1}{2} n^2 \log_2 n + O(n)$$

для специальных значений n : $n = 2^k - 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$ была получена Кристофером и Ллойдом [63]. Недавно Итенберг и Шустин [111] доказали, что эта оценка справедлива для любого $n \geq 3$. Они использовали метод «склейки», изобретённый Виро для исследования плоских алгебраических кривых, о которых говорится в первой части 16-й проблемы Гильберта.

Разнообразие топологических типов фазовых портретов полиномиальных векторных полей на плоскости изучалось многими авторами; см., например, [55] и [89].

7.3. Продолжение абелевых интегралов в комплексную область

Рассмотрим многочлен H как полином от двух комплексных переменных. Линии уровня многочлена превратятся в римановы поверхности:

$$S_t = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid H(z) = t\}.$$

Овалы $\gamma(t)$ являются циклами группы гомологий

$$H_1(t) = H_1(S_t, \mathbb{Z}).$$

Она является свободной абелевой группой ранга n^2 и имеет замечательное (неоднозначно определённое) множество образующих, называемых *исчезающими циклами*. Они определяются следующим образом.

Для морсовского многочлена H малая окрестность критической точки a разбивается на множества уровня H каноническим образом. Действительно, по лемме Морса, существует голоморфная замена координат в окрестности точки a , которая переводит a в ноль, а множества уровня многочлена H в семейство $z_1 z_2 = \text{const}$. Цикл

$$\delta_C = \{C^{1/2} e^{i\varphi}, C^{1/2} e^{-i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi]\} \subset \{z_1 z_2 = C\}$$

называется *локальным исчезающим циклом*. Он стягивается к критической точке 0 при $C \rightarrow 0$.

Система исчезающих циклов может быть определена на каждой линии уровня S_t , не обязательно близкой к критическому уровню. Действительно, пусть a_1, \dots, a_μ , $\mu = n^2$ — критические значения многочлена H . Пусть $t_0 \neq a_j$ — произвольное некритическое значение. Для каждого $j = 1, \dots, \mu$ обозначим через α_j путь в \mathbb{C} , который соединяет t_0 и a_j , причём:

$$\alpha_j \setminus \{a_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_\mu\};$$

пути α_j не имеют самопересечений и попарно не пересекаются вне точки t_0 . Для t , близких к a_j , определены локальные исчезающие циклы $\delta_j(t) \in H_1(t)$. Для всех $t \in \alpha_j$ семейство циклов $\delta_j(t) \in H_1(t)$ определяется с помощью накрывающей гомотопии. Это определяет множество исчезающих циклов $\delta_j(t_0) \subset H_1(t_0)$, связанных с кривыми α_j . Оказывается, что *эти циклы порождают группу $H_1(t_0)$* .

Когда параметр t обходит критическое значение a_j , группа гомологий претерпевает *преобразование монодромии Δ_j* . Оно описывается следующей теоремой:

Теорема 7.32 (Пикар—Лефшец [3]). Пусть $l \in H_1(t_0)$. Пусть t пробегает петлю λ_j :

$$\lambda_j = \tilde{\alpha}_j \circ \beta_j \circ \tilde{\alpha}_j^{-1},$$

где $\tilde{\alpha}_j = \alpha_j \setminus D_j$, D_j — малый диск с центром a_j , и $\beta_j = \partial D_j$ — положительно ориентированная окружность. Пусть Δ_j — соответствующий изоморфизм группы $H_1(t_0)$ в себя. Тогда для любого $l \in H_1(t_0)$:

$$\Delta_j(l) = l - (\delta_j, l)\delta_j, \quad (7.3)$$

где $\delta_j(t_0)$ — исчезающий цикл, соответствующий пути α_j .

Доказательство теоремы 7.1 о точности может быть намечено теперь следующим образом. Для системы путей α_j , описанных выше, *граф пере-*

сечений соответствующей системы исчезающих циклов связан [22] и [3]. Более того, каждый вещественный овал ультраморсовского многочлена степени больше двух имеет ненулевой индекс пересечения хотя бы с одним исчезающим циклом [45]. По теореме единственности для аналитических функций аналитическое продолжение вдоль замкнутой кривой функции, тождественно равной нулю, тождественно равно нулю. Теорема Пикара—Лефшеца влечёт теперь, что если $\int_{\gamma(t)} \omega \equiv 0$ для семейства овалов $\gamma(t)$, тогда $\int_{\delta(t)} \omega \equiv 0$ для любого семейства исчезающих циклов $\delta(t)$ с ненулевым индексом пересечения $(\gamma(t), \delta(t))$. Поскольку граф пересечений исчезающих циклов связан, интеграл $\int_{\delta_j(t)} \omega \equiv 0$ для всех исчезающих циклов δ_j . Следовательно, $\int_{l(t)} \omega \equiv 0$ для любого семейства циклов $l(t) \in H_1(t)$. Это может случиться, только если форма ω точна [22], [23]. Это доказывает теорему о точности.

Усиленный вариант теоремы о точности был получен Гавриловым [91]. Вместе с [45] он влечёт следующую теорему.

Теорема 7.33. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 7.1, кроме одного: ω теперь является 1-формой произвольной степени. Тогда форма ω точна по модулю слагаемого, кратного dH :*

$$\omega = df + g dH$$

для некоторых полиномов f и g .

7.4. Существование верхней грани числа нулей абелевых интегралов

Соображения монодромии играют ключевую роль в доказательстве теоремы 2 §2. Первоначально эта теорема была доказана в несколько более сильной форме.

Теорема 7.34 ([16], [50]). *Для любых n и t существует число $V(n, t)$ такое, что интеграл (7.1) по овалам многочлена степени $n+1$ от полиномиальной 1-формы ω степени t , имеет не более, чем $V(n, t)$ изолированных вещественных нулей.*

Это был один из первых результатов, доказанных с помощью теории малочленов.

Рассмотрим интеграл (7.1) как функцию не только от t , но и от всех коэффициентов многочлена H и формы ω . В пространстве этих переменных наборы (H, t, ω) , для которых многочлен H — ультраморсовский, а t — некритическое значение многочлена H , образуют множество так

называемых *регулярных точек*. Дополнение Σ к этому множеству является алгебраическим и состоит из *особых точек*.

По теореме Хиронаки о разрешении особенностей множество Σ может быть заменено множеством Σ' , которое является нормальным пересечением в окрестности любой своей особой точки. Рассматриваемый интеграл является голоморфной функцией на универсальной накрывающей дополнения до Σ' .

Это позволяет дать локальное представление интеграла (7.1). Рассмотрим произвольную точку $a \in \Sigma'$ и такую систему локальных координат t_1, \dots, t_m , что $t_j(a) = 0$; множество Σ' , пересечённое с окрестностью U точки a , является объединением первых m координатных гиперплоскостей: $t_1 \cdots t_m = 0$, $t \in U$. Фундаментальная группа дополнения $U \setminus \Sigma'$ коммутативна. Действительно, дополнение к m координатным гиперплоскостям в \mathbb{C}^M гомотопически эквивалентно m -мерному тору, фундаментальная группа которого абелева. Обход любой из этих гиперплоскостей определяет преобразование монодромии в пространстве функций, натянутом на $\mu = n^2$ ветвей I_1, \dots, I_μ интеграла. Остальные ветви принадлежат этому пространству. Преобразования монодромии, соответствующие различным гиперплоскостям $t_j = 0$, коммутируют. Следовательно, вблизи каждой точки $a \in \Sigma'$ μ ветвей интеграла могут быть представлены в виде:

$$(I_1, \dots, I_\mu) = (C_1, \dots, C_\mu) t_1^{A_1} \dots t_m^{A_m}. \quad (7.4)$$

Здесь C_j — функции, голоморфные в 0, и A_j — логарифмы матриц монодромии, делённые на $2\pi i$. По геометрическим соображениям собственные значения матриц A_j вещественны; см. [16] и приведённые там ссылки.

Элементы матрицы t^{A_j} — это вещественные степени t , умноженные на многочлены от $\log t$, и линейные комбинации таких членов. Они могут быть представлены как решения системы пфаффовых уравнений вида $\Omega = 0$, где Ω — полиномиальная 1-форма. Процедура исключения Хованского позволяет заменить систему (7.4) аналитической системой $f = 0$. По теореме Габриэлова [20], число изолированных решений системы $f = 0$ равномерно ограничено по параметру. Стандартные аргументы компактности завершают доказательство теоремы 7.4.

7.5. Линейный рост по m величины $V(n, m)$

Фиксируем ультраморсовский многочлен H и рассмотрим число нулей интеграла (7.1) как функцию от степени m формы ω . В [113] доказано, что эта функция растёт не быстрее двойной экспоненты от m . В [138] эта оценка была улучшена до простой экспоненты. В 1996 году Петров

и Хованский получили следующий результат, который остаётся пока неопубликованным.

Теорема 7.35. *Верхняя граница $V(n, t)$ числа нулей абелева интеграла (7.1) (см. теорему 7.4) растёт линейно по t . Более того,*

$$V(n, t) \leq A(n)t + B(n),$$

где A — многочлен от n , который может быть точно посчитан.

Отметим, что для 16-й проблемы Гильберта наибольший интерес имеет число $V(n+1, n)$. Действительно, для $t = \deg H - 1 = n$, (7.2) — полиномиальное дифференциальное уравнение степени n . Величина $V(n+1, n)$ тесно связана с $B(n)$. Оценка обеих величин остаётся основной проблемой в рассматриваемой области.

Доказательство существования величины $B(n)$, также как и $V(m, n)$, неконструктивно, т. е. не даёт алгоритма для нахождения верхней границы для этих величин.

7.6. Ограниченная версия инфинитезимальной 16-й проблемы Гильберта: I

Итак, полная инфинитезимальная 16-я проблема Гильберта остаётся нерешённой. Однако две *ограниченных версии* этой проблемы недавно решены в [141] и [94]. Ограничения налагаются на выбор многочлена H . Оценки числа нулей интеграла (7.1) получены для произвольной степени $n+1$ гамильтониана H и для произвольной подинтегральной формы ω степени меньше, чем $n+1$.

Абелевы интегралы удовлетворяют так называемым *уравнениям Пикара—Фукса* [3]. Это — линейные системы дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами типа $\dot{z} = A(t)z$, $z \in \mathbb{C}^N$, где элементы $A(t)$ — рациональные функции от t . Подход, изложенный в этом пункте, рассматривает абелевы интегралы как решения таких уравнений. Подход, намеченный в следующем пункте, основан непосредственно на определении (7.1).

Линейное дифференциальное уравнение вида $\omega^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)\omega^{(j)}$ хорошо приспособлено для оценки индекса Бернштейна решений; см. п. 6.4. На этом пути были получены оценки числа нулей решений линейных дифференциальных уравнений через максимум модуля их коэффициентов [115]. Эти результаты были применены к абелевым интегралам по овалам гиперэллиптических многочленов [139]. Эти многочлены сильно отличаются от ультраморсовских.

Основная проблема для типичных, т. е. ультраморсовских полиномов состоит в том, чтобы свести *систему* Пикара—Фукса для абелевых интегралов к *одному уравнению* высокого порядка. Соответствующая техника развита в [140]; см. также [161] и приведённые там ссылки.

Приводимая ниже оценка даётся для ультраморсовского многочлена H и зависит от положительного параметра R , характеризующего, грубо говоря, расстояние от многочлена H до множества не ультраморсовских полиномов. Этот параметр определяется следующим образом.

Рассмотрим старшую однородную форму h многочлена H . Ее частные производные h_x, h_y взаимно просты по определению 7.1. Рассмотрим линейный оператор D_h , который отображает пространство однородных многочленов степени $2n - 1$ на пространство пар однородных многочленов степени $n - 1$:

$$D_h: f \mapsto (u, v), \quad f = h_x u + h_y v.$$

Очевидно, $D_{\lambda h} = \lambda^{-1} D_h$. Назовем нормой полинома $\|\cdot\|$ сумму модулей его коэффициентов; положим: $\|(u, v)\| = \|u\| + \|v\|$. Более того, для каждого ультраморсовского многочлена H существует ровно один параметр $\lambda > 0$ такой, что $D_{\lambda h}$ имеет единичную норму. Более того, для каждого ультраморсовского многочлена H существует хотя бы один многочлен вида $\mathbf{H} = \lambda H(\mu x, \mu y)$, $\lambda > 0, \mu > 0$ такой, что

— D_h имеет единичную норму;

— $\|\mathbf{H} - h\| = 1$,

где h — старшая форма многочлена H . Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n^2}$ — критические значения многочлена H . Обозначим через $\mathbf{R} = \mathbf{R}(H)$ минимальное положительное число такое, что

$$|\mathbf{a}_j| \leq \mathbf{R}; \quad |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \geq \frac{1}{\mathbf{R}}.$$

Существует не более, чем $n + 1$ пара $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ с указанными выше свойствами. Обозначим их через (λ_i, μ_i) , $i = 1, \dots, k \leq n - 1$ и пусть $\mathbf{H}_i = \lambda_i H(\mu_i x, \mu_i y)$, $R_i = \mathbf{R}(\mathbf{H}_i)$. Положим: $R(H) = \min_{i=1, \dots, k} R_i$.

Теорема 7.36 ([141]). *Существует элементарная функция $N(n, t)$, обладающая следующим свойством. Число всех нулей интеграла (7.1) по вещественным овалам ультраморсовского многочлена H не превосходит $(2 + R)^{N(n, m)}$, где $R = R(H)$ — определённый выше параметр. Функция N может быть оценена сверху башней из четырех экспонент и может быть точно посчитана.*

7.7. Ограниченная версия инфинитезимальной 16-й проблемы Гильберта: II

Приводимая ниже теорема налагает более сильные ограничения на H , но даёт точную оценку типа «экспонента от полинома». Ограничения на H описываются следующим образом.

Определение 7.13. *Критически ограниченный* многочлен — это унитарный комплексный полином от одной переменной с попарно различными критическими значениями по модулю не большими единицы.

Определение 7.14. Вещественный многочлен $H(x, y)$ от двух переменных называется *критически сбалансированным*, если он представим в виде суммы двух критически ограниченных многочленов одной и той же степени $n + 1 \geq 3$ от x и y соответственно, $H(x, y) = p(x) + q(y)$, причём его комплексные критические значения различны и минимальное расстояние между ними не меньше, чем $\frac{1}{n^2}$.

Теорема 7.37 ([94]). Пусть H — критически ограниченный полином степени $n + 1$ и ω — вещественная не точная 1-форма с полиномиальными коэффициентами степени не ниже n . Пусть $\gamma(t)$ — произвольное непрерывное семейство вещественных овалов многочлена H . Тогда число нулей интеграла (7.1) не превосходит e^{2500n^4} .

В теореме 7.7 множество всех ультраморсовских многочленов заменено весьма специальным множеством критически сбалансированных многочленов. Кажется возможным обобщить этот результат на множество всех ультраморсовских полиномов. Ожидается оценка вида $e^{P(n,R)}$, где $R = R(H)$ — тот же параметр, что в теореме 7.6, и P — многочлен.

С другой стороны, есть надежда свести общую инфинитезимальную 16-ю проблему Гильберта к специальному случаю, рассмотренному в теореме 7.7 гильбертовским методом «непрерывной деформации коэффициентов», отмеченным в постановке 16-й проблемы [99]. Это — предмет будущих исследований, которых мы здесь не касаемся.

Обе теоремы 7.6 и 7.7 обобщаются до оценок числа нулей интеграла (7.1) в компактных подмножествах комплексной области. Теорема 7.7 основана на теореме Пикара—Лефшеца и теореме о нулях и росте. Пусть (a, b) — интервал между двумя критическими значениями H , такой, что семейство овалов $\gamma(t)$ определено при $t \in (a, b)$, $a < b$. Пусть σ — отрезок $[a + \frac{4}{n^2}, b - \frac{4}{n^2}]$. Мы опишем идею доказательства теоремы 7.7 в ослабленной форме:

$$\#\{t \in \sigma \mid I(t) = 0\} \leq e^{2500n^4}. \quad (7.5)$$

Оценки (7.10) и (7.11) ниже, позволяющие применить теорему о нулях и росте, технически сложны. Мы объясним только, почему оценки такого рода выполняются.

Неравенство (7.5) выводится из теоремы о нулях и росте. Основная проблема — это правильно выбрать множества $K \supset \sigma$ и $U \supset K$, для которых индекс Бернштейна интеграла I может быть оценён сверху. Начнем с неудачной попытки, чтобы понять, какие проблемы возникают на этом пути. Рассмотрим интеграл I (7.1), как функцию f в теореме 6.6, отрезок σ как K_0 , его ε -окрестность при $\varepsilon = \frac{1}{8n^2}$ как U_0 . Мы пишем K_0, U_0 вместо K, U , поскольку ниже мы строим другие области K, U .

Пусть формы ω_i — те же, что в пункте 7.2. Попытаемся применить теорему о нулях и росте к функции $f = I$ и множествам K_0 и U_0 . Нормализуем форму ω :

$$\omega = \sum c_i \omega_i, \quad \max |c_i| = 1. \quad (7.6)$$

Определение критически сбалансированных полиномов хорошо приспособлено для оценки сверху интеграла I . Напомним, что по определению 7.3 $\sigma \subset [-2, 2]$. После этого радиус шара в \mathbb{C}^2 , который содержит цикл $\gamma(t)$ при $t \in U_0$, может быть оценён сверху вместе с интегралом (7.1). А именно,

$$M_0 = \max_{U_0} |I| \leq e^{16n}. \quad (7.7)$$

Геометрическая константа γ для $K_0 = \sigma$ и U_0 легко оценивается константой $e^{\frac{2|\sigma|}{\varepsilon}} \leq e^{64n^2}$. Но оценка снизу величины

$$m_0 = \max_{\sigma} |I|$$

оказывается проблематичной. Допущение $m = 0$ немедленно приводит к противоречию с теоремой 7.1, поскольку форма ω не точна. Возникает вопрос типа квантования: *функция I отлична от тождественного нуля на σ . Какова универсальная нижняя граница для $\max |I|$ на σ ?*

Ответ на этот вопрос неизвестен. Поэтому необходимо построить большее множество $K \supset \sigma$, на котором величина

$$m = \max_K |I| \quad (7.8)$$

может быть явно оценена снизу. Множество K будет построено как объединение отрезка σ и нескольких петель с общим началом в $t_0 \in \sigma$, обходящих критические значения. Эти петли будут выбраны так, что продолжения овала $\gamma(t_0)$ вдоль этих петель порождают группу $H_1(t_0)$. Это возможно по теореме Пикара—Лефшеца и потому, что граф пересечений,

упомянутый в пункте 7.3., связан. Множество U по-прежнему является ε -окрестностью множества K с тем же $\varepsilon = \frac{1}{8n^2}$.

Предположим теперь, что максимум m мал. Тогда интегралы от формы ω по всем исчезающим циклам $\delta_j(t_0)$ будут малы. Это позволит найти оценку снизу для m следующим образом.

Рассмотрим большой набор форм ω_i , $i = 1, \dots, \mu = n^2$. Он включает множество, определённое в п. 7.2 и состоит из форм

$$\omega_i = \frac{y}{l(i) + 1} x^{k(i)} y^{l(i)} dx$$

где $(k(i), l(i))$ пробегают множество целых точек квадрата $0 \leq k \leq n - 1$, $0 \leq l \leq n - 1$, (вместо треугольника, как в п. 7.2). Рассмотрим матрицу

$$\mathbb{I}(t) = (I_{ij}(t)), \quad I_{ij}(t) = \int_{\delta_j(t)} \omega_i, \quad \text{и} \quad \Delta(t) = \det \mathbb{I}(t).$$

Функция $\Delta(t)$ называется *основным детерминантом*. Она *однозначна*, поскольку, когда t обходит критическое значение a_j , некоторые столбцы основного детерминанта заменяются их суммами с j -м столбцом, умноженным на целое число. Это следует из теоремы Пикара—Лефшеца. Следовательно, определитель $\Delta(t)$ — однозначная функция от t для любого фиксированного H . Для критически сбалансированного H он может быть выражен через критические значения H и оценён снизу. А именно,

$$\min_U |\Delta(t)| > e^{-33n^2 \log n}. \quad (7.9)$$

С другой стороны, справедливо усиление неравенства (7.7):

$$M = \max_{t \in U} |I_{ij}(t)| \leq e^{16n}; \quad (7.10)$$

оно доказывается из тех же соображений. Предположим теперь, что m в (7.8) очень мало. Тогда, по посторению множества K и по теореме Пикара—Лефшеца, все элементы в строке

$$\int_{\delta_1(t)} \omega, \dots, \int_{\delta_\mu(t)} \omega$$

будут очень малы. Возьмем i так, что в формуле (7.6), $|c_i| = 1$. Если мы заменим i -ю строку в матрице $\mathbb{I}(t)$ предыдущей строкой, модуль определителя $|\Delta(t)|$ не изменится. С другой стороны, предположение, что все элементы строки очень малы, вместе с верхней оценкой (7.10) элементов матрицы $\mathbb{I}(t)$ и нижней оценкой (7.9) основного детерминанта, приводит к противоречию.

Более того, из формул (7.9) и (7.7) следует, что в формуле (7.8)

$$m \geq e^{-32n^3}. \quad (7.11)$$

Теперь у нас есть все необходимые данные для оценки индекса Бернштейна $B_{K,U}(I)$. Применение теоремы о нулях и росте доказывает теорему 7.7 для отрезка σ .

7.8. Усиленная инфинитезимальная 16-я проблема Гильберта

Оценка числа нулей абелевых интегралов, даже если она будет получена, не отвечает на следующий вопрос.

Проблема 7.1 (Усиленная инфинитезимальная проблема Гильберта). Указать верхнюю границу для числа предельных циклов полиномиального векторного поля, близкого к гамильтонову полю степени n .

Другими словами, требуется оценить число предельных циклов уравнения

$$dH + \omega = 0 \quad (7.12)$$

для $\omega = A dx + B dy$, где A и B полиномы степени не больше n , с малыми коэффициентами. В дополнение к предельным циклам, порождаемым овалами многочлена H , требуется оценить число предельных циклов, возникающих из полициклов многочлена H . Для ультраморсовских многочленов H такие полициклы могут содержать только одну вершину, потому что все критические точки многочлена H принадлежат различным линиям уровня. Тем самым, рассматриваемый полицикл может быть либо петлей сепаратрисы, либо восьмёркой; см. рис. 2. Первый случай исследован в [129]. Для решения ограниченной версии проблемы требуется исследовать только второй полицикл. Общая проблема относится к более сложным линиям уровня многочлена H . С одной стороны, эта проблема тесно связана с теорией бифуркаций; см. § 5. С другой стороны, она, вероятно, связана со следующими двумя результатами, имеющими независимый интерес.

Теорема 7.38 ([146]). *Петля сепаратрисы гиперболического седла, возникающего в аналитическом семействе векторных полей на плоскости, имеет лишь конечную цикличность.*

Теорема 7.39 ([129]). *Кратность нуля интеграла (7.1) в любой некритической точке не превосходит n^4 .*

Проблема решена только для квадратичных векторных полей.

Теорема 7.40 ([92], [65]). *Число предельных циклов квадратичного векторного поля, близкого к гамильтонову, не превосходит двух.*

Этот результат продолжает работы Хорозова, Илиева и Гаврилова.

§ 8. Слоения на аналитические кривые

Теорию слоений на аналитические кривые в комплексной плоскости можно рассматривать как комплексификацию вещественной качественной теории. Комплексный вариант резко отличается от своего вещественного прототипа.

8.1. Комплексификация

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_n}{Q_n}(x, y), \quad (8.1)$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, а P_n и Q_n — вещественные многочлены степени не выше n . С топологической точки зрения интегральные кривые уравнения (8.1) — либо прямые, либо окружности. Изолированные замкнутые орбиты называются предельными циклами. Их число конечно; см. § 2.

Комплексифицируем теперь уравнение (8.1), т. е. рассмотрим его в плоскости \mathbb{C}^2 . Формула (8.1) задаёт комплексное поле прямых в плоскости \mathbb{C}^2 вне множества особых точек

$$\Sigma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P_n(z, w) = Q_n(z, w) = 0\}. \quad (8.2)$$

Интегральные поверхности уравнения (8.1) являются голоморфными кривыми. Другими словами, это — римановы поверхности, и их топология гораздо сложнее, чем в вещественном случае. Разбиение области $\mathbb{C}^2 \setminus \Sigma$ на интегральные кривые уравнения (8.1) называется соответствующим *слоением*. Интегральные кривые называются *листами* слоения. Дифференциальные уравнения на комплексной плоскости отождествляются ниже с соответствующими слоениями. Рассмотрим теперь многочлены, такие же, как в (8.1), но не обязательно вещественные. *Класс уравнений*

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P_n}{Q_n}(z, w), \quad (z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \Sigma \quad (8.3)$$

со взаимно простыми многочленами P_n и Q_n обозначается через \mathcal{A}_n .

Комплексификация вещественной фазовой кривой — это лист соответствующего слоения, содержащий эту кривую. Замкнутая интегральная кривая вещественного уравнения (8.1) — это петля на своей комплексификации. Комплексификация понятий замкнутых интегральных кривых, предельных циклов и отображений Пуанкаре даёт *комплексные циклы, комплексные предельные циклы и преобразования голономии*.

Определение 8.15. Комплексный цикл — это нетривиальный класс свободно гомотопных петель на листе слоения (8.3).

Отметим что *вещественная замкнутая фазовая кривая уравнения (8.1) является комплексным циклом на своей комплексификации*. Действительно, предположим, что замкнутая фазовая кривая γ является представителем *тривиального* класса свободной гомотопии на своей комплексификации. Тогда γ ограничивает топологический диск D на соответствующем листе. Комплексификация (8.3) вещественного уравнения (8.1) уважает симметрию $s: (z, w) \mapsto (\bar{z}, \bar{w})$. Следовательно, γ ограничивает ещё один диск sD на том же листе. Объединение этих двух дисков является сферой Римана, голоморфно вложенной в \mathbb{C}^2 . Таких вложений не существует — противоречие.

Рассмотрим теперь петлю γ на листе слоения (8.3). Ее трубчатая окрестность на листе является кольцом; обозначим его A . Трубчатая окрестность U кольца A в \mathbb{C}^2 топологически эквивалентна декартову произведению $A \times D$, где $D \subset \mathbb{C}$ — диск с центром в нуле. Этот диск можно рассматривать как голоморфное трансверсальное сечение листов слоения, причём $0 = D \cap \gamma$. Пусть π — проекция области U на A вдоль D . Для любой близкой к нулю точки $z \in D$ петля γ может быть поднята до кривой γ_z , которая лежит на листе, проходящем через z и накрывает γ при проекции π . Пусть $\Delta_\gamma(z) \in D$ — конец кривой γ_z . Отображение

$$z \mapsto \Delta_\gamma(z) \tag{8.4}$$

называется *преобразованием голономии* кривой γ .

Для вещественной замкнутой интегральной кривой γ уравнения (8.1) её преобразование голономии является комплексификацией соответствующего отображения Пуанкаре.

Преобразования голономии свободно гомотопных петель аналитически эквивалентны.

Определение 8.16. Комплексный предельный цикл — это комплексный цикл, для которого преобразование голономии имеет *изолированную* неподвижную точку 0 .

Вещественный предельный цикл уравнения (8.1) является комплексным предельным циклом для комплексификации (8.3) уравнения (8.1).

8.2. Проблемы глобальной теории комплексных слоений

Проблема 8.1. Каковы общие топологические свойства типичных слоений (8.3)? Это значит, какие свойства сохраняются для почти всех в смысле лебеговой меры уравнений класса \mathcal{A}_n ?

Естественно возникают следующие частные проблемы. Некоторые из них уже решены, как описано ниже.

Проблема 8.2. Каковы ω -предельные множества типичных слоёв?

Согласно Камачо [60], ω -предельным множеством листа называется объединение всех предельных точек всех последовательностей, которые принадлежат листу и дискретны во внутренней топологии.

Проблема 8.3. Является ли типичное слоение (8.3) структурно устойчивым? Если нет, каковы топологические инварианты?

Проблема 8.4. Каков топологический тип типичного листа типичного слоения класса \mathcal{A}_n ?

Проблема 8.5. Тот же вопрос, но относительно конформного типа. Точнее, будет ли универсальная накрывающая над листом конформно эквивалентна комплексной прямой или единичному диску?

В соответствии с общей теоремой об униформизации универсальная накрывающая над листом может быть униформизована, т. е. отображена биголоморфно на область, принадлежащую сфере Римана. Это отображение называется *униформизирующей функцией*.

Проблема 8.6. Как униформизирующие функции листов зависят от начальных условий?

Проблема 8.7. До каких пределов может быть продолжено преобразование голономии комплексного предельного цикла?

Эта проблема тесно связана с упрощёнными версиями 16-й проблемы Гильберта для уравнений Абеля и Лъенара; см. § 6.

Проблема 8.8. Рассмотрим комплексный (предельный) цикл уравнения (8.3). Возможно ли продолжить его до непрерывного семейства комплексных (предельных) циклов над типичной кривой в пространстве \mathcal{A}_n ?

Более подробно, пусть $\lambda = \{\alpha(t) \in \mathcal{A}_n \mid t \in [0, 1]\}$ — кривая в \mathcal{A}_n . Пусть $\gamma(0)$ — комплексный (предельный) цикл слоения $\alpha(0)$. Правда ли, что для типичного $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_n$ можно определить непрерывное семейство комплексных (предельных) циклов $\gamma(t)$ уравнений $\alpha(t)$?

Это знаменитая *проблема сохранения комплексных (предельных) циклов*. Она восходит к [43], где она сформулирована, и где была предпринята безуспешная попытка доказать положительный ответ.

Другие проблемы восходят к Алексею, Аносову, Арнольду, Ильяшенко (беседы 60-х годов) и Камачо [60], который исследовал проблему 8.2 и предложил проблему о *минимальных множествах*; см. конец п. 8.4.

8.3. Классы алгебраических дифференциальных уравнений

Класс (8.3) — это простейшее семейство комплексных слоений алгебраической природы. Ниже мы описываем несколько более общих классов того же типа.

Рассмотрим комплексное алгебраическое многообразие X . Пусть $\Sigma \subset X$ — подмножество, замыкание которого по Зарисскому является алгебраическим подмногообразием коразмерности больше 1. Рассмотрим *слоение на аналитические кривые* в $X \setminus \Sigma$, т. е. разбиение области $X \setminus \Sigma$ на попарно непересекающиеся аналитические кривые (листы слоения), обладающие следующим свойством. Каждая точка $a \in X \setminus \Sigma$ имеет окрестность, разбиение которой на связные компоненты её пересечений с листами биголоморфно эквивалентно разбиению полидиска на диски, параллельные первой координатной оси. Такое разбиение называется *слоением с особенностями на X* .

Теорема 8.41 ([26]). *Каждое слоение с особенностями на проективном алгебраическом многообразии X имеет алгебраическую природу. А именно, оно определяется полем комплексных прямых, получаемым как мероморфное сечение проективизированного касательного расслоения к X .*

Следствие 8.3. *Каждое слоение комплексной проективной плоскости с конечным числом особых точек в любой аффинной карте имеет вид (8.3).*

Следовательно, теория слоений проективных алгебраических многообразий на аналитические кривые лежит на границе между алгебраической геометрией и комплексным анализом. Слоения задаются алгебраическими данными, но их листы в высокой мере трансцендентны.

Семейство (класс) слоений может быть определён многообразием X и степенью мероморфного сечения проективизированного касательного расслоения над X . Например, рассмотрим класс \mathcal{B}_n слоений с особенностями, заданных уравнением (8.3), *имеющим одну и ту же степень* в любой аффинной карте. Этот класс кажется более естественным, чем \mathcal{A}_n , но он меньше изучен по причине, описанной в п. 8.5 ниже.

Все предыдущие проблемы имеют смысл для любого из описанных выше классов. Мы будем в основном рассматривать класс \mathcal{A}_n .

8.4. Общие свойства слоений класса \mathcal{A}_n

Всюду ниже $n \geq 2$.

Как указано выше, типичные свойства комплексных слоений резко отличаются от свойств вещественных полиномиальных уравнений. Типичное вещественное полиномиальное уравнение имеет лишь конечное число замкнутых орбит и структурно устойчиво. Типичное слоение класса \mathcal{A}_n имеет бесконечно много комплексных предельных циклов и абсолютно негрубо в смысле, определяемом ниже.

Во всех теоремах этого подпункта *типичность* означает то же, что и в п. 8.2: полную меру Лебега.

Теорема 8.42. *Типичное слоение класса \mathcal{A}_n не имеет алгебраических листов. Каждый лист типичного слоения класса \mathcal{A}_n плотен в \mathbb{C}^2 .*

Свойство плотности было обнаружено М. Худай-Вереновым в 1962 г., [51]. Усиления этой теоремы могут быть найдены в [26], [53] и [137].

Теорема 8.43 ([26]). *Типичное слоение класса \mathcal{A}_n имеет не менее, чем счётное множество комплексных предельных циклов.*

Теорема 8.44 ([43]). *Каждое слоение класса \mathcal{A}_n имеет не более, чем счётное число комплексных предельных циклов.*

Определение 8.17. Два слоения с особенностями на X *топологически эквивалентны*, если существует *сопрягающий гомеоморфизм* X на себя, который переводит листы и особые точки первого слоения в листы и особые точки второго.

Определение 8.18. Комплексное уравнение α класса \mathcal{A}_n называется *абсолютно негрубым*, если существует окрестность уравнения α в классе \mathcal{A}_n и окрестность тождественного отображения в пространстве всех гомеоморфизмов комплексной плоскости на себя, обладающие следующим свойством. Каждое уравнение β из первой окрестности, топологически эквивалентное α , и сопряжённое с α гомеоморфизмом из второй окрестности, *аффинно эквивалентно* α .

Это значит, что существует аффинная замена координат, переводящая уравнение α в уравнение β .

В вещественном случае соотношение топологической эквивалентности очень грубо и не отличает типичное уравнение (8.1) от близких уравнений. В комплексном случае оно так же деликатно, как и аффинная классификация. Это показывает следующая теорема.

Теорема 8.45 ([26]). *Типичное слоение класса \mathcal{A}_n абсолютно негрубо.*

Эти результаты в значительной мере решают проблемы 8.1 и 8.2 для класса \mathcal{A}_n . Аналог теоремы 8.5 для однородных слоений в \mathbb{C}^3 с алгебраическим листом доказан в [96].

Требование общности положения в предыдущей теореме означает, что система лежит «вне некоторого множества меры ноль в пространстве параметров». Эти условия можно улучшить, заменив их условием: «вне некоторого вещественно алгебраического подмножества в пространстве параметров.» Это усиление обсуждается в следующем пункте.

Подчеркнем, что теоремы 8.2, 8.3 и 8.5 доказаны для типичных уравнений класса \mathcal{A}_n . Аналогичные утверждения для *типичных* уравнений класса \mathcal{B}_n или другого класса алгебраических дифференциальных уравнений остаются открытыми. С другой стороны, аналоги теорем 8.2 и 8.5 недавно доказаны для *локально типичных* слоений в $\mathbb{C}P^m$ [126].

Для любых n и m обозначим через $\mathcal{F}^n(\mathbb{C}P^m)$ пространство слоений с особенностями $\mathbb{C}P^m$ на аналитические кривые, такое, что в каждой аффинной карте слоение задаётся полиномиальным векторным полем степени не выше n , и хотя бы в одной карте имеет место равенство.

Теорема 8.46 ([126]). *Для каждого $n \geq 2$, $m \geq 2$ существует непустое открытое подмножество $U \subset \mathcal{F}^n(\mathbb{C}P^m)$, такое, что каждое слоение $\alpha \in U$ имеет лишь конечное число особых точек и является «хаотическим», т. е. обладает следующими свойствами:*

- *минимальность: каждый лист плотен в $\mathbb{C}P^m$;*
- *эргодичность: любое измеримое объединение листов имеет либо нулевую, либо полную Лебегову меру;*
- *энтропия: геометрическая энтропия слоения α на $\mathbb{C}P^m$ с выкинутыми малыми сферическими окрестностями особых точек строго положительна;*
- *негрубость: существует окрестность \mathcal{V} тождественного отображения в пространстве всех гомеоморфизмов $\mathbb{C}P^m$ на*

себя, такая что если слоение α топологически сопряжено слоению $\beta \in U$ гомеоморфизмом $H \in \mathcal{V}$, то α и β сопряжены проективной заменой координат.

Здесь энтропия понимается в смысле [95]; мы не воспроизводим определения из-за недостатка места. Этот результат содержит первый шаг в доказательстве гипотезы о плотности и абсолютной негрубости, сформулированной в [103].

Условие минимальности в этой теореме было доказано для $m = 2$ Б. Мюллером [39]. Общая проблема о *минимальных множествах* поставлена Камачо [60], см. ниже.

Минимальное множество слоения с особенностями в $\mathbb{C}P^m$ — это замкнутое, инвариантное непустое подмножество $\mathbb{C}P^m$, не содержащее собственного подмножества, обладающего теми же тремя свойствами. Инвариантность означает, что множество либо состоит из одной особой точки (и в этом случае называется *тривиальным*), либо не содержит особых точек, и вместе с каждой точкой содержит всю интегральную кривую, через неё проходящую.

Проблема 8.9 ([60]). Существуют ли слоения с особенностями на $\mathbb{C}P^2$, имеющие нетривиальное минимальное множество?

Эта проблема тесно связана с проблемой плотности листов типичного слоения класса \mathcal{B}_n . Недавно Верховский [158] получил положительный ответ в модифицированной версии проблемы 8.9, в которой $\mathbb{C}P^2$ заменено на $\mathbb{C}P^5$. Для $\mathbb{C}P^2$ проблема остаётся открытой.

С другой стороны, теоремы, доказанные для слоений класса \mathcal{A}_n , позволяют ожидать аналогичных результатов для других классов слоений, по крайней мере в малой размерности.

8.5. Группа монодромии на бесконечности

Слоение с особенностями (8.3) может быть продолжено с \mathbb{C}^2 на $\mathbb{C}P^2$. Оказывается, что *для типичных слоений $\alpha \in \mathcal{A}_n$ бесконечно удалённая прямая с выколотыми $n + 1$ особыми точкам является листом продолженного слоения.* Этот слой называется *бесконечно удалённым слоем* и особые точки на его замыкании называются *бесконечно удалёнными особыми точками*. Уравнения класса \mathcal{A}_n с $n + 1$ бесконечно удалёнными особыми точками образуют открытое по Зарискому подмножество \mathcal{A}_n , обозначаемое \mathcal{A}'_n .

Бесконечно удалённый слой имеет богатую фундаментальную группу — свободную группу с n образующими. Соответствующие преобразования голономии образуют группу ростков конформных отображений.

Она называется *группой монодромии на бесконечности*. Для краткости мы иногда опускаем «на бесконечности». Преобразование монодромии, соответствующее петле на бесконечно удалённом слое, которая обходит один раз особую точку a_j , является ростком конформного отображения $f_j: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Группа монодромии порождена ростками f_1, \dots, f_n . Свойства этой группы тесно связаны со свойствами соответствующего слоения. Действительно, если два слоения топологически эквивалентны, то их группы монодромии на бесконечности обладают тем же свойством. Это означает, что существует *один и тот же* росток гомеоморфизма $h: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, который сопрягает образующие f_j первой группы монодромии с соответствующими образующими второй группы.

Орбита точки z под действием группы монодромии — это множество образов точки под действием всех конечных суперпозиций представителей ростков f_j и f_j^{-1} при условии, что эти суперпозиции определены в точке z . Если группа монодромии имеет плотные орбиты в некоторой окрестности нуля, тогда при небольших дополнительных ограничениях все листы соответствующего слоения (8.3) плотны в \mathbb{C}^2 .

Если группа монодромии является абсолютно негрубой (каждый гомеоморфизм, сопрягающий эту группу с аналогичной группой либо голоморфен, либо антиголоморфен), тогда при небольших дополнительных ограничениях, соответствующее слоение (8.3) абсолютно негрубо.

Итак, важно исследовать геометрические свойства конечно порождённых групп ростков конформных отображений, чтобы понять геометрические свойства слоений на аналитические кривые. С алгебраической точки зрения упомянутые группы могут быть *абелевыми*, *разрешимыми* (*неабелевыми*) и *неразрешимыми*. Для групп ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}, 0)$ разрешимость эквивалентна следующему свойству:

Коммутатор группы коммутативен.

Теорема 8.47 ([137]). *Рассмотрим неразрешимую конечно порождённую группу ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Тогда её орбиты «плотны в секторах». Это означает, что существует конечное число вещественно аналитических кривых, проходящих через ноль и таких, что орбиты группы плотны в секторах, ограниченных этими кривыми и имеющими вершину в нуле.*

Теорема 8.48 ([54]). *Неразрешимая группа ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ является абсолютно негрубой.*

Другое доказательство этой теоремы дано в [137].

Теорема 8.49 ([154]). *Каждая неразрешимая группа ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ имеет счётное множество элементов, представители которых имеют изолированные неподвижные точки, отличные от нуля.*

Замечание. Эти неподвижные точки соответствуют счётному числу предельных циклов соответствующего слоения.

Отсюда следует, что теоремы 8.2, 8.3 и 8.5 справедливы для уравнений (8.3) из некоторого множества, открытого по Зарисскому. Более подробно, справедливо

Следствие 8.4. *Существует вещественно алгебраическое подмножество Σ пространства \mathcal{A}_n уравнений (8.3), такое, что каждое уравнение α из открытого по Зарисскому множества $\mathcal{A}_n \setminus \Sigma$*

- i) абсолютно негрубо;*
- ii) имеет бесконечное множество комплексных предельных циклов (для $n \geq 3$);*
- iii) каждый лист слоения α , за исключением бесконечно удалённого, плотен в $\mathbb{C}P^2$.*

Утверждение i) доказано в [54]. В [127] доказано, что множество абсолютно негрубых уравнений класса \mathcal{A}_n открыто и плотно.

Утверждение ii) доказано в [154]. Ограничение $n \geq 3$ в ii) кажется чисто техническим; весьма правдоподобно, что утверждение верно и при $n = 2$.

Утверждение iii) никогда не было опубликовано, хотя оно почти немедленно следует из 8.7 и следующей леммы:

Лемма 8.8 ([54]). *Множество уравнений $\alpha \in \mathcal{A}_n$ с неразрешимой группой монодромии на бесконечности содержит подмножество, открытое по Зарисскому в вещественном смысле.*

Эти результаты мотивируют интерес к *исключительным* слоениям класса \mathcal{A}_n , именно к тем, которые имеют абелеву или разрешимую группу монодромии на бесконечности. Однородные уравнения класса \mathcal{A}_n и им аффинно эквивалентные, имеют коммутативную группу монодромии. То же верно для гамильтоновых уравнений. Для уравнений первого класса преобразования монодромии на бесконечности линейны в одной и той же карте.

Уравнения второго класса имеют вид $dH = 0$, где H — многочлен степени $n + 1$. Их группы монодромии на бесконечности состоят из конечного

числа поворотов. Оказывается, существуют другие уравнения класса \mathcal{A}_n с абелевой группой монодромии на бесконечности. Некоторые нетривиальные примеры были найдены в [142], [31] и [46].

Описание общих свойств слоений класса \mathcal{A}_n существенным образом опирается на наличие слоя с богатой фундаментальной группой, а именно, бесконечно удалённого слоя. Для уравнений класса \mathcal{B}_n не существует выделенной проективной прямой. Следовательно, нет оснований ожидать, что типичное уравнение этого класса имеет слой с богатой фундаментальной группой. Такие слои возникают лишь для нетипичных слоений. Методы теории возмущений позволяют доказать теоремы о плотности негрубости для уравнений *из некоторого открытого подмножества* класса \mathcal{B}_n [39] и [126]; см. теорему 8.6 выше.

В заключение докажем свойство плотности для очень вырожденного множества уравнений класса \mathcal{A}_n , а именно, для однородных уравнений. Группа монодромии G на бесконечности для уравнения этого класса линейна. Пусть умножения на ν_1, \dots, ν_n являются образующими группы. Предположим для простоты, что $n = 2$. Пусть $\nu_j = \exp 2\pi i \mu_j$, $j = 1, 2$. Рассмотрим группу по сложению G^+ , с образующими $1, \mu_1, \mu_2$. Орбиты группы G являются образами орбит группы G^+ при отображении $z \mapsto \exp 2\pi i z$. Последние орбиты плотны для типичных μ_1, μ_2 ; следовательно, орбиты группы G плотны для типичных ν_1, ν_2 . То же самое верно для слоёв рассматриваемого слоения за исключением $n + 1$ прямой. Эти прямые с выколотой точкой ноль являются алгебраическими слоями слоения.

8.6. Топология слоёв и топологические инварианты слоений

Проблема 8.10. Верно ли, что для типичного слоения класса \mathcal{A}_n все слои либо цилиндры, число которых счётно, либо диски?

Ответ ожидается положительным. Действительно, если два комплексных предельных цикла лежат на одном слое, тогда кажется возможным расщепить их малым возмущением в классе \mathcal{A}_n , так что циклы окажутся на разных листах. С другой стороны, существует лишь счётное число комплексных предельных циклов для слоений класса \mathcal{A}_n .

Основной шаг в решении проблемы 8.10 должен состоять в том, чтобы доказать, что *типичное уравнение класса \mathcal{A}_n не имеет комплексных циклов с тривиальной голономией*. А priori, может случиться, что *каждое* уравнение (8.3) из некоторой области в пространстве \mathcal{A}_n имеет слои, которые могут быть названы *скрытыми многосвязными поверхностями*, образуют непрерывные семейства и содержат комплексные циклы с

тождественным преобразованием голономии. Специалисты не верят в существование таких семейств. Единственный результат, полученный в этом направлении, показывает, что в типичном случае бесконечно удалённый слой не принадлежит непрерывному семейству неодносвязных листов.

Теорема 8.50 ([110]). *Типичное уравнение класса \mathcal{A}_n , $n \geq 5$, не имеет циклов с тождественной голономией на бесконечно удалённом слое.*

В общем случае классы топологически эквивалентных уравнений (8.3) очень бедны: они состоят из орбит действия аффинной группы на \mathbb{C}^2 . Однако, некоторые классы гораздо шире. Например, ультраморсовские многочлены определяют топологически эквивалентные слоения на свои линии уровня. Однако эти классы эквивалентности не могут быть слишком большими, как показывает следующая теорема.

Пусть $\alpha \in \mathcal{A}'_n$ имеет бесконечно удалённые точки a_1, \dots, a_{n+1} . Характеристические числа этих точек определяются следующим образом. Вблизи каждой точки a_j слоение задаётся векторным полем с особой точкой a_j . Линеаризация поля в этой точке имеет два собственных значения μ_j и ν_j ; второе из них соответствует собственному вектору, касающемуся бесконечно удалённого слоя. Отношение $\lambda_j = \frac{\mu_j}{\nu_j}$ корректно определено и называется *характеристическим числом точки a_j на бесконечности*. Теорема Камачо—Сада [69] влечёт равенство $\sum_1^{n+1} \lambda_j = 1$. Набор характеристических чисел на бесконечности порождает топологический инвариант, как описано в следующей теореме.

Теорема 8.51 ([40]). *Пусть два слоения класса \mathcal{A}'_n топологически эквивалентны. Пусть*

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}), \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n+1})$$

— два набора их характеристических чисел на бесконечности, причём λ_j и μ_j соответствуют особым точкам, которые отображаются друг в друга сопрягающим гомеоморфизмом. Тогда существует линейный оператор $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\mathbb{C}$, такой что

$$A(1) = 1, \quad A(\lambda_j) = \mu_j.$$

Топологические инварианты слоений, порождённых векторными полями в пространствах высшей размерности, могут иметь локальную природу. Действительно, *топологическая классификация комплексных линейных систем*

$$\dot{z} = Az, \quad z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{C}, n \geq 3 \tag{8.5}$$

имеет числовые инварианты в предположении, что оператор A типа Зигеля (так называемая теорема Ладиса). Последнее означает, что ноль принадлежит выпуклой оболочке спектра A ; см. [35], [64] и [25].

Позднее Шаперон доказал комплексную версию теоремы Гробмана—Хартмана: для типичного A слоение, порождённое голоморфным векторным полем с линейной частью (8.5) в особой точке, топологически эквивалентно своей линейной части [62]. В случае, когда (8.5) не зигелева типа, аналогичный результат был доказан Гукенхеймером [98].

Теоремы Ладиса и Шаперона дают числовые инварианты топологической классификации полиномиальных слоений. Эти инварианты могут оказаться полезными в доказательстве теорем о негрубости в высших размерностях, аналогичных теореме 8.5 [103].

8.7. Конформный тип и одновременная униформизация листов

Теорема 8.52 ([124], [18], [61]). *Каждый слой типичного слоения классов \mathcal{A}_n и $\mathcal{F}^n(\mathbb{C}P^m)$ имеет гиперболический тип.*

Это означает, что универсальная накрывающая над слоем конформно эквивалентна диску. Этот результат даёт решение проблемы 8.5. Для слоений на проективных алгебраических многообразиях аналогичный результат доказан Глущоком [19], а для компактных комплексных многообразий Линсом Нето [125].

Для вещественных векторных полей время является естественным параметром на фазовых кривых. Для комплексных векторных полей время может принимать одинаковые значения в различных точках (например, $t = -1/2z^2$ для уравнения $\dot{z} = z^3$). Следовательно, время не является параметром на универсальной накрывающей листа. С другой стороны, униформизирующая функция на универсальной накрывающей является «хорошим» параметром: она отображает эту накрывающую биголоморфно на некоторую область в сфере Римана; мы рассматриваем униформизацию не обязательно на единичный диск. Было бы полезно, если бы эта параметризация «хорошо» зависела от начальных условий. Так возникает проблема 8.6 выше.

Теорема об одновременной униформизации Берса [57] утверждает, что в алгебраическом случае ответ на поставленный вопрос зачастую положителен. В частности:

Рассмотрим семейство линий уровня ультраморсовского полинома, соответствующее односвязной области U в множестве

некритических значений полинома. Тогда функция, которая униформизирует универсальные накрывающие над слоями $\{H = t, t \in U\}$ может быть выбрана голоморфно зависящей от t .

Недавно Глуцок [93] обнаружил, что ответ в проблеме 8.6 может быть отрицательным даже для слоений на алгебраические кривые некоторых алгебраических поверхностей.

С другой стороны, *непрерывная зависимость* униформирующей функции от начальных условий имеет место для многих классов слоений; см. [125]. Непрерывная зависимость понимается в топологии равномерной сходимости на компактных множествах.

Проблема 8.6 остаётся открытой для слоений с особенностями в $\mathbb{C}P^2$.

Мы не обсуждаем здесь многих содержательных ветвей теории слоений, таких, как *локальная теория* и *интегрируемость*; см., например, [67], [69], [70], [86], [135] и [153], где содержатся основные результаты и дополнительные ссылки.

В настоящее время теория комплексных слоений содержит много общих результатов и ещё больше нерешённых проблем. Она имеет самостоятельный интерес. С другой стороны, есть надежда, что в комбинации с методами §6 она поможет исследовать *неограниченные* версии 16-й проблемы Гильберта, упомянутые в п. 6.1.

Благодарности. Я глубоко признателен университету Нью Мехико и университету Колорадо в Болдере, где была написана большая часть этой статьи. Атмосфера сердечного гостеприимства в этих университетах была стимулирующей и вдохновляющей. Я благодарен А. Глуцoku, Д. Гукенхаймеру, В. Калошину, В. Молдавскому, А. Сосинскому, Д. Хаббарду, А. Щербакову и С. Яковенко, которые прочли первый вариант статьи и сделали много полезных замечаний. Я также благодарен Р. Ройдеру, выполнившему электронные версии рисунков и исправившему английский язык оригинала. Я также благодарен Е. Ильяшенко и М. Сапрыкиной за помощь в подготовке перевода.

Литература

1. В. Арнольд Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений М.: Наука, 1978.
2. В. Арнольд, В. Афраймович, Ю. Ильяшенко, Л. Шильников Теория бифуркаций, в книге *Динамические системы V* М.: ВИНТИ, 1986.
3. В. Арнольд, А. Варченко, С. Гусейн-Заде Особенности дифференцируемых отображений II. Монодромия и асимптотики интегралов М.: Наука, 1984.

4. *А. Андронов, Е. Леонтович, И. Гордон, А. Майер* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости М.: Наука, 1967.
5. *В. Арнольд, Ю. Ильяшенко* Обыкновенные дифференциальные уравнения, в книге *Динамические системы*. 1 М.: ВИНТИ, 1985.
6. *А. Ф. Андреев* Особые точки дифференциальных уравнений Минск: Высшая школа, 1979.
7. *А. Брюно* Нормальные формы дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. Т. 157 1964, С. 1276–1279.
8. *А. Брюно* Аналитические формы дифференциальных уравнений I // Труды Московского мат. общества. Т. 25 1971, С. 119–262.
9. *А. Брюно* Аналитические формы дифференциальных уравнений II // Труды Московского мат. общества. Т. 26 1972, С. 199–239.
10. *Н. Баутин* О числе предельных циклов, которые возникают при изменении коэффициентов из положения равновесия типа фокус или центр // Матем. сборник. Т. 30 (72) 1952, С. 181–196.
11. *Ф. Березовская, Н. Медведева* Асимптотика отображения Пуанкаре особой точки с фиксированной диаграммой Ньютона // Труды сём. Петровского. Т. 15 1991, С. 156–177.
12. *Р. Богданов* Версальные деформации особых точек векторных полей на плоскости в случае нулевого собственного значения // Труды семинара Петровского. Т. 2 1976, С. 37–65.
13. *Р. Богданов* Бифуркации предельных циклов некоторых семейств векторных полей на плоскости // Труды семинара Петровского. Т. 2 1976, С. 23–35.
14. *Р. Богданов* Локальные орбитальные нормальные формы векторных полей на плоскости // Труды семинара Петровского. Т. 5 1979, С. 51–84.
15. *Р. Богданов* Инварианты элементарных особых точек на плоскости // Успехи мат. наук. Т. 40 №. 3 1985, С. 199–200.
16. *А. Варченко* Оценка числа нулей абелевых интегралов, зависящих от параметра, и предельные циклы // Функци. анализ и его прил. Т. 18, №. 2 1984, С. 14–25.
17. *С. Воронин* Аналитическая классификация ростков конформных отображений $(C, 0) \rightarrow (C, 0)$ // Функци. анализ и его прил. Т. 15, №. 1 1981, С. 1–17.
18. *А. Глуцюк* Гиперболичность фазовых кривых типичного полиномиального векторного поля в C^n // Функци. анализ и его прил. Т. 28, №. 2 1994, С. 1–11.
19. *А. Глуцюк* Гиперболичность листов типичного одномерного голоморфного слоения на неособом проективном алгебраическом многообразии // Труды мат. инст. Стеклова. Т. 213 1996, С. 90–111.
20. *А. Габриэлов* Проекции полуаналитических множеств // Функци. анализ и его прил. Т. 2, №. 4 1968, С. 18–30.

21. Г. Жолондек Версальность семейства симметричных векторных полей на плоскости // *Мат. Сб.* Т. 120(162), №. 4 1983, С. 473–499.
22. Ю. Ильяшенко Возникновение предельных циклов при возмущении уравнения $dw/dz = -R_z/R_w$, где $R(z, w)$ — полиномы // *Мат. сборник.* Т. 78 (120) №. 3 1969, С. 360–373.
23. Ю. Ильяшенко Пример уравнений $dw/dz = P_n(z, w)/Q_n(z, w)$, имеющих счётное число предельных циклов и сколь угодно большой жанр по Петровскому-Ландису // *Мат. Сборник.* Т. 80 (122), №. 3 1969, С. 388–404.
24. Ю. Ильяшенко Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр-фокус // *Функц. анализ и его прил.* Т. 6, №. 3 1972, С. 30–37.
25. Ю. Ильяшенко Замечания о топологии особых точек аналитических дифференциальных уравнений в комплексной области и теорема Ладиса // *Функц. анализ и его прил.* Т. 11, №. 2 1977, С. 28–38.
26. Ю. Ильяшенко Топология фазовых портретов аналитических дифференциальных уравнений на комплексной проективной плоскости // *Труды семинара Петровского.* Т. № 4 1978, С. 83–136.
27. Ю. Ильяшенко Особые точки и предельные циклы дифференциальных уравнений на вещественной и комплексной плоскости // *Препринт НИВЦ АН СССР, Пушкино.* Т. 38 1982.
28. Ю. Ильяшенко Предельные циклы полиномиальных векторных полей с невырожденными особыми точками на вещественной плоскости // *Функц. анализ и его прил.* Т. 18, №. 3 1984, С. 32–42.
29. Ю. Ильяшенко Мемуар Дюлака «О предельных циклах» и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений // *Успехи мат. наук.* Т. 40, №. 6 1985, С. 41–78.
30. Ю. Ильяшенко Теоремы конечности для предельных циклов // *Успехи мат. наук.* Т. 45, №. 2 1990, С. 143–200.
31. Ю. Ильяшенко, А. Пяртли Рациональные дифференциальные уравнения с несвободной группой монодромии на бесконечности // *Труды инст. Стеклова.* Т. 213, 1996, С. 50–67.
32. Ю. Ильяшенко, А. Хованский Группы Галуа, операторы Стокса и теорема Рамиса // *Функц. анализ и его прил.* Т. 24, №. 4 1990, С. 31–42.
33. Ю. Ильяшенко, С. Яковенко Гладкие нормальные формы локальных семейств диффеоморфизмов и векторных полей // *Успехи мат. наук.* Т. 46, №. 1(277) 1991, С. 3–39.
34. Е. Леонтович О возникновении предельных циклов из петли сепаратрисы // *Доклады академии наук СССР.* Т. 78 1951, С. 641–644.
35. Н. Ладис Топологическая эквивалентность гиперболических линейных систем // *Дифференциальные уравнения.* Т. 13, №. 2 1977, С. 255–264.

36. *Н. Медведева* Главный член асимптотики преобразования монодромии линейен // Сибирский мат. журнал. Т. 33, №. 2 1992, С. 115–124.
37. *Н. Медведева* Главный член асимптотики преобразования монодромии: вычисление по диаграмме Ньютона // Труды института Стеклова. Т. 213 1996, С. 212–223.
38. *Н. Медведева, Е. Мазаева* Достаточное условие фокуса для монодромной особой точки // Труды Моск. мат. общ. , в печати.
39. *Б. Мюллер* О плотности решений уравнений в \mathbb{C}^2 // Мат. сборник. Т. 98, №. 3 1975, С. 325–338.
40. *В. Найшуль* Топологические инварианты аналитических и сохраняющих площадь отображений и их применение к аналитическим дифференциальным уравнениям на \mathbb{C}^2 и $\mathbb{C}P^2$ // Труды моск. мат. общ. Т. 44 1982, С. 235–245.
41. *А. Панов* Разнообразие отображений Пуанкаре для кубических уравнений с переменными коэффициентами // Функц. анализ и его прил. Т. 33, №. 4 1999, С. 84–88.
42. *Г. Петров* Эллиптические интегралы и их неколеблемость // Функц. анализ и его прил. Т. 20, №. 1 1986, С. 46–49.
43. *И. Петровский, Е. Ландис* О числе предельных циклов уравнения $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, где P и Q — многочлены второй степени // Мат. Сб. Т. 37(79) 1955, С. 209–250.
44. *И. Петровский, Е. Ландис* О числе предельных циклов уравнения $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, где P и Q — многочлены // Мат. Сб. Т. 85 1957, С. 149–168.
45. *И. Пушкарь* Многомерное обобщение теоремы Ильяшенко об абелевых интегралах // Функц. анализ и его прил. Т. 31, №. 2 1997, С. 34–44, 95.
46. *А. Пяртли* Рациональные дифференциальные уравнения с коммутативной группой монодромии на бесконечности // Труды моск. мат. общ. Т. 61 2000, С. 67–95.
47. *А. Садовский* Проблема различения центра и фокуса для сложной особой точки // Дифференциальные уравнения. Т. 22, №. 5 1986, С. 789–794.
48. *Е. Титчмарш* Теория функций Москва: Наука, 1980.
49. *С. Трифонов* Цикличность элементарных полициклов типичных гладких векторных полей // Труды инст. Стеклова. Т. 213, №. 2 1996, С. 141–199.
50. *А. Хованский* Вещественные аналитические многообразия со свойством конечности и комплексные абелевы интегралы // Функц. анализ и его прил. Т. 18, №. 2 1984, С. 40–50.
51. *М. Г. Худай-Веренов* Об одном свойстве одного дифференциального уравнения // Мат. сб. Т. 56 1962, С. 301–308.
52. *Э. Хорозов* Версальные деформации эквивариантных векторных полей с симметриями второго и третьего порядка // Труды сём. Петровского. Т. 5 1979, С. 163–192.

53. *A. Щербаков* Плотность орбиты псевдогруппы конформных отображений и обобщение теоремы Худай-Верненова // Вестник моск. унив., серия I мат.-мех. Т. 4 1982, С. 10–15.
54. *A. Щербаков* Топологическая и аналитическая сопряжённость некоммутативных групп ростков конформных отображений // Труды сём. Петровского. Т. 10 1984, С. 170–196, 238–239.
55. *J. Artes, R. Kooij, J. Llibre* Structurally stable quadratic vector fields // Mem. Amer. Math. Soc. V. 134 1998, P. viii+100.
56. Sur les courbes définies par des équations différentielles // Acta Math. V. 24 1901, P. 1–88.
57. *L. Bers* Simultaneous uniformization // Bull. Amer. Math. Soc. V. 66 1960, P. 94–97.
58. *M. Briskin, J.-P. Francoise, Y. Yomdin* Center conditions, compositions of polynomials and moments on algebraic curves // Ergodic Theory and Dynamical Systems. V. 19 1999, P. 1201–1220.
59. *K. T. Chen* Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point // Amer. J. Math. V. 85 1963, P. 693–722.
60. *C. Camacho* Problems on limit sets of foliations on complex projective spaces / Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990). Tokyo: Math. Soc. Japan, 1991, P. 1235–1239.
61. *A. Candel, X. Gómez-Mont* Uniformization of the leaves of a rational vector field // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). V. 45, No. 4 1995, P. 1123–1133.
62. *M. Chaperon* On the local classification of holomorphic vector fields / Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981). Berlin: Springer, 1983, P. 96–103.
63. *C. J. Christopher, N. G. Lloyd* Polynomial systems: a lower bound for the Hilbert numbers // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. V. 450, No. 1938 1995, P. 219–224.
64. *C. Camacho, N. Kuiper, J. Palis* La topologie du feuilletage d'un champ de vecteurs holomorphes près d'une singularité // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. V. 282, No. 17 P. Ai, A959–A961.
65. *S-N. Chow, Ch. Z. Li, D. Wang* Normal forms and bifurcation of planar vector fields Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
66. *S-N. Chow, Ch. Z. Li, Y. Yi* The cyclicity of period annuli of degenerate quadratic Hamiltonian systems with elliptic segment // Ergodic Theory Dynam. Systems. V. 22 No. 2 2002, P. 349–374.
67. *D. Cerveau, R. Moussu* Groupes d'automorphismes de $(C, 0)$ et équations différentielles $gdy + \dots = 0$ // Bull. Soc. Math. France. V. 116, No. 4 1988, P. 459–488.
68. *W. A. Coppel* A survey of quadratic systems // J. Differential Equations. V. 2 1966, P. 293–304.

69. *C. Camacho, P. Sad* Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields // *Ann. of Math.* V. 115, No. 3 1982, P.579–595.
70. *C. Camacho, A. Scardua, B.* Holomorphic foliations with Liouvillian first integrals // *Ergodic Theory Dynam. Systems.* V.21 2001, No. 3 P.717–756.
71. *Chen, Lan Sun and Wang, Ming Shu* The relative position, and the number, of limit cycles of a quadratic differential system // *Acta Math. Sinica.* V.22 1979, P.751–758.
72. *H. Dulac* Sur les cycles limite // *Bull. Soc. Math France.* V.51 1923, P.45–188.
73. *P. Deligne* Équations différentielles à points singuliers réguliers, *Lecture Notes in Mathematics*, 163 Berlin: Springer-Verlag, 1970, P.iii+133.
74. *F. Dumortier* Singularities of vector fields on the plane // *Equations.* V.23, No.1 1977, P.53–106.
75. *F. Dumortier, Ch. Herssens, L. Perko* Local bifurcations and a survey of bounded quadratic systems // *Differential Equations.* V.165, No.2 2000, P.430–467.
76. *F. Dumortier, Yu. Ilyashenko, C. Rousseau* Normal forms near a saddle-node and applications to finite cyclicity of graphics // *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* V.22 2002, P.783–818.
77. *F. Dumortier, M. El Morsalami, C. Rousseau* Hilbert's 16th problem for quadratic systems and cyclicity of elementary graphics // *Nonlinearity.* V.9 1996, P.1209–1261.
78. *F. Dumortier, R. Roussarie, C. Rousseau* Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields // *Differential Equations.* V.110, No. 1 1994, P.86–133.
79. *F. Dumortier, R. Roussarie, C. Rousseau* Elementary graphics of cyclicity 1 and 2 // *Nonlinearity.* V.7 1994, No. 3 P.1001–1043.
80. *F. Dumortier, R. Roussarie, J. Sotomayor* Bifurcations of cuspidal loops // *Nonlinearity.* V. 10, No. 6 1997, P.1369–1408.
81. *F. Dumortier, R. Roussarie, J. Sotomayor, H. Zoladek* Bifurcations of planar vector fields. Nilpotent singularities and Abelian integrals Berlin: *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 1991.
82. *J. Écalle* Les fonctions résurgentes. Tome I Les algèbres de fonctions résurgentes. Orsay: Université de Paris-Sud Département de Mathématique, 1981, P.247.
83. *J. Écalle* Les fonctions résurgentes. Tome II, Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération Orsay: Université de Paris-Sud Département de Mathématique, 1981, P.248–531.
84. *J. Écalle* Les fonctions résurgentes. Tome III, L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux Orsay: Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, 1985.

85. *J. Écalle* Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac (French) Paris: Hermann, 1992.
86. *P. Elizarov, Yu. Ilyashenko, A. Shcherbakov, S. Voronin* Finitely generated groups of germs of one-dimensional conformal mappings, and invariants for complex singular points of analytic foliations of the complex plane / Nonlinear Stokes phenomena. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993, P. 57–105.
87. *J. Écalle, J. Martinet, R. Moussu, J.-P. Ramis* Non-accumulation des cycles-limites. I // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. V. 304, No. 13 1987, P. 375–377.
88. *J. Écalle, J. Martinet, R. Moussu, J.-P. Ramis* Non-accumulation des cycles-limites. II // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. V. 304, No. 14 1987, P. 431–434.
89. *R. Fedorov* Growth of the number of orbital topological types of planar polynomial vector fields modulo limit cycles // Moscow mathematical journal. V. 1, No. 4 2001.
90. *A. Gasull, J. Llibre, V. Mañosa, F. Mañosas* The focus-centre problem for a type of degenerate system // Nonlinearity. V. 13, No. 3 2000, P. 699–729.
91. *L. Gavrilov* Petrov modules and zeros of Abelian integrals // Bull. Sci. Math. V. 122, No. 8 1998, P. 571–584.
92. *L. Gavrilov* The infinitesimal 16th Hilbert problem in the quadratic case // Invent. Math. V. 143, No. 3 2001, P. 449–497.
93. *A. Glutsyuk* Nonuniformizable skew cylinders. A counterexample to the simultaneous uniformization problem // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. V. 332, No. 3 2001, P. 209–214.
94. *A. Glutsuk, Yu. Ilyashenko* Restricted version of the Infinitesimal Hilbert 16th problem // to appear.
95. *É. Ghys, R. Langevin, P. Walczak* Entropie géométrique des feuilletages // Acta Mathematica. V. 160, No. 1–2 1988, P. 105–142.
96. *X. Gómez-Mont* The transverse dynamics of a holomorphic flow // Annals of Mathematics. Second Series. V. 127, No. 1 1988, P. 49–92.
97. *A. Guzman, C. Rousseau* Genericity conditions for cyclicity of elementary graphics // Differential Equations. V. 155, No. 1 1999, P. 44–72.
98. *J. Guckenheimer* Hartman’s theorem for complex flows in the Poincaré domain // Compositio Math. V. 24 1972, P. 75–82.
99. *D. Hilbert* Mathematical problems, Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902), 437–479 // Bull. Amer. Math. Soc. V. 37 2000, P. 407–436.
100. *H. Hironaka* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I // Ann. of Math. V. 79 1964, P. 109–203.
101. *H. Hironaka* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. II // Ann. of Math. V. 79 1964, P. 205–326.
102. *H. Hauser, J.-J. Risler, B. Teissier* The reduced Bautin index of planar vector fields // Duke Math. J. V. 100, No. 3 1999, P. 425–445.

103. *Yu. Ilyashenko* Global and local aspects of the theory of complex differential equations / Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, 1978, v. II. Berlin: Springer-Verlag, 1979, P. 821–826.
104. *Yu. Ilyashenko* Finiteness theorems for limit cycles Providence, RI: American Mathematical Society, 1991.
105. *Yu. Ilyashenko (editor)* Nonlinear Stokes phenomena Providence, RI: American Mathematical Society, 1993.
106. *Yu. Ilyashenko* Hilbert-type numbers for Abel equations, growth and zeros of holomorphic functions // Nonlinearity. V. 13, No. 4 2000, P. 1337–1342.
107. *Yu. Ilyashenko, V. Kaloshin* Bifurcation of planar and spatial polycycles: Arnold's program and its development / The Arnoldfest (Toronto, ON, 1997). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999, P. 241–271.
108. *Yu. Ilyashenko, W. Li* Nonlocal bifurcations American Mathematical Society, Providence, RI: Mathematical Surveys and Monographs, 66, 1999.
109. *Yu. Ilyashenko, A. Panov* Some upper estimates of the number of limit cycles of planar vector fields with applications to the Lienard equation // Moscow mathematical journal. V. 1, No. 4 2001, P. 583–599.
110. *Yu. Ilyashenko, A. Pyartli* The monodromy group at infinity of a generic polynomial vector field on the complex projective plane // Russian J. Math. Phys. V. 2, No. 3 1994, P. 275–315 MR 96e:34009.
111. *I. Itenberg, E. Shustin* Singular points and limit cycles of planar polynomial vector fields // Duke Math. J. V. 102 2000, P. 1–37.
112. *Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko* Finite cyclicity of elementary polycycles in generic families / Concerning the Hilbert 16th problem. V. 165 Amer. Math. Soc., Providence, RI: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 1995, P. 21–95.
113. *Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko* Double exponential estimate for the number of zeros of complete abelian integrals and rational envelopes of linear ordinary differential equations with an irreducible monodromy group // Invent. Math. 121. V. 121, No. 3 1995, P. 613–650.
114. *Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko editors* Concerning the Hilbert 16th problem Providence, RI: American Mathematical Society, 1995.
115. *Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko* Counting real zeros of analytic functions satisfying linear ordinary differential equations // Differential Equations. V. 126, No. 1 1996, P. 87–105.
116. *A. Jacquemard, F. Z. Khechichine-Mourtada, A. Mourtada* Algorithmes formels appliqués à l'étude de la cyclicité d'un polycycle algébrique générique à quatre sommets hyperboliques // Nonlinearity. V. 10, No. 1 1997, P. 19–53.
117. *V. Kaloshin* Hilbert 16th problem and an estimate for cyclicity of an elementary polycycle // to appear.
118. *A. Khovanskii* Fewnomials American Mathematical Society, Providence, RI: Translations of Mathematical Monographs, 88, 1991, MR 92h:14039

119. *A. Kotova, V. Stanzo* On few-parameter generic families of vector fields on the two-dimensional sphere / Concerning the Hilbert 16th problem. V.165 Amer. Math. Soc., Providence, RI: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 1995, P.155–201.
120. *Leau* Étude sur les équation fonctionnelles à une ou plusieurs variables // Ann. Fac. Sci. Toulouse. V.11 1897, P. E1–E110.
121. *S. Lefschetz* // J. Diff. Equat. V.4 1968, P.66–101.
122. *A. Lins Neto, W. de Melo, C. Pugh* On Lienard's equation / Lecture Notes in Math., 597. 1977, P.335–357.
123. *A. Lins Neto* On the number of solutions of the equation $dx/dt = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j$, $0 \leq t \leq 1$, for which $x(0) = x(1)$ // Invent. Math. V.59, No.1 1980, P.67–76.
124. *A. Lins Neto* Simultaneous uniformization for the leaves of projective foliations by curves // Bol. Soc. Brasil. Mat. (N. S.). V.25, No.2 1994, P.181–206.
125. *A. Lins Neto* Uniformization and the Poincare metric on the leaves of a foliation by curves // Bol. Soc. Brasil. Mat. (N. S.). V.31, No.3 2000, P.351–366. MR 1 817 093.
126. *F. Loray, J. C. Rebello* Stably chaotic rational vector fields on $\mathbb{C}P^n$ // Stony Brook IMS preprint. V.No.2000/5 2000.
127. *A. Lins Neto, P. Sad, B. Scardua* On topological rigidity of projective foliations // Bull. Soc. Math. France. V.126, No.3 1998, P.381–406.
128. *B. Malgrange* Travaux d'Ecalte et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques (French), Bourbaki Seminar // Astérisque. V.92–93 1982, P.59–73.
129. *P. Mardesić* An explicit bound for the multiplicity of zeros of generic Abelian integrals // Nonlinearity. V.4, No.3 1991, P.845–852.
130. *J.-F. Mattei, R. Moussu* Holonomie et integrales premières (French) // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). V.13, No.4 1980, P.469–523.
131. *J. Martinet, J.-P. Ramis* Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre (French) // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. V.55 1982, P.63–164.
132. *J. Martinet, J.-P. Ramis* Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre (French) // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). V.16, No.4 1983, P.571–621.
133. *A. Mourtada* Cyclicité finie des polycycles hyperboliques de champs de vecteurs du plan. Algorithme de finitude (French) // Ann. Inst. Fourier. V.41, No.3 1991, P.719–753.
134. *R. Moussu, C. Roche* Théorie de Hovanskiĭ et problème de Dulac // Inventiones Mathematicae. V.105, No.2 1991, P.431–441.
135. *J. F. Mattei, E. Salem* Complete systems of topological and analytical invariants for a generic foliation of $(\mathbb{C}^2, 0)$. // Math. Res. Lett. V.4, No.1 1997, P.131–141.

136. *J. Muciño-Raymundo* Deformations of holomorphic foliations having a meromorphic first integral // *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*. V. 461 P. 189–219.
137. *I. Nakai* Separatrices for nonsolvable dynamics on $C, 0$ // *Ann. Inst. Fourier*. V. 44 1994, No. 2 P. 569–599.
138. *D. Novikov, S. Yakovenko* Simple exponential estimate for the number of real zeros of complete Abelian integrals // *Ann. Inst. Fourier*. V. 45, No. 4 1995, P. 897–927.
139. *D. Novikov, S. Yakovenko* Tangential Hilbert problem for perturbations of hyperelliptic Hamiltonian systems // *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* V. 5 1999, P. 55–65.
140. *D. Novikov, S. Yakovenko* polynomial ideals // *Ann. Inst. Fourier*. V. 49, No. 2 1999, P. 563–609.
141. *D. Novikov, S. Yakovenko* Redundant Picard—Fuchs system for Abelian integrals // *J. Diff. Equat.* V. 177, No. 2 2001, P. 267–306.
142. *L. Ortiz-Bobadilla* Quadratic vector fields in CP^2 with two saddle-node type singularities at infinity // *Dynam. Control Systems*. V. 1, No. 3 1995, P. 295–317.
143. *R. Perez-Marco* Fixed points and circle maps // *Acta Math*. V. 179, No. 2 1997, P. 243–294.
144. *R. Roussarie* On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields // *Bol. Soc. Brasil. Mat.* V. 17, No. 2 1986, P. 67–101.
145. *R. Roussarie* A note on finite cyclicity property and Hilbert's 16th problem / *Lecture Notes in Math.*, 1331. Berlin: Springer, 1986, P. 161–168.
146. *R. Roussarie* Cyclicité finie des lacets et des points cuspidaux // *Nonlinearity*. V. 2, No. 1 1989, P. 73–117.
147. *R. Roussarie* Bifurcation of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem Basel: Birkhauser Verlag, 1998.
148. *C. Rousseau, G. Świrszcz, HŻoladek* Cyclicity of graphics with semi-hyperbolic points inside quadratic systems // *Dynam. Control Systems*. V. 4, No. 2 1988, P. 149–189.
149. *S. Smale* Mathematical problems for the next century // *Math. Intelligencer*. V. 20, No. 2 1998, P. 7–15.
150. *A. Seidenberg* Reduction of singularities of the differential equation $Adx = Bdy$ // *Amer. J. Math.* V. 90 1968, P. 248–269.
151. *S. Shahshahani* Periodic solutions of polynomial first order differential equations // *Nonlinear Anal.* V. 5, No. 2 1981, P. 157–165.
152. *Shi, Song Ling* A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems // *Sci. Sinica*. V. 23 1980, P. 153–158.

153. *M. Singer* Liouvillian first integrals of differential equations. // Trans. Amer. Math. Soc. V.333 1992, P.673–688.
154. *A. Shcherbakov, E. Rosales-Gonzalez, L. Ortiz-Bobadilla* Countable set of limit cycles for the equation $d\omega/dz = P_n(z, \omega)/Q_n(z, \omega)$ // Dynam. Control Systems. V.4, No.4 1998, P.539–581.
155. *S. Sternberg* On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n -space // Amer. J. Math. V.80 1958, P.623–631.
156. *J. Seade, A. Verjovsky* Actions of discrete groups on complex projective spaces / Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001, P.155–178.
157. *F. Takens* Forced oscillations and bifurcations // Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht, Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht. V.3 1974, P.1–59.
158. *A. Verjovsky* Private communication
159. *J.-Ch. Yoccoz* Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. Petits diviseurs en dimension 1 // Astérisque. V. No.231 1995, P.3–88.
160. *S. Yakovenko* A geometric proof of the Bautin theorem / Concerning the Hilbert 16th problem. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995, P.203–219.
161. *S. Yakovenko* On functions and curves defined by ordinary differential equations / The Arnoldfest (Toronto, ON, 1997). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999, P.497–525.
162. *H. Zoladek* Bifurcations of certain family of planar vector fields tangent to axes // Differential Equations. V.67, No.1 1987, P.1–55.

Cornell University, US; Московский Государственный и Независимый
университеты, Институт математики им. Стеклова, Москва (МИАН)
ул. Губкина, 8, Москва, Россия, 117966
E-mail: yulij@math.cornell.edu, yulij@mccme.ru

O. Karpenkov

Energy of a knot: some new aspects

§ 1. Introduction

Let $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ be the circle and $\tau: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a smooth knot. We will assume that $\tau(t)$ is the arc length parametrization. Denote by $D(t_1, t_2)$ the length of the minimal sub arc between t_1 and t_2 on the circle. Let $|\ast|$ denote the absolute value of vectors in \mathbb{R}^3 .

Following [1], we denote by

$$E(\tau) = E_f(\tau) = \iint_{S^1 \times S^1} f(|\tau(t_1) - \tau(t_2)|, D(t_1, t_2)) dt_1 dt_2$$

the energy of the knot τ , where $f(\rho, \alpha)$ satisfies the following conditions:

- 1) $f(\rho, \alpha) \in C^{1,1}(U)$, where $U = \{(\rho, \alpha) | 0 < \rho \leq \alpha, \alpha \leq \pi\}$;
- 2) there exist the following limits:

$$\lim_{\substack{(\rho, \alpha) \in U \\ \rho \rightarrow 0, \rho/\alpha \rightarrow 1}} f(\rho, \alpha), \quad \lim_{\substack{(\rho, \alpha) \in U \\ \rho \rightarrow 0, \rho/\alpha \rightarrow 1}} \frac{\partial f(\rho, \alpha)}{\partial \rho}, \quad \lim_{\substack{(\rho, \alpha) \in U \\ \rho \rightarrow 0, \rho/\alpha \rightarrow 1}} \frac{\partial f(\rho, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Almost all energies are not homothety invariant, so we will consider only knots of length 2π .

The energy of a knot is not an invariant of the topological class of this knot. If we make a smooth perturbation of a knot, its energy smoothly changes. We will consider energies with the following important properties. The energy is always positive. When a knot crossing tends to a double point, the energy tends to infinity. So every topological class of knots has a representative with the minimal value of energy. This knot is called a *normal form* of the class. It is unknown whether each class has a unique normal form or not, i.e., whether the normal form for some energy is an invariant of the

topological class or not. The normal forms satisfy the variational equations considered below.

Some energies have a physical meaning. For example $f = 1/(|\tau(t_1) - \tau(t_2)|)$ corresponds to the energy of a charged knot. Unfortunately, this energy is always infinite. As long as the charged knot does not break there must be some other forces which save the knot. Let us consider a model of such a restriction:

$$f = \frac{D^2(t_1, t_2)}{|\tau(t_1) - \tau(t_2)|}.$$

For this energy we will develop our variational principles.

The study of knot energies began with the work of Moffatt (1969) [6], and was developed by him in [7] following Arnold's work [2]. The first steps in studying properties of the energies of knots were made by O'Hara [8, 9, 10] and the first variational principles for polygons in space were studied by Fukuhara [4].

The paper is organized as follows. We start in Section 2 with the definitions and formulations of the variational principles. We show that any extremal knot τ satisfies certain variational equations and discuss the corollaries of this variational principles. In Section 3 we represent Mm-energy. The definition of this energy differs from the one regarded above. Nevertheless besides its own properties Mm-energy has some similar with Möbius energy properties.

The author is grateful to professor A. B. Sossinsky for permanent attention to this work.

§ 2. Variational principles and corollaries

In this section we will work mostly with knots of fixed length 2π . So let $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ be the circle and let $\tau: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denote some smooth knot of length 2π . Let $\tau(t)$ be the arc length parametrization.

By $\kappa(t)$ we denote the curvature at t and $R(t) = 1/\kappa(t)$, the radius of curvature at t .

Definition 2.1. Given a smooth knot $\tau: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ and a point $t_0 \in S^1$, a *locally perturbed knot* is a knot (denoted by $\tau_{t_0, \varepsilon}$) such that

- a) $|\tau(t) - \tau_{t_0, \varepsilon}(t)| < \varepsilon^2$ if $D(t_0, t) \leq \varepsilon$ and $\tau(t) = \tau_{t_0, \varepsilon}(t)$ if $D(t_0, t) > \varepsilon$;
- b) $|\kappa(t) - \kappa_{t_0, \varepsilon}(t)| < \varepsilon$ for $D(t_0, t) < \varepsilon$;
- c) $\tau_{t_0, \varepsilon}(t_0 + \lambda) = \tau_{t_0, \varepsilon}(t_0) + \lambda \dot{\tau}_{t_0, \varepsilon}(t_0) + (\lambda^2/2) \ddot{\tau}_{t_0, \varepsilon}(t_0) + o(\varepsilon^2)$ if $D(t_0, t_0 + \lambda) \leq \varepsilon$.

Note that at the points $t_0 - \varepsilon$ and $t_0 + \varepsilon$ the curvature is not bounded.

The length of the knot $\tau_{t_0, \varepsilon}$ can change, but we regard knots of length 2π only. One of the ways to solve this problem is to consider the restriction of the set of locally perturbed knots to the set of knots of constant length 2π , but this definition is unsatisfactory. Indeed, let a knot τ in some neighborhood of the point t_0 be a piece of a straight line. Then the set of locally perturbed knots at the point t_0 of length 2π consists of the knot τ only.

We will extend this set in the following way.

Definition 2.2. Let the length of $\tau_{t_0, \varepsilon}$ be $(1 + \delta)2\pi$. The *locally perturbed length 2π knot* $\tilde{\tau}_{t_0, \varepsilon}$ is the knot obtained from $\tau_{t_0, \varepsilon}$ by homothety with coefficient $1/(1 + \delta)$ and center at the origin. We also say that the knot $\tilde{\tau}$ is *associated* with the knot τ .

Consider any $\tau_{t_0, \varepsilon}$. We will show later that $\delta = c_1\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$. Thus by Definition 2.1 we have

$$|\tau_{t_0, \varepsilon}(t_1) - \tau_{t_0, \varepsilon}(t_2)| = |\tau(t_1) - \tau(t_2)| + c_2(t_1, t_2)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

if $D(t_0, t_1) < \varepsilon$ or $D(t_0, t_2) < \varepsilon$. Then we may conclude that

$$E(\tau_{t_0, \varepsilon}) = E(\tau) + c_3\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3) \quad \text{and} \quad E(\tilde{\tau}_{t_0, \varepsilon}) = E(\tau) + c_4\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3).$$

The coefficients c_3 and c_4 of the term ε^3 will be called the *variation* and denoted by $Var(\tau_{t_0, \varepsilon})$ and $Var(\tilde{\tau}_{t_0, \varepsilon})$ respectively.

Now all is prepared for the definition of a locally extremal point of a knot.

Definition 2.3. Any $t_0 \in S^1$ is called *locally extremal point* of τ if $Var(\tilde{\tau}_{t_0, \varepsilon}) = 0$ for each locally perturbed knot $\tilde{\tau}_{t_0, \varepsilon}$ of length 2π .

Definition 2.4. The knot τ is said to be *locally extremal* if all its points are locally extremal.

Let us find necessary and sufficient conditions for the point to be locally extremal. We denote the vector product of two vectors a and b by $[a, b]$. By (a, b, c) we denote the mixed product (oriented volume) of the vectors a , b , and c . Let $\dot{\tau}(t)$ be the velocity vector and $\ddot{\tau}(t)$ be the acceleration vector. Now we define the functions $\Psi(t_0, t)$ and $\Phi(t_0, t)$.

$$\Psi(t_0, t) = \begin{cases} \left(\frac{\dot{\tau}(t_0)}{|\dot{\tau}(t_0)|}, \frac{\ddot{\tau}(t_0)}{|\ddot{\tau}(t_0)|}, \frac{\tau(t) - \tau(t_0)}{|\tau(t) - \tau(t_0)|} \right), & \text{if } \ddot{\tau}(t_0) \neq 0; \\ \left(\frac{\tau(t) - \tau(t_0)}{|\tau(t) - \tau(t_0)|}, \frac{\dot{\tau}(t_0)}{|\dot{\tau}(t_0)|} \right), & \text{if } \ddot{\tau}(t_0) = 0. \end{cases}$$

$$\Phi(t_0, t) = \begin{cases} \left(\frac{\dot{\tau}(t_0)}{|\dot{\tau}(t_0)|}, \frac{\tau(t) - \tau(t_0)}{|\tau(t) - \tau(t_0)|}, \left[\frac{\dot{\tau}(t_0)}{|\dot{\tau}(t_0)|}, \frac{\ddot{\tau}(t_0)}{|\ddot{\tau}(t_0)|} \right] \right), & \text{if } \ddot{\tau}(t_0) \neq 0; \\ 0, & \text{if } \ddot{\tau}(t_0) = 0. \end{cases}$$

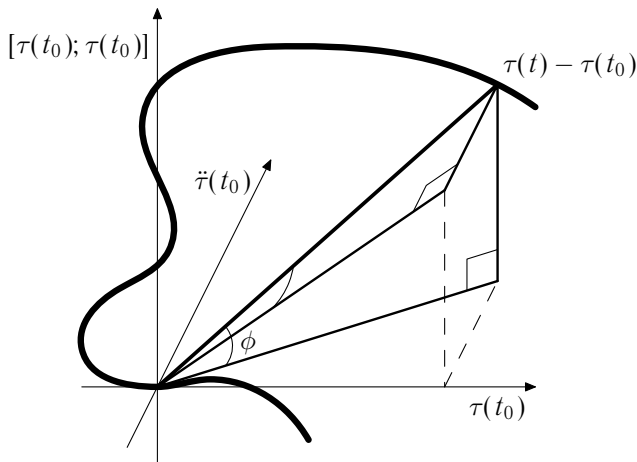


Figure 1. The geometric interpretation of $\psi(t_0, t)$ and $\phi(t_0, t)$.

Note that $|\dot{\tau}(t_0)| = 1$ and $|\tau(t) - \tau(t_0)| \neq 0$ if $t \neq t_0$. Thus Ψ and Φ are well defined.

We also remark that $\Psi(t_0, t) = \sin \psi(t_0, t)$, where $\psi(t_0, t)$ is the angle between the vector $\tau(t) - \tau(t_0)$ and the oriented plane spanned by $\dot{\tau}(t_0)$ and $\ddot{\tau}(t_0)$. The function Φ has a similar representation: $\Phi(t_0, t) = \sin \phi(t_0, t)$, where $\phi(t_0, t)$ is the angle between the vector $\tau(t) - \tau(t_0)$ and the oriented plane spanned by $\dot{\tau}(t_0)$ and $[\dot{\tau}(t_0), \ddot{\tau}(t_0)]$. (See Fig. 1). These angles can be either positive or negative.

Theorem 2.1. *Let τ be a smooth knot. The point t_0 is a locally extremal point of τ if and only if the following conditions hold:*

$$\begin{aligned}
 V_1(t_0) := & \frac{2}{3R(t_0)} \left(4 \int_{S^1} \left(f + R(t_0)\Phi(t_0, t) \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) dt - \right. \\
 & - \frac{1}{\pi} \iint_{S^1 \times S^1} \left(2f + D(t_1, t_2) \frac{\partial f}{\partial \rho} + |\tau(t_1) - \tau(t_2)| \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) dt_1 dt_2 + \\
 & \left. + 2 \iint_A \frac{\partial f}{\partial \alpha} dt_1 dt_2 \right) = 0;
 \end{aligned}$$

$$V_2(t_0) := \frac{4}{3R(t_0)} \int_S \frac{\partial f}{\partial \rho} \Psi(t_0, t) dt = 0.$$

Here $A \subset S^1 \times S^1$ is the set of points (t_1, t_2) such that $D(t_1, t_2) = D(t_1, t_0) + D(t_0, t_2)$.

The proof of Theorem 2.1 see in [5].

Corollary 2.1. *A knot τ is locally extremal if and only if almost all of its points are locally extremal, i.e.,*

$$\int_{S^1} \left(V_1^2(t) + V_2^2(t) \right) dt = 0.$$

In [1] it is shown that the circle is not always the global maximum or the global minimum for the energy considered. However the circle is a locally extremal knot for any energy E satisfying the conditions 1), 2) of the Introduction.

Corollary 2.2. *The circle is always a locally extremal knot.*

The proof of Corollary 2.2 is given in [5].

Now let us say a few words about the Möbius energy which is (in the version from [3])

$$\tilde{f}_M = \frac{1}{|\tau(t_1) - \tau(t_2)|^2} - \frac{1}{D^2(t_1, t_2)}.$$

It has many remarkable properties (see [8] and [3]). The Möbius energies of homothetic knots are equal. This energy is invariant with respect to Möbius transformations. The variational equations and the gradient flow equation of the Möbius energy were studied in [3].

Unfortunately, for the Möbius energy, the variation Var is always infinite, and this means that we can not perturb the knot in the way considered above.

The main property of the Möbius energy is as follows. When a knot crossing tends to a double point, the energy tends to infinity. The energy is always positive. So every topological type of knots has a representative with minimal value of energy, some normal form.

Notice that the main part of the Möbius energy is $1/|\tau(t_1) - \tau(t_2)|^2$. The other part $1/D^2(t_1, t_2)$ is only a normalization that makes the integral convergent. So let us make another normalization of the “main part” of the Möbius energy. In this case we often lose the invariance with respect to Möbius transformations. Let us consider the following energy:

$$\tilde{f} = \frac{D^3(x, y)}{|\tau(x), \tau(y)|^2}.$$

It is easily seen that this energy on one hand has the above property and on the other we can use our variational principles. Note also that such an energy is the same for homothetic knots.

Corollary 2.3. *We present V_1 and V_2 for this energy:*

$$\begin{aligned}
 V_1(t_0) &= \frac{2}{3R(t_0)} \left(4 \int_{S^1} \left(\frac{|\tau(t) - \tau(t_0)|^3}{D(t, t_0)^2} \left(1 - 2 \frac{R(t_0)}{D(t, t_0)} \Phi(t_0, t) \right) \right) dt - \right. \\
 &\quad \left. \frac{3}{\pi} \iint_{S^1 \times S^1} \frac{|\tau(t_2) - \tau(t_1)|^3}{D(t_2, t_1)^2} dt_1 dt_2 + 6 \iint_A \frac{|\tau(t_2) - \tau(t_1)|^2}{D(t_2, t_1)^2} dt_1 dt_2 \right); \\
 V_2(t_0) &= -\frac{8}{3R(t_0)} \int_S \frac{|\tau(t_1) - \tau(t_2)|^3}{D(t_0, t)^3} \Psi(t_0, t) dt.
 \end{aligned}$$

§ 3. Definition and some basic properties of Mm-energy

In this section we define the Mm-energy of a knot. The nature of this energy differs from those considered in the previous sections.

Let us fix some point t_0 on the circle and define the real number $f_{Mm}(t_0)$. Consider the map $\rho_{t_0}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\rho_{t_0}(t) = |\tau(t) - \tau(t_0)|$. Recall that the map τ is smooth. Hence ρ_{t_0} is also smooth except for one point t_0 . If the number of maxima and minima of g_0 is finite, then we define the function f_{Mm} as follows:

$$f_{Mm}(t_0) = \frac{1}{\rho_{t_0}(t_M)} + \sum_{t_{m_i} \in U_1} \frac{1}{\rho_{t_0}(t_{m_i})} - \sum_{t_{M_j} \in U_2} \frac{1}{\rho_{t_0}(t_{M_j})},$$

where t_M is one of the points where the function ρ_{t_0} achieves its global maximum; U_1 is the set of all points of the circle, except the point t_0 , where the function ρ_{t_0} has local minima; U_2 is the set of all points of the circle, except the point t_M , where the function ρ_{t_0} has local maxima (see Fig. 2). Here we suppose that $t_0 < t_* < t_0 + 2\pi$. In the case of an infinite number of maxima and minima we make a small smooth perturbation $\tilde{\rho}_{t_0}$ so that the number of minima and maxima becomes finite. Now we can calculate the value of $\tilde{f}_{Mm}(t_0)$ for the function $\tilde{\rho}_{t_0}$ as it was made before. Finally we define the $f_{Mm}(t_0)$ as the limit of $\tilde{f}_{Mm}(t_0)$ in the C^∞ -topology.

Now we define the Mm-energy.

Definition 3.5. The *Mm-energy* of a given knot is the number

$$E_{Mm}(\tau) = \int_{S^1} f_{Mm}(t) dt,$$

if the integral converges.

Remark 3.1. Consider some small smooth perturbation of a knot. Then for any point t_0 of the circle the function ρ_{t_0} is also perturbed in a smooth way. At a generic point, four possible modifications in the sums of f_{Mm} can occur: small changes of the values of the maxima and minima; the death of one maximum and of the neighboring minimum; conversely, the birth of one maximum and minimum at some point; a local maximum close to the global maximum can become the global maximum. In all these cases the variation of the resulting f_{Mm} is small. This is the reason why the Mm-energy depends on small perturbations of knots continuously.

Further we formulate the basic properties of the Mm-energy.

Proposition 3.1. *The Mm-energy is greater than or equal to 2.*

Consider the sum

$$f_{Mm}(t_0) = \frac{1}{\rho_{t_0}(t_M)} + \sum_{t_{m_i} \in U_1} \frac{1}{\rho_{t_0}(t_{m_i})} - \sum_{t_{M_j} \in U_2} \frac{1}{\rho_{t_0}(t_{M_j})}.$$

We can fix the ordering of the minima and the maxima in the standard way:

$$t_0 < t_{M_1} < t_{m_1} < \dots < t_{M_k} < t_{m_k} < t_M < t_{m_{k+1}} < t_{M_{k+1}} < \dots \\ \dots < t_{m_n} < t_{M_n} < t_0 + 2\pi.$$

Then we have

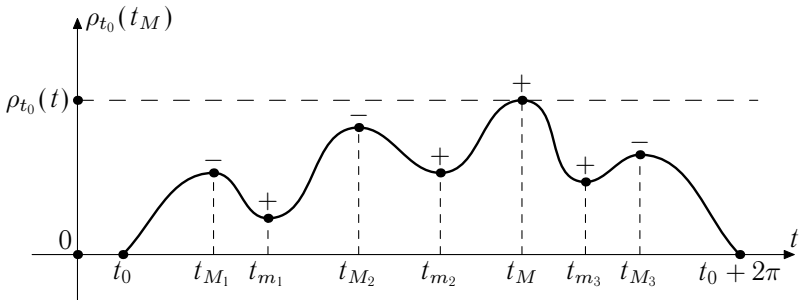


Figure 2. The function ρ_{t_0}

$$\begin{aligned}
 f_{Mm}(t_0) &= \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{\rho_{t_0}(t_{m_i})} - \frac{1}{\rho_{t_0}(t_{M_i})} \right) + \frac{1}{\rho_{t_0}(t_M)} + \\
 &\quad + \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{1}{\rho_{t_0}(t_{m_i})} - \frac{1}{\rho_{t_0}(t_{M_i})} \right) \geq 0 + \frac{1}{\rho_{t_0}(t_M)} + 0 = \frac{1}{\rho_{t_0}(t_M)}.
 \end{aligned}$$

Finally, note that the length of the knot is 2π , hence the function $\rho_{t_0}(t_M)$ is smaller than or equal to π . Therefore,

$$E_{Mm}(\tau) = \int_{S^1} f_{Mm}(t) dt \leq \int_{S^1} \frac{1}{\rho_t(t_{M_i})} dt \leq \int_{S^1} \frac{1}{\pi} dt = \frac{2\pi}{\pi} = 2.$$

This completes the proof of Proposition 3.1.

Proposition 3.2. *The Mm-energy is a homothety invariant.*

Suppose τ is a knot of length 2π and $\tilde{\tau}$ is a homothetic knot of length $2l\pi$, where l is the coefficient of the homothety. Then $d\tilde{t} = ldt$ and $\tilde{\rho}(\tilde{t}) = l\rho(t)$ for any t , and so $\tilde{f}_{Mm}(\tilde{t}) = f_{Mm}(t)/l$. Thus we obtain

$$E_{Mm}(\tilde{\tau}) = \int_{S^1} \tilde{f}_{Mm}(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_{S^1} \frac{f_{Mm}(t)}{l} ldt = \int_{S^1} f_{Mm}(t) dt = E_{Mm}(\tau).$$

Proposition 3.2 is proven.

Hence we can consider knots without any restriction on their lengths.

Proposition 3.3. *As two branches of the knot tend to a double crossing, the Mm-energy tends to infinity.*

Consider a smooth family $\{\tau_\lambda | \lambda \in [0, 1]\}$ such that τ_0 is a smooth knot with a double crossing and τ_λ , $\lambda \neq 0$ is a smooth knot without any double crossing. For every ε we can choose a sufficiently small λ satisfying the following conditions: there exist two points t_1 and t_2 with $|t_1 - t_2| < \varepsilon^2$ such that the functions ρ_{t_1} and ρ_{t_2} have global minima at the points t_2 and t_1 respectively; and the ball $B_{\varepsilon,p}$ of radius ε with center at the midpoint p of the segment $[\tau_\lambda(t_1), \tau_\lambda(t_2)]$ has only two connected components of a knot τ_λ inside.

The family is smooth, hence the curvature of all knots is bounded by some N . If $\varepsilon < 1/N$, then every point t of the knot τ_λ inside the ball $B_{\varepsilon/2,p}$ has one extremum (i.e., the global minimum) of the function ρ_t inside the ball $B_{\varepsilon,p}$, and every point t of this knot inside the ball $B_{\varepsilon,p}$ has not more than one extremum (i.e., the global minimum) of ρ_t inside the ball $B_{\varepsilon,p}$. Let

us estimate the energy inside the ball $B_{\varepsilon,p}$:

$$E_{Mm}(\tau_\lambda \cap B_{\varepsilon,p}) > 4 \int_{\frac{\varepsilon^2}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{t + \frac{\varepsilon^2}{2}} dt = 4 \ln \left(t + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \Big|_{\frac{\varepsilon^2}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} = 4 \ln \frac{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}}{\varepsilon^2} > 4 \ln \frac{2}{\varepsilon}.$$

The other terms (we ignore the global minimum of ρ_t) of the function f_{Mm} change in a smooth way, hence the Mm-energy grows to infinity.

Therefore, the Mm-energy separates knots from different topological classes.

The following property is an essential property of the Mm-energy.

Proposition 3.4. *The Mm-energy is well defined for piecewise smooth knots with obtuse angles.*

If some point t is “near” the angle, then the function ρ_t is monotone in some neighborhood of the vertex of an angle and hence there are no minima or maxima of ρ_t in this neighborhood.

In particular, the Mm-energy is well defined for piecewise linear knots with obtuse angles. Thus we can consider piecewise linear approximations of smooth knots and take the restriction to the set of piecewise linear knots. This property allows us to develop computer experiments in calculating normal forms for Mm-energies of topological classes of knots and the values of Mm-energies for this normal forms.

Bibliography

1. A. Abrams, J. Cantarella, J. H. G. Fu, M. Ghomi, and R. Howard, *Circles minimize most knot energies*, <http://arXiv.org/abs/math/0105138>.
2. V. I. Arnold, *The asymptotic Hopf invariant and its applications*, in Proc. Summer School in Differential Equations, Erevan, Armenian SSR Academy of Science (1974); English translation in *Selecta Math. Sov.* 5(1986), 327–345.
3. M. H. Freedman, Z.-H. He, and Z. Wang, *Möbius energy of knots and unknots*, *Ann. of Math.* (2)139 (1994), No. 1, 1–50.
4. W. Fukuhara, *Energy of a knot*, The fête of topology, Academic Press, (1988), 443–451.
5. O. Karpenkov, *Energy of a knot: variational principles*, to appear in *Rus. Journal of Math. Physics*.
6. H. K. Moffatt, *The degree of knottedness of tangled vortex lines*, *J. Fluid Mech.* 35(1969), 117–129.

7. H. K. Moffatt, *Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrary complex topology. Part 1. Fundamentals*, J. Fluid Mech. 35(1985), 359–378.
8. J. O'Hara, *Energy of a knot*, Topology 30(1991), No. 2, 241–247.
9. J. O'Hara, *Family of energy functionals of knots*, Topology Appl. 48(1992), No. 2, 147–161.
10. J. O'Hara, *Energy functionals of knots II*, Topology Appl. 56(1994), No. 1, 45–61.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова и Московский независимый университет E-mail: karpenk@mccme.ru

L. Katzarkov

Derived categories in four-dimensional topology

§ 1. Introduction

In this paper we recall some invariants of symplectic four-dimensional manifolds and build up some new symplectic and smooth invariants. The paper should be considered as a sequel of [1], where we show how to compute the Fukaya Seidel category of a Lefschetz pencil. We introduce a new symplectic invariants — conjugacy classes in $SL(N, \mathbb{Z})$ of the matrix of Floer Euler characteristics $A(D(Q))$. In [1] we conjecture that conjugacy classes in $SL(N, \mathbb{Z})$ of the matrix $A(D(Q))$ is a homology invariant — conjectures 3.1 and 3.2. We also outline a procedure for proving conjecture 3.3 from [1].

Let us quickly recall the basics of braid factorization approach. It was shown in [4] that every compact symplectic 4-manifold (X, ω) can be realized as an approximately holomorphic branched covering of $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ whose branch curve is a symplectic curve in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ with cusps and nodes as only singularities (however the nodes may have reversed orientation). Such a covering is obtained by constructing a suitable triple of sections of the line bundle $L^{\otimes k}$, where L is a line bundle obtained from the symplectic form (its Chern class is given by $c_1(L) = \frac{1}{2\pi}[\omega]$ when this class is integral), and where k is a large enough integer.

Moreover, it was shown in [3] that the braid monodromy techniques introduced by Moishezon and Teicher (see e.g. [12]) in algebraic geometry can be used in this situation to derive, for each large enough value of the degree k , monodromy invariants which completely describe the symplectic 4-manifold (X, ω) up to symplectomorphism. These invariants are also related to those constructed by Donaldson and arising from the monodromy of symplectic Lefschetz pencils [6], which also are defined only for large values of k .

It was expected that monodromy invariants arising from branched coverings or symplectic Lefschetz pencils are among the most powerful available invariants of symplectic manifolds; for example, it was expected that they can be used to symplectically tell apart certain pairs of mutually homeomorphic algebraic surfaces of general type, such as the Horikawa manifolds, which no other currently available symplectic invariant can distinguish. However, their practical usefulness is immensely limited by the difficulties involved. The main problem that one encounters is that the monodromy only becomes a symplectic invariant when the degree is large enough, which makes it necessary to handle whole sequences of braid factorizations.

We will associate to (X, ω) a sequence of invariants (indexed by $k \gg 0$) consisting of two objects: the braid monodromy characterizing the branch curve D_k , and the *geometric monodromy representation* $\theta_k: \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k) \rightarrow S_n$ ($n = \deg f_k$) characterizing the n -fold covering of $\mathbb{CP}^2 - D_k$ induced by f_k [3]. Recall that a generic line $L \simeq \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}^2$ intersects D_k in $d = \deg D_k$ distinct points and that the inclusion map $i: L - (L \cap D_k) \rightarrow \mathbb{CP}^2 - D_k$ induces a surjective homomorphism $i_*: F_d \rightarrow \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$ [3]. The images of the standard generators of the free group F_d and their conjugates are called *geometric generators* of $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$, and we will denote the set of these elements by Γ_k ; the morphism θ_k maps all geometric generators to transpositions in S_n . To each node one can associate a pair of elements $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_k$ (small loops around the two intersecting pieces of D_k); then the transpositions $\theta_k(\gamma_1)$ and $\theta_k(\gamma_2)$ are necessarily disjoint. Moreover, by the Zariski-Van Kampen theorem, $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$ is realized as a quotient of F_d by relations corresponding to the various singular points of D_k : the relation arising from a node is $[\gamma_1, \gamma_2] \sim 1$. Therefore, adding or removing pairs of nodes amounts to adding or removing relations given by commutators of geometric generators.

Define the *linking number* homomorphism $\delta_k: \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k) \rightarrow \mathbb{Z}_d$ by $\delta_k(\gamma) = 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma_k$. Then it is easy to check that $\theta_k^+ = (\theta_k, \delta_k): \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k) \rightarrow S_n \times \mathbb{Z}_d$ always has as the image the index 2 subgroup $\{(\sigma, i): \text{sgn}(\sigma) \equiv i \pmod{2}\}$ (note that d is always even).

Definition 1.1. Let K_k be the normal subgroup of $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$ generated by all $[\gamma_1, \gamma_2], \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_k$ such that $\theta_k(\gamma_1)$ and $\theta_k(\gamma_2)$ are disjoint transpositions. The *stabilized fundamental group* is $G_k = \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)/K_k$. Since $K_k \subseteq \text{Ker}\theta_k^+$, we can also define the *reduced subgroup* $G_k^0 = \text{Ker}\theta_k^+/K_k$.

We show that the above groups are invariants but we will also show that they are homology invariants.

This suggests that we need to look for more sophisticated invariants associated with the braid factorization — the Fukaya Seidel categories. We

show a procedure for computing these categories and some invariants associated with them. As we said at the beginning the simplest invariant of these categories — conjugacy classes in $SL(N, \mathbb{Z})$ of the matrix of Floer Euler characteristics $A(D(Q))$ — turn out to be homological invariants. We outline a procedure for dealing with this problem and show how to compute examples of Fukaya category.

Later we move to the smooth situation. We propose a program for creating monodromy invariants in the case of smooth 4-dimensional manifolds. We look at some other applications as well.

This paper represents the talk the author has given in Dec 2001 at a conference devoted to the 10th anniversary of Independent University of Moscow. The paper is organized as follows. In section 2 we recall results of Donaldson, Auroux, and Katzarkov. In section 3 we define new invariants related to the Fukaya category. In section 4 we build smooth analogs.

We would like to thank referee and D. Auroux for pointing and fixing some problems in the proof of the theorem 2.3. Extended versions of the results in sections 3 and 4 as well as some new applications will appear in a separate joint paper with D. Auroux and S. Donaldson, Orlov and Yotov.

§ 2. Symplectic invariants

Recall that a structure of Lefschetz pencil on a manifold X is a realization of X as a family of submanifolds of real codimension 2 indexed by $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, intersecting along a submanifold of real codimension 4, and all smooth except for finitely many of them which have isolated singular points (double points with normal crossings in the case of a 4-manifold realized as a family of curves). After blowing up one obtains a structure of Lefschetz fibration, i. e. a fibration over $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ with a finite number of singular fibers. A Lefschetz pencil or fibration is symplectic (resp. algebraic) if X and all the submanifolds making up the pencil are symplectic (resp. algebraic).

The work of Donaldson [7] showing that symplectic manifolds admit the structure of a Lefschetz pencil suggests the existence of a fundamental similarity between low dimensional symplectic topology and complex projective geometry. After the work of Donaldson [7] it was suggested by Donaldson and Gromov that one should be able to develop a theory of symplectic maps to $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ and use previous work by Moishezon [12] to classify the four-dimensional symplectic manifolds using braid monodromies. Parts of this program were carried out by D. Auroux and L. Katzarkov in [3]. We briefly repeat the results from [3].

Recall that by [4] every compact symplectic 4-fold X admits a finite map

$f: X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ branched along an approximately holomorphic symplectic curve $D \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ which is immersed everywhere except at a finite number of cusps. The branching is everywhere of order 2 (except at cusps). These coverings are obtained by endowing X with a compatible almost-complex structure, and by constructing suitable triples of approximately holomorphic sections of the line bundles $L^{\otimes k}$ over X , where k is a large integer and L is a line bundle whose Chern class is equal to the cohomology class of the symplectic form (or a perturbation of it if it is not integral).

In [3], conditions were added on the branch curve to ensure that its behavior with respect to the fibers of the projection $\pi: \mathbb{C}\mathbb{P}^2 - \{(0:0:1)\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ defined by $\pi(x:y:z) = (x:y)$ is generic. More precisely, one requires that the only singularities of D besides the cusps are transverse double points (with either positive or negative self-intersection number), that D is transverse to the fibers of π everywhere except at finitely many nondegenerate tangency points, and that all *special points* of the curve D (cusps, nodes and tangencies) lie in different fibers of π . Such a branch curve will be said to be *quasiholomorphic*.

In view of the result of uniqueness up to isotopy obtained in [4], the only admissible phenomena in a 1-parameter family of quasiholomorphic curves obtained from an isotopy of branched coverings are creation or cancellation of a pair of transverse double points with opposite orientations.

We will call *quasiholomorphic covering* an approximately holomorphic branched covering $f: X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ whose branch curve is quasiholomorphic. With this terminology, one has

Theorem 2.1 ([3]). *For every compact symplectic 4-manifold X there exist quasiholomorphic coverings $f_k: X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ defined by asymptotically holomorphic sections of the bundle $L^{\otimes k}$ for $k \gg 0$.*

The projection π realizes any quasiholomorphic branch curve as a singular covering of $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ branched at the special points. The techniques introduced by Moishezon for algebraic curves extend in a straightforward manner, and the topology of D can be investigated from the monodromy of this covering, which gives rise to a factorization in a braid group (observing that the fibers of $\pi|_D$ are finite subsets of the fibers of π). We recall some more information from [3].

Definition 2.1. We will say that two braid monodromies are m -equivalent if there exists a sequence of operations which turn one into the other, each operation being either a global conjugation, a Hurwitz move, or the cancellation or creation of a pair of nodes.

To recover a map $f: X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ we also need a *geometric monodromy representation*, i. e., a surjective group homomorphism θ from $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - D)$ with values in a symmetric group S_n , describing the covering map f away from the branch curve. The properties of θ are dictated by the requirement that a small loop around D should be mapped to a transposition, and by elementary rules of compatibility with the braid monodromy which ensure the smoothness of the manifold X .

As a result we get:

Theorem 2.2 ([3]). *Every compact symplectic 4-manifold is uniquely characterized by the sequence of (cuspidal negative) braid factorizations and geometric monodromy representations corresponding to the quasiholomorphic coverings of $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ canonically obtained for $k \gg 0$, up to m -equivalence.*

It was also shown in [3] that conversely, given a (cuspidal negative) braid factorization and a geometric monodromy representation, one can recover in a canonical way a symplectic 4-manifold (up to symplectomorphism).

Let (X, ω) be a compact symplectic 4-manifold with integral symplectic class: then it is known [3] that X admits a sequence of approximately holomorphic branched covering maps $f: X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, which in the complex case coincide with generic projections of the projective embeddings given by the linear systems $|k[\omega]|$ for $k \gg 0$; moreover the topology of these maps is canonical for sufficiently positive linear systems and can be used to derive symplectic invariants.

In the complex case, the fundamental group $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - D)$ of the complement of the branch curve D has been studied by Moishezon and Teicher [19] as a potentially useful invariant to distinguish complex surfaces. In the symplectic case, a major difference is that the fundamental group of the complement itself is no longer an invariant, due to the possible cancellation of pairs of nodes in the branch curve. Nonetheless, a certain quotient $G(D)$ of $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - D)$, called the *stabilized* fundamental group, can be shown to be a symplectic invariant [5]. However it is worth noting that, in all the known examples, this stabilized group coincides with the actual fundamental group as soon as the linear system is sufficiently positive.

The fundamental group $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - D)$ admits a map θ with values in the symmetric group S_n , where $n = \deg f$, which to a given loop in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - D$ associates the monodromy of the branched cover along it. It also admits a map δ with values in the cyclic group \mathbb{Z}_d , where $d = \deg D$, which counts the linking number with D . These two maps factor through the quotient $G(D)$. The image of (θ, δ) is always a subgroup of index 2 in $S_n \times \mathbb{Z}_d$; therefore

there is an exact sequence

$$1 \longrightarrow G_0(D) \longrightarrow G(D) \longrightarrow S_n \times \mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

It has been observed in various examples that the kernel of θ is often a solvable group whose structure is related to a certain quotient of the braid group.

Assume from now on that X is simply connected, and define $\Lambda = \{(L \cdot C, R \cdot C), C \in H_2(X, \mathbb{Z})\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, where L is the homology class of the preimage of a line in X and R is the homology class of the ramification curve in X ($R = 3L + K_X$). Moreover, let $\hat{G}_0(D)$ be the kernel of the monodromy map $\theta: \pi_1(\mathbb{C}^2 - D) \rightarrow S_n$. Then we have the following

Theorem 2.3 ([5]). *There exists a well-defined group homomorphism $\hat{\rho}: \hat{G}_0(D) \rightarrow ((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\Lambda)^n$, which descends to a group homomorphism $\rho: G_0(D) \rightarrow ((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\Lambda)^{n-1}$. Moreover, if the linear system defining f is sufficiently ample then ρ is surjective.*

§ 3. Fukaya Category

In this section we suggest a new invariant coming from braid monodromy. This is Seidel version of the Fukaya category. This category is determined by the vanishing cycles of a Lefschetz pencil and can be derived directly from the braid factorization. For the precise definition we refer to Seidel’s paper [8]. Instead we will work out below some examples of a Fukaya category.

3.1. The cubic example

Let X be a smooth algebraic surface of degree 3 in $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$, and let us consider a generic projection of $\mathbb{C}\mathbb{P}^3 - \{pt\}$ to $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. This makes X a 3-fold cover of $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ branched along a curve C of degree 6 with 6 cusps (there are no nodes in this case). For a generic projection to $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ the curve C has 12 tangency points, and the corresponding braid group factorization in B_6 has been computed by Moishezon in [12]. For all $1 \leq j < k \leq 6$, let $Z_{jk} = X_{k-1} \cdot \dots \cdot X_{j+1} \cdot X_j \cdot X_{j+1}^{-1} \cdot \dots \cdot X_{k-1}^{-1}$ be the half-twist along the segment which joins q_j and q_k in D^2 when the points q_1, \dots, q_6 are placed along a circle; then the braid group factorization is given by

$$\Delta_6^2 = (Z_{35}Z_{46}Z_{13}Z_{24}Z_{12}^3Z_{34}^3Z_{56}^3)^2 Z_{35}Z_{46}Z_{13}Z_{24},$$

and the corresponding geometric monodromy representation $\theta: \pi_1(D^2 - \{q_1, \dots, q_6\}) \rightarrow S_3$ maps the geometric generators around q_1, \dots, q_6 to the transpositions (23), (12), (23), (12), (23), and (12) respectively.

The corresponding Lefschetz pencil has 3 base points and consists of elliptic curves; after blowing up X three times it becomes the standard elliptic fibration of $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ over $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ with 12 singular fibers. Its monodromy is therefore expected to be given by the word $(D_a D_b)^6 = 1$ in the mapping class group $M_1 = SL(2, \mathbb{Z})$, where D_a and D_b are the Dehn twists along the two generators a and b of $\pi_1(T^2)$. We now check that this is indeed consistent with what one obtains from the above braid monodromy.

We know that the braids Z_{12}^3 , Z_{34}^3 and Z_{56}^3 lie in the kernel of θ_* , by Proposition 3 [3]. Moreover, by Proposition 4 [3] the other elements which appear in the braid factorization are mapped to Dehn twists along suitable curves γ_{35} , γ_{46} , γ_{13} , and γ_{24} in T^2 . The projections of these curves to $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ are as shown in the diagram below ; their only intersections are the five points indicated by solid circles, and all these intersections happen in the second sheet of the covering.

The loops γ_{13} and γ_{24} have intersection number $+1$, so they generate $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ and will be referred to as respectively a and b . One then easily checks that $\gamma_{35} = b - a$ and $\gamma_{46} = -a$ (we use additive notation). Note that we don't have to worry about orientations as the positive Dehn twists D_γ and $D_{-\gamma}$ are the same for any loop γ .

It follows from these computations that the braid factorization given above is mapped by θ_* to the factorization $(D_{b-a} D_a D_a D_b)^3$ in M_1 . A Hurwitz operation changes $D_{b-a} D_a$ into $D_a D_b$, so the Lefschetz pencil monodromy we have just obtained is indeed Hurwitz equivalent to the expected factorization $(D_a D_b)^6$.

Starting from the braid factorization it is easy to draw vanishing cycles and then locate the base points: they are the preimages of a point near infinity. The corresponding Lefschetz pencil with 3 base points is obtained by lifting this pattern via the 3-fold branched cover associated to the monodromy representation θ . By lifting the 12 paths of the half-twists (actually 4 paths each appearing thrice), we get 12 loops (actually 3×4 on the triple cover of the sphere branched at 6 points, which is a torus. The three base points are the three preimages of the point at infinity on the sphere. Another way to say the same thing: if one takes the triple cover of a large disc branched at 6 points in the pattern specified by theta, one gets a torus with three punctures — these punctures correspond to the base points.

A different way to see the vanishing cycles is the following: the vanishing cycles are double covers of paths joining the branch points. Each

path represents a loop in the 3-fold cover, which consists of two of its lifts — those whose extremities come together at the branch points). We are labelling A, B, C, D the four loops, and a, b, c, d, e their intersection points.

The ordering of the Lagrangian cycles is $L_1 = A, L_2 = B, L_3 = C, L_4 = D, L_5 = A, L_6 = B, L_7 = C, L_8 = D, L_9 = A, L_{10} = B, L_{11} = C, L_{12} = D$. A and C live in sheets 2 and 3 (these two lifts together form closed loops) B and D live in sheets 1 and 2.

A and B intersect once, at a (in the second sheet of the cover).

A and C intersect once, at e (at their common end-point).

A and D intersect once, at c .

B and C don't intersect.

B and D intersect once, at d .

C and D intersect once, at b .

So we get that L_1 admits non-trivial Hom's to $L_2, L_3, L_4, L_6, L_7, L_8, L_{10}, L_{11}, L_{12}$ (it intersects the B 's, C 's and D 's). L_2 admits non-trivial Hom's to $L_4, L_5, L_8, L_9, L_{12}$. (It intersects that A 's and D 's, but there is no Hom to L_1 by the ordering condition).

To find the composition relations we must look at polygons on the torus formed by these cycles. These polygons project to immersed polygons on the sphere. Not going through the base points means that we don't allow to go through the point at infinity on the sphere, i. e., the polygon must be contained entirely within the disc of the picture. Also, if the polygon contains in its interior some of the branch points then one needs to be careful that it must go through them and therefore must live also in other sheets of the cover.

If we look at the spherical triangle that lies outside of the drawn triangle, then it goes through infinity, i. e. its lift goes through a base point.

If we look at the spherical triangle that lies inside, then we have to go through the branch point in the middle, and the triangle comes out into another sheet of the covering. In that sheet, it can be bounded by some other parts of the vanishing cycles (possibly even by the same triangle or it can go all the way to infinity there (but possibly hitting yet more branch points and escaping to even other sheets of the cover). Still, if it's bounded then the surface we get is not topologically a disk (it has several boundaries) and therefore it doesn't count. If instead we choose to go to infinity we're going to get a base point and so we don't count it either.

Observe that each of the vanishing cycles is a loop, so there are two ways to go from one point to another. We can go from one intersection point to another in two different ways (e.g. the direct one, and the other one going through the end-points to get to the other sheet then including the other

lift). So we have to consider lots of potential triangles with several different kinds of sides, even with a fixed given projection.

For example, if the intersection points lie in different sheets: e.g., if we have with the upper-left side being in sheets 1 and 2, the upper-right in sheets 1 and 3, the lower side in sheets 2 and 3, then to form a triangle, since the three intersection points are in different sheets (a in sheet 1, b in sheet 2, c in sheet 3) — so to form a triangle the sides must pass through the end-points. E.g. the side ab can start at a (in sheet 1), go down to the end-point, and come back in sheet 2 until it reaches b . Or it may go up to the end point and come back in sheet 2 instead (these are the two ways to go from a to b on that loop). Similarly for the others. Then one needs to be careful with all these choices that rise to genuine fillable triangles upstairs without going through the base points (i. e. through infinity in the diagram downstairs).

If we go back to the cubic, then things are fairly simple since there are so few intersections.

There are no non-trivial bigons since the 3 A -cycles are mutually disjoint, the 3 B -cycles are mutually disjoint, etc... (otherwise if e.g. L_1 and L_5 intersect, they'll intersect twice and a bigon between them will give a non-trivial contribution to μ_1 in the $A\infty$ -category, so these intersections will die in the cohomology in the derived category).

If we look for triangles, enumerating them according to their set of vertices we get:

- abc, abd, abe don't exist (there is no a - b edge)
- acd : there is one obvious triangle (visible on the picture) choosing the lifts in sheet 2 of each side. If one goes through the other lifts (i. e., e.g. one goes from a to d through the bottom end-point of B) then the polygon has to escape to infinity and hit a base point.
- ace doesn't work (all sides are on the same vanishing cycle)
- ade doesn't exist (no d - e edge)
- bcd doesn't work (all on the same cycle)
- bce : there is one obvious triangle, entirely contained in sheet 2. As with acd we get that all other lifts don't give bounded triangles.
- bde, cde don't exist.

So there are only acd and bec triangles. acd tells us that there is a non-trivial composition between homomorphisms involving A , B , and D cycles.

However we need to pay careful attention to the ordering rules. The *acd* triangle can give us compositions in three ways, taking into account the counterclockwise order *A-D-B* of the sides:

For $A \rightarrow D \rightarrow B$: we get non-trivial compositions

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(L_1, L_4) \times \mathrm{Hom}(L_4, L_6) &\rightarrow \mathrm{Hom}(L_1, L_6) \\ \mathrm{Hom}(L_1, L_4) \times \mathrm{Hom}(L_4, L_{10}) &\rightarrow \mathrm{Hom}(L_1, L_{10}) \\ \mathrm{Hom}(L_1, L_8) \times \mathrm{Hom}(L_8, L_{10}) &\rightarrow \mathrm{Hom}(L_1, L_{10}) \\ \mathrm{Hom}(L_5, L_8) \times \mathrm{Hom}(L_8, L_{10}) &\rightarrow \mathrm{Hom}(L_5, L_{10}) \end{aligned}$$

For $D \rightarrow B \rightarrow A$: we get a non-trivial composition

$$\mathrm{Hom}(L_4, L_6) \times \mathrm{Hom}(L_6, L_9) \rightarrow \mathrm{Hom}(L_4, L_9)$$

For $B \rightarrow A \rightarrow D$: we get non-trivial compositions

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(L_2, L_5) \times \mathrm{Hom}(L_5, L_8) &\rightarrow \mathrm{Hom}(L_2, L_8) \\ \mathrm{Hom}(L_2, L_9) \times \mathrm{Hom}(L_9, L_{12}) &\rightarrow \mathrm{Hom}(L_2, L_{12}) \\ \mathrm{Hom}(L_6, L_9) \times \mathrm{Hom}(L_9, L_{12}) &\rightarrow \mathrm{Hom}(L_6, L_{12}) \end{aligned}$$

Similarly the *bce* triangle with sides *D-C-A* in counterclockwise order gives some other non-trivial compositions.

If one wants to check the higher-order compositions of the A_∞ -category one needs to search for quadrants and so on. The only likely candidate are the quadrants *adbe*; but all its lifts are unbounded and go to ∞ (the base points), so the higher compositions vanish.

We call the graph obtained above a quiver with relations.

3.2. Fukaya Category — new invariants

The procedure described in the previous section allow us to produce new invariants coming from the braid factorization. Let X, ω be a symplectic 4 dimensional manifold and X' be a pencil on X corresponding to a very high power of $k \gg 0$ of the complex line bundle L such that $c_1(L) = \omega$. Following the procedure above we associate to the above Fukaya category a quiver Q . Now let us consider the derived category of representations of Q , the category $D(Q)$.

Theorem 3.1. *For $k \gg 0$ $D(Q)$, is an invariant of the symplectic structure on X .*

The proof of this theorem is similar to the results in [8].

This result is not hard and does not have much practical use right oposite to the calculations of the previous section. From another point of view, two things are obvious:

1. The Fukaya category records very closely the information coming from the braid factorization.

2. According to the Mirror Symetry conjecture the Fukaya category is equivalent to the derived category of coherent sheaves on the mirror manifold. Although it is not known what is the mirror manifold, it is known that in general the derived category of coherent sheaves recovers the smooth projective variety.

The above two observations suggest that $D(Q)$ should be a very strong invariant.

Recall that the first Horikawa surface X_1 is a two sheeted covering, $f: X_1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ branched at a $(12, 6)$ curve and the second Horikawa X_2 surface is a two sheeted covering of \mathbb{F}_6 branched at $5\Delta_0 + \Delta_\infty$ (see [11]).

In a series of papers Moishезon has outlined a procedure for computing the fundamental groups of the complements of the ramification curves for generic projections of Veronese and Segre embeddings. A modification of Moishезon's procedure allows are to approach the following conjecture.

Let X_1 and X_2 be the images of Horikawa surfaces under the canonical linear systems. Using Moishезon's work we prove:

Theorem 3.2. *The fundamental groups of the complements of the branch divisors for generic projections to $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ of X_1 and X_2 are the same.*

This result follows from computing the braid factorization. But as we have shown in the previous section if we know how to compute braid factorization we know how to compute $D(Q)$.

Let us outline the pocedure.

1. First we compute for $D(Q)$ X_1 and X_2 — the images of Horikawa surfaces under the canonical linear systems.

2. Then we invoke the following

Theorem 3.3. *If we know $D(Q)$ for small k we know it for $k \gg 0$.*

The proof of this theorem is based on Auroux—Katzarkov degree doubling formulae.

Now we proceed with some more examples:

The Segre $(2, 2)$ embedding is given by 12 half-twists in B_{16} . The inter-

section matrix and the non-canonical map to $\mathbb{Z}^{(bp-1)}$ are

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -6 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The basis of the kernel of antisymmetric part (10-dimensional) is

$$K = \text{KERNEL}(A - A', [15]) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 & 4 & -6 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & -1 \end{bmatrix}$$

Restricted forms: $AL =$ restriction of A , becomes symmetric $FL =$ restriction of F , becomes well-defined canonically

$$AL = K' \cdot A \cdot K, \quad FL = F \cdot K,$$

$$AL = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -4 & 6 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -4 & 6 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 4 & -6 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & -7 & 11 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 4 & -7 & 14 & -21 & 4 & 4 & -4 & -4 \\ 6 & 6 & -6 & 11 & -21 & 32 & -6 & -6 & 6 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 4 & -6 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 4 & -6 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -4 & 6 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -4 & 6 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$FL = \begin{bmatrix} 00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 00 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 10 \\ 01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 00 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 00 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 00 \\ -10 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 00 \\ 11 & -2 & 2 & -4 & 6 & -1 & -1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Generators of kernels:

$$\text{KERNEL}(AL, [1 : 57 : 9]) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{KERNEL}(FL, [12348910; 1 : 7]) \cdot [112; 010; 00 - 1] =$$

$$= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Note that the 2-dimensional kernel of the quadratic form AL is contained inside the kernel of the linear map $FL(\phi)$.

$$FL = \begin{bmatrix} 00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 00 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 10 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 4 & -6 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & \\ -10 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 & -3 & 5 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -10 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 11 & -2 & 2 & -4 & 6 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \end{bmatrix}$$

Generators of the kernels:

$$\text{KERNEL}(AL, [1 : 57 : 1012 : 14]) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{KERNEL}(FL, [1 : 57 : 101214; 1 : 11]) \times [10000; 01000; 00 - 101; 00010; 001 - 11]' =$$

$$= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

The 4-dimensional kernel of AL is contained in the 5-dimensional kernel of the linear map FL .

The last generator u of $\text{Ker}(FL)$ (the only one not in $\text{Ker}(AL)$) has $\langle u, u \rangle = 12$, so we can't reflect about it. Indeed, $\langle x + a(x)u, y + a(y)u \rangle = \langle x, y \rangle$ implies $a(x)\langle y, u \rangle + a(y)\langle x, u \rangle + 12a(x)a(y) = 0$, so (taking $x = y$) $a(x) = 0$ or $a(x) = -1/6\langle x, u \rangle$; the second possibility is not defined over integers.

If we have a Lagrangian -2 -sphere joining two identical vanishing cycles, then exchanging them gives an automorphism of the pencil — in other words, after conjugation by a suitable sequence of mutations, we can assume that two consecutive vanishing cycles in your collection are equal, so that the corresponding quiver has two consecutive vertices L_i and L_{i+1} that 1) are joined by two arrows, one in degree 0 and the other in degree 1; 2) apart from these two arrows, there are the same morphisms arriving to L_i and to L_{i+1} from the previous vertices, with the same relations (in fact the morphisms to L_{i+1} are obtained by composing those arriving to L_i by one of the two arrows from L_i to L_{i+1} , presumably the one of degree 0), and similarly for morphisms starting at L_i or L_{i+1} . So if we exchange L_i and L_{i+1} (or rather mutate them), I think (to be confirmed by a mutation expert) that you get the same quiver with the same relations. Hence this is an autoequivalence. Conjugating back by whatever mutation made the two vanishing cycles consecutive, we get the result for the original category you started with. Therefore it's not a mutation (or sequence of mutations), and so it does not belong to the group of "symplectic PL transformations" (in the above sense of mutations corresponding to -2 -spheres joining two identical cycles along a certain path); so the part of homology left invariant under symplectic PL transformations is necessarily different for the two Horikawas (for the first Horikawa it's exactly the pullback classes; for the second one it's at most the pullback classes; these sit differently inside H_2 of the total space, for 2-divisibility reasons).

Theorem 3.4. *The matrix A is a homology invariant.*

The antisymmetric part of A is the intersection pairing of the vanishing cycles in the fiber (i. e. we have loops in the Riemann surface, and we pair their H_1 -classes) — this is because by definition of the Floer homology, its Euler characteristic is equal to intersection numbers in the upper triangular part, and when we antisymmetrize we get the right thing. There is a map from \mathbb{Z}^n (linear combinations of the n vanishing cycles) to $H_1(F, \mathbb{Z})$ (F = fiber), corresponding to the homology class represented in F by the combination of vanishing cycles; the kernel L of $(A - A^t)$ is precisely the kernel of this map. \mathbb{Z}^n splits into two parts: this kernel L , and some supplementary subspace R of

rank $2g$ (not canonical, corresponding to choosing combinations of vanishing cycles that generate H_1 of the fiber — if the total space has trivial H_1 , else you must generate only a smaller part of H_1 of the fiber and the rank is less than $2g$).

The restriction of A to L is symmetric; but it is degenerate, and its kernel has in fact rank $2g$ (again assuming $H_1(X) = 0$). This corresponds in fact to the image of the first map $H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ in [21]. So L splits into this kernel K and a supplementary subspace L' (not canonical — complete a basis of K to a basis of L). A restricts trivially to K ; and its restriction to L' is a nondegenerate quadratic form. As a space, L' can be identified with a part of $H_2(\widehat{X})$, where \widehat{X} is the blowup of X , and, more precisely, L' corresponds to the orthogonal of the fiber class F , quotiented by F (observe that F has square 0 in \widehat{X}). [Note that introducing the extra map ϕ to $\mathbb{Z}^{(\text{base pts}-1)}$ we can in fact separate the exceptional sections in $H_2(\widehat{X})$ from the other part coming from $H_2(X)$, but this is not relevant here.] So the quadratic form A restricted to L' was exactly the opposite of the intersection pairing of $H_2(\widehat{X})$ (restricted to the orthogonal of $F \bmod F$). Now the matrix for A , using blocks K, L', M looks like:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & -Q & C \\ B^t & C^t & D \end{bmatrix}$$

(B^t and C^t are transposes of B and C because L is the kernel of $A - A^t - Q = -$ intersection form.

One easily checks that $\det Q = \pm 1$ (because intersection pairing is unimodular and one reduces to the orthogonal of $F \bmod F$, but F is a primitive class in $H_2(\widehat{X})$). $\det A = 1$, so $\det B = \pm 1$. Therefore, B belongs to $GL(2g, \mathbb{Z})$, so changing basis for either K or M we can make B become Id . Moreover, L' is defined only mod K , so adding elements of K to our choice of the basis for L' we can then kill C . We are left with

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & Id \\ 0 & -Q & 0 \\ Id & 0 & D \end{bmatrix}$$

Moreover, D can be made antisymmetric by adding suitable elements of K to the basis for M . One can easily see that the $2g \times 2g$ antisymmetric matrix on $H_1(F, \mathbb{Z})$ is the intersection pairing in $H_1(F)$.

§ 4. Singular Lefschetz fibrations and smooth 4-manifolds

In this section we will suggest an approach for extending monodromy invariants in the smooth category.

It has been observed in particular by Taubes [18] that every compact smooth 4-manifold with $b_2^+ \geq 1$ admits a self-dual harmonic 2-form which generically behaves like a symplectic form that degenerates along a union of circles. Similarly to Donaldson's result for genuine symplectic manifolds [6], we would like to make the following conjecture which seems very promising at the moment.

Conjecture 4.1. *There exists a degenerate symplectic Lefschetz pencil structure on every compact smooth 4-manifold with $b_2^+ \geq 1$.*

Moreover, a converse result expressing that all degenerate topological Lefschetz pencils carry a degenerate symplectic structure follows easily by an imitation of Gompf's result for the usual Lefschetz pencils [10].

Theorem 4.1. *Let M be a smooth compact 4-manifold, and let $f: M \rightarrow S^2$ be a fibration of Riemann surfaces over the sphere S^2 such that:*

1. *The set of critical points of f is the union of a finite number of smoothly embedded circles $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ in M and a finite number of isolated points p_1, \dots, p_s .*

2. *The loops $\gamma'_i = f(\gamma_i)$ are immersed in S^2 , pass only transverse self-intersections, and intersect each other transversally; the points $q_j = f(p_j) \in S^2$ are pairwise distinct and do not belong to any of the γ'_i .*

3. *The fibers $f^{-1}(q_j)$ are surfaces passing a double point singularity at p_j , and there exist local orientation-preserving complex coordinates in which f is locally given by $(z_1, z_2) \mapsto z_1^2 + z_2^2$.*

4. *The fibers of f above the points of $\cup \gamma'_i$ are surfaces passing double point singularities (above a smooth point of $\cup \gamma'_i$ there is only one singularity). Moreover there exist local real coordinates in which f is locally given by $(x, y, z, t) \mapsto (x^2 + y^2 - z^2, t)$.*

Then $M - \cup \gamma_i$ carries a symplectic structure which degenerates near the circles γ_i .

The argument is indeed a fairly direct imitation of Gompf's proof, which itself relies on an argument due to Thurston: the symplectic structure on the total space is constructed from 2-forms that restrict positively to the fibers by using a patching argument and by adding a multiple of $f^* \omega_{S^2}$. The main new point is the construction of the degenerate structure near the circles γ_i , which should follow from the available local models.

Now if the above conjecture is correct one can construct a modification of the $D(Q)$ along the same line. This construction not only suggests how to construct Seiberg—Witten invariants on a smooth four manifolds following the Donaldson—Smih procedure but also allows us to formulate the following:

Conjecture 4.2. *For $k \gg 0$ the «Hodge filtration» on $H(D(Q))$ is an invariant of the smooth structure on X .*

Conjecture 4.3. *Horikawa surfaces are not diffeomorphic.*

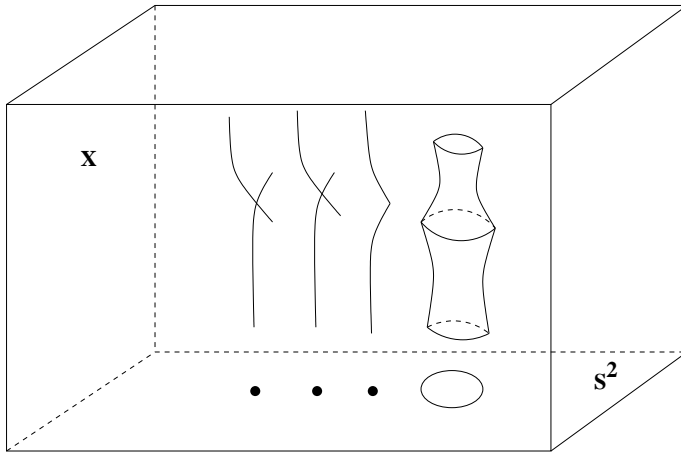


Figure 1. Fibers

Bibliography

1. L. Katzarkov, *Monodromy invariants — from symplectic to smooth manifolds*, Acta Appl. Math, 75, 2003, 85–103.
2. J. Amorós, F. Bogomolov, L. Katzarkov, and T. Pantev. Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups, math. GT/9810042. with an appendix by I. Smith.
3. D. Auroux and L. Katzarkov. Branched coverings of $\mathbb{C}P^2$ and invariants of symplectic 4-manifolds. preprint, available at http://math.polytechnique.fr/cmat/auroux/math/cp2_invts.ps.gz, 1999.

4. D. Auroux. Symplectic 4-manifolds as branched coverings of $\mathbb{C}P^2$. preprint, available at <http://math.polytechnique.fr/cmat/auroux/math/ramcp2.ps.gz>, 1998.
5. D. Auroux, S. K. Donaldson, L. Katzarkov, M. Yotov, in preparation.
6. S. K. Donaldson, Lefschetz pencils on symplectic manifolds, *J. Diff. Geom.* **53** (1999) 205–236.
7. S. Donaldson. Lefschetz fibrations in symplectic geometry. *Doc. Math. J. DMV.*, Extra Volume ICMII:309–314, 1998.
8. K. Fukaya and P. Seidel. Floer homology, A_∞ -categories and topological field theory. In *Geometry and physics (Aarhus, 1995)*, pages 9–32. Dekker, New York, 1997.
9. R. Gompf. A new construction of symplectic manifolds. *Ann. of Math.* (2), 142(3):527–595, 1995.
10. R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Math. **20**, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.
11. E. Horikawa. Algebraic surfaces of general type with small C_1^2 . I. *Ann. of Math.* (2), 104(2):357–387, 1976.
12. B. Moishezon. The arithmetic of braids and a statement of Chisini. In *Geometric topology (Haija, 1992)*, pages 151–175. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
13. N. Markarian. Poincare—Birkhoff—Witt isomorphism, Hochschild homology and Riemann—Roch theorem preprint 1999.
14. P. Seidel. The symplectic Floer homology of a Dehn twist. *Math. Res. Lett.*, 3(6):829–834, 1996.
15. I. Smith. *Symplectic geometry of Lefschetz fibrations*. PhD thesis, Oxford University, 1998.
16. I. Smith. Lefschetz fibrations and the Hodge bundle. *Geom. Topol.*, 3:211–233 (electronic), 1999.
17. C. Taubes. Counting pseudo-holomorphic submanifolds in dimension 4. *J. Differential Geom.*, 44(4):818–893, 1996.
18. C. H. Taubes, *Seiberg-Witten invariants and pseudo-holomorphic subvarieties for self-dual, harmonic 2-forms*, *Geom. Topol.* **3** (1999) 167–210.
19. M. Teicher, *Braid groups, algebraic surfaces and fundamental groups of complements of branch curves*, *Algebraic Geometry (Santa Cruz, 1995)*, *Proc. Sympos. Pure Math.* **62** (part 1), Amer. Math. Soc., 1997, pp. 127–150.
20. Teicher M., *New invariants for surfaces*, *Tel Aviv Topology Conference: Rothenberg Festschrift (1998)*, *Contemp. Math.* **231**, Amer. Math. Soc., 1999, pp. 271–281.
21. Donaldson S. K. *One hundred years of manifold topology. History of topology*, 435–447, North-Holland, Amsterdam, 1999

С. Максименко

Сечения действий групп Ли и теорема М. Ньюмана

Аннотация

Пусть M — гладкое конечномерное многообразие, G — группа Ли и $\Phi: G \times M \rightarrow M$ некоторое гладкое действие G на M . Рассмотрим отображение

$$\varphi: C^\infty(M, G) \rightarrow C^\infty(M, M),$$

определённое следующим образом $\varphi(\alpha)(x) = \alpha(x) \cdot x$, для всех $\alpha \in C^\infty(M, G)$ и $x \in M$. В работе описывается структура прообразов отображений из $C^\infty(M, M)$ при φ для случая $\dim G = 1$, т. е. когда G есть либо \mathbb{R} либо S^1 . В качестве приложения получено новое доказательство известной теоремы М Ньюмана о внутренности множества неподвижных точек действия компактной группы Ли.

§ 1. Введение

Пусть M — гладкое (C^∞) связное конечномерное многообразие, G — группа Ли и

$$\Phi: G \times M \rightarrow M \tag{1.1}$$

гладкое левое действие G на M . Мы будем также писать $g \cdot z$ вместо $\Phi(g, z)$ для $g \in G$ и $z \in M$.

Для каждой точки $z \in M$ обозначим через $\mathcal{O}_z \subset M$ её орбиту. Пусть также $\text{Fix } \Phi$ обозначает множество всех неподвижных точек Φ . Точку, которая не является неподвижной, назовём *регулярной*.

Рассмотрим гладкое отображение $f: M \rightarrow M$, которое сохраняет инвариантными орбиты Φ , т. е. $f(\mathcal{O}_z) \subset \mathcal{O}_z$ для всех $z \in M$. При изучении различных уравнений на многообразиях, часто оказывается полезным знать

может ли f быть «гладко параметризовано» элементами группы G , т. е. существует ли такое гладкое отображение $\alpha: M \rightarrow G$, что

$$f(z) = \Phi(\alpha(z), z) = \alpha(z) \cdot z,$$

для всех $z \in M$? Этот вопрос естественно приводит к рассмотрению следующего отображения

$$\varphi: C^\infty(M, G) \rightarrow C^\infty(M, M), \quad (1.2)$$

определённого с помощью формулы

$$\varphi(\alpha)(z) = \Phi(\alpha(z), z) = \alpha(z) \cdot z,$$

для $\alpha \in C^\infty(M, G)$ и $z \in M$.

Очевидно, что тождественное отображение id_M многообразия M на себя принадлежит образу φ . Рассмотрим его прообраз $Z_{\text{id}} = \Phi^{-1}(\text{id}_M) \subset C^\infty(M, G)$. Это множество играет важную роль в понимании структуры φ . Очевидно, что Z_{id} является подгруппой в $C^\infty(M, G)$. Более того, можно показать, что прообразы отображений из $C^\infty(M, M)$ при φ в точности совпадают со смежными классами $C^\infty(M, G)$ по подгруппе Z_{id} .

Основной результат статьи — полное описание группы Z_{id} для случая $\dim G = 1$, т. е. когда G является либо прямой \mathbb{R}^1 , либо окружностью S^1 .

Для простоты обозначим через F множество неподвижных точек $\text{Fix } \Phi$ действия (1.1). Пусть также $\text{Int } F$ и $\text{Fr}(\text{Int } F)$ обозначают, соответственно, внутренность множества F в M и границу этой внутренности.

1.0.1. Теорема. *Предположим, что $G = \mathbb{R}$, т. е. Φ является потоком на M .*

(1) *Если $\text{Int } F \neq \emptyset$, то*

$$Z_{\text{id}} = \{\mu \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : \mu|_{M \setminus \text{Int } F} = 0\}.$$

(2) *Пусть $\text{Int } F = \emptyset$. Тогда имеем две возможности: либо $Z_{\text{id}} = \{0\}$, либо существует такая строго положительная C^∞ -функция $\mu: M \rightarrow (0, \infty)$, что*

$$Z_{\text{id}} = \{n\mu : n \in \mathbb{Z}\} \approx \mathbb{Z}.$$

В этом случае каждая регулярная точка z потока периодична и $\mu(z)$ равно её периоду.

1.0.2. Теорема. *Предположим, что $G = S^1$ и пусть K — ядро неэффективности действия (1.1), т. е. ядро индуцированного гомоморфизма $G \rightarrow \text{Diff } M$. Если действие Φ нетривиально, то $\text{Int } F = \emptyset$ и Z_{id} состоит из постоянных отображений $M \rightarrow K \subset G$. Следовательно, Z_{id} изоморфна K и является конечной циклической группой.*

В качестве следствия получаем новое доказательство одного из вариантов известной теоремы М. Ньюмана [3] о действиях циклических групп, а затем существенно обобщалась многими авторами [1, 2].

1.0.3. Теорема. Пусть G — компактная группа Ли гладко и нетривиально действующая на конечномерном многообразии. Тогда множество неподвижных точек этого действия нигде не плотно.

Доказательство. Из компактности группы G следует, что она содержит хотя бы одну однопараметрическую подгруппу S изоморфную S^1 . Действительно, замыкание произвольной однопараметрической подгруппы в G — есть связная компактная абелева подгруппа, т. е. тор, который, по определению, содержит S^1 -подгруппы.

Пусть $\text{Fix } S$ обозначает множество неподвижных точек индуцированного действия S на M . Тогда $\text{Fix } G \subset \text{Fix } S$. По теореме 1.0.2., $\text{Fix } S$ нигде не плотно, поэтому, нигде не плотно и $\text{Fix } G$. \square

Статья построена следующим образом. В 2 мы рассмотрим общие свойства отображения φ , которые справедливы для всех групп Ли G . Далее мы будем изучать только действие группы $G = \mathbb{R}$. В 3 рассматривается поведение функций из Z_{id} в окрестностях регулярных точек Φ . 4 содержит лемму о нижней границе периодов траекторий линейных потоков. Эта лемма используется затем в 5, где мы доказываем два основных предложения о локальном поведении функций из Z_{id} . Наконец, в 6 и 7 даны доказательства сформулированных выше теорем.

§ 2. Основные свойства φ

2.0.1. Лемма. Образ $\text{im } \varphi$ является подполугруппой в $C^\infty(M, M)$. Более того, пересечение $\text{im } \varphi \cap \text{Diff } M$ есть подгруппа в $\text{Diff } M$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные отображения $\alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(M, G)$ и пусть $f, g, h \in C^\infty(M, M)$, соответственно, их образы при φ . Предположим также, что h диффеоморфизм. Для доказательства леммы, достаточно построить такие отображения

$$\sigma_{f \circ g}, \sigma_{h^{-1}}: M \rightarrow G,$$

что $f \circ g = \varphi(\sigma_{f \circ g})$ и $h^{-1} = \varphi(\sigma_{h^{-1}})$. Несложно убедиться, что следующие отображения удовлетворяют указанным условиям:

$$\sigma_{f \circ g}(z) = \alpha(g(z)) \cdot \beta(z), \quad (2.1)$$

$$\sigma_{h^{-1}}(z) = (\gamma(h^{-1}(z)))^{-1}, \quad (2.2)$$

для всех $z \in M$. Действительно,

$$f \circ g(z) = \alpha(g(z)) \cdot g(z) = \alpha(g(z)) \cdot \beta(z) \cdot z = \sigma_{f \circ g}(z) \cdot z.$$

Для доказательства (2.2), заметим, что тождество $h(h^{-1}(z)) = z$ означает, что $\gamma(h^{-1}(z)) \cdot h^{-1}(z) = z$, откуда,

$$h^{-1}(z) = \gamma(h^{-1}(z))^{-1} \cdot z = \sigma_{h^{-1}}(z) \cdot z. \quad \square$$

2.1. Обозначим через $Z_{\text{id}}(\Phi)$ прообраз тождественного отображения $\varphi^{-1}(\text{id}_M) \subset C^\infty(M, G)$

$$Z_{\text{id}}(\Phi) := \varphi^{-1}(\text{id}_M). \quad (2.3)$$

Таким образом, $\mu(z) \cdot z = z$ для всех $\mu \in Z_{\text{id}}(\Phi)$ и $z \in M$.

Следующее утверждение вытекает из определений.

2.0.2. Предложение. *Множество $Z_{\text{id}} = Z_{\text{id}}(\Phi)$ обладает следующими свойствами:*

1. Z_{id} есть подгруппа в $C^\infty(M, G)$.
2. Для любых α и $\beta \in C^\infty(M, G)$, $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\alpha^{-1} \cdot \beta \in Z_{\text{id}}$. \square

2.0.3. Лемма. *Предположим, что $\text{Int } F \neq \emptyset$. Рассмотрим два отображения $\alpha, \beta \in C^\infty(M, G)$ совпадающих на дополнении к внутренности $\text{Int } F$:*

$$\alpha|_{M \setminus \text{Int } F} = \beta|_{M \setminus \text{Int } F}.$$

Тогда $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. В частности, если $\alpha(z) = e \in G$ для всех $z \in M \setminus \text{Int } F$, то $\alpha \in Z_{\text{id}}$.

Доказательство. Нам необходимо доказать, что $\alpha(z) \cdot z = \beta(z) \cdot z$ для $z \in M$. Рассмотрим произвольную точку $z \in M \setminus \text{Int } F$. Тогда $\alpha(z) = \beta(z)$ и, следовательно, $\alpha(z) \cdot z = \beta(z) \cdot z$.

Предположим теперь, что $z \in \text{Int } F$. Тогда $t \cdot z = z$ для каждого $t \in G$. Следовательно, $\alpha(z) \cdot z = \beta(z) \cdot z = z$. \square

Следующая лемма очевидна

2.0.4. Лемма. *Постоянное отображение $\mu: M \rightarrow G$ принадлежит Z_{id} тогда и только тогда, когда его образ принадлежит ядру неэффективности действия Φ .* \square

§ 3. Регулярные точки потоков

Начиная с этого момента, если не оговорено противное, будем предполагать, что $G = \mathbb{R}$. Для дальнейшего, удобнее также предположить, что Φ является локальным действием. Таким образом, Φ — локальный поток определённый на некотором открытом подмножестве многообразия M . Напомним необходимые определения.

3.0.1. Определение. Пусть U — открытое связное подмножество в M и \mathcal{J} — открытый интервал в \mathbb{R} содержащий 0. Гладкое отображение

$$\Phi: \mathcal{J} \times U \rightarrow M \quad (3.1)$$

называется *локальным потоком*, если выполнены следующие условия.

- (1) $\Phi(0, x) = x, \forall x \in U$,
- (2) $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(t+s, x)$, для $x \in U$ и $t, s \in \mathcal{J}$, как только $\Phi(t, x) \in U$ и $t+s \in \mathcal{J}$.

В случае, когда $U = M$ и $\mathcal{J} = \mathbb{R}$, поток Φ называется *глобальным*. Для каждого $t \in \mathcal{J}$, сужение потока Φ на множество $\{t\} \times U$

$$\Phi|_{\{t\} \times U}: U \rightarrow M$$

будет обозначаться через Φ_t .

Орбита точки $z \in U$, это множество $\Phi(\mathcal{J} \times \{z\}) \subset M$. Точка $z \in U$ называется *неподвижной* для потока, если $\Phi(t, z) = z$ для каждого $t \in \mathcal{J}$. Все остальные точки будут называться *регулярными*. Регулярная точка z *периодична*, если $\Phi(t, z) = z$ для некоторого $t > 0$. Наименьшее такое t называется *периодом* точки z и обозначается через $\text{Per}(z)$. Орбита периодической точки называется *замкнутой*, а орбита регулярной, но не периодической точки — *незамкнутой*.

3.1. Отметим, что локальный поток (3.1) индуцирует отображение

$$\varphi: C^\infty(U, \mathcal{J}) \rightarrow C^\infty(U, M) \quad (3.2)$$

определённое с помощью формулы $\varphi(\alpha)(z) = \Phi(\alpha(z), z)$, для $z \in U$ и $\alpha \in C^\infty(U, \mathcal{J})$.

Рассмотрим тождественное вложение $\text{id}_U: U \rightarrow M$ и обозначим

$$Z_{\text{id}} := \varphi^{-1}(\text{id}_U).$$

3.0.2. Лемма. Пусть ω — непостоянная орбита потока Φ и $\mu \in Z_{\text{id}}$. Если ω незамкнута, то $\mu|_\omega = 0$. Если ω замкнутая орбита периода θ , то $\mu|_\omega = n\theta$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Напомним, что условие $\mu \in Z_{\text{id}}$ означает, что $\Phi(\mu(x), x) = x$ для всех $x \in M$.

Рассмотрим незамкнутую орбиту ω потока Φ . Тогда для любой пары точек $x, y \in \omega$ существует *единственное* число $t \in \mathcal{J}$, такое, что $\Phi(t, x) = y$. В частности, $t = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Следовательно, $\mu(x) = 0$ для всех точек $x \in \omega$.

Пусть теперь ω — замкнутая орбита периода θ . Тогда, для $x \in \omega$, соотношение $\Phi(t, x) = x$ эквивалентно тому, что $t = n\theta$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\mu(x) = n(x)\theta$, для всех $x \in \omega$, где $n = \mu/\theta: \omega \rightarrow \mathbb{Z}$ — непрерывная функция. Тогда n постоянна, т. е. $\mu|_{\omega} = n\theta$. \square

Следующая лемма утверждает локальную единственность функций из Z_{id} в окрестности регулярной точки потока.

3.0.3. Лемма. Пусть C — компонента связности множества регулярных точек потока Φ и пусть $\alpha, \beta \in C^\infty(U, \mathcal{J})$ — две такие функции, что $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Если $\alpha(y) = \beta(y)$ для некоторой точки $y \in C$, то $\alpha|_C = \beta|_C$. В частности, для функции $\alpha \in Z_{\text{id}}$, такой, что $\alpha(y) = 0$, имеем $\alpha|_C = 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что в условиях леммы, $\alpha = \beta$ в некоторой окрестности точки $y \in C$. Мы получим сейчас точные формулы локально обращающие φ . Они дают выражение функции α через $\varphi(\alpha)$ в окрестности регулярной точки Φ .

Пусть $f = \varphi(\alpha)$ и $a = \alpha(y)$. Так как точка $z = f(y) = \Phi_a(y)$ регулярна, то существуют такие её окрестность W и система координат (x_1, \dots, x_n) в W , что $z = 0$ и $\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$. Рассмотрим следующую окрестность $V = f^{-1}(W) \cap \Phi_{-a}(W)$ точки y . Тогда очевидно, что

$$\alpha(x) = p_1 \circ \varphi(\alpha) \circ \Phi(a, x) - p_1 \circ \Phi(a, x), \quad \forall x \in V. \quad (3.3)$$

где $p_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ проекция на первую координату.

Наша лемма вытекает из этого соотношения. Действительно, если $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ и $\alpha(y) = \beta(y) = a$, то по формуле (3.3), α и β совпадают в некоторой окрестности точки y состоящей из регулярных точек потока. Лемма доказана. \square

§ 4. Периоды линейных потоков

Здесь мы доказываем лемму описывающую нижние границы периодов орбит линейных потоков. Вначале введём некоторые обозначения и напомним «действительную» форму теоремы Жордана о нормальной форме матриц.

$A = J^p(R(i\beta))$ для некоторого $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. В этом случае все собственные значения A равны $\pm i\beta$. Более того, по формуле (4.3), все замкнутые орбиты потока Φ лежат в инвариантном подпространстве порождённом последними двумя координатами и имеют один и тот же период $\frac{2\pi}{|\beta|} = \frac{2\pi}{|\lambda|}$.

Рассмотрим общий случай. Можем предполагать, что A имеет действительную нормальную Жорданову форму вида (4.2). Пусть для $i = 1, \dots, r$, ($r \leq c$) числа λ_i образуют Λ . Положим $m = c + d$ и обозначим через $V_i \subset \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, m$) — инвариантное подпространство соответствующее клетке $J_{p_i}(\lambda_i)$ или $J_{p_i}(R(\lambda_i))$. Тогда $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^m V_i$. Пусть $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow V_i$ — естественная проекция и $\Phi^i = \Phi|_{V_i}$ — ограничение потока Φ на V_i . Тогда для любой орбиты ω потока Φ и для любого $i = 1, \dots, m$, множество $\omega_i = p_i(\omega)$ является орбитой потока Φ^i . Более того, ω замкнута тогда и только тогда, когда все ω_i либо замкнуты, либо постоянны причём хотя бы для одного $j = 1, \dots, r$ орбита ω_j замкнута. Следовательно, Φ имеет замкнутую орбиту, тогда и только тогда, когда $\Lambda \neq \emptyset$.

Пускай теперь ω — какая нибудь замкнутая орбита потока Φ имеющая период θ . Пусть $\omega_j = p_j(\omega)$ её проекция являющаяся замкнутой орбитой потока Φ^j для некоторого $j = 1, \dots, r$. Тогда период ω_j равен $\theta_j = \frac{2\pi}{|\lambda_j|}$. Так как проекция p_j факторизует поток Φ на Φ^j , то $\theta = s\theta_j$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. В частности $\theta \geq \theta_j \geq \min_{k=1, \dots, r} \frac{2\pi}{|\lambda_k|}$. \square

4.0.2. Следствие. Пусть $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset M(n)$ такая последовательность матриц, что для всех $i \in \mathbb{N}$, линейный поток $\Phi_i(t, x) = e^{A_i t} x$ имеет замкнутую орбиту. Пусть θ_i равен минимуму периодов орбит потока Φ_i . Если $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = 0$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \infty$.

Доказательство. Пускай Λ_i обозначает множество собственных значений матрицы A_i соответствующих замкнутым орбитам потока Φ_i (см. лемму 4.0.1..). Тогда $\Lambda_i \neq \emptyset$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Положим $\tilde{\lambda}_i = \max_{\lambda \in \Lambda_i} |\lambda|$. Тогда $\theta_i = 2\pi/\tilde{\lambda}_i$. Так как $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = 0$, то по непрерывности спектра матриц, $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_i = 0$. Следовательно, по лемме 4.0.1., $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \lim_{i \rightarrow \infty} 2\pi/\tilde{\lambda}_i = \infty$. \square

§ 5. Неподвижные и периодические точки потоков

5.0.1. Предложение. Рассмотрим множество $R = U \setminus F$ регулярных точек потока Φ . Пусть V — некоторая компонента множества R и z — точка принадлежащая $F \cap \bar{V}$. Тогда для любой функции $\mu \in Z_{id}$, такой, что $\mu(z) = 0$ имеем $\mu \equiv 0$ на \bar{V} .

Доказательство. Отметим, что компоненты множества R могут быть разбиты на две части: те которые содержат хотя бы одну незамкнутую орбиту и те, которые состоят исключительно из периодических орбит. Объединение компонент первого типа обозначим через N , а объединение компонент второго типа — через P . Таким образом,

$$R = N \cup P.$$

Пусть теперь $\mu \in Z_{\text{id}}$. Тогда по леммам 3.0.2. и 3.0.3., имеем $\mu|_N = 0$. Таким образом, достаточно доказать наше предложение для компоненты $V \subset P$.

Рассмотрим последовательность $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V$ периодических точек потока Φ сходящуюся к z . Для каждого $i \in \mathbb{N}$ пусть θ_i обозначает период точки z_i . Тогда по лемме 3.0.2., $\mu(z_i) = n_i \theta_i$ для некоторого $n_i \in \mathbb{Z}$. Из непрерывности функции μ имеем

$$\mu(z_i) = n_i \theta_i \rightarrow \mu(z) = 0. \quad (5.1)$$

Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можем считать, что существует некоторый конечный или бесконечный предел $\theta = \lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i \geq 0$. По следствию 4.0.2., $\theta > 0$. Тогда по (5.1), $n_i = 0$ для достаточно больших $i \in \mathbb{N}$. В частности $\mu(z_i) = 0$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Так как $z_i \in V_\lambda$, то по лемме 3.0.3., $\mu \equiv 0$ на V_λ . Это доказывает наше предложение. \square

5.0.2. Предложение. Пусть точка z принадлежит границе множества F неподвижных точек потока, которую мы обозначим $\text{Fr}(F)$. Предположим, что выполнено одно из следующих двух условий:

1. точка z содержится в границе внутренности множества F , т. е. $z \in \text{Fr}(\text{Int } F)$;
2. касательный линейный поток в точке z тривиален, т. е. $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, z) = E_n$, для всех $t \in \mathcal{J}$.

Тогда для любой функции $\mu \in Z_{\text{id}}$ имеем, $\mu \equiv 0$ в некоторой окрестности точки z в множестве $U \setminus \text{Int } F$.

Доказательство. Не теряя общности, будем считать, что $M = \mathbb{R}^m$ и что $z = 0$ — это начало координат.

Определим отображение $\Psi: \mathcal{J} \times U \rightarrow GL(\mathbb{R}, n)$ с помощью формулы $\Psi(t, x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x)$. Так как $\Psi(0, x) = E_n$ для всех $x \in U$, то следующее отображение $\nu = \exp^{-1} \circ \Psi: \mathcal{J} \times U \rightarrow M(n)$ определено в некоторой окрестности точки $(0, z)$ в $\mathcal{J} \times U$. Таким образом, $\Psi(t, x) = e^{\nu(t, x)}$.

Отметим, что для каждого $x \in U$ сужение $\Psi(*, x): \mathcal{J} \rightarrow GL(\mathbb{R}, n)$ является локальным гомоморфизмом и, следовательно, индуцирует линейный поток на \mathbb{R}^n . Следовательно, матрица $A(x, t) = \nu(t, x)/t$ не зависит от $t \in \mathcal{J}$, т. е. $\Psi(t, x) = e^{A(x)t}$.

Более того, для каждой периодической точки x , поток $\Psi(*, x)$ имеет замкнутые траектории. В самом деле, рассмотрим векторное поле $\mathcal{F}(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x)$ порождающее поток Φ . Применяя к обоим частям следующего тождества

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(t, \Phi(s, x))$$

оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ и полагая затем $s = 0$, мы получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, \Phi(t, x)) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x) \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x),$$

т. е. $\mathcal{F}(\Phi(t, x)) = \Psi(t, x)\mathcal{F}(x)$. Это означает, что векторы $\mathcal{F}(\Phi(t, x))$ и $\mathcal{F}(x)$ принадлежат одной и той же орбите потока $\Psi(*, x)$. Отсюда вытекает, что если x — периодическая точка потока Φ , то $\mathcal{F}(x)$ является периодической точкой потока $\Psi(*, x)$, причём $\text{Per}(x) \geq \text{Per}(\mathcal{F}(x))$.

Теперь мы можем доказать наше предложение. Очевидно, что (2) выполняется в каждой внутренней точке множества F . Следовательно, оно верно также для точек границы $\text{Fr}(\text{Int} F)$. Отсюда, (1) влечёт (2). Итак предположим, что выполняется условие (2).

Рассмотрим последовательности векторов

$$F_i(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, z_i)$$

и матриц

$$A_i(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, z_i)$$

зависящие от параметра $t \in \mathcal{J}$.

Так как точка z_i периодическая для потока Φ , то, как было только что замечено, каждый вектор $F_i(t)$ также периодичен и его период $\leq \text{Per}(z_i) = \theta_i$. По предположению (2), $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i(t) = E_n$. Тогда по следствию 4.0.2.,

$$\theta = \lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(F_i(t)) = \infty.$$

Так как значение $\mu(z) = \lim_{i \rightarrow \infty} n_i \theta_i$ конечно, то $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = 0$. Отсюда $\mu(z) = 0$. \square

§ 6. Доказательство теоремы 1.0.1.

Случай (1)

Предположим, что $\text{Int } F \neq \emptyset$. Обозначим

$$Z'_{\text{id}} := \{\mu \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : \mu|_{M \setminus \text{Int } F} = 0\}.$$

Мы должны показать, что $Z'_{\text{id}} = Z_{\text{id}}$. По лемме 2.0.3., $Z'_{\text{id}} \subset Z_{\text{id}}$.

Пусть $\mu \in Z_{\text{id}}$. По утверждению (1) предложения 5.0.2., $\mu(z) = 0$ для каждой точки $z \in \text{Fr}(\text{Int } F)$. Тогда по предложению 5.0.1., $\mu = 0$ на компоненте множества $M \setminus \text{Int } F$ содержащей z .

Из связности многообразия M вытекает, что каждая компонента множества $M \setminus \text{Int } F$ пересекается с $\text{Fr}(\text{Int } F)$. Следовательно, $\mu = 0$ на $M \setminus \text{Int } F$, т. е. $\mu \in Z'_{\text{id}}$. Откуда $Z_{\text{id}} \subset Z'_{\text{id}}$. Это доказывает (1).

Случай (2)

Пусть $\text{Int } F = \emptyset$. Предположим, что $Z_{\text{id}} \neq \{0\}$. Нам необходимо показать, что существует такая гладкая функция $\mu > 0$, что $Z_{\text{id}} = \{n \cdot \mu\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Рассмотрим вначале произвольную функцию $\mu \in Z_{\text{id}}$. Если $\mu(z) = 0$ хотя бы для одной точки $z \in M$, то по предложению 5.0.1., $\mu \equiv 0$ на множестве $M \setminus \text{Int } F = M$. Следовательно, если $\mu(z) \neq 0$, то $\mu \neq 0$ на M . Поэтому можем предположить, что $\mu > 0$ на M .

Для каждой точки $z \in M$ определим отображение $\tau_z : Z_{\text{id}} \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле: $\tau_z(\nu) = \nu(z)$. Несложно убедиться, что τ_z — гомоморфизм. По предложению 5.0.1., его ядро тривиально, $\ker \tau_z = 0$. Таким образом, τ_z — мономорфизм.

Предположим, что z — регулярная точка потока Φ . Тогда из леммы 3.0.2. вытекает, что $\text{im } \tau_z$ является замкнутой подгруппой в \mathbb{R} и, следовательно, она либо тривиальна, либо изоморфна \mathbb{Z} .

Рассмотрим случай $\text{im } \tau_z \approx \mathbb{Z}$. Возьмем положительную образующую $r \in \text{im } \tau_z \subset \mathbb{R}$. Тогда функция $\mu = \tau_z^{-1}(r)$ является строго положительной образующей группы Z_{id} . Это доказывает (2) и теорему 1.0.1. \square

6.0.1. Пример. Рассмотрим два следующих потока на комплексной плоскости:

$$\Phi(t, \mathbf{z}) = e^{2\pi i(1+|\mathbf{z}|^2) \cdot t} \mathbf{z}, \quad \text{и} \quad \Psi(t, \mathbf{z}) = e^{2\pi i|\mathbf{z}|^2 \cdot t} \mathbf{z}$$

и вычислим для них группы $Z_{\text{id}}(\Phi)$ и $Z_{\text{id}}(\Psi)$.

Потоки Φ и Ψ имеют одинаковые траектории — концентрические окружности с центром в точке $0 \in \mathbb{C}$, но при этом соответствующие

линейные потоки в точке 0 у них разные:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(t, 0)\xi = e^{2\pi i t}\xi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z}(t, 0)\xi = \xi,$$

где ξ — касательный вектор в точке 0. Последнее равенство означает, что $\frac{\partial \Psi}{\partial z}(t, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда из предложений 5.0.1. и 5.0.2., получаем, что $Z_{\text{id}}(\Psi) = \{0\}$.

Рассмотрим функцию $\mu(z) = \frac{1}{1+|z|^2}$. Очевидно, что $\mu \in Z_{\text{id}}(\Phi)$, следовательно, $Z_{\text{id}}(\Phi) \neq \{0\}$. Так как множество $\text{Fix } \Phi = \{0\}$ нигде не плотно в \mathbb{C} , то по теореме 1.0.1., $Z_{\text{id}} \approx \mathbb{Z}$. Ясно также, что для любой точки $z \neq 0$, значение $\mu(z)$ равно периоду этой точки. Следовательно, по той же теореме, μ является образующей группы

$$Z_{\text{id}}(\Phi) = \{n \cdot \mu(z)\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

§ 7. Доказательство теоремы 1.0.2.

Пусть $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ — универсальное накрывающее отображение окружности. Определим отображение

$$\tilde{\Phi}: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

с помощью формулы $\tilde{\Phi}(t, z) = \Phi(p(t), z)$. Тогда $\tilde{\Phi}$ есть действие прямой \mathbb{R} на M , которое накрывает действие Φ . Положим также

$$\tilde{Z}_{\text{id}} = Z_{\text{id}}(\tilde{\Phi}) = \{\tilde{\alpha} \in C^\infty(M, \mathbb{R}): \tilde{\alpha}(z) \cdot z = z, \forall z \in M\}.$$

Рассмотрим какую-нибудь функцию $\alpha: M \rightarrow S^1$ принадлежащую Z_{id} , т. е. $\Phi(\alpha(x), x) = x$ для всех $x \in M$. Пусть $z \in M$ — произвольная точка и U — её достаточно малая окрестность. Тогда α поднимается до такого отображения $\tilde{\alpha}: U \rightarrow \mathbb{R}$, что $p(\tilde{\alpha}(x)) = \alpha(x)$ для всех $x \in U$. Отсюда

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\alpha}(x), x) = \Phi(p(\tilde{\alpha}(x)), x) = \Phi(\alpha(x), x) = x.$$

Это означает, что «локально», $\tilde{\alpha}$ принадлежит \tilde{Z}_{id} . Отметим также, что $\tilde{\alpha}$ всегда можно выбрать таким, чтобы $\tilde{\alpha}(z) \neq 0$.

Предположим теперь, что $z \in \text{Fr}(\text{Int } \text{Fix } \Phi)$. Тогда, по теореме 1.0.1., применённой к локальному потоку индуцированному потоком Φ на U , получаем $\tilde{\alpha}(z) = 0$, что противоречит выбору $\tilde{\alpha}$. Следовательно, такой точки z не существует, т. е. $\text{Fr}(\text{Int } F) = \emptyset$. Это возможно только в двух случаях: либо $\text{Int } F = M$, либо $\text{Int } F = \emptyset$. В первом случае действие $\tilde{\Phi}$ тривиально. Таким образом, $\text{Int } F = \emptyset$.

Заметим, что группа \tilde{Z}_{id} содержит все постоянные функции $M \rightarrow \mathbb{Z}$, так как $p(\mathbb{Z}) = 1 \in S^1$. Следовательно, она имеет больше чем один элемент,

и, по утверждению (2) теоремы 1.0.1., $\widetilde{Z}_{\text{id}} \approx \mathbb{Z}$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{Z}_{\text{id}}$ состоит из постоянных отображений из M в некоторую подгруппу P в \mathbb{R} , причём $P \approx \mathbb{Z}$. Из леммы 2.0.4. вытекает, что P в точности совпадает с ядром неэффективности \widetilde{K} действия $\widetilde{\Phi}$.

Следовательно, подгруппа $p(\widetilde{K}) \subset S^1$ является ядром неэффективности K действия Φ и Z_{id} состоит из постоянных отображений $M \rightarrow K$. Более того, так как ядро гомоморфизма p бесконечно, то $Z_{\text{id}} \approx K \approx \widetilde{K}/\ker p$ есть конечная циклическая группа.

Литература

1. *Montgomery D.* Finite dimensionality of certain transformation groups Illinois J. Math, vol. 1, No. 1, 1957, pp. 28–35.
2. *Montgomery D., Samelson H., Zippin L.* Singular points of a compact transformation group. Ann. of Math. (2), vol. 63, No. 1, 1956, pp. 1–9.
3. *Newman M.H.A.* A theorem on periodic transformation of spaces. Quart. J. Math. Oxford Series, vol. 2, 1931, pp. 1–8.
4. *Palis J., de Melo W.* Geometric theory of dynamical systems. Springer-Verlag, N. Y., 1982.

01601, Украина, Киев, Терещенковская,3, Институт математики Национальной академии наук Украины, Отдел топологии. E-mail: maks@imath.kiev.ua

E. Polulyakh

One property of trajectories of Toeplitz flows

Abstract

We consider the left shift transform S on the space $X = \Sigma^{\mathbb{Z}}$ of two-sided sequences over a compact alphabet Σ . We give an important sufficient condition on $x \in X$ that guarantees that the restriction of S onto the orbit closure of x is a Toeplitz flow.

Toeplitz flow were introduced in 1969 by Jackobs and Keane in paper [1] as a certain class of subshifts of finite type. Later this definition was expanded by S. Williams to the much more wide class of subshifts of the Bernoulli shift S on the space $X = \Sigma^{\mathbb{Z}}$ of two-sided sequences over a compact metric alphabet Σ (see [2]).

In both papers [1] and [2] the Toeplitz flow is defined as the restriction of S onto orbit closure of a so-called Toeplitz sequence.

Let $x = (x_n) \in X$. We say that $x_i \in \Sigma$ is in the *periodic part* of the sequence x if there exists $k \in \mathbb{N}$ such that

$$x_i = x_j \quad \text{for all } j \equiv i \pmod{k}.$$

If it is not the case we say that x_i belongs to the *aperiodic part* of the sequence $x = (x_n)$. A sequence x is called a *Toeplitz sequence* if its aperiodic part is empty.

In paper [2] the set of so-called *essential periods* is introduced for a nonperiodic Toeplitz sequence x and this set induces in turn the *periodic structure* on x . Next, this periodic structure determines a certain supernatural number. It happens (see [2]) that the flow $(\overline{\text{Orb } x}, S)$ admits an almost one-to-one projection onto the odometer which is defined by the same supernatural number (for the classification of odometers by means of supernatural numbers see [3] and [4]).

Toeplitz flows are remarkable since the class of all Toeplitz flows coincides with the class of minimal flows that are symbolic and admit an almost one-

to-one projection onto an odometer (for references and further development of this result see [5]).

The definition of Toeplitz flow is not “homogeneous” in the following sense. It is known (see [2]) that given a Toeplitz flow (T, S) and an almost one-to-one projection $\pi: (T, S) \rightarrow G$ onto an odometer G , an arbitrary point $y \in T$ is a Toeplitz sequence if and only if π is one-to-one at the point y (i. e., $\pi^{-1}(\pi(y)) = \{y\}$). Hence the set of all Toeplitz sequences in T is a proper massive subset in T (it contains a dense G_δ subset of T). That is why the phase space of an arbitrary Toeplitz flow contains at least one element that is not a Toeplitz sequence.

In this connection, the problem arises to determine whether for a given non Toeplitz sequence $x \in X$ the dynamical system $(\overline{\text{Orb } x}, S)$ is a Toeplitz flow. In the case of positive answer another problem arises: to find the periodic structure of this flow in terms of the sequence x only.

We give an important sufficient condition on $x \in X$ that guarantees that the restriction of S onto the orbit closure of x is a Toeplitz flow. Also we show how to derive the periodic structure of this flow from x .

The techniques applied to verify the condition allows us to expand results of S. Williams described above (see [2], Theorem 2.2, Lemma 2.3 and Corollary 2.4) to the case of subshifts on the space of two-sided sequences over a Hausdorff compact alphabet (not necessarily metrizable).

§ 1. Definitions and statement of results

Let Σ be a compact space, and let $X = \Sigma^{\mathbb{Z}} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma_n$ with the topology of direct product. By Tikhonov theorem, X also is a compact space. We write elements of X as $x = (x_n)$.

It is known that if (Σ, ρ) is a metric space, than the distance

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} \rho(x(n), y(n))$$

induces the product topology on X .

In what follows the following property of X will be useful to us (see. [6]).

Proposition 1. *A sequence of points $\{x_i\}$ in a product $\prod_{n \in \mathbb{Z}} X_n$ of topological spaces converges to $x \in \prod_{n \in \mathbb{Z}} X_n$ if and only if the sequence $\{x_i(n)\}$ converges to $x(n)$ for every $n \in \mathbb{Z}$.*

Let us denote by $S: X \rightarrow X$ the left shift homeomorphism $S(x(n)) = x(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

For $x \in X$, $p \in \mathbb{N}$ and $\sigma \in \Sigma$ set

$$\text{Per}_p(x, \sigma) = \{n \in \mathbb{Z}: x(n') = \sigma \text{ for all } n' \equiv n \pmod{p}\},$$

$$\text{Per}_p(x) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \text{Per}_p(x, \sigma),$$

$$\text{Aper}(X) = \mathbb{Z} \setminus \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \text{Per}_p(x) \right).$$

We term the part of a sequence $(x(n))$ that has the period p the p -skeleton of x .

Introduce notation

$$M_p(x) = \max\{k \in \mathbb{N}: \exists n \in \mathbb{Z}: n + i \in \text{Per}_p(x), i = 0, 1, \dots, k - 1\}.$$

In other words, $M_p(x)$ is the maximal length of a block contained in the p -skeleton of x . Note that $M_p(x) = \infty$ for a periodic sequence x with period p and $M_p(x) < p$, if the sequence x is not periodic.

Let us recall some important definitions.

Definition 1. A sequence $\eta \in X$ is called *Toeplitz* if $\text{Aper}(\eta) = \emptyset$ (in this case the dynamic system $(\overline{\text{Orb}}(\eta), S)$ is also referred to as *Toeplitz*).

Definition 2. Let (X, F) be a dynamical system with discrete time, $x \in X$. The point x is *recurrent* if for arbitrary open neighbourhood U of x there exists an integer $n(U)$ such that for any $k \in \mathbb{Z}$

$$U \cap \left(\bigcup_{i=k}^{k+n(U)-1} \{F^i(x)\} \right) \neq \emptyset.$$

Definition 3. Let (X, F) be a dynamical system with discrete time, $x \in X$. The point x is said to be *almost periodic* if for arbitrary open neighbourhood U there exists $n(U) \in \mathbb{N}$ such that

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{F^{kn(U)}(x)\} \subset U.$$

Clearly, each periodic sequence $x \in X$ is Toeplitz. It is easy to check that every Toeplitz sequence is almost periodic since each block of a Toeplitz sequence η is contained in its p -skeleton for some p . Hence, according to Birkhoff theorem $\overline{\text{Orb}}(\eta)$ is a minimal set of the dynamical system (X, S) (see [7, 8]).

Let $\eta \in X$ be an aperiodic Toeplitz sequence. Generally speaking, the equality $\text{Aper}(x) = \emptyset$ is not valid for an arbitrary $x \in \overline{\text{Orb}}(\eta)$.

Consider a special case where Σ is a metric space. On one hand, every Toeplitz flow $(\overline{\text{Orb}}(\eta), S)$ in X has to be expansive (see [9]). On the other hand, every odometer is an equicontinuous dynamical system (see Remark 3 below). It is known that any Toeplitz flow admits an almost one-to-one projection onto an odometer and such a projection must be one-to-one precisely at these points that are Toeplitz sequences (see [2]). So, if every point of a certain Toeplitz flow is a Toeplitz sequence, then this Toeplitz flow must be conjugate to an odometer. In particular, it must be expansive and equicontinuous simultaneously, and this is impossible.

A detailed study of properties of sequences from $\overline{\text{Orb}}(\eta)$ see in [2]. However it is not known, what properties of the point $x \in X$ guarantee that the set $\overline{\text{Orb}}(x)$ contains a Toeplitz sequence.

The answer to this question gives the following

Proposition 2. *If for $x \in X$*

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} M_p(x) = \infty, \tag{1}$$

then the set $\overline{\text{Orb}}(x)$ contains a Toeplitz sequence.

If in addition, the point x is recurrent, then the dynamical system $(\overline{\text{Orb}}(x), S)$ is Toeplitz.

There is a natural question: what additional information about the structure of the dynamic system $(\overline{\text{Orb}}(x), S)$ can be extracted provide x is recurrent?

Let us recall the definition of the periodic structure of a Toeplitz sequence (see [2]).

Remark 1. Let $x \in X$. If $p: q$, then $\text{Per}_p(x) \subseteq \text{Per}_q(x)$.

Definition 4. We call p an *essential period* of a sequence x , $p \in \mathcal{P}(x)$, if for any $q \in \mathbb{N}$

$$(\text{Per}_p(x, \sigma) \subset \text{Per}_q(x, \sigma) - q \quad \forall \sigma \in \Sigma) \Rightarrow (p: q).$$

In other words, $p \in \mathcal{P}(x)$ if the and only if p -skeleton of x is not periodic for any smaller period.

Remark 2. It can be easily checked that if $p, q \in \mathcal{P}(x)$, then $\text{lcm}(p, q) \in \mathcal{P}(x)$ (see [2]).

Definition 5. *The periodic structure* of a nonperiodic Toeplitz sequence η is the growing sequence $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ of natural numbers such that

- (i) $p_i \in \mathcal{P}(\eta)$ for all $i \in \mathbb{N}$;

(ii) $p_i: p_{i+1}$;

(iii) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Per}_{p_i}(x) = \mathbb{Z}$.

Up to an equivalence relation which we do not describe here, periodic structure of a Toeplitz sequence is determined uniquely (see [2]). For our purposes it is enough to know that any subsequence of a sequence from previous definition leads to an equivalent periodic structure.

Now we shall determine the periodic structure for any recurrent sequence $x \in X$ satisfying the relation (1).

Remark 3. Take $p, q \in \mathbb{N}$ such that $p: q$. Then $M_p(x) \leq M_q(x)$.

Definition 6. The periodic structure of an aperiodic sequence x satisfying relation (1) is the growing sequence $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ of natural numbers such that

(i) $p_i \in \mathcal{P}(\eta)$ for all $i \in \mathbb{N}$;

(ii) $p_i: p_{i+1}$;

(iii') $\lim_{i \rightarrow \infty} M_{p_i}(x) = \infty$.

Proposition 3. For each aperiodic sequence satisfying relation (1) there exists some periodic structure.

The following result justifies the above definition of a periodic structure.

Theorem 1. Suppose the sequence $\{p_i\}$ determines certain periodic structure (in the sense of Definition 6) for a recurrent sequence $x \in X$ satisfying relation (1). Then there exists a Toeplitz sequence $\eta \in X$ such that $\overline{\text{Orb}(x)} = \overline{\text{Orb}(\eta)}$ and the sequence $\{p_i\}$ evaluates the periodic structure on η (in sense of Definition 5).

Corollary 1. Let $x \in X$ be a recurrent sequence satisfying Eq. (1). Then the periodic structure for x is determined uniquely (up to the equivalence relation from [2]).

§ 2. Proof of the main results

2.1. Proof of Proposition 3

We fix $x \in X$. Split the proof into several steps.

1. Suppose $\text{Per}_p(x) \neq \emptyset$ for some $p \in \mathbb{N}$. Find minimal $k \in \mathbb{N}$ such that $k: p$ and $\text{Per}_p(x) = \text{Per}_k(x)$.

Let us check that $k \in \mathcal{P}(x)$. Two lemmas will be necessary for this purpose.

Lemma 1. *Suppose that the following condition*

$$\text{Per}_p(x, \sigma) = \text{Per}_p(x, \sigma) + m_i \quad \forall \sigma \in \Sigma, i = 1, 2$$

is satisfied for some $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Let $b \in \mathbb{N}$, $0 \leq b \leq m_2 - 1$, be the remainder of the division of m_1 by m_2 . Then

$$\text{Per}_p(x, \sigma) = \text{Per}_p(x, \sigma) + b \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Proof. By the assumption, $m_1 = am_2 + b$, $a \in \mathbb{Z}_+$. For every $\sigma \in \Sigma$

$$\text{Per}_p(x, \sigma) = \text{Per}_p(x, \sigma) + m_1 = (\text{Per}_p(x, \sigma) + am_2) + b = \text{Per}_p(x, \sigma) + b. \quad \square$$

Lemma 2. *Suppose that for some $q \in \mathbb{N}$ the condition*

$$\text{Per}_p(x, \sigma) = \text{Per}_p(x, \sigma) + q \quad \forall \sigma \in \Sigma$$

is satisfied. Then $\text{Per}_{\text{gcd}(p,q)}(x) = \text{Per}_p(x)$.

Proof. Consider Euclid's algorithm which produces $\text{gcd}(p, q)$:

$$\begin{aligned} p &= a_1q + b_1, & 0 \leq b_1 < q; \\ q &= a_2b_1 + b_2, & 0 \leq b_2 < b_1; \\ &\dots & \\ a_{n-2} &= a_nb_{n-1} + b_n, & 0 \leq b_n = \text{gcd}(p, q) < b_{n-1}; \\ a_{n-1} &= a_{n+1}b_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Applying the previous lemma by turns to each line of (1) we are convinced that for $i = 1, \dots, n$

$$\text{Per}_p(x, \sigma) = \text{Per}_p(x, \sigma) + b_i \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

In particular, $\text{Per}_p(x, \sigma) = \text{Per}_p(x, \sigma) + \text{gcd}(p, q) \quad \forall \sigma \in \Sigma$.

Hence, $\text{Per}_p(x) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \text{Per}_p(x, \sigma) \subseteq \text{Per}_{\text{gcd}(p,q)}(x)$. On the other hand, since $\text{gcd}(p, q) : p$, the opposite inclusion $\text{Per}_{\text{gcd}(p,q)}(x) \subseteq \text{Per}_p(x)$ is also true. \square

So, let k be the minimal divisor of p such that $\text{Per}_k(x) = \text{Per}_p(x)$. Suppose that for some $q \in \mathbb{N}$ the equality

$$\text{Per}_k(x, \sigma) = \text{Per}_k(x, \sigma) + q \quad \forall \sigma \in \Sigma$$

is true. Then $\text{Per}_{\text{gcd}(k,q)}(x) = \text{Per}_k(x) = \text{Per}_p(x)$, by Lemma 2. Since $k : p$ and $\text{gcd}(k, q) : k$, we conclude that $\text{gcd}(k, q) = k$ due to the choice of k and $k : q$. This means that $k \in \mathcal{P}(x)$.

Remark 1. Since $\text{Per}_k(x) = \text{Per}_p(x)$ by construction, we have $M_k(x) = M_p(x)$.

2. Now we pass directly to the construction of the periodic structure for x . Taking into account the Eq. (1) choose a sequence $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ of natural numbers such that

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M_{p_i}(x) = \infty.$$

Further, using the above argument we, for each $i \in \mathbb{N}$, shall choose the least divisor k_i of p_i such that $\text{Per}_{k_i}(x) = \text{Per}_{p_i}(x)$. We shall receive a sequence $\{k_i\}$ of essential periods for x satisfying the relation $\lim_{i \rightarrow \infty} M_{k_i}(x) = \infty$ (see Remark 1).

Set

$$q_i = \text{lcm}(k_1, k_2, \dots, k_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

It is easy to verify that $q_i : q_{i+1}, i \in \mathbb{N}$. Remark 2 guarantees that to sequence $\{q_i\}$ contains only essential periods for x , and the equality

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M_{q_i}(x) = \infty$$

follows from Remark 3.

Proposition 3 is completely proved.

2.2. Proof of Theorem 1 and Proposition 2

We fix a periodic structure $\{q_i\}$ on x . Passing to a subsequence we may suppose that

$$M_{q_{i+1}}(x) \geq 3q_i + M_{q_i}(x), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

First we shall construct a Toeplitz sequence $\eta \in \overline{\text{Orb}(x)}$ such that

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Per}_{q_i}(\eta)$$

(and thus we shall prove Proposition 2), and then we shall show that $q_i \in \mathcal{P}(\eta), i \in \mathbb{N}$.

1. We fix a sequence $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ of integers such that $m_i + j \in \text{Per}_{q_i}(x)$ for all $i \in \mathbb{N}$ and $j \in \{0, 1, \dots, M_{q_i}(x) - 1\}$, that is, for each $i \in \mathbb{N}$ if $n \equiv 0 \pmod{q_i}$ then

$$x(m_i + j) = x(m_i + j + n), \quad j = 0, 1, \dots, M_{q_i}(x) - 1.$$

It follows from Eq. (2) that

$$[M_{q_{i+1}}(x) - (q_i + M_{q_i}(x))] - q_i \geq q_i,$$

therefore, for each $i \in \mathbb{N}$ there exists

$$s_i \in [m_{i+1} + q_i, (m_{i+1} + M_{q_{i+1}}(x)) - (q_i + M_{q_i}(x))]$$

satisfying the congruence $m_i \equiv s_i \pmod{q_i}$.

Introduce notation

$$d_l(i) = s_i - m_{i+1}, \quad d_r(i) = (m_{i+1} + M_{q_{i+1}}(x)) - (s_i + M_{q_i}(x)).$$

Note that $d_l(i)$ and $d_r(i)$ are the numbers of elements of the block

$$x(m_{i+1}), x(m_{i+1} + 1), \dots, x(m_{i+1} + M_{q_{i+1}}(x) - 1),$$

respectively to the right to the block

$$x(s_i), x(s_i + 1), \dots, x(s_i + M_{q_i}(x) - 1)$$

of the sequence $x = (x(n))$.

It is not difficult to see that

$$\begin{aligned} d_l(i) &\geq q_i, \\ d_r(i) &\geq (m_{i+1} + M_{q_{i+1}}(x)) - \\ &\quad - [(m_{i+1} + M_{q_{i+1}}(x)) - (q_i + M_{q_i}(x)) + M_{q_i}(x)] = q_i. \end{aligned} \tag{3}$$

Consider the sequence of integers

$$\begin{aligned} k_1 &= m_1, \\ k_2 &= k_1 + (s_1 - m_1) = s_1, \\ &\dots \\ k_j &= k_{j-1} + (s_{j-1} - m_{j-1}) = \\ &= m_1 + (s_1 - m_1) + \dots + (s_{j-1} - m_{j-1}), \quad j > 1, \end{aligned}$$

and the sequence $z_j = S^{k_j}(x)$, $j \in \mathbb{N}$, of elements of the set $\overline{\text{Orb } x}$. The following equalities are obvious

$$\begin{aligned} z_j &= S^{k_j - k_l} \circ S^{k_l}(x) = S^{k_j - k_l}(z_l), \\ k_j - k_l &= \sum_{i=l}^{j-1} (s_i - m_i), \quad l < j. \end{aligned}$$

Since, by construction, $q_j: (s_j - m_j)$ and $q_j: q_{j+1}$ for each $j \in \mathbb{N}$, we have

$$q_l: (k_j - k_l), \quad l < j$$

and for each $n \in \text{Per}_{q_l}(x)$ and $j > l$ we have

$$z_j(n) = z_l(n) = x(n + k_l).$$

Introduce notation

$$P_l = \text{Per}_{q_l}(z_l) = \text{Per}_{q_l}(x) - k_l. \tag{4}$$

We checked already that $z_j(n) = z_l(n)$ for all $j > l$ and $n \in P_l$. We shall show now that $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} P_l = \mathbb{Z}$.

By construction, $[m_l, m_l + M_{q_l}(x) - 1] \subset \text{Per}_{q_l}(x)$, $l \in \mathbb{N}$, hence $[m_l - k_l, m_l + M_{q_l}(x) - 1 - k_l] \subset P_l$.

Notice that for $l = 1$

$$m_1 - k_1 = 0, \quad m_1 + M_{q_1}(x) - 1 - k_1 = M_{q_1}(x) - 1,$$

whence $[0, M_{q_1}(x) - 1] \subset P_1$.

For $l \geq 2$ we have

$$\begin{aligned} m_l - k_l &= -m_1 - (s_1 - m_1) - \dots - (s_{l-1} - m_{l-1}) + m_l = \\ &= -(s_1 - m_2) - \dots - (s_{l-1} - m_l) = \\ &= -d_l(1) - \dots - d_l(l-1) \leq \\ &\leq -q_1 - \dots - q_{l-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_l + M_{q_l}(x) - 1 - k_l &= m_l + M_{q_l}(x) - 1 - m_1 - \sum_{i=1}^{l-1} (s_i - m_i) = \\ &= M_{q_l}(x) - 1 + \sum_{i=2}^l (m_i - s_{i-1}) = \\ &= M_{q_1}(x) - 1 + \sum_{i=2}^l [(m_i + M_{q_i}(x)) - (s_{i-1} + M_{q_{i-1}}(x))] = \\ &= M_{q_1}(x) - 1 + \sum_{i=1}^{l-1} d_r(i) \geq M_{q_1}(x) - 1 + \sum_{i=1}^{l-1} q_i. \end{aligned}$$

Hence, for all $l > 1$

$$\left[-\sum_{i=1}^{l-1} q_i, M_{q_1}(x) - 1 + \sum_{i=1}^{l-1} q_i \right] \subset P_l. \tag{5}$$

By construction, $q_i \geq 1$, $i \in \mathbb{N}$, so $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} P_l = \mathbb{Z}$.

Therefore, an element $\eta \in X$ satisfying the equality $\eta(n) = z_l(n)$, if $n \in P_l$ is well defined.

It is easy to see that $P_l \subseteq \text{Per}_{q_l}(\eta)$, $l \in \mathbb{N}$. Furthermore, it follows from Proposition 1 that $\eta = \lim_{i \rightarrow \infty} z_i$.

Remark 2. Thus, we have constructed the Toeplitz sequence $\eta \in \overline{\text{Orb } x}$. In the above argument we nowhere used the recurrence property of x .

Suppose now a point x is recurrent. By the Birkhoff theorem, the set $\overline{\text{Orb } x}$ is minimal, hence $\overline{\text{Orb } \eta} = \overline{\text{Orb } x}$.

2. Let $\eta \in X$ be a Toeplitz sequence, $x, y \in \overline{\text{Orb } \eta}$. Let us prove that $M_p(x) = M_p(y)$ for each $p \in \mathbb{N}$ and $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(y)$.

Lemma 3. *Let A be a minimal subset of the dynamical system (X, S) , $x, y \in A$. Let $\text{Per}_p(x) \neq \emptyset$ for some $p \in \mathbb{N}$. Then there exists $n(p) \in \mathbb{Z}$ satisfying the conditions*

(i) $\text{Per}_p(y) = \text{Per}_p(x) - n(p)$;

(ii) $x(k + n(p)) = y(k)$ for each $n \in \text{Per}_p(x)$;

Proof. 1. First we shall prove that there exists $n(p) \in \mathbb{Z}$ satisfying condition (ii) (hence for this $n(p)$ the inclusion $\text{Per}_p(x) \subseteq \text{Per}_p(y) + n(p)$ takes place).

Since the set A is minimal, we conclude that $A = \overline{\text{Orb } x} = \overline{\text{Orb } y}$ and there exists a sequence $\{z_j = S^{k_j}(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$ converging to a point y .

Let us say that $k_i \sim k_j$ if $k_i \equiv k_j \pmod{p}$. This equivalence relation splits the set $\{k_i\}$ into at most p equivalence classes. Obviously, at least one of these classes contains infinite number of elements. Hence, passing to a subsequence we may assume that $k_i \equiv k_j \pmod{p}$ for all $i, j \in \mathbb{N}$.

Then $\text{Per}_p(z_i) = \text{Per}_p(z_1) = \text{Per}_p(x) - k_1$ for all $i \in \mathbb{N}$ (we use the notation $P(p) = \text{Per}_p(x) - k_1$). Moreover, $z_i(k) = z_1(k) = x(k + k_1)$ for all $k \in P(p)$.

It follows from Proposition 1 that $y(k) = z_1(k) = x(k + k_1)$ for each $k \in P(p)$. Therefore, $(\text{Per}_p(x) - k_1) \subseteq \text{Per}_p(y)$. Also it is possible to let $n(p) = k_1$.

2. Let us check now condition (i).

Assume that $\text{Per}_p(x) \not\subseteq \text{Per}_p(y) + n(p)$. Repeating the argument of item 1 and exchanging the roles of x and y , we find $m(p) \in \mathbb{Z}$ such that $\text{Per}_p(y) \subseteq \text{Per}_p(x) + m(p)$. Then $\text{Per}_p(y) + n(p) \subseteq \text{Per}_p(x) + (m(p) + n(p))$ and

$$\text{Per}_p(x) \subsetneq \text{Per}_p(x) + (m(p) + n(p)).$$

Clearly, $m(p) + n(p) \neq 0$.

Obviously, for each $r \in \mathbb{Z}$

$$\text{Per}_p(x) + r \subsetneq \text{Per}_p(x) + (m(p) + n(p)) + r. \tag{6}$$

Let $s = \text{lcm}(m(p) + n(p), p)$. Then $s = a(m(p) + n(p))$ for some $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Assume that $a < 0$ (the case $a > 0$ is examined similarly). Using Relation (6) we obtain the following chain of inclusions:

$$\begin{aligned} \text{Per}_p(x) &\supsetneq \text{Per}_p(x) - (m(p) + n(p)) \supsetneq \\ &\supsetneq \text{Per}_p(x) - 2(m(p) + n(p)) \supsetneq \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\supsetneq \text{Per}_p(x) + a(m(p) + n(p)).$$

However, by construction, $p : s$, hence

$$\text{Per}_p(x) + a(m(p) + n(p)) = \text{Per}_p(x) + s = \text{Per}_p(x)$$

by the definition of $\text{Per}_p(x)$.

The contradiction thus obtained finishes the proof of the lemma. □

Corrolary 2. $M_p(x) = M_p(y)$ for every $p \in \mathbb{N}$ and $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(y)$.

Now applying Lemma 3 and Corollary 2 to the sequence $\{q_i\}$ we verify that $P_i = \text{Per}_{q_i}(\eta)$ and $q_i \in \mathcal{P}(\eta)$, $i \in \mathbb{N}$. In order to complete the proof of Theorem 1 it remains to recall the equality $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i = \mathbb{Z}$ which we have already checked above. □

§ 3. Toeplitz subshifts on the space of two-sided sequences over a Hausdorff compact alphabet

3.1. Odometers and periodic partitions of dynamical systems

Definition 7. An un bounded sequence $\{a_i \in \mathbb{N}\}_{i \in \mathbb{N}}$ is called *regular* if a_i divides a_{i+1} for every $i \in \mathbb{N}$.

We fix a regular sequence $\{n_i \in \mathbb{N}\}_{i \in \mathbb{N}}$ (without loss of generality we may assume that $n_{i+1} \neq n_i$, $i \in \mathbb{N}$).

Let us consider a sequence of finite cyclic groups $\mathbb{Z}_{n_i} = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ and group homomorphisms

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbb{Z}_{n_{i+1}} &\rightarrow \mathbb{Z}_{n_i}, \\ \varphi_i : 1 &\mapsto 1. \end{aligned}$$

Let us take the inverse limit $A = \text{projlim}_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Z}_{n_i}$ of this sequence of groups and homomorphisms. We obtain an abelian group $(A, +)$.

Endow each set $\mathbb{Z}_{n_i} = \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$ with the discrete topology. Each of the maps φ_i is continuous in this topology. The space A with the topology \mathcal{T} of the inverse limit is homeomorphic to the Cantor set Γ .

It is easy to deduce from the definition of the set A (see Relation (1)) that in the group $(A, +)$ adding and taking the inverse element are continuous operations in the topology \mathcal{T} , thus A is a continuous group.

Remark 1. We recall that the inverse limit $A = \text{projlim}_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Z}_{n_i}$ may be thought of as the subset

$$A = \{\vec{a} = (a_i \in \mathbb{Z}_{n_i}) : \varphi_i(a_{i+1}) = a_i, i \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

of the direct product

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}. \quad (2)$$

In this notation, the operation of addition in A is, defined component-wise, that is $\vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i)$ for any $\vec{a} = (a_i)$, $\vec{b} = (b_i) \in A$.

By definition, the topology of the direct product (2) is determined by the basis consisting of so-called cylindrical sets

$$U(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \{(a_i) : a_{i_s} = x_{i_s}, s = 1, \dots, k\}; \\ x_{i_s} \in \mathbb{Z}_{n_{i_s}}, i_1 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}.$$

It is easy to from definition of the set A (see Relation (1)) deduce that

$$U(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \cap A = U(x_{i_k}) \cap A$$

for any $k \in \mathbb{N}$, $i_1 < \dots < i_k$ and $x_{i_s} \in \mathbb{Z}_{n_{i_s}}$. Thus, the family of sets

$$V_{x_j} = U(x_j) \cap A = \{(a_i) \in A : a_j = x_j\} = \\ = \{(a_i) \in A : a_j = x_j, a_k = \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_{j-1}(x_j) \text{ when } k < j\}; \quad (3) \\ j \in \mathbb{N}, x_j \in \mathbb{Z}_{n_j}$$

forms a base of the topology of A .

The *natural metric* $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}_+$ on A associated with the sequence $\{n_i\}$ is defined as follows

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{m}, \quad m = \min\{i \in \mathbb{N} : x_k = y_k \text{ for } k < i \text{ and } x_i \neq y_i\}.$$

The correctness of this definition is checked immediately.

Consider the element $\vec{e} = (1) = (1, \dots, 1, \dots) \in A$. This element is called *the generator* of group A and has the property that the cyclic subgroup $\langle \vec{e} \rangle$ generated by it is dense in A in the topology \mathcal{T} .

Obviously, the shift mapping

$$g: A \rightarrow A, \quad g: \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{e},$$

is a homeomorphism.

Definition 8. The dynamical system (A, g) is called an *odometer*.

Remark 2. Since the subgroup $\langle \vec{e} \rangle$ is dense in A , it follows immediately that each trajectory of the d. s. (A, g) is dense in A , that is, an odometer always is a minimal dynamical system.

Remark 3. It is easy to verify that in the natural metric defined above the mapping g is an isometry. The family of mappings $\{g^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ is equicontinuous, so the odometer (A, g) is an equicontinuous dynamical system.

Actually, it is known that odometers are precisely all equicontinuous minimal dynamic systems on the Cantor set.

Suppose a compact Hausdorff space X and a homeomorphism $f: X \rightarrow X$ are given.

Definition 9. We call a finite family $\{W_i\}_{i=0}^{n-1}$ of subsets of space X a *periodic partition of length m* of the dynamical system (X, f) , if it satisfies the following requirements:

- (i) all W_i are open-closed subsets of X ;
- (ii) $W_i = f(W_{i-1})$, $i = 1, \dots, n - 1$ and $W_0 = f(W_{n-1})$;
- (iii) $W_i \cap W_j = \emptyset$ for $i \neq j$;
- (iv) $X = \bigcup_{i=0}^{n-1} W_i$.

Lemma 4. Assume (A, g) is an odometer built with the help of a regular sequence $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

For any $k \in \mathbb{N}$ and $x_k \in \mathbb{Z}_{n_k}$ the family of sets $\{W_j^{(n_k)} = V_{x_k+j}\}_{j=0, \dots, n_k-1}$ forms a periodic partition of length n_k of the dynamical system (A, g) .

Proof. Obviously,

$$A = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}_{n_k}} V_s = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_{n_k}} V_{x_k+j}.$$

Hence, for the family $\{W_j^{(n_k)}\}$ the requirement (iv) of Definition 9 is satisfied.

Since all sets V_{x_k+j} , $j \in \mathbb{Z}_{n_k}$ are, by definition open and pairwise disjoint, the family $\{W_j^{(n_k)}\}$ also passes properties (i) and (iii) of a periodic partition.

In order to complete the proof we need to verify that $g(V_{a_k}) = V_{a_k+1}$ (here $1 \in \mathbb{Z}_{n_k}$) for all $a_k \in \mathbb{Z}_{n_k}$.

Let $\vec{b} = (b_i) \in V_{a_k}$. Then $b_k = a_k$ and $g(\vec{b}) = \vec{b} + \vec{e} = (b_i + 1) \in V_{a_k+1}$. Hence, $g(V_{a_k}) \subseteq V_{a_k+1}$.

Conversely, let $\vec{c} = (c_i) \in V_{a_k+1}$. Then $c_k = a_k + 1$ and $g^{-1}(\vec{c}) = \vec{c} - \vec{e} = (c_i - 1) \in V_{a_k}$. Hence, $g(V_{a_k}) \supseteq V_{a_k+1}$. □

3.2. Toeplitz subshifts and projections onto odometers

Let Σ be a compact Hausdorff space, $X = \Sigma^{\mathbb{Z}}$, and let $S: X \rightarrow X$ be the left shift on X .

Suppose $x = (x(n)) \in X$ is a non-periodic recurrent point, $\{p_i \in \mathcal{P}(x)\}$ is a sequence satisfying all the conditions of Definition 6.

Let us consider the family of sets

$$\begin{aligned}
 A_j^i &= \{y(n) \in \overline{\text{Orb}(y)} : y(k+j) = x(k) \forall k \in \text{Per}_{p_i}(x)\} = \\
 &= \{y(n) \in \overline{\text{Orb}(y)} : y(n) = x(k) \forall n \equiv k+j \pmod{p_i}, k \in \text{Per}_{p_i}(x)\}, \quad (4) \\
 & \quad j \in \{0, 1, \dots, p_i - 1\}, \quad i \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

We can describe A_j^i as the set of all points from $\overline{\text{Orb}(x)}$ that have the same p_i -skeleton as $S^j(x)$.

Lemma 5 (cf. Lemma 2.3 from [2]). *The family of sets $\{A_j^i\}$ possesses the following properties*

(i) *For each $i \in \mathbb{N}$ the family $\{A_j^i\}_{j=0}^{p_i-1}$ is the periodic partition of length p_i of the dynamic system $(\overline{\text{Orb}(x)}, S)$.*

(ii) $A_n^i \supset A_m^i$ for $i < j$ and $m \equiv n \pmod{p_i}$.

Proof. Note first that for each $y \in X$ and for all q_1, q_2 such that $\text{Per}_{q_1}(y), \text{Per}_{q_2}(y) \neq \emptyset$, the following implication is valid:

$$(q_1 \text{ divides } q_2) \Rightarrow (\text{Per}_{q_1}(y, \sigma) \subseteq \text{Per}_{q_2}(y, \sigma), \sigma \in \Sigma). \quad (5)$$

Let $x \in X$ and suppose the set $\{p_i \in \mathcal{P}(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisfies the requirements of Lemma. Then it follows from Theorem 1 that the dynamical system $(\overline{\text{Orb}(x)}, S)$ is Toeplitz and, in particular, it is minimal.

We fix $i \in \mathbb{N}$.

Lemma 3 immediately implies that

$$\overline{\text{Orb}(x)} = \bigcup_{j=0}^{p_i-1} A_j^i$$

and the family of sets $\{A_j^i\}_{j=0}^{p_i-1}$ satisfies requirement (iv) of Definition 9.

Verify now the validity of requirement (iii) of this definition. Assume that $A_j^i \cap A_k^i \neq \emptyset$ for some $j \neq k$. Then from Lemma 3 and the definition of the set $\text{Per}_{p_i}(x, \sigma)$ we get $x(n) = y(n+j) = y(n+k)$ for all $n \in \text{Per}_{p_i}(x)$ and

$$\text{Per}_{p_i}(x, \sigma) = \text{Per}_{p_i}(y, \sigma) - j = \text{Per}_{p_i}(y, \sigma) - k \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

From Corollary 2 we have $p_i \in \mathcal{P}(y)$. Hence, p_i divides $|j - k|$ by the definition of an essential period. And this contradicts the inequality $0 < |j - k| < p_i$.

Now let us prove property (ii) from Definition 9.

The definition of sets A_j^i implies the relations

$$\begin{aligned} S(A_{j-1}^i) &\subseteq A_j^i, & j \in \{1, \dots, p_i - 1\}; \\ S(A_{p_i-1}^i) &\subseteq A_0^i. \end{aligned} \quad (6)$$

With the help of these relations we immediately conclude that

$$S^{p_i}(A_j^i) \subseteq A_j^i, \quad j \in \{0, 1, \dots, p_i - 1\}. \quad (7)$$

The map S is a homeomorphism. Hence, if at least one of inclusions (6) is strict, then

$$S^{p_i}(A_j^i) \subsetneq A_j^i, \quad j \in \{0, 1, \dots, p_i - 1\}.$$

From this remark and property (iii) from Definition 9, which we have already verified, we conclude that in this case

$$S^{p_i}(\overline{\text{Orb}(x)}) = S^{p_i} \left(\bigcup_{j=0}^{p_i-1} A_j^i \right) = \bigcup_{j=0}^{p_i-1} S^{p_i}(A_j^i) \subsetneq \bigcup_{j=0}^{p_i-1} A_j^i = \overline{\text{Orb}(x)}.$$

Since the set $\overline{\text{Orb}(x)}$ is Hausdorff and compact and S^{p_i} is a homeomorphism, we have that

$$K = \bigcap_{m \geq 0} S^{mp_i}(\overline{\text{Orb}(x)}) \neq \emptyset$$

is a proper closed invariant subset of the dynamical system $(\overline{\text{Orb}(x)}, S)$ in contradiction with its minimality.

Consider now property (i) from Definition 9.

All the sets A_j^i are closed. Indeed, fix $j \in \{0, 1, \dots, p_i - 1\}$ and a convergent sequence $y_k = y_k(n) \in A_j^i$. Let $y \in \overline{\text{Orb}(x)}$ be the limit of this sequence. Since we have $y_k(m) = x(m - j)$, $k \in \mathbb{N}$ for all $m \in \text{Per}_{p_i}(x) + j$, Proposition 1 guarantees that

$$y(m) = x(m - j) \quad \text{for } m \in \text{Per}_{p_i}(x) + j.$$

Consequently, $y \in A_j^i$ and the sets A_j^i are closed. This means that $\{A_j^i\}_{j=0}^{p_i-1}$ is the closed finite partition of the dynamical system $(\overline{\text{Orb}(x)}, S)$. Therefore, each set A_j^i is open–closed in $\overline{\text{Orb}(x)}$ in the induced topology.

Property (ii) from the lemma immediately follows from the definition of the sets A_j^i , relations (5) and (7) and from Lemma 3. \square

Let an odometer (A, g) be built with the help of the sequence $\{p_i\}$.

Assume

$$\vec{a} = (n_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p_i}.$$

We denote

$$A_{\vec{a}} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_{n_i}^i.$$

It follows immediately from assumption (ii) of Lemma 5 that

$$(A_{\vec{a}} \neq \emptyset) \Leftrightarrow \left(\vec{a} \in A \subset \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_p \right). \tag{8}$$

Assumption (i) of Lemma 5 guarantees that the family of sets $\{A_{\vec{a}}, \vec{a} \in A\}$ is a partition of the space $\overline{\text{Orb}(x)}$ and

$$S(A_{\vec{a}}) = A_{\vec{a}+\vec{e}} \tag{9}$$

for all $\vec{a} \in A$.

Consider the mapping

$$\begin{aligned} \pi: \overline{\text{Orb}(x)} &\rightarrow A; \\ \pi: A_{\vec{a}} &\mapsto \vec{a}, \quad \vec{a} \in A. \end{aligned}$$

By Eq. (8), this mapping is well-defined and formula (9) guarantees the equality $\pi \circ S = g \circ \pi$.

Note that the map π is continuous since $\pi^{-1}(V_{x_j}) = A_{x_j}^j$ for all $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in \mathbb{Z}_{p_j}$. In other words, all sets from the family (3), which as we know forms abase of the topology of the space A , have open–closed preimages in $\overline{\text{Orb}(x)}$ according to Lemma 5.

Theorem 2. *Assume that a point $x \in X$ is recurrent and a sequence $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ is a periodic structure on x in the sense of Definition 6.*

Then the odometer (A, g) built with the help of the sequence $\{p_i\}$ is an almost one-to-one factor of the flow $(\overline{\text{Orb}(x)}, S)$ under the mapping π .

Moreover, the following two conditions are equivalent:

- 1) a sequence $y \in \overline{\text{Orb}(x)}$ is Toeplitz;
- 2) $\pi^{-1}(\pi)(y) = \{y\}$.

Proof. Theorem 2 is proved Theorem 2.2 from [2] (the only change is that the Lemma 5 above must be referred to instead of Lemma 2.3 from [2]). \square

Bibliography

1. Jacobs, Konrad; Keane, Michael 0–1-sequences of Toeplitz type *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 13 (1969), pp. 123–131

2. *Williams S.* Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 67 (1984), pp.95–107 .
3. *Glimm J.* On a certain class of operator algebra *Trans. Amer. Mat. Soc.*, 95 (1960), No. 2, pp.318–340 .
4. *G. Barat, T. Downarowicz, A. Iwanik & P. Liardet* Propriétés topologiques et combinatoires des échelles de numération *Colloq. Math.*, 84/85, part 2 (2000), pp.285–306 .
5. *Downarowicz T., Durand F.* Factors of Toeplitz flows and other almost 1-1 extensions over group rotations *Math. Scand.* (to appear)
(the preliminary version is available at
<http://www.im.pwr.wroc.pl/downar/publ.html>).
6. *Kelley John L.* General topology. *D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London*, 1955 .
7. *Alekseev, V. M.* Symbolic dynamics. (Russian) *Eleventh Mathematical School (Summer School, Kolomyia, 1973) (Russian)*, pp.5–210. *Izдание Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kiev*, 1976 .
8. *Morse, Marston; Hedlund, Gustav A.* Symbolic dynamics I *Amer. J. Math.* 60 (1938), pp. 1–42 .
9. *Gjerde R., Johansen Ø.* Bratteli—Vershik models for Cantor minimal systems: applications to Toeplitz flows *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 20 (2000), pp.1687–1710 .

Department of Topology Institute of Mathematics NAS Ukraine
Tereshchenkivska str., 3 Kiev Ukraine 01601 E-mail: polulyah@imath.kiev.ua

А. Г. Сергеев

Адиабатические пределы и абрикосовские нити

Аннотация

Дается описание абрикосовских нитей (мало уклоняющихся от направления внешнего магнитного поля) в терминах адиабатического предела уравнений Гинзбурга—Ландау. Аналогичным образом, псевдоголоморфные кривые (и сечения некоторых вихревых расслоений над ними) на 4-мерном симплектическом многообразии, интерпретируемые как комплексные абрикосовские струны, описываются в терминах масштабного предела уравнений Зайберга—Виттена.

§ 1. Лагранжиан Гинзбурга—Ландау

1.1. Сверхпроводимость и абрикосовские струны

Несколько слов о физическом смысле абрикосовских струн. Предположим, что у нас имеется сверхпроводник во внешнем магнитном поле H . Если увеличивать уровень магнитного поля, то при некотором критическом значении произойдет пробой сверхпроводимости и сверхпроводник начнет превращаться в обычный проводник. Эта трансформация может происходить быстрым скачком, как это имеет место для сверхпроводящих металлов, или постепенно, небольшими дискретными шагами, как это происходит в сверхпроводящих сплавах. В сверхпроводниках второго рода, после первого критического значения H , возникают некие трубчатые зоны, называемые трубками тока. Внутри этих трубок устанавливается проводимость смешанного типа, в то время как за их пределами сохраняется сверхпроводимость. В центре трубок, вдоль линий, направленных

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 01-01-0144, 00-15-96073, 02-02-04002) и ННИО (грант 436RUS 113/669).

вдоль поля H , имеется обычная проводимость. Указанные линии называются абрикосовскими нитями или вихревыми линиями. Если продолжать увеличивать внешнее магнитное поле, то число трубок тока будет также возрастать и, после второго критического значения H , они заполняют весь сверхпроводник, превратив его в обычный проводник. Эта физическая модель описывается лагранжианом Гинзбурга—Ландау.

1.2. Лагранжиан Гинзбурга—Ландау

Лагранжиан Гинзбурга—Ландау имеет вид

$$L(A, \Phi) = |F_A|^2 + |d_A \Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2,$$

где

1. A , физически, есть электромагнитный потенциал или, математически, $U(1)$ -связность, задаваемая 1-формой A с чисто мнимыми коэффициентами

$$A = \sum A_j dx_j .$$

2. F_A , физически, есть электромагнитное поле или, математически, кривизна $F_A = dA$ связности A

$$F_A = \sum F_{ij} dx_i \wedge dx_j ,$$

где

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \quad \text{с} \quad \partial_j = \partial/\partial x_j .$$

3. d_A — ковариантная производная, т. е. $d_A = d + A$.
4. Φ , физически, есть параметр порядка или скалярное поле Хиггса; математически, это просто комплекснозначная функция.
5. λ — физический параметр, который мы полагаем далее равным 1 (это значение λ отвечает так называемому автодуальному случаю).

Первый член $|F_A|^2$ в лагранжиане Гинзбурга—Ландау является хорошо известным максвелловским лагранжианом электромагнитного поля. Второе слагаемое $|d_A \Phi|^2$ описывает в ковариантной форме взаимодействие между электромагнитным полем и скалярным полем Φ . Наиболее важный член — это потенциал

$$V(\Phi) := \frac{1}{4}(1 - |\Phi|^2)^2,$$

описывающий самодействие поля Хиггса Φ . Он имеет глобальный минимум при $|\Phi| = 1$ (отвечающий чистой сверхпроводимости) и неустойчивый локальный максимум при $\Phi = 0$ (отвечающий обычной проводимости).

1.3. Уравнения Эйлера—Лагранжа

Введем функционал энергии (предполагая, что время фиксировано, т. е. рассматривается статическая задача)

$$E(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int L(A, \Phi) d^3x .$$

Мы ищем решения ассоциированных уравнений Эйлера—Лагранжа

$$\delta E(A, \Phi) = 0 ,$$

имеющие конечную энергию. Заметим, что эти уравнения, также как и функционал энергии, инвариантны относительно калибровочных преобразований, задаваемых отображениями вида

$$A \mapsto A + id\chi , \quad \Phi \mapsto e^{-i\chi} \Phi ,$$

где χ — вещественнозначная функция. Нас интересуют решения уравнений Эйлера—Лагранжа по модулю указанных калибровочных преобразований, образующие пространство модулей решений уравнений Эйлера—Лагранжа.

§ 2. Вихревые уравнения

2.1. Двумерная редукция

Рассмотрим сначала двумерную редукцию указанной задачи на плоскость, ортогональную направлению внешнего магнитного поля. Предполагая, что это направление совпадает с осью x_3 в пространстве \mathbb{R}^3 с координатами (x_1, x_2, x_3) , мы рассматриваем редукцию задачи на плоскость (x_1, x_2) . Тогда функционал энергии $E(A, \Phi)$ заменяется функционалом потенциальной энергии

$$U(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int L(A, \Phi) d^2x$$

где $L(A, \Phi)$ задаётся редукцией выписанного выше лагранжиана Гинзбурга—Ландау на плоскость (x_1, x_2) . Мы попрежнему интересуемся решениями соответствующих уравнений Эйлера—Лагранжа с конечной энергией по модулю калибровочных преобразований. Из условия конечности

энергии $U(A, \Phi) < \infty$ вытекает, что $|\Phi| \rightarrow 1$ на бесконечности, поэтому рассматриваемая задача обладает топологическим инвариантом, называемым вихревым числом

$$d := \text{степень отображения } \Phi: S^1_\infty \longrightarrow S^1 = \{|\Phi| = 1\}.$$

Мы предполагаем далее для определённости, что $d > 0$.

2.2. Вихревые уравнения

Согласно [1], все решения уравнений Эйлера—Лагранжа (с $d > 0$)

$$\delta U(A, \Phi) = 0,$$

обладающие конечной энергией, являются локальными минимумами $U(A, \Phi)$ и удовлетворяют так называемым вихревым уравнениям. Чтобы выписать эти уравнения, введём комплексную координату $z = x_1 + ix_2$ на плоскости $\mathbb{R}^2_{(x_1, x_2)}$, отождествляя её с \mathbb{C}_z . Тогда указанные уравнения могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \bar{\partial}_A \Phi = 0 \\ F_A = * \frac{1}{2} (1 - |\Phi|^2) \end{cases}$$

где $\bar{\partial}_A = \partial/\partial \bar{z} dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$ для $A = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$, а $*$ — оператор Ходжа. Решения этих уравнений с вихревым числом d называются d -вихрями и можно показать (см. [1]), что d -вихрь однозначно (с точностью до калибровки) определяется дивизором нулей функций Φ . Тем самым мы имеем следующее описание пространства \mathcal{M}_d модулей d -вихревых решений:

$$\mathcal{M}_d = \text{Sym}^d \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^d.$$

§ 3. Абелева Модель Хиггса

3.1. Динамическая задача

Перейдем к 3-мерному случаю, добавляя одну переменную к координатам (x_1, x_2) . Мы можем рассматривать эту дополнительную переменную как евклидову координату x_3 ; в этом случае мы получим упомянутую выше евклидову версию лагранжиана Гинзбурга—Ландау. Эта модель описывает абрикосовские нити в \mathbb{R}^3 . Или мы можем считать третью переменную временем $x_0 = t$, что приводит к гиперболической (лоренцевой) версии лагранжиана Гинзбурга—Ландау. Последняя модель описывает динамику вихрей в \mathbb{R}^2 . Мы предпочитаем изложить наши идеи на примере

этой второй модели, где они имеют более прозрачный физический смысл, но все рассуждения одинаково применимы и к евклидовой модели.

Итак, мы рассматриваем $(2+1)$ -мерную модель Хиггса, управляемую следующим функционалом действия, задаваемым *гиперболическим* лагранжианом Гинзбурга—Ландау

$$S(A, \Phi) = \int [T(A, \Phi) - U(A, \Phi)] dt$$

где потенциальная энергия $U(A, \Phi)$ была определена выше, а кинетическая энергия задаётся формулой

$$T(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int \{|d_{A,0}\Phi|^2 + |F_{01}|^2 + |F_{02}|^2\} d^2x$$

где $d_{A,0} = \partial_0 dt + A_0 dt$ с $\partial_0 = \partial/\partial t dt$, $F_{0j} = \partial_0 A_j - \partial_j A_0$ для $A = A_0 dt + A_1 dx_1 + A_2 dx_2$.

Уравнения Эйлера—Лагранжа (динамические уравнения) $\delta S(A, \Phi) = 0$ для этого функционала действия имеют вид

$$\begin{cases} \partial_0 F_{0,j} + \sum_k \epsilon_{jk} \partial_k F_{12} = i \operatorname{Im}(\bar{\Phi} \nabla_{A,j} \Phi), & j = 1, 2 \\ \partial_1 F_{01} + \partial_2 F_{02} = i \operatorname{Im}(\bar{\Phi} \nabla_{A,0} \Phi) \\ (\nabla_{A,0}^2 - \nabla_{A,1}^2 - \nabla_{A,2}^2) \Phi = \frac{\lambda}{2} \Phi (1 - |\Phi|^2) \end{cases}$$

где $\nabla_{A,\mu} = \partial_\mu + A_\mu$, $\mu = 0, 1, 2$, $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$.

3.2. Адиабатический предел

Рассмотрим решения приведённых динамических уравнений во временной калибровке: $A_0 = 0$. Такое решение можно рассматривать как путь

$$\gamma: t \mapsto [A(t), \Phi(t)]$$

в конфигурационном пространстве

$$\mathcal{N}_d = \frac{\{\text{пары } (A, \Phi) \text{ с вихревым числом } d\}}{\{\text{калибровка}\}},$$

где квадратные скобки в $[A, \Phi]$ означают калибровочный класс пары (A, Φ) .

Допустим, что у нас имеется семейство динамических решений γ_ϵ , зависящих от параметра $\epsilon > 0$, кинетическая энергия которых

$$T(\gamma_\epsilon) = \int T(\gamma_\epsilon(t)) dt$$

пропорциональна ϵ . Тогда при $\epsilon \rightarrow 0$ путь γ_ϵ приближается к статическому пространству модулей \mathcal{M}_d и в пределе совпадает с некоторым статическим решением, т. е. с точкой \mathcal{M}_d . Однако если ввести на γ_ϵ «медленное время»: $\tau = \epsilon t$, то в пределе мы получим некоторый путь γ_0 на \mathcal{M}_d , который мы называем адиабатическим пределом γ_ϵ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Естественно возникает следующий

Вопрос: Когда заданный путь γ_0 на \mathcal{M}_d является адиабатическим? Другими словами, каким условиям должен удовлетворять путь γ_0 , чтобы быть адиабатическим пределом динамических решений γ_ϵ ?

Ответ: Адиабатические пути γ_0 на \mathcal{M}_d являются экстремалами для действия $S(\gamma)$, суженного на пути γ , лежащие на \mathcal{M}_d . Другими словами, адиабатические пути являются геодезическими пространства модулей \mathcal{M}_d относительно метрики, задаваемой кинетической энергией.

Таким образом, имеется следующее соответствие:

$$\{\text{адиабатические пределы динамических } d\text{-вихрей}\} \iff \{\text{геодезические } \mathcal{M}_d \text{ в } T\text{-метрике}\}. \quad (3.1)$$

Аналогичным образом, адиабатические пределы решений евклидовых уравнений Гинзбурга—Ландау, описывающие абрикосовские нити, отвечают геодезическим пространства \mathcal{M}_d относительно метрики, задаваемой функционалом энергии $E(\gamma)$.

§ 4. Уравнения Зайберга—Виттена и псевдоголоморфные кривые

4.1. Уравнения Зайберга—Виттена

Перейдем к 4-мерному случаю и рассмотрим компактное симплектическое 4-многообразие (X, ω) , снабжённое совместимой почти комплексной структурой J . Тогда для заданного эрмитова линейного расслоения $E \rightarrow X$, наделённого эрмитовой связностью B , мы можем написать ассоциированные уравнения Зайберга—Виттена на X , зависящие от масштабного параметра $\lambda > 0$, в следующем виде (см. [2,3])

$$\begin{cases} \bar{\partial}_B \alpha + \bar{\partial}_B^* \beta = 0 \\ \frac{2}{\lambda} F_B^{0,2} = \bar{\alpha} \beta \\ \frac{4i}{\lambda} F_B^\omega = 1 + |\beta|^2 - |\alpha|^2 \end{cases}$$

где α — сечение E , β — $(0, 2)$ -форма со значениями в E , и F_B^ω — компонента F_B , параллельная симплектической 2-форме ω .

Таубс в [2,3] предложил конструкцию, позволяющую построить по решениям указанных уравнений Зайберга—Виттена, зависящим от параметра λ , некоторую псевдоголоморфную кривую и обратно. Эту конструкцию можно рассматривать как комплексный аналог адиабатического предела из п. 3, в котором роль адиабатических путей из п. 3 играют псевдоголоморфные кривые (или сечения вихревых расслоений над ними).

4.2. От уравнений Зайберга—Виттена к псевдоголоморфным кривым

Предположим, что указанные уравнения Зайберга—Виттена, которые мы будем кратко называть SW_λ -уравнениями, имеют решение $(B_\lambda, (\alpha_\lambda, \beta_\lambda))$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$. Тогда, согласно Таубсу [2], при $\lambda \rightarrow \infty$:

1. $|\alpha_\lambda| \rightarrow 1$ всюду (вне нулей), приближаясь к почти голоморфному сечению E ;
2. $|\beta_\lambda| \rightarrow 0$ всюду.

Более того, нулевые множества $C_\lambda := \alpha_\lambda^{-1}(0)$ сходятся в смысле потоков к псевдоголоморфной кривой C на X с кратностью d , такой что класс $d[C]$ является двойственным по Пуанкаре к классу Черна $c_1(E)$. (Вообще говоря, кривую C следует заменить здесь эффективным дивизором $C = \sum d_k C_k$, состоящим из связных псевдоголоморфных кривых C_k с кратностями d_k , класс гомологий которого является двойственным по Пуанкаре к $c_1(E)$; мы ограничиваемся для простоты случаем, когда дивизор содержит только одну связную компоненту).

4.3. От псевдоголоморфных кривых к уравнениям Зайберга—Виттена

Обратно, предположим, что заданы связная псевдоголоморфная кривая C на X и натуральное число $d > 0$. Рассмотрим семейство d -вихревых решений (A_z, Φ_z) на нормальном расслоении $N \rightarrow C$, параметризованное точкой z на C . Это семейство можно рассматривать как кривую

$$\gamma: C \ni z \mapsto [A_z, \Phi_z] \in \mathcal{M}_d$$

в пространстве \mathcal{M}_d модулей d -вихревых решений на \mathbb{C} .

Эти данные можно гладко продолжить на всё многообразие X , получив, тем самым, некоторые данные $(B_\lambda, (\alpha_\lambda, \beta_\lambda))$ для SW_λ -уравнений на X .

Вопрос: Когда эти SW_λ -данные могут быть аппроксимированы каким-либо SW_λ -решением при $\lambda \rightarrow \infty$? Или, другими словами, когда кривая γ является адиабатическим пределом SW_λ -решений при $\lambda \rightarrow \infty$?

Ответ: Кривая $\gamma = [A, \Phi]: C \rightarrow \mathcal{M}_d$ является адиабатической тогда и только тогда, когда она удовлетворяет некоторому нелинейному $\bar{\partial}$ -уравнению на \mathcal{M}_d . Решения этого уравнения, т. е. комплексные адиабатические кривые γ , мы называем комплексными абрикосовскими нитями. Если, в частности, $d = 1$ и $\{\text{нули } \Phi\} = C$, т. е. γ совпадает с C , то указанное уравнение превращается в условие псевдоголоморфности C .

Итак, мы имеем следующее соответствие:

$$\{\text{адиабатические пределы } SW_\lambda\text{-решений}\} \iff \{\text{комплексные абрикосовские нити}\}. \quad (4.1)$$

Литература

1. Jaffe A., Taubes C. H. Vortices and monopoles. Boston: Birkhäuser, 1980.
2. Taubes C. H. $SW \Rightarrow Gr$: From the Seiberg—Witten equations to pseudo-holomorphic curves. J. Amer. Math. Soc., 1996, vol. 9, pp. 845—918.
3. Taubes C. H. $Gr \Rightarrow SW$: From pseudo-holomorphic curves to Seiberg—Witten solutions. J. Diff. Geom., 1999, vol. 51, pp. 203—334.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина 8, ГСП-1, Москва, 117966, Российская Федерация и Independent University of Moscow

V. Timorin

Kähler metrics whose geodesics are circles

Abstract

We classify all Kähler metrics in an open subset of \mathbb{C}^2 whose real geodesics are circles. All such metrics are equivalent (via complex projective transformations) to Fubini metrics (i. e., to Fubini—Study metric on $\mathbb{C}P^2$ restricted to an affine chart, to the complex hyperbolic metric in the unit ball model or to the Euclidean metric).

Introduction

All Riemannian metrics in an open subset of \mathbb{R}^2 or \mathbb{R}^3 whose geodesics are arcs of circles are classical, i. e., isometric to Euclidean, Riemann or Lobachevsky geometries. This was proved by A. Khovanskii [1] in dimension 2 and by F. Izadi [2] in dimension 3. But in dimension 4 this is wrong. There are remarkable Kähler metrics whose real geodesics are circles — Fubini metrics (see Appendices 1 and 2).

Our main result is as follows:

Theorem 1. *Consider a Kähler metric in an open subset of \mathbb{C}^2 such that all geodesics are parts of circles (or straight lines). Then this metric is (up to a complex projective transformation) some Fubini metric.*

In the next Section we will prove this result. Then we mention (without proof) a local geometric classification of complete families of circles that are point-wise rectifiable by means of complex projective transformations.

Acknowledgements

I am grateful to A. G. Khovanskii and R. W. Sharpe for useful discussions.

Partially supported by RFBR 99-01-00245 and CRDF RM1-2086

Proof of the main result

For a definition of Kähler metrics see Appendix 2. Let g be a Kähler metric in an open region $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ such that all geodesics with respect to g are parts of circles. First note that for any point $p \in \Omega$ the set of geodesics passing through p coincides with the image under the exponential map of the set of lines passing through p .

The following theorem [3] holds:

Theorem 2. *Fix some identification of \mathbb{R}^4 with the algebra \mathbb{H} of quaternions. Suppose that a local diffeomorphism $\Phi: (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ takes sufficiently many lines (through 0) in general position to circles. If $d_0\Phi = id$, then the second derivative of Φ has the form $x \mapsto A(x)x$ or $x \mapsto xA(x)$ where A is some \mathbb{R} -linear map, and the multiplication is in the sense of quaternions.*

In particular, the bundle of geodesics at a point $p \in \Omega$ is given by $p + xt + \frac{1}{2}A(x)xt^2$ or $p + xt + \frac{1}{2}xA(x)t^2$ where t is a parameter, x is the velocity vector and A is some linear map. To fix the idea assume that the multiplication by $A(x)$ is from the left. Now recall the following well-known fact (for a proof, see Appendix 2).

Proposition 3. *Exponential maps with respect to a Kähler metric are holomorphic up to third order terms (i. e., their 2-jets are holomorphic).*

Therefore, the map $x \mapsto A(x)x$ must be holomorphic. Now we need

Lemma 4. *Suppose that the map $x \mapsto A(x)x$ (where A is some linear operator) is holomorphic. Then $A(x)$ is complex linear and takes complex values only. In other words, A is a complex linear functional.*

Proof. In general, $A(x) = a(x) + b(x)i + c(x)j + d(x)k$ where a, b, c, d are some linear functionals on \mathbb{R}^4 . Being holomorphic, the quadratic map $x \mapsto A(x)x$ must satisfy the condition $A(ix)(ix) = -A(x)x$. This condition implies that

$$a(x) = b(ix), \quad b(x) = -a(ix), \quad c(x) = -d(ix), \quad d(x) = c(ix).$$

This means that the functionals $\alpha = a + bi$ and $\beta = d + ci$ must be holomorphic (i. e. complex linear). Since the map $x \mapsto A(x)x = (\alpha(x) + k\beta(x))x$ is holomorphic, the map $x \mapsto k\beta(x)x$ must be also holomorphic. If we multiply x by \sqrt{i} , then $k\beta(x)x$ gets multiplied by $-i$, but by bilinearity it must be multiplied by i . Hence $\beta = 0$ and $A(x) = \alpha(x)$ is a complex linear functional. \square

From this lemma it follows in particular that all geodesics of g lie in complex lines (since velocities and accelerations are proportional with some complex coefficient). Now we can use a complexified version of Beltrami's theorem (it follows from the results of Bochner [4], Otsuki and Tashiro [5]; for a detailed discussion and a sketch of a proof see Appendix 3):

Proposition 5. *Suppose that all germs of complex lines are totally geodesic surfaces with respect to some Hermitian metric on a part of \mathbb{C}^n . Then this metric is equivalent (up to a complex projective transformation) to a Fubini metric.*

This concludes the proof of the main theorem.

Complex families of circles

Consider a Kähler metric g defined in an open region $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ and assume that all geodesics of g are arcs of circles. We saw that the exponential map of g at any point $p \in \Omega$ has the form $x \mapsto p + x + \frac{1}{2}A(x)x$ or $x \mapsto p + x + \frac{1}{2}xA(x)$ up to third order terms. Here A is some complex linear functional. Note that a complex projective transformation $x \mapsto p + (1 - \frac{1}{2}A(x))^{-1}x$ or $x \mapsto p + x(1 - \frac{1}{2}A(x))^{-1}$ has the same 2-jet and clearly takes all lines to circles. Therefore, the images of lines (through 0) under the above complex projective map are geodesics of g (through p). This is because a circle is determined by its velocity and acceleration at some point and hence by the 2-jet of some rectifying diffeomorphism. Thus the geodesics of g are point-wise rectifiable by means of complex projective transformations.

Suppose that we are given a family \mathcal{F} of curves in \mathbb{C}^2 (by a curve we mean a 1 dimensional closed submanifold). Let us say that the family \mathcal{F} is a *complete family of curves* in an open subset Ω of \mathbb{C}^2 if through each point of Ω in each direction there goes a curve from \mathcal{F} . A family \mathcal{F} is said to be *rectifiable* at some point $p \in \Omega$ if there exists a germ of diffeomorphism at p that takes each curve from \mathcal{F} passing through p to a straight line. A complete family \mathcal{F} of curves is called a *complex family of curves* in Ω if it is point-wise rectifiable in Ω by means of local diffeomorphisms holomorphic up to third order terms. Complete complex families of curves generalize the notion of geodesics with respect to a Kähler metric. As we saw a complex family of circles is point-wise rectifiable by means of complex projective transformations.

We have a local classification of all complete complex families of circles in Ω . Up to a complex projective transformation these are the following:

- Geodesics of Fubini metrics.
- A family outside the unit ball.
- Suspensions.

Let us describe the last 2 examples in detail.

A family of circles outside the unit ball. Inside the unit ball we have a model for the complex hyperbolic plane. The metric is given in coordinates (z_1, z_2) by

$$ds^2 = \frac{(dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2)(1 - z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2) + (dz_1 \bar{z}_1 + dz_2 \bar{z}_2)(d\bar{z}_1 z_1 + d\bar{z}_2 z_2)}{(1 - z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2)^2}.$$

All geodesics are circles (see Appendix 2). Note that this metric makes sense in the exterior of the unit ball as well. But in the exterior it will be positive definite no more. Nevertheless, geodesics make sense and they are circles. We get a complex family of circles that are not geodesics with respect to a (positive definite) Kähler metric (this is not obvious but not very hard to prove).

Suspensions. Let U be a domain in \mathbb{C} and let \mathcal{F} be a point-wise rectifiable family of circles in U (e. g. the set of geodesics in the Poincaré half-plane). Note that any point-wise rectifiable family in dimension 2 is complex (this follows from the result of Khovanskii [1]). We are going to define a complex family \mathcal{G} of circles in $U \times \mathbb{C}$ that will be called the *suspension* of \mathcal{F} . Each circle from \mathcal{G} must lie in some complex line. We will define \mathcal{G} on each complex line separately, and then prove that \mathcal{G} is point-wise rectifiable.

Take any complex line L in \mathbb{C}^2 . Then the projection π from $L \cap (U \times \mathbb{C})$ to U either maps everything to a point or is a linear conformal one-to-one map. In the first case (i. e., when L is “vertical”) define \mathcal{G} on L as the set of all real lines in L . In the second case, the map π^{-1} clearly takes circles to circles. So define \mathcal{G} on L as the preimage of the set of all circles in U under the projection π .

Let us prove that the family \mathcal{G} thus constructed is a complex family of circles. Take a point $a \in U \times \mathbb{C}$. Suppose that \mathcal{F} can be rectified at the point $\pi(a)$ by some complex projective map $P = L_1/L_2$ where L_1 and L_2 are affine functions. It is easy to see that the map $(z, w) \mapsto (P(z), w/L_2(z))$ rectifies the family \mathcal{G} at a .

The proof of the above classification is not very hard. Nevertheless we will not give it here.

Appendix 1: Hermitian and Kähler metrics

Consider a Riemannian metric g in an open subset Ω of \mathbb{C}^n . This metric is called *Hermitian* if it is stable under the multiplication by i , i. e.,

$g(ix, iy) = g(x, y)$ for any 2 vectors x and y at the same point. With a Hermitian metric g one associates the differential (1, 1)-form $\omega(x, y) = g(ix, y)$ and a sesquilinear form (Hermitian inner product) $\langle X, Y \rangle = g(X, Y) - i\omega(X, Y)$. A metric g is said to be *Kähler* if $d\omega = 0$.

Let ∇^0 be the standard (flat) connection on \mathbb{C}^n . Denote by ∇ the Levi-Civita connection of g . Then for each pair of vector fields X and Y on Ω we have $\nabla_X Y = \nabla_X^0 Y + \Gamma(X, Y)$ where Γ is a symmetric \mathbb{R} -bilinear form at each point. The form Γ is called the *Christoffel form*. In particular, the value of $\Gamma(X, Y)$ at a point p depends only on the values of X and Y at p (not on their derivatives). Let us recall the following fact:

Proposition 6. *A metric g is Kähler if and only if the corresponding covariant differentiation is complex linear, i. e., the Christoffel form is complex bilinear.*

Proof. First assume that the metric is Kähler. Then for any 3 vector fields X, Y , and Z we have

$$d\omega(X, Y, Z) = X\omega(Y, Z) - \omega([X, Y], Z) - \omega(Y, [X, Z]) = 0.$$

Here $[X, Y]$ denotes the commutator of the vector fields X and Y . Fix the values of X, Y , and Z at some point p . We can always arrange that $\nabla_Y X = \nabla_Z X = 0$ at p by changing X in a neighborhood of p . Then $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = \nabla_X Y$. Similar, $[X, Z] = \nabla_X Z$. Recall that ∇_X depends on $X(p)$ only (not on the derivatives of X). Finally, we obtain

$$X\omega(Y, Z) = \omega(\nabla_X Y, Z) + \omega(Y, \nabla_X Z).$$

On the other hand, by the compatibility of ∇ with g ,

$$X\omega(Y, Z) = Xg(iY, Z) = g(\nabla_X(iY), Z) + g(iY, \nabla_X Z).$$

Comparing our equations, we conclude that $g(\nabla_X(iY), Z) = g(i\nabla_X Y, Z)$. Since Z is arbitrary, $\nabla_X(iY) = i\nabla_X Y$, i. e., the covariant differentiation is complex linear.

The above argument can be reversed. If the covariant differentiation is complex linear, then $d\omega$ vanishes for all X, Y , and Z such that $\nabla_Y X = \nabla_Z X = 0$ at some given point p . Since $X(p), Y(p)$, and $Z(p)$ can take arbitrary values, $d\omega = 0$ at p . But p is also arbitrary. Hence $d\omega = 0$ everywhere. \square

Proof of Proposition 3. Indeed, the second differential of an exponential map coincides with Γ , but the latter is complex bilinear by Proposition 6. \square

Appendix 2: Fubini spaces

Fubini spaces are complex analogs of the classical geometries (Euclidean, Riemann, Lobachevsky).

Consider the complex space \mathbb{C}^{n+1} equipped with the pseudo-Hermitian form

$$H = Z_0 \bar{Z}_0 + \alpha \sum_{j=1}^n Z_j \bar{Z}_j$$

where α is some real number. The *pseudosphere* is a hypersurface S given by the equation $H = 1$. Note that the pseudosphere is stable under the multiplication by complex numbers with absolute value 1, i. e., under the scalar $U(1)$ -action. The quotient space $F = S/U(1)$ is called a *Fubini space*.

Denote by C the cone where $H > 0$. Then the Fubini space can be also defined as the quotient C/\mathbb{C}^* (since the intersection of a \mathbb{C}^* -orbit with S is exactly a $U(1)$ -orbit). Hence, for $\alpha > 0$ we obtain the complex projective space $\mathbb{C}P^n$, for $\alpha = 0$ — the affine space \mathbb{C}^n and for $\alpha < 0$ — the complex hyperbolic space \mathbb{H}^n .

Let us introduce a Riemannian metric in a Fubini space. Suppose first that $\alpha \neq 0$. Then H induces a metric on S (for $\alpha < 0$, this metric will be negative so we should take it with sign minus) which is stable under the $U(1)$ -action. Hence a Fubini space F also inherits some metric. Namely, the distance between $U(1)$ -orbits is defined as the minimal distance from a point of one orbit to a point of the other orbit. For $\alpha = 0$, we should take the standard Euclidean metric on $\mathbb{C}^n = F$.

To get an affine model of a Fubini space F , it is enough to project it to the hyperplane $\{Z_0 = 1\}$. Namely, each point $x \in F$ can be viewed as a complex line in C . Take the intersection of this line with $\{Z_0 = 1\}$. Under this projection, F gets mapped to the whole hyperplane (for $\alpha \geq 0$) or to the interior of a ball (for $\alpha < 0$). In particular, for $\alpha > 0$ we get an affine chart of $\mathbb{C}P^n$. Metrics of Fubini spaces written down in the affine models are called the *Fubini metrics* on (parts of) \mathbb{C}^n .

Let us deduce the coordinate expressions of Fubini metrics for $\alpha > 0$. Take a vector $v \in T_x F$ at some point $x \in F$. Consider a lift X of x to C and a lift V of v looking out of X . We can always assume that $|X|^2 = 1$, i. e., $X \in S$ (all norms and inner products are with respect to the form H). Denote by W the projection of V to the orthogonal complement of X . Then the length of v with respect to the Fubini metric equals the length of W with respect to H :

$$|v|^2 = \langle W, W \rangle = \langle V - \langle V, X \rangle X, V - \langle V, X \rangle X \rangle = \langle V, V \rangle - \langle X, V \rangle \langle V, X \rangle.$$

Now if X is arbitrary (not necessarily of unit length), then the formula for

$|\vartheta|^2$ can be recovered by the homogeneity:

$$|\vartheta|^2 = \frac{\langle V, V \rangle \langle X, X \rangle - \langle X, V \rangle \langle V, X \rangle}{\langle X, X \rangle}.$$

The vector X can be regarded as the collection of homogeneous coordinates of the point x . In order to pass to affine coordinates, it is enough to put $X_0 = 1$, $V_0 = 0$ (X_0 and V_0 stand for zero-coordinates of X and V respectively). For $\alpha < 0$ the above expression is to be taken with negative sign.

Proposition 7. *All complex lines in Fubini metrics are totally geodesic surfaces. All geodesics are (parts of) circles.*

Proof. Note that a Fubini metric is preserved under the action of the (rather large) group of all H -unitary projective transformations. Each complex line is stable under a one-parametric subgroup of rotations around it. It follows that each complex line is a geodesic submanifold. On a coordinate line passing through the origin we have a classical geometry (standard Euclidean if $\alpha = 0$, spherical in central projection if $\alpha > 0$, or Lobachevsky in the Poincaré disk model if $\alpha < 0$). Clearly all geodesics inside this line are circles. Any complex line can be mapped to any other by an isometry. This concludes the proof. \square

A useful characterization of Fubini spaces was given by Bochner [4].

First recall the definition of the holomorphic sectional curvature. Let g be a Hermitian metric in an open subset Ω of \mathbb{C}^n . Take a point $p \in \Omega$ and a vector ξ going out from this point. The vector ξ defines a germ of complex line. Consider the image of this germ under the exponential map of g . The image is a germ of a 2-dimensional surface at the point p . Its Gauss curvature at p is denoted by $K(\xi)$ and is called the *holomorphic sectional curvature*. A metric is said to have *constant holomorphic sectional curvature* if $K(\xi)$ depends neither on the direction of ξ nor on the point p .

Theorem 8 (Bochner). *A Kähler metric g has constant holomorphic sectional curvature if and only if g is locally equivalent to a Fubini space via a holomorphic change of variables.*

Appendix 3: Complexified Beltrami's theorem

Proposition 5 is a complexified version of classical Beltrami's theorem [6]: if all geodesics are parts of straight lines, then the metric is locally equivalent to Euclidean, Riemann, or Lobachevsky. This complex version can be deduced from the results of Bochner [4], Otsuki and Tashiro [5]. Here we recall these results and also sketch another proof of Proposition 5 in dimension 2 which does not involve curvature considerations.

Lemma 9. *Let $\Gamma: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ be a homogeneous polynomial of degree 2 over reals (i. e., not necessarily holomorphic). Suppose that $\Gamma(v)$ is everywhere proportional to v with some complex coefficient $L(v)$. Then L is a complex-valued \mathbb{R} -linear function.*

Proof. The coefficient L is a complex-valued function defined everywhere except perhaps 0. Since Γ is quadratic over reals, it satisfies the relation

$$\Gamma(v + w) + \Gamma(v - w) = 2(\Gamma(v) + \Gamma(w))$$

for all $v, w \in \mathbb{C}^n$. Substituting $L(u)u$ for $\Gamma(u)$ we obtain:

$$v(L(v + w) + L(v - w) - 2L(v)) + w(L(v + w) - L(v - w) - 2L(w)) = 0.$$

We can choose v and w to be linearly independent, so

$$L(v + w) + L(v - w) = 2L(v), \quad L(v + w) - L(v - w) = 2L(w).$$

If v and w are linearly dependent, this is also true due to the homogeneity of L . Hence the equations above hold for all v and w . They imply that L is \mathbb{R} -linear. □

Proposition 10. *Consider a Hermitian metric g in an open subset Ω of \mathbb{C}^n . If all germs of complex lines lying in Ω are totally geodesic submanifolds, then the Christoffel form is equal to $\Gamma(v) = L(v)v$, where L is some complex linear functional (for a definition of the Christoffel form see Appendix 1).*

Proof. Consider an arbitrary vector v at some point $x \in \Omega$ and a geodesic γ passing through x with velocity v . By the equation of geodesics, $\ddot{\gamma} + \Gamma(v, v) = 0$. But since the geodesic lies in some complex line, $\ddot{\gamma}$ is proportional to $\dot{\gamma} = v$ with some complex coefficient. Therefore, $\Gamma(v, v)$ is proportional to v . By Lemma 9, $\Gamma(v, v) = L(v)v$. □

Corollary 11. *Under the assumptions of Proposition 10 the metric g is Kähler.*

Proof. By Lemma 10, $\Gamma(v, v) = L(v)v$. By the symmetry of Γ , we have $\Gamma(v, w) = \frac{1}{2}(L(v)w + L(w)v)$.

Now we can use the Hermitian property: $g(X, X) = g(iX, iX)$. Apply the covariant differentiation ∇_Y to both sides of this relation:

$$g(\nabla_Y X, X) = g(\nabla_Y(iX), iX) = -g(i\nabla_Y(iX), X).$$

The standard connection ∇^0 is complex linear, hence $g(i\nabla(Y, iX) + \nabla(Y, X), X) = 0$. Since Y is arbitrary, it follows that $L(iX) = iL(X)$, i. e., L is complex linear. This means that Γ is \mathbb{C} -bilinear. By Proposition 6, g is Kähler in this case. □

Consider two Hermitian metrics g' and g'' and denote the corresponding Levi-Civita connections by ∇' and ∇'' respectively. Recall that the difference $\Gamma(X) = \nabla''_X X - \nabla'_X X$ is a vector-valued quadratic form. The metrics g' and g'' are called *holomorphically projectively equivalent* if $\Gamma(x) = L(x)x$ for all vectors x ; where L is a complex linear functional (depending on the point). Lemma 10 shows that if all complex lines are geodesic surfaces, then the metric is holomorphically projectively equivalent to the standard (flat) metric.

Otsuki and Tashiro proved [5] that a Hermitian metric that is holomorphically projectively equivalent to a Fubini metric has constant holomorphic sectional curvature. By Bochner’s theorem it is isometric to a Fubini space, an isometry being a holomorphic map. But a holomorphic map taking (locally) complex lines to complex lines is a complex projective transformation. Thus we obtain Proposition 5. Below we sketch a more straightforward proof of it in dimension 2.

Suppose a metric g in an open subset Ω of \mathbb{C}^2 satisfies the conditions of Proposition 5. Choose a pair of constant linearly independent vector fields X and Y in Ω and compose the Gram determinant

$$G = G(X, Y) = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle \langle Y, X \rangle,$$

where \langle , \rangle is the Hermitian inner product corresponding to g . Note that G does not essentially depend on X and Y . In fact, it is well defined as a function up to a positive constant factor.

Lemma 12. *The Hermitian metric $h = g/G^{2/3}$ is constant along each complex line. This means that for any vectors v and w of the same Euclidean length lying in the same complex line we have $h(v) = h(w)$.*

Proof. Let X and Y be constant linearly independent vector fields in Ω . Then we have $XG(X, Y) = 3 \operatorname{Re} L(X)G(X, Y)$. On the other hand, $Xg(X, X) = 2 \operatorname{Re} L(X)g(X, X)$. It follows that $Xh = 0$. Since X is an arbitrary constant vector field, h must be constant along any real line. It remains to note that a Hermitian metric constant along any real line is also constant along any complex line. □

Note that g can be recovered from h . Namely, if H is the Gram determinant of h , then $g = h/H^2$. It remains to describe all Hermitian metrics that are constant along any complex line. This is not difficult to accomplish. Any such metric considered as a function of a point x and a vector v out of x is a second degree polynomial in the “complex momentum” v and the “complex angular momentum” $x \wedge v$ (the wedge product is over complex numbers). One can readily verify that these metrics provide Fubini metrics

(modulo complex projective transformations) after division by the square of their Gram determinants.

Bibliography

1. Khovanskii A. G., *Rectification of circles*, Sib. Mat. Zh., **21** (1980), 221–226
2. Izadi F. A., *Rectification of circles, spheres, and classical geometries*, PhD thesis, University of Toronto, (2001)
3. Timorin V. A. “*Rectification of circles and quaternions*”, Preprint <http://xxx.lanl.gov/math.DG/abs/0110144>.
4. Bochner S. “*Curvature in Hermitian metric*”, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 149–195
5. Otsuki T., Tashiro Y. “*On Curves in Kaehlerian spaces*”, Math. J. Okayama univ., **4** (1954), 57–78
6. Beltrami E. “*Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette*” Ann. Mat. pura appl., ser. 1, **7**, 185–204

W. G. Faris

Non-selfadjoint Ornstein—Uhlenbeck semigroups

§ 1. Introduction

The talk will describe Ornstein—Uhlenbeck semigroups and explore an example in infinite dimensions related to the renormalization group of quantum field theory. An Ornstein—Uhlenbeck semigroup describes a diffusion process with constant diffusion and linear drift. The resulting effect is Gaussian convolution followed by rescaling. The first goal of the talk is to contrast the situation of detailed balance, where the drift coefficient is self-adjoint, with a very different situation where the drift coefficient is skew-adjoint. It is shown that in the latter situation there can be a stationary measure, but only in infinite dimensions and only when the drift coefficient is given by an operator with absolutely continuous spectrum. The second goal of the talk is to show that one version of the renormalization group is given by a particular Ornstein—Uhlenbeck semigroup of this second type and to characterize this semigroup abstractly.

The first part briefly reviews the theory of vector fields, that is, of autonomous systems of ordinary differential equations. Near an isolated zero of the vector field, that is, near a stationary solution of the system of differential equations, the equation is typically (but not always) equivalent to a system given by a linear vector field (a matrix equation).

The second part is a similar review of the theory of stochastic differential equations driven by white noise (the derivative of a Wiener process). For such equations the solutions are random, but there are semigroups of linear operators that describe the evolution of expectations of functions of the process. In some circumstances there are stationary probability densities. One special case is when the equation satisfies the detailed balance condition. Then it is comparatively easy to compute the stationary probability densities. However,

the processes described in this talk need not satisfy detailed balance.

The third part introduces the main object of study, the Ornstein—Uhlenbeck processes and their associated semigroups. Such a process is defined by a stochastic differential equation given by a linear vector field and a non-degenerate constant diffusion coefficient matrix. It is the natural object for studying the behavior of a stochastic differential equation near a stable stationary point of the vector field.

The fourth part poses the question of whether an Ornstein—Uhlenbeck semigroup with a vector field leaving a quadratic form constant can have a stationary probability density. The answer is negative in finite dimensional situations. But in infinite dimensions there are many examples. It is shown that in such examples the generator of the linear vector field must have absolutely continuous spectrum.

The fifth part is devoted to an important example of the situation where the vector field leaves a quadratic form invariant. This quadratic form is defined on a space of functions, and it is given by the integral of the square of the gradient of the function. The vector field generates a scaling of the functions that leaves this form invariant. This is the Ornstein—Uhlenbeck semigroup corresponding to the renormalization group of quantum field theory. The action of the semigroup on measures is to first scale wave numbers in the range from 0 to 1 to the range from 0 to e^t . Then the convolution integrates out fluctuations corresponding to wave numbers from 1 to e^t . The result is an effective description of fluctuations at low wave numbers. This example is characterized abstractly by Lie algebra calculations.

§ 2. Vector fields

A vector field defines for each point \mathbf{x} in n dimensional space a corresponding n component vector $\mathbf{b}(\mathbf{x})$. It defines a flow by solving the system of ordinary differential equations

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

with initial condition $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ at $t = 0$.

The local properties of vector fields are relatively simple. Near each point \mathbf{x} at which the vector field $\mathbf{b}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ there is a change of coordinates that makes the vector field a constant vector field. The situation is more complicated in the neighborhood of an isolated zero \mathbf{x}_0 , where $\mathbf{b}(\mathbf{x}_0) = 0$. The vector field has a linearization at such a stationary point. This is a matrix given by $-A = (\nabla \mathbf{b})(\mathbf{x}_0)$. (The minus sign is chosen for later convenience.) If there are no non-trivial integer relations among the eigenvalues, then, according

to the Sternberg linearization theorem [4], there is a change of coordinates that makes the stationary point the zero vector and makes the vector field a linear vector field $-A\mathbf{x}$.

In the case when the eigenvalues satisfy an integer relation, this can fail. The simplest example is a vector field in the plane whose linearization at zero has eigenvalues $-i$ and i . The linear vector field with these eigenvalues has solutions with constant period 2π . But there are also nonlinear vector fields with the same linearization, but with periods that differ from 2π . Since the period is invariant under change of coordinates, such a non-linear vector field is not equivalent to the linear vector field under change of coordinates. Such examples are rather special, and we shall ignore them in the following.

Thus to study local behavior near a zero we look at the special case when $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = -A\mathbf{x}$, a linear vector field. It is possible to solve the differential equation explicitly. This differential equation is $d\mathbf{x}/dt = -A\mathbf{x}$ with solution

$$\mathbf{x}(t) = \exp(-tA)\mathbf{x}(0). \quad (2.2)$$

§ 3. Stochastic differential equations

A stochastic differential equation of the form

$$d\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) dt + \sigma(\mathbf{x})d\boldsymbol{\omega}(t) \quad (3.1)$$

with the initial condition $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ at $t = 0$ defines a Markov diffusion process. One can think of this as the motion of a particle with a deterministic flow given by the vector field $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ and a random flow determined by the diffusion matrices $\sigma(\mathbf{x})$. Here $\boldsymbol{\omega}(t)$ consists of n independent copies of the Wiener process (sometimes also called Brownian motion). The matrices $\sigma(\mathbf{x})$ are each strictly positive symmetric n by n matrices.

Let f be a smooth function, and let $f(\mathbf{x}_0, t) = E_{\mathbf{x}_0}[f(\mathbf{x}(t))]$ be the expected value of $f(\mathbf{x}(t))$ at time t , when the particle is started at \mathbf{x}_0 at time zero. Then $f(\mathbf{x}, t)$ satisfies the *backward equation*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(\mathbf{x})\nabla\nabla f + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla f \quad (3.2)$$

with the initial condition $f(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$. The mapping that sends $f(\mathbf{x})$ to $f(\mathbf{x}, t)$ is called the *semigroup* associated to this process. On the other hand, let $\rho(\mathbf{x})$ be a density at time zero, and define the density $\rho(\mathbf{x}, t)$ at time t by

$$\int \rho(\mathbf{x}, t)f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \rho(\mathbf{x}_0)f(\mathbf{x}_0, t) d\mathbf{x}_0. \quad (3.3)$$

Then $\rho(\mathbf{x}, t)$ satisfies the equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla (\sigma^2(\mathbf{x})\rho) - \nabla \cdot (\mathbf{b}(\mathbf{x})\rho) \quad (3.4)$$

with the initial condition $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})$. This is the *forward equation* (also called the Kolmogorov equation or the Fokker-Planck equation). The mapping that sends $\rho(\mathbf{x})$ into $\rho(\mathbf{x}, t)$ is the action of the *adjoint semigroup*. The forward equation can also be written in the form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{b}(\mathbf{x})\rho - \frac{1}{2} \nabla (\sigma^2(\mathbf{x})\rho)] = 0. \quad (3.5)$$

The quantity in square brackets is called the *current*.

The equation for a stationary probability density ρ is obtained by setting the time derivative in the forward equation equal to zero. Suppose there is a solution. Then there is a decomposition of the drift \mathbf{b} into two parts, so that $\mathbf{b} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. The decomposition is

$$\mathbf{u}\rho = \frac{1}{2} \nabla (\sigma^2 \rho) \quad (3.6)$$

and

$$\mathbf{v}\rho = \mathbf{b}\rho - \frac{1}{2} \nabla (\sigma^2 \rho). \quad (3.7)$$

Thus $\mathbf{v}\rho$ is the current. If we set $\rho = c \exp(-U)$, then the equation for \mathbf{u} is

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \sigma^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 \nabla U. \quad (3.8)$$

This decomposition gives the decomposition of the operator L that occurs in the backward equation $\partial f / \partial t = Lf$ into a self-adjoint part and a skew-adjoint part. Thus

$$L = \frac{1}{2} \sigma^2 \nabla \nabla + \mathbf{b} \cdot \nabla = [\frac{1}{2} \sigma^2 \nabla \nabla + \mathbf{u} \cdot \nabla] + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (3.9)$$

The self-adjoint part involving \mathbf{u} describes purely diffusive motion that is even under time reversal. The skew-adjoint part involving \mathbf{v} describes deterministic motion that is odd under time reversal. Thus it is given by a first order differential operator.

The condition of *detailed balance* says that the current $\mathbf{v} = 0$, so that $\mathbf{b} = \mathbf{u}$. (This condition is also called time reversibility or self-adjointness.) Since \mathbf{b} is known, it follows that \mathbf{u} is also known. In that case it is relatively easy to solve the equation for the potential U and hence for the probability density $\rho = e^{-U}$.

§ 4. The Ornstein—Uhlenbeck process

The Ornstein—Uhlenbeck process is the special case when the process is of the form $\sigma^2 = Q$, a constant matrix, and $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = -A\mathbf{x}$, a linear vector field. It is possible to solve the stochastic differential equation explicitly. This makes it also possible to solve the backward and forward equations more or less explicitly.

The stochastic differential equation is

$$d\mathbf{x} = -A\mathbf{x} dt + \sigma d\boldsymbol{\omega}(t). \quad (4.1)$$

It has the solution

$$\mathbf{x}(t) = \exp(-tA)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp(-(t-s)A)\sigma\boldsymbol{\omega}(s) ds. \quad (4.2)$$

From this it is easy to see that $\mathbf{x}(t)$ is Gaussian with mean $\exp(-tA)\mathbf{x}_0$ and covariance matrix

$$C_t = \int_0^t \exp(-tA)Q \exp(-tA^*) ds. \quad (4.3)$$

Here A^* denotes the transpose of the matrix A . The solution of the backward equation is the Ornstein—Uhlenbeck semigroup given by

$$f(\mathbf{x}_0, t) = \int f(\exp(-tA)\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) d\mu_t(\mathbf{y}), \quad (4.4)$$

where μ_t is a Gaussian measure with mean zero and covariance C_t . This expression is called the *Mehler formula*.

Assume that the eigenvalues of A have strictly positive real parts. Then the integral

$$C = \int_0^\infty \exp(-tA)Q \exp(-tA^*) ds \quad (4.5)$$

converges. The stationary probability measure is the Gaussian measure μ with this covariance. That is, its density is $\rho(\mathbf{x}) = c \exp(-U(\mathbf{x}))$, where $U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* C^{-1} \mathbf{x}$. The covariance operators C_t have the simple explicit expression in terms of C as

$$C_t = C - \exp(tA)C \exp(-tA^*). \quad (4.6)$$

Furthermore, by differentiation

$$AC + CA^* = Q. \quad (4.7)$$

The problem of computing the covariance C that determines the stationary measure μ reduces to the problem of solving this equation. The solution

is given by the integral expression above, but this is not always easy to compute explicitly.

The condition for detailed balance is that the vector field has the representation $-A\mathbf{x} = -(1/2)Q\nabla U(\mathbf{x})$. This happens when $Q^{-1}A$ is a symmetric matrix, that is, $Q^{-1}A = A^*Q^{-1}$. This in turn may be written as $AQ = QA^*$. The solution C is then given by $C = \frac{1}{2}A^{-1}Q = \frac{1}{2}QA^{*-1}$.

Notice that the condition of detailed balance says that A is self-adjoint with respect to Q^{-1} , that is, that $A = QA^*Q^{-1}$. Equivalently, it says that A^* is self-adjoint with respect to the generating covariance Q , that is, that $A^* = Q^{-1}AQ$. In the following we shall be interested in systems that are very far from satisfying detailed balance. In fact, the generator will be skew-adjoint.

§ 5. Invariant quadratic forms

The Ornstein—Uhlenbeck has a generalization to infinite dimensions. The setting is a Banach space E in which $\exp(-tA)$ acts. This is the space on which the Gaussian measures are concentrated. The continuous linear forms on E form a dual Banach space E^* . These forms in E^* correspond to the linear random variables on E . Then $\exp(-tA^*)$ acts in the dual Banach space E^* .

We shall refer to a non-degenerate positive symmetric quadratic form C on E^* as a covariance operator. We may also think of C as an operator from E^* to E . If there is a Gaussian measure on E with mean zero and with covariance C , then the covariance of two Gaussian random variables u, v in E^* are given by C via the formula uCv . The covariance operator determines the Gaussian measure.

Given a covariance C , we can complete the space E^* in the C inner product. This is the natural space $H(C)$ of Gaussian random variables with finite variance. Since $E^* \subset H(C)$ is dense, we are allowed to think of the dual space of this Hilbert space as a Hilbert space $H(C^{-1})$ with inner product C^{-1} contained in the space E . Thus $H(C^{-1}) \subset E$. Notice that C is an isomorphism from $H(C)$ to $H(C^{-1})$.

Later on we shall need to compare two covariances. If C and S are covariances, and if there exists a constant m such that $C \leq mS$, then it follows that $S^{-1} \leq mC^{-1}$ and hence $CS^{-1}C \leq mC \leq m^2S$. This shows that C is a bounded operator from $H(S)$ to $H(S^{-1})$.

The Ornstein—Uhlenbeck semigroup with generator $-A$ and generating covariance Q is defined as the mapping that sends F into $\exp(-tL)F$ given

by

$$(\exp(-tL)F)(\phi) = \int F(\exp(-tA)\phi + \chi) d\mu_t(\chi). \quad (5.1)$$

Here μ_t is the Gaussian measure with semigroup covariance C_t given in terms of A and Q by the formula of the previous section. This of course is just the expectation of a Gaussian random variable with mean $\exp(-tA)\phi$ and covariance C_t .

There is also a dual action of the Ornstein—Uhlenbeck semigroup on measures. If the expression for C given above converges, then there is a stationary Gaussian measure with this covariance.

Here is a situation that is rather far from detailed balance. Consider a positive quadratic form S such that $\exp(-tA)S\exp(-tA^*) = S$. This says that the group $\exp(-tA^*)$ leaves the S inner product invariant and therefore is a unitary group on $H(S)$. The equation may also be written as $\exp(-tA^*)S^{-1}\exp(-tA) = S^{-1}$. It then says that the group $\exp(-tA)$ leaves the S^{-1} inner product invariant and therefore is a unitary group of operators on $H(S^{-1})$. These equations have infinitesimal forms $AS + SA^* = 0$ and $A^*S^{-1} + S^{-1}A = 0$. The first condition says that A^* is skew-adjoint with respect to S , that is, that $A^* = -S^{-1}AS$. The other condition says that A is skew-adjoint with respect to S^{-1} , that is, that $A = -SA^*S^{-1}$. Since S is an isomorphism from $H(S)$ to $H(S^{-1})$, it follows in particular that A and $-A^*$ are isomorphic as operators on the two Hilbert spaces.

In such an example there can be a stationary measure only in the infinite dimensional situation. Also, there is no longer a unique stationary Gaussian measure C satisfying $AC + CA^* = Q$ for the Ornstein—Uhlenbeck process. In fact, each Gaussian measure with covariance $C + aS$ with $a \geq 0$ is also stationary.

Theorem 1. *Consider an Ornstein—Uhlenbeck semigroup with generator $-A$ and generating covariance Q . Consider another covariance S such that $Q \leq kS$. Suppose that A is skew-adjoint with respect to S^{-1} , so that $\exp(-tA)$ leaves S^{-1} invariant. Say that the stationary covariance*

$$C = \int_0^\infty \exp(-tA)Q\exp(-tA^*) dt \quad (5.2)$$

exists and satisfies $C \leq mS$. Then A has absolutely continuous spectrum.

Proof. The operator QS^{-1} is bounded as an operator on $H(S^{-1})$. Further-

more, we can write

$$CS^{-1} = \int_0^\infty \exp(-tA)QS^{-1} \exp(tA) dt. \tag{5.3}$$

Thus as operators in this space QS^{-1} is positive and CS^{-1} is bounded. It follows from a standard fact in quantum scattering theory [3] that A has absolutely continuous spectrum. \square

§ 6. The renormalization group

We now want to consider a situation in which there are two covariances and two generators of unitary groups. The first covariance defines a Hilbert space that will be denoted by H . The inner product defined by this covariance is used to identify H with its dual space. Thus the covariance may be represented by the identity operator. Its associated generator is B with $B + B^* = 0$. The operator $B = -B^*$ is skew-adjoint in H .

The second covariance is denoted by S and the generator is A with $AS + SA^* = 0$. Thus there is a Hilbert space $H(S)$ with inner product given by S , and the operator A^* is skew-adjoint in this space. Also there is a dual Hilbert space Hilbert space $H(S^{-1})$ with inner product given by S^{-1} , and the operator A is skew-adjoint in this space. The inner product of H may be used to identify the covariance S with an operator acting in H .

In order to characterize the usual renormalization group make the hypothesis

$$A = B + 1. \tag{6.1}$$

This gives the identity $A + A^* = 2$. This in turn leads to the commutator identity $AS - SA = -2S$.

Proposition 1. *The identities $AS + SA^* = 0$ and $A + A^* = 2$ imply that*

$$\exp(-tA)f(S) \exp(-tA^*) = e^{-2t}f(e^{2t}S). \tag{6.2}$$

In infinitesimal form, this is

$$Af(S) + f(S)A^* = -2Sf'(S) + 2f(S). \tag{6.3}$$

Proof. We have

$$\exp(-tA)S \exp(-tA^*) = S. \tag{6.4}$$

Hence

$$\exp(-tA)S \exp(tA) = e^{2t}S, \tag{6.5}$$

and so

$$\exp(-tA)f(S) \exp(tA) = f(e^{2t}S) \tag{6.6}$$

Finally,

$$\exp(-tA)f(S)\exp(-tA^*) = e^{-2t}f(e^{2t}S) \quad (6.7)$$

□

Corollary 1. *Under the same hypothesis, we have*

$$\exp(-tA)f(S^{-1})\exp(-tA^*) = e^{-2t}f(e^{-2t}S^{-1}). \quad (6.8)$$

In infinitesimal form, this is

$$Af(S^{-1}) + f(S^{-1})A^* = 2S^{-1}f'(S^{-1}) + 2f(S^{-1}). \quad (6.9)$$

Say that $Q = g(S^{-1})$. Then we can use the infinitesimal equation to solve for $C = f(S^{-1})$ satisfying $AC + CA^* = Q$. We get the differential equation $2[u f'(u) + f(u)] = g(u)$ with solution determined by $2f(u) = (1/u)G(u)$, where $G'(u) = g(u)$ with $G(0) = 0$. So $C = (1/2)SG(S^{-1})$.

Theorem 2. *Consider an Ornstein—Uhlenbeck process with generator $-A$ satisfying $A + A^* = 2$ such that there is an invariant covariance S with $AS + SA^* = 0$. Let the generating covariance defining the Ornstein—Uhlenbeck process be defined by $Q = g(S^{-1})$. Let $G'(u) = g(u)$ with $G(0) = 0$. Then the semigroup covariance is*

$$C_t = \int_0^t \exp(-sA)Q \exp(-sA^*) ds = \frac{1}{2}S[G(S^{-1}) - G(e^{-2t}S^{-1})] \quad (6.10)$$

with limit

$$C = \int_0^\infty \exp(-sA)Q \exp(-sA^*) ds = \frac{1}{2}SG(S^{-1}). \quad (6.11)$$

Proof. From the previous result

$$C_t = \int_0^t e^{-2s}g(e^{-2s}S^{-1}) ds = \frac{1}{2}S \int_{e^{-2t}S^{-1}}^{S^{-1}} g(u) du. \quad (6.12)$$

□

It remains to choose the function g with $Q = g(S^{-1})$ and compute the corresponding C_t . One example where it is easy to compute is when $g(u) = e^{-u}$ and $G(u) = 1 - e^{-u}$.

However there is another example that will make the physical interpretation more transparent. This is where $g(u)$ is a smooth approximation to $\delta(u - 1)$, that is, a bump concentrated near one. Then $G(u)$ is a smooth approximation to the indicator function of the interval from 1 to infinity. It follows that $G(u) - G(e^{-2t}u)$ is a smooth approximation to the indicator function of the interval from 1 to e^{2t} .

The example in view is when the Hilbert space is $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ with $n > 2$. The first covariance is just the usual inner product on this Hilbert space. The skew-adjoint operator B is given by

$$B = -x \cdot \nabla - \frac{n}{2}. \quad (6.13)$$

Then

$$(\exp(-tB)u)(x) = u(e^t x) e^{tn/2} \quad (6.14)$$

is a unitary group of scaling transformations.

The other covariance in this example is $S = (-\Delta)^{-1}$. The reason for taking $n > 2$ is so that this covariance is defined for nice functions. The corresponding inverse covariance is the negative of the Laplace operator, that is, $S^{-1} = -\Delta$. The generator $-A = -B - 1$ satisfies $AS + SA^* = 0$.

In this application the spectral values of $S^{-1} = -\Delta$ correspond via the Fourier transform to squares $u = |\mathbf{k}|^2$ of wave numbers \mathbf{k} . One has an initial measure that describes fluctuations roughly in some range of wave numbers $|\mathbf{k}|$ from 0 to 1. One wants to effectively integrate out the fluctuations with wave numbers $|\mathbf{k}|$ in the interval from e^{-t} to 1, thus getting the effective behavior for small wave numbers.

This is implemented by the Ornstein—Uhlenbeck process in the following way. The first thing is to scale the wave numbers by e^t . This gives a new range of $|\mathbf{k}|$ from 0 to e^t . Then the covariance C_t integrates effectively over the range of wave numbers $|\mathbf{k}|$ from 1 to e^t . This leaves the resulting wave numbers $|\mathbf{k}|$ in the range from 0 to 1. These give an effective description of the behavior of the original problem for very low values of wave number, that is, for very long distances.

There is much more to be said about infinite dimensional Ornstein—Uhlenbeck semigroups and about the renormalization group example. One of the most interesting issues is the non-uniqueness of stationary measures [1]. In particular, there can be non-Gaussian stationary measures. The paper [2] gives the beginning of such an analysis.

Bibliography

1. V. I. Bogachev, M. Röckner, and B. Schmulland, *Generalized Mehler semigroups and applications*, Probability Theory and Related Fields **105** (1996), 193–225.
2. W. G. Faris, *Ornstein—Uhlenbeck and renormalization semigroups*, Moscow Mathematical J. **1** (2001), 389–405.
3. T. Kato, *Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators*, Math. Ann. **162** (1966), 258–279.
4. E. Nelson, *Topics in Dynamics I: Flows*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1969.

Б. Фейгин, Е. Фейгин

Интегрируемые $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модули как бесконечные тензорные произведения

Аннотация

Используя скрученное произведение представлений алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 , мы строим набор интегрируемых $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модулей L^D со старшим весом, зависящих от вектора $D \in \mathbb{N}^{k+1}$. При специальных D наша конструкция даёт неприводимые модули $L_{i,k}$. В работе строится базис L^D и изучается разложение L^D на неприводимые компоненты. Мы также выписываем явные формулы для характера L^D .

Введение

В работе приводится способ построения $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модулей как предела конечномерных представлений алгебры полиномиальных токов. При этом мы используем понятие скрученного произведения конечномерных представлений \mathfrak{sl}_2 , определённого в [2] и изучавшегося в [1]. Напомним основные определения.

Пусть $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ — алгебра Ли полиномиальных токов на прямой с поточечным коммутатором. Пусть e, f, h — стандартный базис \mathfrak{sl}_2 . Для неприводимого представления π алгебры \mathfrak{sl}_2 и комплексного числа z определим действие $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ на π следующим образом: $(x \otimes t^i) \cdot v = z^i x \cdot v$, $x \in \mathfrak{sl}_2$, $v \in \pi$. Обозначим получившийся $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ -модуль через $\pi(z)$.

Пусть π_1, \dots, π_n — неприводимые представления \mathfrak{sl}_2 , $\dim \pi_i = a_i$. Пусть $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, причём все z_i попарно различны. Рассмотрим тензорное произведение $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ -модулей $\pi_1(z_1) \otimes \dots \otimes \pi_n(z_n)$. Если v — произведение старших векторов π_i , то $\pi_1(z_1) \otimes \dots \otimes \pi_n(z_n)$ является циклическим $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ -модулем с циклическим вектором v ,

$$\pi_1(z_1) \otimes \dots \otimes \pi_n(z_n) = U(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]) \cdot v.$$

Обозначим через $\pi_1 * \dots * \pi_n$ присоединённый градуированный модуль относительно фильтрации по степени t на $U(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t])$. Будем называть этот модуль скрученным произведением π_1, \dots, π_n .

В работе мы доказываем существование инъективных гомоморфизмов между различными скрученными произведениями. А именно, пусть $a_1 \leq \dots \leq a_n$. Тогда, если $a_i = a_{i+1}$, то имеем вложение

$$\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_{i-1}} * \mathbb{C}^{a_{i+2}} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} \hookrightarrow \mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}. \quad (1)$$

Кроме того, имеется изоморфизм $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ -модулей

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}) / (\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_{i-1}} * \mathbb{C}^{a_{i+2}} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}) &\simeq \\ &\simeq \mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_{i-1}} * \mathbb{C}^{a_{i-1}} * \mathbb{C}^{a_{i+1}+1} * \mathbb{C}^{a_{i+2}} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}. \end{aligned} \quad (2)$$

(Заметим, что аналогичные формулы были положены в основу определения суперномиальных коэффициентов в работах Шиллинг и Варнаара, см. [3, 4, 10]). Пусть теперь $a_1 < a_2$. Мы строим вложение

$$\mathbb{C}^{a_2-a_1+1} * \mathbb{C}^{a_3} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} \hookrightarrow \mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}, \quad (3)$$

причём имеется изоморфизм $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ -модулей:

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}) / (\mathbb{C}^{a_2-a_1+1} * \mathbb{C}^{a_3} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}) &\simeq \\ &\simeq \mathbb{C}^{a_1-1} * \mathbb{C}^{a_2+1} * \mathbb{C}^{a_3} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вышеописанные вложения являются частным случаем более общей ситуации. А именно, пусть $i < j$, $A = (a_1, \dots, a_n)$. Тогда в скрученном произведении \mathbb{C}^{a_i} существует подмодуль $S_{i,j}(A)$, такой что

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} / S_{i,j}(A) &\simeq \\ &\simeq \mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_{i-1}} * \mathbb{C}^{a_{i-1}} * \mathbb{C}^{a_{i+1}} * \dots * \mathbb{C}^{a_{j-1}} * \mathbb{C}^{a_j+1} * \mathbb{C}^{a_{j+1}} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}. \end{aligned} \quad (5)$$

По аналогии с формулой (4) можно предположить, что

$$S_{i,j}(A) \simeq \mathbb{C}^{a_j-a_i+1} * \mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_{i-1}} * \mathbb{C}^{a_{i+1}} * \dots * \mathbb{C}^{a_{j-1}} * \mathbb{C}^{a_j+1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}. \quad (6)$$

Однако для общих i, j это неверно. Задача изучения структуры $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ -модулей $S_{i,j}(A)$ кажется нам важной и интересной. Мы надеемся вернуться к ней в дальнейшем.

Формулы (1),(2) и (3),(4) могут быть проинтерпретированы как формулы для тензорного произведения неприводимых \mathfrak{sl}_2 -модулей. А именно

$$\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^a = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{a-1} \otimes \mathbb{C}^{a+1} \text{ для (1), (2);} \quad (7)$$

$$\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b = \mathbb{C}^{b-a+1} \oplus \mathbb{C}^{a-1} \otimes \mathbb{C}^{b+1}, \quad a < b \text{ для (3), (4).} \quad (8)$$

Важным частным случаем (1) является следующее вложение:

$$\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} \hookrightarrow \mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} * \mathbb{C}^{a_n} * \mathbb{C}^{a_n}. \quad (9)$$

Используя (9), мы можем определить индуктивный предел

$$\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} * (\mathbb{C}^{a_n})^{*2\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} * (\mathbb{C}^{a_n})^{*2s}. \quad (10)$$

Из определений следует, что $\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} * (\mathbb{C}^{a_n})^{*2\infty}$ является $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ -модулем. Однако мы покажем (см. предложение 2), что на самом деле на нашем пространстве имеется структура представления $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus c\mathbb{C}$, где c — центральный элемент — действует умножением на $a_n - 1$. Для того, чтобы увидеть связь между $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модулями и скрученным произведением, опишем последнее в терминах неприводимых $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модулей.

Напомним, что алгебра Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ равна $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus c\mathbb{C}$, а коммутатор устроен следующим образом $((\cdot, \cdot)$ -форма Киллинга на \mathfrak{sl}_2 , $x_i = x \otimes t^i$):

$$[c, x_i] = 0, \quad [x_i, y_j] = [x, y]_{i+j} + (x, y) i \delta_{i+j,0} \cdot c, \quad x, y \in \mathfrak{sl}_2.$$

Неприводимые интегрируемые представления $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ уровня k (т. е. c действует на них умножением на k) обозначаются $L_{i,k}$, $i = 0, \dots, k$. При этом в $L_{i,k}$ существует такой вектор $v_{i,k}$, что $L_{i,k} = U(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \cdot v_{i,k}$, а также

$$e_{\leq 0} v_{i,k} = f_{< 0} v_{i,k} = h_{< 0} v_{i,k} = 0, \quad c v_{i,k} = k v_{i,k}, \quad h_0 v_{i,k} = i v_{i,k}. \quad (11)$$

(Несмотря на то, что чаще за операторы рождения принимаются операторы из $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]$, нам удобнее определить $L_{i,k}$ как в (11)). Кроме того, в $L_{i,k}$ действует оператор d , удовлетворяющий соотношению $[d, x_i] = i x_i$, $d v_{i,k} = 0$. Ясно, что $L_{i,k}$ биградуированы операторами h_0, d . Будем обозначать градуировку по h_0 через \deg_z и градуировку по d через \deg_q .

Напомним, что в $L_{0,1}$ имеется набор экстремальных векторов $v(2i)$, $i \in \mathbb{Z}$, таких что

$$v(0) = v_{0,1}, \quad e_{2i+1} v(2i) = v(2i+2).$$

Аналогично, $L_{1,1}$ содержит экстремальные вектора $v(2i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$:

$$v(1) = v_{1,1}, \quad e_{2i} v(2i-1) = v(2i+1).$$

Для натуральных чисел $b_1 \geq \dots \geq b_k$ определим подпространство $M(b_1, \dots, b_k)$ в $L_{p_1,1} \otimes \dots \otimes L_{p_k,1}$, где p_i равны 0 или 1, причём чётности p_i и b_i совпадают. А именно:

$$M(b_1, \dots, b_k) = U(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]) \cdot (v(-b_1) \otimes \dots \otimes v(-b_k)).$$

Оказывается, что $M(b_1, \dots, b_k)$ изоморфно некоторому скрученному произведению. Для того, чтобы сделать точное утверждение отметим, что по определению скрученное произведение есть $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ -модуль. Однако

везде в дальнейшем нам будет удобно считать его $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]$ -модулем (сделав замену $t \rightarrow t^{-1}$). С точностью до этого замечания верно следующее утверждение:

Утверждение 1.

$M(b_1, \dots, b_k) \simeq (\mathbb{C}^2)^{*b_1-b_2} * (\mathbb{C}^3)^{*b_2-b_3} * \dots * (\mathbb{C}^k)^{*b_{k-1}-b_k} * (\mathbb{C}^{k+1})^{*b_k}$
как $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]$ -модули.

В дальнейшем нам удобно будет перейти от набора $A = (a_1, \dots, a_n)$ к ассоциированному набору

$$D = (d_1, \dots, d_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1} : d_i = \#\{j : a_j = i\}, k + 1 = a_n = \max\{a_i\}.$$

Обозначим определённый нами в (10) индуктивный предел через L^D :

$$L^D = \lim_{s \rightarrow \infty} (\mathbb{C}^1)^{*d_1} * (\mathbb{C}^2)^{*d_2} * \dots * (\mathbb{C}^{a_n-1})^{*d_{a_n-1}} * (\mathbb{C}^{a_n})^{*(d_{a_n}+2s)} \quad (12)$$

(при этом можно считать, что d_{a_n} равно 0 или 1). Мы покажем, что на самом деле, L^D является подпредставлением в тензорном произведении неприводимых $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модулей уровня 1, порождённым действием $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ на некоторое произведение экстремальных векторов. Для доказательства мы используем реализацию представлений уровня 1 в так называемом пространстве фермионов (полубесконечных форм) F . Дадим его краткое описание.

Пусть $\psi(i), \phi(j), i, j \in \mathbb{Z}$ — попарно антикоммутирующие переменные (фермионы). В частности $\psi(i)^2 = \phi(j)^2 = 0$. Базис пространства F образуют «полубесконечные» мономы от переменных $\phi(i), \psi(j)$. Точнее, выражения вида

$$\dots \psi(N-1)\phi(N-1)\psi(N)\phi(N)\psi(i_1) \dots \psi(i_k)\phi(j_1) \dots \phi(j_l), \quad (13)$$

$$N < i_1 < \dots < i_k, N < j_1 < \dots < j_l.$$

В F действуют операторы $\psi(i), \phi(j)$ умножения на соответствующий фермион и операторы дифференцирования $\psi(i)^*, \phi(j)^*$ по переменным $\psi(-j), \phi(-i)$ соответственно. Таким образом выполняются коммутационные соотношения $([a, b]_+ = ab + ba)$:

$$[\psi^*(i), \psi(j)]_+ = \delta_{i+j,0}, [\phi^*(i), \phi(j)]_+ = \delta_{i+j,0}.$$

Действие операторов из $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ вводится на F следующим образом (везде в дальнейшем $a(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^i$):

$$e(z) = \psi(z)\phi(z), \quad f(z) = \psi^*(z)\phi^*(z), \quad c = \text{Id}.$$

Определим вектора $v(i) \in F$:

$$\begin{aligned} v(2N) &= \dots \psi(N-1)\phi(N-1)\psi(N); \\ v(2N+1) &= \dots \psi(N-1)\phi(N-1)\psi(N)\phi(N). \end{aligned}$$

Мы покажем, что $\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} \hookrightarrow F^{\otimes(a_n-1)}$. Точнее

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} &\simeq \\ &\simeq U(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]) \cdot (v(-d_2 - \dots - d_{a_n}) \otimes \dots \otimes v(-d_{a_n})) \quad (14) \end{aligned}$$

(см. утверждение 1).

Используя это фермионное вложение, мы для неприводимых представлений $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ получаем следующие равенства (см. [2]):

$$L_{i,k} = \mathbb{C}^{i+1} * (\mathbb{C}^{k+1})^{*2\infty}.$$

Действительно, легко видеть, что $L_{i,k}$ могут быть вложены в $F^{\otimes k}$ как объединение «кусков» вида (14). На самом деле, для всех D модуль L^D также является подпространством в $F^{\otimes k}$.

Таким образом, по вектору $D \in \mathbb{N}^{k+1}$ мы построили $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модуль L^D уровня k . В работе мы приводим конструкцию для базиса L^D . Здесь мы дадим её описание для вакуумного неприводимого представления $L_{0,k}$.

Пусть $v_{0,k}$ — старший вектор $L_{0,k}$. Мы реализовали $L_{0,k}$ как предел вложенных циклических $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]$ -модулей с циклическими векторами ω_s , $s = 1, 2, \dots$. В нашем случае

$$\omega_s = f_1^k f_3^k \dots f_{2s-1}^k v_{0,k}.$$

Обозначим через $e^i(j)$ коэффициент при z^j в $e(z)^i$. Мы докажем, что базисом в $L_{0,k}$ является объединение по $s = 1, 2, \dots$ векторов вида

$$\begin{aligned} e^k(I^k) \dots e(I^1) \omega_s &= \\ &= e^k(i_1^k) \dots e^k(i_k^k) e^{k-1}(i_1^{k-1}) \dots e^{k-1}(i_{k-1}^{k-1}) \dots e(i_1^1) \dots e(i_1^1) \omega_s, \quad (15) \\ & i_j^\alpha + 2\alpha \leq i_{j+1}^\alpha, \\ & i_j^\alpha \geq (-2s+1)\alpha + \alpha(l_k + \dots + l_{\alpha+1})(l_k + \dots + l_{\alpha+1} + 1). \end{aligned}$$

Как любой интегрируемый $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модуль со старшим весом, L^D раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений. Имеем разложение:

$$L^D = M_1 \otimes L_{0,k} \oplus \dots \oplus M_{k+1} \otimes L_{k,k}, \quad \dim M_i = c_{i,D}.$$

Мы показываем, что M_i градуированные пространства, а числа $c_{i,D}$ являются структурными константами алгебры Верлинде V_{k+1} , ассоциирован-

ной с \mathfrak{sl}_2 . Кроме того, из наших результатов следует, что характеры M_i являются ограниченными полиномами Костки (см. [9], [10]). Напомним определение алгебры Верлинде.

Рассмотрим линейное пространство с базисом π_1, π_2, \dots и умножением ($i \leq j$) $\pi_i \pi_j = \pi_{j-i+1} + \dots + \pi_{i+j-1}$ (образующие перемножаются как конечномерные представления \mathfrak{sl}_2). По определению, $V_k = \langle \pi_1, \pi_2, \dots \rangle / (\pi_{k+1})$. Мы покажем, что в алгебре V_{k+1} выполняются соотношения:

$$\pi_D = \pi_1^{d_1} \dots \pi_k^{d_k} \pi_{k+1}^{d_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} c_{i,D} \pi_i.$$

Доказательство заключается в проверке того, что определяющие соотношения из алгебры Верлинде выполняются для наших модулей. А именно, мы проверяем, что

$$\text{если } \pi_D = \pi_{D'} + \pi_{D''}, \text{ то } L^D \simeq L^{D'} \oplus L^{D''}. \tag{16}$$

При этом выбор троек D, D', D'' подсказан соотношениями (2), (4).

Напомним, что в [1] была фактически получена формула для характера $\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}$, выраженная через мультиномиальные коэффициенты (см. [3],[4]). Используя эту формулу, мы получаем выражение для характера L^D . В частности, мы получаем формулу для характеров неприводимых представлений $L_{i,k}$, которая совпадает с формулой из [5]. Кроме того, в качестве приложения, мы чисто комбинаторными методами на уровне характеров проверяем часть равенств $L^D \simeq L^{D'} \oplus L^{D''}$.

В заключение, напомним способ изучения скрученного произведения из [1]. Мы используем описанную ниже конструкцию в качестве одного из основных доказательных средств.

Как мы уже замечали,

$$\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} \simeq U(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]) \cdot v.$$

В то же время легко видеть, что весь модуль порождается уже действием операторов e_0, \dots, e_{-n+1} . Таким образом, получаем

$$\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n} \simeq \mathbb{C}[e_{-n+1}, \dots, e_0] / I^A = M^A,$$

где I^A некоторый идеал в кольце $\mathbb{C}[e_{-n+1}, \dots, e_0]$. Рассмотрим изоморфизм колец:

$$opp: \mathbb{C}[e_{-n+1}, \dots, e_0] \rightarrow \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}], \quad opp(e_i) = e_{i+n-1}.$$

Обозначим

$$J^A = opp(I^A), \quad W^A = \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}] / J^A.$$

Тогда в W^A выполняются следующие (определяющие) соотношения на производящую функцию $e^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i z^i$:

$$e^{(n)}(z)^i \div z^{\sum_{j=1}^n (i+1-a_j)_+}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $s_+ = 0$ при $s \leq 0$, $s_+ = s$ при $s > 0$; для многочленов p, q запись $p \div q$ означает, что p делится на q . Другими словами, коэффициенты $e^{(n)}(z)^i, i = 1, 2, \dots$ при степенях, меньших $\sum_{j=1}^n (i+1-a_j)_+$, порождают идеал J^A .

Наша работа построена следующим образом:

В первой части описывается пространство фермионов F как $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модуль (параграф 2.1) и строится вложение W^A в $F^{\otimes k}$ (теорема 2.1).

Во второй части мы строим $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модуль L^D (предложение 1) и находим в нём базис (теорема 2).

В третьей части мы доказываем формулу для разложения $L^D \simeq L^{D'} \oplus \oplus L^{D''}$ (теорема 3), а также устанавливаем связь между разложением наших модулей на неприводимые компоненты и алгеброй Верлинде (предложение 5).

В последней части мы выписываем формулу для характера L^D (теорема 4) и как следствие получаем формулу для характеров неприводимых представлений $L_{i,k}$ (следствие 5). Кроме того, мы доказываем на уровне характеров соотношения вида $L^D \simeq L^{D'} \oplus L^{D''}$ (предложение 6).

Замечание 1. В терминологии работ [3],[4] теорема 4 содержит «фермионную» формулу для характера L^D . Существует также и «бозонная» (знакопеременная) формула, тесно связанная с геометрией пространства флагов. Мы надеемся вернуться к этому в дальнейшем.

Благодарности. Первый автор был частично поддержан следующими грантами: CRDF RP1-2254, INTAS 00-55, РФФИ 00-15-96579. Второй автор был частично поддержан грантом РФФИ 03-01-00167.

§ 1. Фермионная картина

1.1. Пространство фермионов (полубесконечных форм).

Рассмотрим два набора попарно антикоммутирующих переменных $\psi(i), \phi(j), i, j \in \mathbb{Z}$. Пусть F — линейное пространство с базисом

$$\dots \psi(N-1)\phi(N-1)\psi(N)\phi(N)\psi(i_1) \dots \psi(i_s)\phi(j_1) \dots \phi(j_t), \quad (1)$$

$$s, t \in \mathbb{N}, N, i_\alpha, j_\beta \in \mathbb{Z}, N < i_1 < \dots < i_s, N < j_1 < \dots < j_t.$$

Другими словами, мы рассматриваем подпространство в пространстве бесконечных мономов от переменных $\phi(i), \psi(j)$, натянутое на произведения, для которых найдётся такое N , что все $\phi(\leq N), \psi(\leq N)$ являются сомножителями. Кроме того, номера всех сомножителей должны быть ограничены сверху. Будем называть такие бесконечные мономы конфигурациями, а произведение $\prod_{i=-\infty}^N \psi(i)\phi(i)$ хвостом конфигурации. Ясно, что переменные, не входящие в хвост, могут быть переупорядочены произвольным образом, учитывая коммутационные соотношения.

Определим действие операторов $\psi(i), \phi(i), \psi^*(i), \phi^*(i)$ на F . Для того, чтобы подействовать оператором $\psi(i)$ ($\phi(i)$) на конфигурацию v , надо v домножить на $\psi(i)$ ($\phi(i)$) («приписать справа»), а затем переупорядочить. Например, если в v есть сомножитель $\psi(i)$ ($\phi(i)$), то $\psi(i)v = 0$ ($\phi(i)v = 0$).

В свою очередь операторы $\psi^*(i), \phi^*(i)$ являются операторами дифференцирования по переменным $\psi(-i), \phi(-i)$ соответственно. При этом выполняются следующие коммутационные соотношения ($[a, b]_+ = ab + ba$):

$$\begin{aligned} [\psi^*(i), \psi(j)]_+ &= \delta_{i+j,0}, & [\phi^*(i), \phi(j)]_+ &= \delta_{i+j,0}, \\ [\psi^*(i), \phi(j)]_+ &= [\phi^*(i), \psi(j)]_+ = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Кроме того, все $\psi^*(i), \phi^*(j)$ попарно антикоммутируют.

Введём производящие функции наших операторов:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi(i)z^i, & \phi(z) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi(i)z^i, \\ \psi^*(z) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi^*(i)z^i, & \phi^*(z) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi^*(i)z^i. \end{aligned} \tag{3}$$

Напомним, как строится действие алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] + c\mathbb{C}$ на F . Центральный элемент действует единицей (т. е. F — представление уровня 1). Далее, зададим действие производящих функций элементов e_i, f_i на F следующим образом (для $x \in \mathfrak{sl}_2$ обозначим $x_i = x \otimes t^i$):

$$e(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} e_i z^i = \psi(z)\phi(z); \quad f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i z^i = \psi^*(z)\phi^*(z), \tag{4}$$

(при этом $h(z)$ определяется из коммутационных соотношений).

Введём следующие обозначения ($v(i) \in F$):

$$\begin{aligned} v(2N) &= \dots \psi(N-2)\phi(N-2)\psi(N-1)\phi(N-1)\psi(N); \\ v(2N+1) &= \dots \psi(N-1)\phi(N-1)\psi(N)\phi(N). \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что $e_{N+1}v(N) = v(N+2), e_{\leq N}v(N) = 0$.

Заметим также, что на пространстве $F^{\otimes k}$ имеется естественная структура интегрируемого $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модуля уровня k .

1.2. Вложение $\mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}]$ -модулей в пространство фермионов.

Напомним, что в [1] для $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ был определён $\mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}]$ -модуль W^A следующим образом: $W^A = \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}]/J^A$, где J^A идеал в $\mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}]$, порождённый условиями на производящую функцию $e^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i z^i$:

$$e^{(n)}(z)^i \div z^{\sum_{j=1}^n (i+1-a_j)_+} \quad (6)$$

(мы используем обозначение $s_+ = 0$, если $s < 0$, и $s_+ = s$, если $s \geq 0$; $p \div q$ означает, что p делится на q). Другими словами, первые $\sum_{j=1}^n (i+1-a_j)_+ - 1$ коэффициентов $e^{(n)}(z)^i$, $i = 1, 2, \dots$ порождают J^A .

Пусть $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $a_1 \leq \dots \leq a_n$. В [1] было доказано следующее утверждение:

Утверждение 2. *Существует вложение $W^{(a_1, \dots, a_{n-1})} \hookrightarrow W^A$, причём фактор $W^A/W^{(a_1, \dots, a_{n-1})}$ изоморфен $W^{a_1, \dots, a_{n-1}, a_n-1}$.*

Из этого по индукции следует, что $\dim W^A = \prod_{i=1}^n a_i$.

Пусть $k+1 = a_n$, $d_j = \#\{i: a_i = j\}$, $j = 1, \dots, k+1$. Тогда будем говорить, что набор $D = (d_1, \dots, d_{k+1})$ ассоциирован с A . Определим вектор $v_A \in F^{\otimes k}$:

$$v_A = v(-1 + d_1) \otimes v(-1 + d_1 + d_2) \otimes \dots \otimes v(-1 + d_1 + \dots + d_k). \quad (7)$$

Обозначим $\widetilde{W}^A = \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}] \cdot (v_A)$, $\widetilde{W}^A \hookrightarrow F^{\otimes k}$. Докажем следующую теорему вложения:

Теорема 1. $\widetilde{W}^A \simeq W^A$ как $\mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}]$ -модули.

Доказательство. Докажем сначала, что в $F^{\otimes k}$ выполняется

$$e^{(n)}(z)^i (v_A) \div z^{\sum_{j=1}^n (i+1-a_j)_+}$$

(другими словами, коэффициенты $e^{(n)}(z)^i (v_A)$ при степенях меньших, чем $\sum_{j=1}^n (i+1-a_j)_+$ равны 0). Для этого заметим, что

$$e(z)^i v_A \div z^{\sum_{j=1}^n (i+1-a_j)_+}, \quad \text{при } i \leq k; \quad e(z)^i v_A = 0 \quad \text{при } i > k$$

(первое — следствие того, что $e_{\leq N}v(N) = 0$, второе верно, т. к. $e(z)^{k+1} = 0$ в $F^{\otimes k}$). Значит, при всех i

$$e(z)^i v_A \div z^{\sum_{j=1}^n (i+1-a_j)_+}.$$

Далее ($x = -\sum_{i=n}^{\infty} z^{i-n} e_i$):

$$e^{(n)}(z)^i v_A = (e(z) + z^n x)^i v_A = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (e(z)^{i-j} z^{nj} x^j v_A).$$

Заметим, что

$$(e(z)^{i-j} z^{nj}) v_A \div z^{\sum_{l=1}^n (i+1-a_l)_+},$$

т. к.

$$nj + \sum_{l=1}^n (i-j+1-a_l)_+ \geq \sum_{l=1}^n (i+1-a_l)_+.$$

Итак, $J^A \cdot v_A = 0$ и стало быть, $\dim \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}] \cdot v_A \leq \prod_{i=1}^n a_i$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\dim \widetilde{W}^A = \prod a_i$.

В формулировке следующей леммы использованы обозначения:

$$Aa_{n+1} = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}), \quad A(a_{n+1}-1) = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}-1).$$

Лемма 1. Пусть $A = (a_1, \dots, a_n)$, $a_1 \leq \dots \leq a_n$. Пусть $a_{n+1} \geq a_n$. Обозначим через $B_1 \subset \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}]$, $B_2 \subset \mathbb{C}[e_0, \dots, e_n]$ такие наборы мономов, что $B_1 v_A = \{x v_A, x \in B_1\}$, $B_2 v_{A(a_{n+1}-1)} = \{x v_{A(a_{n+1}-1)}, x \in B_2\}$ линейно независимые множества в \widetilde{W}^A и $\widetilde{W}^{A(a_{n+1}-1)}$ соответственно. Пусть $e_n B_2 = \{e_n x, x \in B_2\}$. Тогда $B_1 v_{Aa_{n+1}} \cup (e_n B_2) v_{Aa_{n+1}}$ линейно независимое множество векторов в $\widetilde{W}^{Aa_{n+1}}$.

Доказательство. Мы рассмотрим отдельно 3 случая:

$$a_{n+1} > a_n + 1, \quad a_{n+1} = a_n + 1, \quad a_{n+1} = a_n.$$

1. $a_{n+1} > a_n + 1$.

Заметим, что в этом случае

$$v_1 = v_A = v(-1 + d_1) \otimes \dots \otimes v(-1 + d_1 + \dots + d_{a_n-1}), \quad (8)$$

$$v_2 = v_{A(a_{n+1}-1)} = v_A \otimes v(-1 + n)^{\otimes (a_{n+1}-a_n-1)},$$

$$v_3 = v_{Aa_{n+1}} = v_{A(a_{n+1}-1)} \otimes v(-1 + n).$$

Пусть $b_2 \in B_2$, $b_2 = e_n^j x$, $x \in \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}]$. Напомним, что

$$e_{<n} v(-1 + n) = 0, \quad e_n v(-1 + n) = v(1 + n), \quad e_n^2 v(-1 + n) = 0. \quad (9)$$

Но тогда сумма таких слагаемых в $e_n b_2 v_3$, что последний сомножитель изменился (т. е. равен не $v(-1+n)$, а $v(1+n)$), равна

$$(i+1)b_2 v_2 \otimes v(1+n). \quad (10)$$

Таким образом, т. к. $B_2 v_2$ линейно независимо, то и $e_n B_2 v_3$ тоже. Линейная независимость $B_1 v_3$ очевидна, т. к. $B_1 \subset \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}]$ и значит для $b_1 \in B_1$

$$b_1 v_3 = b_1 v_1 \otimes v(-1+n)^{\otimes(a_{n+1}-a_n)}. \quad (11)$$

Осталось проверить, что $B_1 v_3$ и $e_n B_2 v_3$ независимы в совокупности. Однако это следствие формулы (11) и рассуждений, приводящих к формуле (10).

2. $a_{n+1} = a_n + 1$

В этом случае

$$v_A = v(-1+d_1) \otimes \dots \otimes v(-1+d_1+\dots+d_{a_n-1}), \quad (12)$$

$$v_{A(a_{n+1}-1)} = v_A,$$

$$v_{Aa_{n+1}} = v_A \otimes v(-1+n).$$

Доказательство полностью повторяет предыдущее.

3. $a_{n+1} = a_n$

В этом случае

$$v_1 = v_A = v(-1+d_1) \otimes \dots \otimes v(-1+d_1+\dots+d_{a_n-1}),$$

$$v_3 = v_{Aa_{n+1}} = v_A,$$

$$v_2 = v_{A(a_{n+1}-1)} = v(-1+d_1) \otimes \dots \otimes v(-1+d_1+\dots+d_{a_n-2}) \otimes v(-1+d_1+\dots+d_{a_n-2}+d_{a_n-1}+1). \quad (13)$$

Докажем, что $e_n B_2 v_3$ линейно независимо. Напомним, что все наши вектора лежат в тензорных степенях $F^{\otimes l}$. Будем обозначать фермионы, использующиеся для построения s -ого сомножителя, через $\psi_s(i)$, $\phi_s(j)$.

Рассмотрим вектор $w \in F^{\otimes(a_n-1)}$, определённый следующим образом:

$$w = \phi_{a_n-1}(n - (d_1 + \dots + d_{a_n-1})/2)v_2, \text{ если } d_1 + \dots + d_{a_n-1} \text{ чётно; } \quad (14)$$

$$w = \psi_{a_n-1}(n - (d_1 + \dots + d_{a_n-1} - 1)/2)v_2, \text{ если } d_1 + \dots + d_{a_n-1} \text{ нечётно.}$$

Таким образом, $w = \chi v_2$, где χ определяется формулой (14). Легко видеть, что w — одно из слагаемых в $e_n v_3$. Кроме того, заметим, что

$$\mathbb{C}[e_0, \dots, e_n] \cdot v_2 \simeq \mathbb{C}[e_0, \dots, e_n] \cdot w. \quad (15)$$

Действительно, мы домножили v_2 на фермион с таким номером, что в сумме с номером наибольшего противоположного фермиона (ψ противо-

положно ϕ и наоборот), входящего в последний множитель в v_2 , он уже даст n . Таким образом, при действии многочленов от e_0, \dots, e_n на v_2 χ появиться не может.

Пусть теперь l — линейная комбинация элементов B_2 . Легко видеть, что при действии $e_n l$ на v_3 , слагаемые, у которых в последнем сомножителе есть χ , появляются только при действии e_n на последний сомножитель тензорного произведения. Кроме того, если $b_2 \in B_2$, $b_2 = e_n^i x$, $x \in \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}]$, то сумма всех слагаемых в $e_n b_2 v_3$, в которых есть в последнем сомножителе χ , равна $(i + 1)b_2 \omega$. Учитывая линейную независимость $B_2 v_2$ и равенство (15), получаем линейную независимость $e_n B_2 v_3$.

Для завершения доказательства леммы, заметим, что, во-первых, $B_1 v_3$ линейно независимо, т. к. $v_3 = v_1$, и, во-вторых, $B_1 v_3 \cup e_n B_2 v_3$ линейно независимо, т. к. $B_1 \subset \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}]$ и, значит, при применении B_1 к v_3 фермион χ появиться не может. \square

Мы доказали лемму. Применяя индукцию по сумме a_i (включив в индуктивное предположение наличие мономиального базиса), получаем утверждение теоремы 1. \square

§ 2. $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модули. Базис

2.1. Построение $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модулей

Напомним определение скрученного произведения \mathfrak{sl}_2 -модулей (см. [2, 1]). Пусть $A = (a_1 \leq \dots \leq a_n) \in \mathbb{N}^n$, $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и все z_i попарно различны. Рассмотрим представление $\mathbb{C}^{a_i}(z_i)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]$ в пространстве неприводимого \mathfrak{sl}_2 -модуля \mathbb{C}^{a_i} : для $u \in \mathbb{C}^{a_i}$, $x \in \mathfrak{sl}_2$ положим $x \otimes t^j \cdot u = z_i^{-j} x \cdot u$. (Заметим, что в [2, 1] рассматривались $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]$ -модули, однако здесь нам удобно заменить t на t^{-1}). Пусть $v \in \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}^{a_i}(z_i)$ — произведение младших векторов. Тогда

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}^{a_i}(z_i) = U(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]) \cdot v. \tag{1}$$

Получаем фильтрацию на $\bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}^{a_i}(z_i)$, индуцированную градуировкой по степеням t на универсальной обёртывающей алгебре. Присоединённый градуированный $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]$ -модуль $Gr \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}^{a_i}(z_i)$ не зависит от Z , называется скрученным произведением и обозначается $\mathbb{C}^{a_1} * \dots * \mathbb{C}^{a_n}$ или M^A .

Легко видеть, что M^A порождается из вектора v действием операторов e_0, \dots, e_{-n+1} . Таким образом для некоторого идеала I^A

$$M^A \simeq \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{-n+1}]/I^A$$

как $\mathbb{C}[e_0, \dots, e_{-n+1}]$ -модули. Рассмотрим изоморфизм колец:

$$\mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}] \rightarrow \mathbb{C}[e_{-n+1}, \dots, e_0], \quad e_i \mapsto e_{i-n+1}.$$

В [1] было показано, что образ идеала J^A совпадает с I^A .

Напомним обозначения: $d_j = \#\{i: d_i = j\}$, $k = a_n - 1$. Из теоремы (1) и вышесказанного вытекает следующее утверждение:

Утверждение 3. Пусть

$$\omega_A = v(d_1 - n) \otimes v(d_1 + d_2 - n) \otimes \dots \otimes v(d_1 + \dots + d_k - n) \in F^k, \quad (2)$$

$$\widetilde{M}^A = \mathbb{C}[e_{-n+1}, \dots, e_0] \cdot \omega_A.$$

Тогда $\widetilde{M}^A \simeq M^A$.

Заметим, что поскольку $d_1 + \dots + d_{k+1} = n$, то

$$\omega_A = v(-d_2 - \dots - d_{k+1}) \otimes v(-d_3 - \dots - d_{k+1}) \otimes \dots \otimes v(-d_{k+1}).$$

Обозначим $A_s = (a_1, \dots, a_n, \underbrace{a_n, \dots, a_n}_{2s})$, $A_s \in \mathbb{N}^{n+2s}$. Мы докажем, что

$M^{A_s} \hookrightarrow M^{A_{s+1}}$ как подпространства $F^{\otimes k}$.

Предложение 1. $\omega_A \in U(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]) \cdot \omega_{A_1}$.

Доказательство. Введём обозначение:

$$\beta_i = d_{i+1} + \dots + d_{k+1}, \quad i = 1, \dots, k.$$

В этих обозначениях

$$\omega_A = v(-\beta_1) \otimes \dots \otimes v(-\beta_k), \quad (3)$$

$$\omega_{A_1} = v(-\beta_1 - 2) \otimes \dots \otimes v(-\beta_k - 2).$$

Заметим, что вектора

$$\omega_A, e_1 \omega_A, \dots, e_1^{\sum_{i=1}^k (\beta_i + 1)} \omega_A$$

образуют \mathfrak{sl}_2 -модуль относительно $\mathfrak{sl}_2 = \langle e_1, h_0 + k \cdot \text{Id}, f_{-1} \rangle$. С одной стороны, это можно проверить непосредственно; с другой стороны, легко видеть, что существует изоморфизм

$$\mathbb{C}[e_1, e_0, \dots, e_{-n+1}] \cdot \omega_A \simeq \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{-n}]/I^{(a_1, \dots, a_n, a_n)}, \quad e_i \mapsto e_{i-1}.$$

Однако в фактормодуле в правой части действие e_0 на младший вектор порождает \mathfrak{sl}_2 -модуль. Отметим также, что

$$e_1^{\sum_{i=1}^k (\beta_i + 1)} \omega_A \text{ пропорционально } v(\beta_1 + 2) \otimes \dots \otimes v(\beta_k + 2). \quad (4)$$

Далее, легко видеть, что

$$e_0^{\sum_{i=1}^k (\beta_i + 2)} \omega_{A_1} \text{ пропорционально } v(2 + \beta_1) \otimes \dots \otimes v(2 + \beta_k). \quad (5)$$

Объединяя всё вышесказанное, получаем следующее равенство

$$\text{const} \cdot \omega_A = \int_{-1}^{\sum_{i=1}^k (\beta_i + 1)} e_0^{\sum_{i=1}^k (\beta_i + 2)} \omega_{A_1} \quad (6)$$

(при этом, конечно, константа не равна нулю). Предложение доказано. \square

Замечание 1. Из доказательства предложения вытекает, что $e_1 M^A \hookrightarrow M^{A_1}$.

Замечание 2. Из доказательства предложения также вытекает, что $\omega_{A_1} \hookrightarrow U(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t]) \cdot \omega_A$.

Мы доказали, что $\omega_A \in U(\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]) \cdot \omega_{A_1}$. Поэтому имеется цепочка вложений:

$$M^A \hookrightarrow M^{A_1} \hookrightarrow M^{A_2} \hookrightarrow \dots$$

Определение 1. Пусть $D \in (\mathbb{N} \cup 0)^{k+1}$, причём $d_{k+1} = 0$ или $d_{k+1} = 1$. Пусть $d_1 + \dots + d_{k+1} = n$. Рассмотрим $A \in \mathbb{N}^{n+2}$, такое что $d_j = \#\{i: a_i = j\}$ для $j = 1, \dots, k$ и $\#\{i: a_i = k + 1\} = d_{k+1} + 2$. Тогда

$$L^D = L^{(d_1, \dots, d_{k+1})} = \bigcup_{s=1}^{\infty} M^{A_s}.$$

Обозначение:

$$L^D = (\mathbb{C}^1)^{*d_1} * (\mathbb{C}^2)^{*d_2} * \dots * (\mathbb{C}^k)^{*d_k} * (\mathbb{C}^{k+1})^{*(d_{k+1} + 2\infty)}.$$

Вообще говоря, L^D только $\widehat{\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]}$ -модуль. Мы сейчас увидим, что на самом деле, мы построили $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ -модуль.

Предложение 2. L^D замкнуто относительно действия $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$.

Доказательство. Согласно замечанию (1), L^D замкнуто относительно действия e_1 . Кроме того, в L^D действует $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]$. Но $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ порождается $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]$ и e_1 . Предложение доказано. \square

Ясно, что $L^{(d_1, \dots, d_{k+1})}$ является интегрируемым представлением уровня k . Оно является подпредставлением в $F^{\otimes k}$ и порождается любым из векторов ω_{A_s} (см. предложение 1 и замечание 2).

Следствие 1. Пусть $0 \leq i \leq k$. Определим D такое, что $d_j = \delta_{i+1, j}$. Тогда $L^D \simeq L_{i, k}$. (Напомним, что $L_{i, k}$ — неприводимое представление $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ уровня k , у которого размерность пространства нулевой q -градуировки равна $i + 1$). По-другому, $L_{i, k} = \mathbb{C}^{i+1} * (\mathbb{C}^{k+1})^{*2\infty}$.

Замечание 3. Легко видеть, что $L^{(d_1, d_2, \dots, d_{k+1})} = L^{(d_2, \dots, d_{k+1})}$. Другими словами, количество одномерных представлений не важно.

Замечание 4. Пусть $p(D)$ — количество нечётных чисел среди

$$d_{k+1}, d_{k+1} + d_k, \dots, d_{k+1} + \dots + d_2.$$

Тогда

$$L^D \hookrightarrow L_{1,1}^{\otimes p(D)} \otimes L_{0,1}^{\otimes (k-p(D))}.$$

2.2. Базис L^D

Здесь мы построим базис пространства L^D . Для этого мы сначала построим базис пространства $W^{A_\infty} = \mathbb{C}[\dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots] \cdot v_A$.

Пусть $k + 1 = a_n = \max\{a_i\}$. Напомним, что $e(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} e_i z^i$. Обозначим через $e^j(j)$ коэффициент в $e(z)^j$ при z^j . Учтя, что $e_{<0} v_A = 0$, получим, что $e(z)v_A = (\sum_{i=0}^{\infty} e_i z^i)v_A$. Докажем следующую лемму:

Лемма 2. Пусть S — множество последовательностей наборов

$$I^j = (i_1^j, \dots, i_{l_j}^j), \quad j = 1, \dots, k$$

целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих условиям:

$$i_j^\alpha + 2\alpha \leq i_{j+1}^\alpha, \tag{7}$$

$$i_j^\alpha \geq \alpha d_1 + (\alpha - 1)d_2 + \dots + d_\alpha + \alpha(l_k + \dots + l_{\alpha+1})(l_k + \dots + l_{\alpha+1} + 1). \tag{8}$$

Обозначим

$$e^j(I^j) = e^j(i_1^j) \dots e^j(i_{l_j}^j).$$

Тогда элементы вида

$$e(I^1) \dots e^k(I^k)v_A, \tag{9}$$

где $(I^1, \dots, I^k) \in S$, линейно независимы в W^{A_∞} .

Доказательство. Напомним, что $v_A \in F^{\otimes k}$. Будем обозначать фермионы, используемые для построения s -ого сомножителя $F^{\otimes k}$, через $\psi_s(i)$, $\phi_s(j)$. Кроме того, определим операторы $e_{i,s}$, действующие в $F^{\otimes k}$, следующим образом:

$$e_{i,s} = \underbrace{\text{Id} \otimes \dots \otimes \text{Id}}_{s-1} \otimes e_i \otimes \text{Id} \otimes \dots \otimes \text{Id}.$$

Обозначим также через $[x]$ целую часть x . Определим оператор

$$m(i_1^\alpha, \dots, i_{l_\alpha}^\alpha, d_1, \dots, d_\alpha) = m(I^\alpha, d_1, \dots, d_\alpha): F^{\otimes k} \rightarrow F^{\otimes k}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} m(I^\alpha, d_1, \dots, d_\alpha) &= \prod_{j=1}^{\alpha-1} \prod_{m=1}^{l_\alpha} e_{d_1+\dots+d_{j+2(m-1)},j} \times \\ &\times \prod_{m=1}^{l_\alpha} \psi_\alpha \left(\left[\frac{i_m^\alpha - (\alpha-1)d_1 - (\alpha-2)d_2 - \dots - d_{\alpha-1} - (\alpha-1)2(m-1) + 1}{2} \right] \right) \times \\ &\times \prod_{m=1}^{l_\alpha} \phi_\alpha \left(\left[\frac{i_m^\alpha - (\alpha-1)d_1 - (\alpha-2)d_2 - \dots - d_{\alpha-1} - (\alpha-1)2(m-1)}{2} \right] \right). \end{aligned} \tag{10}$$

Далее, пусть $m(I^1, \dots, I^k)v_A \in F^{\otimes k}$ следующий вектор:

$$\begin{aligned} m(I^1, \dots, I^k)v_A &= \\ &= m(I^1, d_1 + 2(l_k + \dots + l_2))m(I^2, d_1 + 2(l_k + \dots + l_3), d_2) \dots \\ &\dots m(I^{k-1}, d_1 + 2l_k, d_2, \dots, d_{k-1})m(I^k, d_1, \dots, d_k)v_A. \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что если I^1, \dots, I^k удовлетворяют условиям (7), (8), то вектор $m(I^1, \dots, I^k)v_A$ является одним из слагаемых в $e(I^1) \dots e^k(I^k)v_A$. Поясним, как это слагаемое получается.

Будем действовать по очереди: сначала $e^k(I^k)$, потом $e^{k-1}(I^{k-1})$, и т. д. до $e(I^1)$. Все эти операторы действуют в $F^{\otimes k}$. Каждый раз при действии $e^\alpha(I^\alpha)$ в $F^{\otimes k}$ мы рассматриваем только те слагаемые, в которых действие происходит по первым α сомножителям. При этом действие по первым $\alpha - 1$ сомножителям происходит «минимальным» образом, т. е. мы домножаем на фермионы с наименьшими ещё не встречавшимися номерами. В то же время по α -ому сомножителю действие происходит «средним» образом, т. е. $e^\alpha(j)$ действует на α -ом сомножителе умножением на $\psi_\alpha[\frac{j+1}{2}]\phi_\alpha[\frac{j}{2}]$. При этом условия (7), (8) гарантируют нам, что при действии описанным выше образом мы получим ненулевой вектор.

Докажем линейную независимость наших векторов. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию

$$\sum \beta_{r^1, \dots, r^k} e(I^1) \dots e^k(I^k) v_A, \tag{12}$$

где все встречающиеся наборы (I^1, \dots, I^k) удовлетворяют условиям (7), (8). Среди наборов из (12) найдём такой набор (I_0^1, \dots, I_0^k) , что для всех других наборов, встречающихся в (12), выполняется следующее: найдутся такие j, m , что $(i_0)_m^j > i_m^j$, и для всех таких j_1, m_1 , что $(j_1 > j)$ или $(j_1 = j, m_1 < m)$ верно, что $(i_0)_{m_1}^{j_1} = i_{m_1}^{j_1}$. Заметим, что из построения следует, что $m(I_0^1, \dots, I_0^k) v_A$ появляется в (12) только из $e(I_0^1) \dots e^k(I_0^k) v_A$ (причём с ненулевым коэффициентом) и ни из какого слагаемого более. Отсюда получаем, что

$$\sum \beta_{r^1, \dots, r^k} e(I^1) \dots e^k(I^k) v_A \neq 0.$$

Лемма доказана. □

Предложение 3. Вектора вида (9) с условиями (7), (8) образуют базис пространства W^{A_∞} .

Доказательство. В силу проверенной линейной независимости, достаточно сравнить характеры предполагаемого базиса и пространства W^{A_∞} . Легко видеть, что характер предполагаемого базиса даётся формулой (мы используем обозначение $(i)_q! = (1 - q) \dots (1 - q^i)$):

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} (zq^{-1})_{i_1}^{i_1} \dots_{i_k}^{i_k} \frac{q^{\sum_{l=1}^k \min(s, l) i_s i_l + \sum_{l=1}^k d_l (i_l + 2i_{l+1} + \dots + (k-l+1) i_k)}}{(i_1)_q! \dots (i_k)_q!}. \tag{13}$$

Таким образом, характер W^{A_∞} больше или равен (в каждой компоненте) чем выражение (13). Мы покажем, что на самом деле, имеет место равенство.

Определим факторалгебру B^A кольца многочленов

$$\mathbb{C}[b_1(0), b_1(1), \dots, b_2(0), b_2(1), \dots, b_k(0), b_k(1), \dots],$$

в которой определяющими являются следующие соотношения на производящие функции $b_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_i(j) z^j$ (мы пользуемся обозначением $b^{(s)}(z)$ для s -ой производной ряда):

$$b_i(z) \div z^{id_1 + (i-1)d_2 + \dots + d_i}, \tag{14}$$

$$b_i^{(s)}(z) b_j^{(t)}(z) = 0 \text{ при } i < j, \quad s + t < 2i.$$

Утверждение 4. *Определим $\deg_z b_i(j) = i$, $\deg_q b_i(j) = j$. Тогда характер алгебры B^A совпадает с выражением (13).*

Доказательство. Известно (см. например [8]), что двойственное пространство к B^A может быть реализовано как сумма пространств полиномов

$$f(z_1^1, \dots, z_{i_1}^1; \dots; z_1^k, \dots, z_{i_k}^k), \quad i_\alpha \geq 0,$$

симметрических по каждой группе переменных $z_1^s, \dots, z_{i_s}^s$ и имеющих вид

$$f = g \prod_{l=1}^k \prod_{i=1}^{i_l} (z_i^l)^{ld_1+(l-1)d_2+\dots+d_l} \prod_{1 \leq s \leq t \leq k} \prod_{\substack{i=1, \dots, i_s \\ j=1, \dots, i_t}} (z_i^s - z_j^t)^{2s}, \quad (15)$$

где $g(z_1^1, \dots, z_{i_1}^1; \dots; z_1^k, \dots, z_{i_k}^k)$ — произвольный симметрический по каждой из групп переменных многочлен. Другими словами, f должен обращаться в ноль $2s$ раз на диагоналях $z_i^s = z_j^t$, $s \leq t$.

Легко видеть, что характер многочленов вида (15), а значит и B^A , совпадает с (13). □

Для доказательства предложения достаточно показать, что $\text{ch } W^{A_\infty} \leq \leq \text{ch } B^A$ (везде под неравенствами для характеров мы понимаем покомпонентные неравенства). Для этого мы воспользуемся конструкцией для фильтрации на двойственном пространстве к W^{A_∞} , которая в более общем случае описана в [8].

Легко показать, что двойственное пространство $(W^{A_\infty})^*$ может быть описано, как сумма пространств симметрических многочленов $f(z_1, \dots, z_s)$, $s = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$f(\underbrace{z, \dots, z}_i, z_{i+1}, \dots, z_s) \div z^{id_1+(i-1)d_2+\dots+d_i}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (16)$$

$$f(\underbrace{z, \dots, z}_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_s) = 0.$$

(Такое представление равносильно тому, что W^{A_∞} есть факторалгебра кольца многочленов $\mathbb{C}[e_0, e_1, \dots]$, в которой определяющие соотношения имеют следующий вид:

$$e^i(z) \div z^{id_1+\dots+d_i}, \quad i = 1, \dots, k, \quad e^{k+1}(z) = 0. \quad (17)$$

В [1] это было проверено в случае $d_1 = \dots = d_k = 0$. В общем случае доказательство аналогично.)

Как показано в [8], на пространстве $(W^{A_\infty})^*$ существует фильтрация подпространствами, занумерованными диаграммами Юнга, причём присоединённые факторы изоморфны пространствам многочленов вида (15). Это даёт нам требуемое равенство характера W^{A_∞} выражению (13). \square

Следствие 2. *Элементы вида*

$$e(I^1) \dots e^k(I^k)\omega_A = e(i_1^1) \dots e(i_{l_1}^1)e^2(i_1^2) \dots e^k(i_{l_2}^2) \dots e^k(i_1^k) \dots e^k(i_{l_k}^k)\omega_A,$$

$$i_j^\alpha + 2\alpha \leq i_{j+1}^\alpha,$$

$$i_j^\alpha \geq \alpha - \alpha(d_{k+1} + \dots + d_{\alpha+1}) - (\alpha - 1)d_\alpha - \dots - d_2 +$$

$$+ (l_k + \dots + l_{\alpha+1})(l_k + \dots + l_{\alpha+1} + 1) \quad (18)$$

образуют базис в $\mathbb{C}[\dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots]\omega_A$. (Будем обозначать это множество векторов через R_A).

Лемма 3. $R_{A_s} \subset R_{A_{s+1}}$.

Доказательство. Заметим, что при действии в $F^{\otimes k}$ выполняется

$$e(z)^k = k! \cdot e(z) \otimes \dots \otimes e(z).$$

Поэтому получаем следующее равенство:

$$e^k \left(\sum_{i=2}^{k+1} (-d_2 - \dots - d_i - 1) \right) \omega_{A_1} = k! \cdot \omega_A. \quad (19)$$

Отсюда непосредственно следует, что $R_{A_s} \subset R_{A_{s+1}}$. \square

Теорема 2. $\bigcup_{s=0}^\infty B_{A_s}$ образует базис L^D .

Доказательство. По построению

$$L^D = \bigcup_{s=0}^\infty \mathbb{C}[\dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots] \cdot \omega_{A_s}.$$

Учтя лемму 3, получаем утверждение теоремы. \square

Замечание 5. *Используя теорему 2 и формулу (13), легко, перейдя к пределу, получить формулу для характера L^D (этим способом в [5] была получена формула для характера $L_{i,k}$). Однако мы в дальнейшем получим формулу для характера L^D немного другим способом — используя то, что L^D есть предел вложенных конечномерных скрученных произведений.*

§ 3. Разложение L^D . Алгебра Верлинде

3.1. Функциональная рекуррентная формула

Пусть $A = (a_1 \leq \dots \leq a_n) \in \mathbb{N}^n$, $k + 1 = a_n$, $D \in (\mathbb{N} \cup 0)^{k+1}$ ассоциированно с A . Здесь мы построим такие A' , A'' , что $W^{A'} \hookrightarrow W^A$ и $W^A/W^{A'} \simeq W^{A''}$.

Напомним, что $e^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i z^i$. Обозначим через $[e^{(n)}(z)^i]_j$ коэффициент при z^j в $e^{(n)}(z)^i$.

Лемма 4. Пусть $d_l \neq 0$. Тогда

$$[e^{(n)}(z)^{l-1}]_{\sum_{j=1}^{l-1} (l-j)d_j} v_A = (l-1)! (e_{d_1} \otimes \dots \otimes e_{d_1+\dots+d_{l-1}} \otimes \text{Id} \otimes \dots \otimes \text{Id}) v_A.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что

$$[e^{(n)}(z)^{l-1}]_{\sum_{j=1}^{l-1} (l-j)d_j} v_A = e^{l-1} \left(\sum_{j=1}^{l-1} (l-j)d_j \right) v_A \quad (1)$$

(напомним, что $e^i(j)$ — коэффициент в $e(z)^i$ при z^j). Действительно, если $c = \sum_{i=n}^{\infty} e_i z^{i-n}$, то

$$e(z)^{l-1} v_A = e^{(n)}(z)^{l-1} v_A + \sum_{i=0}^{l-2} \binom{l-1}{i} z^{n(l-1-i)} c^{l-1-i} e^{(n-1)}(z)^i v_A. \quad (2)$$

Напомним, что

$$e^{(n)}(z)^i v_A \div z^{\sum_{j=1}^i d_j(i+1-j)}.$$

Но тогда имеем:

$$z^{n(l-1-i)} e^{(n-1)}(z)^i v_A \div z^{n(l-1-i) + \sum_{j=1}^i d_j(i+1-j)}.$$

В то же время, т. к. $\sum_{j=1}^{k+1} d_j = n$ и $d_l \neq 0$, то

$$n(l-1-i) + \sum_{j=1}^i d_j(i+1-j) > \sum_{j=1}^{l-1} (l-j)d_j.$$

Из этого и равенства (2), получаем (1), т. к. все слагаемые из левой части (2), кроме $e^{(n)}(z)^{l-1}$, делятся на $z^{1+\sum_{j=1}^{l-1} d_j(l-j)}$.

Рассмотрим теперь $e(z)^{l-1} v_A$. Т. к. $e(z)^2 = 0$ в F , то

$$e(z)^{l-1} v_A = (l-1)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{l-1} \leq k} e(z)_{i_1} \dots e(z)_{i_{l-1}} v_A, \quad (3)$$

$$e(z)_i = \underbrace{\text{Id} \otimes \dots \otimes \text{Id}}_{i-1} \otimes e(z) \otimes \text{Id} \otimes \dots \otimes \text{Id}.$$

Следовательно, т. к. $d_l \neq 0$ и $e_{\leq d} v(d) = 0$, то

$$[e(z)^{l-1}]_{\sum_{j=1}^{l-1} (l-j)d_j} v_A = (l-1)! (e_{d_1} \otimes \dots \otimes e_{d_1+\dots+d_{l-1}} \otimes \text{Id} \otimes \dots \otimes \text{Id}) v_A.$$

Лемма доказана. □

Замечание 1. Заметим, что при $l-1 = k$ мы как следствие получаем предложение (1).

Замечание 2. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} (e_{d_1} \otimes \dots \otimes e_{d_1+\dots+d_{l-1}} \otimes \text{Id} \otimes \dots \otimes \text{Id}) v_A &= \\ &= v(1+d_1) \otimes v(1+d_1+d_2) \otimes \dots \otimes v(1+d_1+d_2+\dots+d_{l-1}) \otimes \\ &\quad \otimes v(-1+d_1+\dots+d_l) \otimes \dots \otimes v(-1+d_1+\dots+d_k). \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим этот вектор через u .

Из фермионной реализации модулей W^A вытекает следующее утверждение:

Утверждение 5. а). Пусть $d_l \geq 2$. Обозначим через $A' \in \mathbb{N}^{n-2}$ такой набор, что ассоциированный с ним набор D' устроен следующим образом: $d'_l = d_l - 2$, $d'_i = d_i$ при $i \neq l$. Тогда, если рассмотреть $W^{A'}$ как кольцо $\mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-3}]/J^{A'}$, то имеется изоморфизм колец:

$$\mathbb{C}[e_2, \dots, e_{n-1}] \cdot u \simeq W^{A'}, \quad e_i \mapsto e_{i-2}.$$

б). Пусть $d_l = 1$, $l \neq k+1$. Пусть $d_{l+1} = \dots = d_{l-1} = 0$, $d_l \neq 0$. Обозначим через $A' \in \mathbb{N}^{n-1}$ такой набор, что ассоциированный с ним набор D' следующий:

$$d'_l = d_l - 1, \quad d'_{l_1} = d_{l_1} - 1, \quad d'_{l_1-l+1} = d_{l_1-l+1} + 1,$$

а для всех остальных i $d_i = d'_i$. Тогда имеется изоморфизм колец:

$$\mathbb{C}[e_1, \dots, e_{n-1}] \cdot u \simeq W^{A'}, \quad e_i \mapsto e_{i-1}.$$

Таким образом в W^A имеется подпространство $W^{A'}$. Изучим факторпространство. Для этого напомним (см. [1]), что двойственное пространство $(W^A)^* = (\mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}]/J^A)^*$ может быть реализовано как пространство полиномов $f(z_1, \dots, z_s)$, $s = 0, 1, 2, \dots$ со следующими условиями:

1). $f(z_1, \dots, z_s)$ — симметрический многочлен.

2). $\deg_{z_i} f(z_1, \dots, z_s) < n$.

3). $f(\underbrace{z, \dots, z}_i, z_{i+1}, \dots, z_s) \div z^{\sum_{j=1}^n (i+1-a_j)_+}$, $i = 1, \dots, s$.

Мы докажем следующее предложение:

Предложение 4. а). $d_l \geq 2$. Обозначим через $A'' \in \mathbb{N}^n$ такой набор, что ассоциированный с ним D'' устроен так:

$$d''_{l-1} = d_{l-1} + 1, d''_l = d_l - 2, d''_{l+1} = d_{l+1} + 1, d''_i = d_i \text{ иначе.}$$

Тогда $W^A/W^{A'} \simeq W^{A''}$.

б). $d_l = 1, l = \min\{m: d_m \neq 0\}$. Обозначим через $A'' \in \mathbb{N}^n$ такой набор, что ассоциированный с ним D'' устроен так:

$$d''_{l-1} = d_{l-1} + 1, d''_l = \dots = d''_{l+1} = 0, d''_i = d_i - 1, \\ d''_{l+1} = d''_{l+1} + 1, d''_i = d_i \text{ иначе.}$$

Тогда $W^A/W^{A'} \simeq W^{A''}$.

Замечание 3. Условие $l = \min\{m: d_m \neq 0\}$ может показаться неестественным. Однако для общего l модули $W^A/W^{A'}$ и $W^{A''}$ не изоморфны. В то же время существует модуль M , содержащий $W^{A'}$, такой что $W^A/M \simeq W^{A''}$. Структура модуля M представляется нам важной, и мы надеемся вернуться к её изучению в дальнейшем.

Доказательство. Заметим, что двойственное пространство

$$\left(W^A/\mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}] \cdot u \right)^*$$

может быть реализовано как пространство симметрических многочленов f от s переменных ($s = 0, 1, \dots$), степени не выше $n - 1$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$*). f(\underbrace{z, \dots, z}_i, z_{i+1}, \dots, z_s) \div z^{\sum_{j=1}^n (i+1-a_j)_+}, \quad i = 1, \dots, s.$$

$$**). f(\underbrace{z, \dots, z}_{l-1}, z_l, \dots, z_s) \div z^{1 + \sum_{j=1}^n (l-a_j)_+}$$

(напомним, что $u = [e^{(n)}(z)]_{\sum_{j=1}^{l-1} (l-j)d_j} \nu_A$). Мы докажем, что если функция f удовлетворяет условиям $*)$, $**$), то она также удовлетворяет и условиям на функцию из двойственного пространства $(W^{A''})^*$. Проверив также, что

$$\dim W^A = \dim W^{A'} + \dim W^{A''}, \tag{5}$$

мы получим утверждение теоремы.

Во-первых, проверим что действительно $\dim W^A = \dim W^{A'} + \dim W^{A''}$. Напомним, что $\dim W^A = \prod a_i$. Но тогда (5) равносильно равенству $l^2 = 1 + (l-1)(l+1)$ в случае *a*) и равенству $ll_1 = l_1 - l + 1 + (l-1)(l_1+1)$ в случае *b*).

Проверим теперь, что если f удовлетворяет условиям $*$), $**$), то $f \in (W^{A''})^*$, т. е.

$$f(\underbrace{z, \dots, z}_i, z_{i+1}, \dots, z_s) \div z^{\sum_{j=1}^i d''_{i+1-j}}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (6)$$

a). $d_l \geq 2$. При $i < l-1$ (6) получается из условия $*$). При $i = l-1$ это следствие условия $**$). Пусть $i = l$. Условие $*$) даёт

$$f(\underbrace{z, \dots, z}_l, z_{l+1}, \dots, z_s) \div z^{\sum_{j=1}^l (l+1-j)d_j}.$$

Но $d''_{l-1} = d_{l-1} + 1$, $d''_l = d_l - 2$. Значит

$$2d''_{l-1} + d''_l = 2d_{l-1} + d_l.$$

Итак, (6) верно при $i = l$. Пусть теперь $i > l$. Но тогда

$$\begin{aligned} & (d_{l-1} + 1)(i + 1 - (l-1)) + (d_l - 2)(i + 1 - l) + (d_{l+1} + 1)(i + 1 - (l+1)) = \\ & = d_{l-1}(i + 1 - (l-1)) + d_l(i + 1 - l) + d_{l+1}(i + 1 - (l+1)). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем (6) как прямое следствие условия $*$). Случай *a*) полностью разобран.

b). $d_l = 1$. Напомним, что для $m < l$ $d_m = 0$. Таким образом для $i < l-1$ условие (6) тривиально.

Из $**$) мы знаем, что

$$f(\underbrace{z, \dots, z}_{l-1}, z_l, \dots, z_s) \div z. \quad (7)$$

Используя эту формулу, получаем для всех $k \geq 0$:

$$f(\underbrace{z, \dots, z}_{l-1+k}, z_{l+k}, \dots, z_s) \div z^{k+1}. \quad (8)$$

Это даёт нам (6) для $i = l-1, \dots, l_1-1$. В то же время условие (6) для $i \geq l_1$ совпадает с $**$). Предложение доказано. \square

3.2. Разложение L^D

Наша цель получить разложение L^D на неприводимые компоненты. Напомним, что мы строили L^D как предел вложенных друг в друга пространств M^{A_s} . Заметим, что предложение (4) можно переформулировать следующим образом: $M^A \hookrightarrow M^{A'}$, $M^A/M^{A'} \simeq M^{A''}$.

Ранее мы построили вложение M^A в $F^{\otimes k}$. Для дальнейшего, нам необходимо будет понять, каким образом относительно друг друга в $F^{\otimes k}$ расположены M^A и $M^{A'}$. Мы знаем, что $M^A/M^{A'} \simeq M^{A''}$. В то же время, мы хотим выяснить, с какого уровня M^A перестаёт совпадать с $M^{A'}$, т.е. с какого уровня «начинается» $M^{A''}$. Ясно, что эта степень равна разности $\deg_q \omega_A - \deg_q \omega_{A''}$.

Положим $2\alpha_i = d_{k+1} + \dots + d_{i+1}$, $i = 1, \dots, k$, а $p(D)$ определим как количество полуцелых α_i .

Лемма 5. *а). $d_l \geq 2$, $l \neq k + 1$. Тогда*

$$\deg_q \omega_A - \deg_q \omega_{A''} = \frac{p(D'') - p(D)}{4} + \frac{d_l - 1}{2}.$$

б). $d_l = 1$, $l_1 = \min\{i > l: d_i \neq 0\}$. Тогда

$$\deg_q \omega_A - \deg_q \omega_{A''} = \frac{p(D'') - p(D)}{4} + \frac{d_{l_1}}{2}.$$

Доказательство. Из фермионной реализации легко видеть, что

$$\deg_q \omega_A = \frac{-p(D)}{4} + \sum_{i=1}^k \alpha_i^2.$$

Дальше лемма доказывается прямым вычислением. □

Теорема 3. *Пусть $D \in (N \cup 0)^{k+1}$, $d_1 = 0$, $d_{k+1} \leq 1$. Пусть $d_2 + \dots + d_{k+1} \geq 2$. Пусть $2 \leq l \leq k$, $l_1 = \min\{i: i > l, d_i \neq 0\}$.*

а). $d_l \geq 2$. Определим D' , D'' также как раньше с единственным изменением: если $l = k$, то $d''_{k+1} = (d_{k+1} + 1) \pmod 2$. Тогда

$$\text{ch } L^D = \text{ch } L^{D'} + q^{\frac{p(D'') - p(D)}{4} + \frac{d_l - 1}{2}} \text{ch } L^{D''}.$$

б₁). $d_l = 1$, $l = \min\{m: d_m \neq 0\}$, $l_1 \neq k + 1$. Тогда

$$\text{ch } L^D = \text{ch } L^{D'} + q^{\frac{p(D'') - p(D)}{4} + \frac{d_{l_1}}{2}} \text{ch } L^{D''}.$$

б₂). $d_l = 1$, $l = \min\{m: d_m \neq 0\}$, $l_1 = k + 1$. Тогда

$$\text{ch } L^D = \text{ch } L^{D'}.$$

Доказательство. Наша теорема является следствием леммы (5). Заметим только, что в случае b_2) второе слагаемое исчезает, т. к. разность $\deg_q \omega_{A_s} - \deg_q \omega_{A'_s}$ стремится к бесконечности при $s \rightarrow \infty$. В остальных случаях эта разность не зависит от s . \square

Следствие 3. Из формул для характеров интегрируемых $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модулей со старшим весом, получаем равенства для самих модулей: (обозначения теоремы (3))

$$a). L^D \simeq L^{D'} \oplus L^{D''}. \quad b_1). L^D \simeq L^{D'} \oplus L^{D''}. \quad b_2). L^D \simeq L^{D'}.$$

Следствие 4. Мы получили алгоритм разложения модулей L^D на неприводимые компоненты.

Доказательство. Заметим, что такие D , что $\sum d_i \leq 1$, в точности отвечают неприводимым представлениям $L_{i,k}$. Ко всем остальным L^D мы можем применить нашу процедуру разложения. Заметим, что для D, D', D'' определённых выше, выполняется $\prod i^{d_i} > \prod i^{d'_i}, \prod i^{d_i} > \prod i^{d''_i}$. Таким образом, наш алгоритм за конечное число шагов даёт разложение L^D в сумму неприводимых $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модулей. \square

3.3. Связь с алгеброй Верлинде

Напомним определение алгебры Верлинде V_k , ассоциированной с алгеброй Ли \mathfrak{sl}_2 . Рассмотрим алгебру с базисом π_1, π_2, \dots и умножением ($i \leq j$) $\pi_i \pi_j = \pi_{j-i+1} + \dots + \pi_{i+j-1}$ (образующие перемножаются как конечномерные неприводимые представления \mathfrak{sl}_2). По определению, $V_k = \langle \pi_1, \pi_2, \dots \rangle / (\pi_{k+1})$. Приведём несколько свойств алгебры V_k :

- Утверждение 6.** 1). $\pi_k^2 = 1 (= \pi_1)$.
 2). $\pi_i^2 = 1 + \pi_{i-1} \pi_{i+1}, \quad i = 2, \dots, k-1$.
 3). $\pi_i \pi_j = \pi_{j-i+1} + \pi_{i-1} \pi_{j+1}, \quad i < j, \quad i = 2, \dots, k-2, \quad j = 3, \dots, k-1$.
 4). $\pi_i \pi_k = \pi_{k-i+1}, \quad i = 2, \dots, k-1$.

Пусть $D \in (\mathbb{N} \cup 0)^{k+1}, d_{k+1} \leq 1$. Обозначим $\pi_D = \pi_1^{d_1} \pi_2^{d_2} \dots \pi_{k+1}^{d_{k+1}} \in V_{k+1}$. Перемножив, получим

$$\pi_D = c_{1,D} \pi_1 + \dots + c_{k+1,D} \pi_{k+1}.$$

Из следствий (3),(4) получаем следующее предложение:

Предложение 5. $L^D \simeq M_1 \otimes L_{0,k} \oplus \dots \oplus M_{k+1} \otimes L_{k,k}$, причём $\dim M_i = c_{i,D}$, M_i — градуированные пространства и характер M_i может быть получен с помощью рекуррентной процедуры, описанной выше.

§ 4. Комбинаторные вычисления

В этой части мы получим формулы для характера L^D , а также докажем чисто комбинаторными методами соотношение a) из следствия (3).

4.1. Формула для характера L^D

Легко видеть, что пространства L^D биградуированы операторами h_0 и d (для $x \in \mathfrak{sl}_2$ $[d, x_i] = ix_i$). Поэтому можно определить характер L^D как $\text{Tr}(q^d z^{h_0})$. В то же время понятно, что для любого D все собственные значения h_0 на L^D имеют одинаковую чётность. Поэтому разумно определить характер следующим образом: $\text{ch } L^D = \text{Tr}(q^d z^{\frac{h_0}{2}})$. При этом, конечно, все степени z будут либо целыми, либо полуцелыми. (Легко видеть, что степени по z целые, если $\sum_{i=2}^{k+1} (i-1)d_i$ чётно, и полуцелые в противном случае).

Напомним, что в [1] была получена следующая формула для характера W^A ($A = (a_1 \leq \dots \leq a_n)$, $a_n = k + 1$, $d_j = \#\{i: a_i = j\}$, $d_1 = 0$):

$$\begin{aligned} \text{ch}(W^A, q, qz) &= \\ &= \sum_{j_k=0}^{d_{k+1}} \sum_{j_{k-1}=0}^{d_k+j_k} \dots \sum_{j_1=0}^{d_2+j_2} \sum_{z^i=1}^k i! \sum_{q^i=1}^k j_i(d_2+\dots+d_i+j_i) \times \\ &\quad \times \begin{bmatrix} d_{k+1} \\ j_k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} d_k+j_k \\ j_{k-1} \end{bmatrix}_q \dots \begin{bmatrix} d_2+j_2 \\ j_1 \end{bmatrix}_q. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь использовано обозначение:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_q = \frac{(a)_q!}{(b)_q!(a-b)_q!}, \quad (a)_q! = (1-q) \dots (1-q^a). \tag{2}$$

Получим теперь характер M^A (при этом степени z будут целыми или полуцелыми в зависимости от A). Обозначим $2\alpha_i = d_{k+1} + \dots + d_{i+1}$, $i = 1, \dots, k$. В этих обозначениях $p(D) = \#\{i: \alpha_i \in (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})\}$. Напомним, что

$$W^A = \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{n-1}] \cdot v_A, \quad M^A = \mathbb{C}[e_0, \dots, e_{-n+1}] \cdot w_A.$$

Таким образом, чтобы из W^A получить M^A , нужно переместить v_A в w_A и затем «повернуть» W^A так, чтобы e_{n-i} стало e_{1-i} . Легко проверить, что при сдвиге $v_A \rightsquigarrow w_A$ степень по z уменьшится на $\sum \alpha_i$, степень по q увеличится на $\sum \alpha_i^2 - \frac{p(D)}{4}$ (отметим, что в формуле (1) мы считаем q -степень v_A равной нулю, поэтому $\sum \alpha_i^2 - \frac{p(D)}{4}$ это просто q -степень вектора w_A в $F^{\otimes k}$). Таким образом, чтобы получить из (1) формулу для

характера M^A , надо домножить (1) на соответствующий множитель (что отвечает сдвигу v_A в ω_A), а также заменить z на $\frac{z}{q^n}$ (что соответствует «повороту» W^A). Отметим, что делить надо именно на q^n , а не на q^{n-1} , т. к. формула для характера W^A зависит от (q, zq) , или другими словами, мы делаем замену e_0, \dots, e_{n-1} на e_1, \dots, e_n . Получаем следующее выражение (подставив $n = \sum d_i$):

$$\begin{aligned} \text{ch}(M^A, q, z) &= z^{-\sum_{i=1}^k \alpha_i} q^{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} q^{-\rho(D)/4} \times \\ &\times \sum_{j_k=0}^{d_{k+1}} \sum_{j_{k-1}=0}^{d_k+j_k} \dots \sum_{j_1=0}^{d_2+j_2} \left(\frac{z}{q^{\sum_{i=2}^{k+1} d_i}} \right)^{\sum_{i=1}^k j_i} q^{\sum_{i=1}^k j_i(d_2+\dots+d_l+j_i)} \times \\ &\times \begin{bmatrix} d_{k+1} \\ j_k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} d_k+j_k \\ j_{k-1} \end{bmatrix}_q \dots \begin{bmatrix} d_2+j_2 \\ j_1 \end{bmatrix}_q. \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразовав, получаем:

$$\begin{aligned} \text{ch}(M^A, q, z) &= q^{-\rho(D)/4} \times \\ &\times \sum_{j_k=0}^{d_{k+1}} \sum_{j_{k-1}=0}^{d_k+j_k} \dots \sum_{j_1=0}^{d_2+j_2} z^{\sum_{l=1}^k (j_l-\alpha_l)} q^{\sum_{l=1}^k (j_l-\alpha_l)^2} \times \\ &\times \begin{bmatrix} d_{k+1} \\ j_k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} d_k+j_k \\ j_{k-1} \end{bmatrix}_q \dots \begin{bmatrix} d_2+j_2 \\ j_1 \end{bmatrix}_q. \end{aligned} \quad (4)$$

Сделаем замену $i_l = j_l - \alpha_l$:

$$\begin{aligned} \text{ch}(M^A, q, z) &= q^{-\rho(D)/4} \times \\ &\times \sum_{\substack{i_k=-\alpha_k \\ i_k+\alpha_k \in \mathbb{Z}}}^{d_{k+1}/2} \sum_{\substack{i_{k-1}=-\alpha_{k-1} \\ i_{k-1}+\alpha_{k-1} \in \mathbb{Z}}}^{d_k/2+i_k} \dots \sum_{\substack{i_1=-\alpha_1 \\ i_1+\alpha_1 \in \mathbb{Z}}}^{d_2/2+i_2} z^{\sum_{l=1}^k i_l} q^{\sum_{l=1}^k i_l^2} \times \\ &\times \begin{bmatrix} d_{k+1}/2+\alpha_k \\ i_k+\alpha_k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} d_k/2+i_k+\alpha_{k-1} \\ i_{k-1}+\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_q \dots \begin{bmatrix} d_2/2+i_2+\alpha_1 \\ i_1+\alpha_1 \end{bmatrix}_q. \end{aligned} \quad (5)$$

Раскроем биномиальные коэффициенты:

$$\text{ch}(M^A, q, z) = q^{-\rho(D)/4} \sum_{\substack{i_l \geq -\alpha_l, i_l+\alpha_l \in \mathbb{Z} \\ i_k \leq \frac{d_{k+1}}{2}, i_{l+1} \geq i_l - \frac{d_{l+1}}{2}}} \sum_{l=1}^k i_l \sum_{l=1}^k i_l^2 \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{(i_k + \frac{d_{k+1}}{2})_q! \prod_{l=1}^{k-1} (i_{l+1} - i_l + \frac{d_{l+1}}{2})_q!} \times \\ & \times \frac{(d_{k+1})_q!}{(\frac{d_{k+1}}{2} + i_k)_q!} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{(i_{l+1} + \frac{d_{l+1}}{2} + \alpha_l)_q!}{(i_l + \alpha_l)_q!} \end{aligned} \quad (6)$$

Нас интересует предел выражения (6) при $d_{k+1} \rightarrow \infty$ (при этом d_{k+1} должно сохранять свою чётность). Обозначим

$$(\infty)_q = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i).$$

(В наших формулах выражение $(\infty)_q$ для $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)$ выглядит естественнее, чем более общепринятое $(q)_{\infty}$). Для вычисления предела заметим, что можно считать что $-d_{k+1}/4 < i_l < d_{k+1}/4$ (иначе степень по q будет больше, чем $d_{k+1}^2/16$). Но тогда степень по q многочлена

$$\frac{(i_{l+1} + \frac{d_{l+1}}{2} + \alpha_l)_q!}{(i_l + \alpha_l)_q!} - 1$$

больше, чем $\frac{d_{k+1}}{4}$. Поэтому

$$\frac{(d_{k+1})_q!}{(\frac{d_{k+1}}{2} + i_k)_q!} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{(i_{l+1} + \frac{d_{l+1}}{2} + \alpha_l)_q!}{(i_l + \alpha_l)_q!} \rightarrow 1 \text{ при } d_{k+1} \rightarrow \infty.$$

В то же время

$$\frac{1}{(i_k + \frac{d_{k+1}}{2})_q!} \rightarrow \frac{1}{(\infty)_q}.$$

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 4. Пусть $D \in (\mathbb{N} \cup 0)^{k+1}$, $d_{k+1} \leq 1$. Обозначим $2\alpha_i = d_{k+1} + \dots + d_{i+1}$, $i = 1, \dots, k$. Тогда

$$\text{ch } L^D = \frac{q^{-p(D)/4}}{(\infty)_q} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ i_l + \alpha_l \in \mathbb{Z}, l=1, \dots, k \\ i_l \geq i_{l-1} - \frac{d_l}{2}, l=2, \dots, k}} \frac{\sum_{i=1}^k i_i \sum_{l=1}^k i_l^2}{\prod_{l=1}^{k-1} (i_{l+1} - i_l + \frac{d_{l+1}}{2})_q!}.$$

Следствие 5. Мы получаем формулу из [5]:

$$\text{ch } L_{j,k} = \frac{1}{(\infty)_q} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z} \\ i_1 \leq \dots \leq i_k}} \frac{z^{\frac{j}{2} + \sum_{l=1}^k i_l} q^{\sum_{l=1}^k i_l^2 + \sum_{l=1}^j i_l}}{\prod_{l=1}^{k-1} (i_{l+1} - i_l) q!}.$$

4.2. Комбинаторная рекуррентная формула для L^D

Введём следующие обозначения:

$$D = (\dots d_{s-1}(d_s + 2)d_{s+1} \dots), \quad D' = (\dots d_{s-1}d_s d_{s+1} \dots), \quad (7)$$

$$D'' = (\dots (d_{s-1} + 1)d_s(d_{s+1} + 1) \dots).$$

Предложение 6. $\text{ch } L^D = \text{ch } L^{D'} + q^{\frac{p(D') - p(D)}{4} + \frac{d_s + 1}{2}} \text{ch } L^{D''}$.

Доказательство. Легко видеть, что $p(D) = p(D')$. Далее:

$$\begin{aligned} \text{ch } L^D - \text{ch } L^{D'} &= \frac{q^{-p(D)/4}}{(\infty)_q} \times \\ &\times \left(\sum_{\substack{i_l + \alpha_l \in \mathbb{Z}, l=1, \dots, k \\ i_s \geq i_{s-1} - \frac{d_s + 2}{2} \\ i_l \geq i_{l-1} - \frac{d_l}{2}, l \neq s}} \frac{z^{\sum_{l=1}^k i_l} q^{\sum_{l=1}^k i_l^2}}{(i_s - i_{s-1} + \frac{d_s + 2}{2}) q! \prod_{l=1, l \neq s-1}^{k-1} (i_{l+1} - i_l + \frac{d_{l+1}}{2}) q!} - \right. \\ &\left. - \sum_{\substack{i_l + \alpha_l \in \mathbb{Z}, l=1, \dots, k \\ i_l \geq i_{l-1} - \frac{d_l}{2}, l=2, \dots, k}} \frac{z^{\sum_{l=1}^k i_l} q^{\sum_{l=1}^k i_l^2}}{\prod_{l=1}^{k-1} (i_{l+1} - i_l + \frac{d_{l+1}}{2}) q!} \right). \quad (8) \end{aligned}$$

Разделим область суммирования в уменьшаемом на две части: в первой с параметрами с $i_s = i_{s-1} - \frac{d_s + 2}{2}$, во второй с $i_s \geq i_{s-1} - \frac{d_s}{2}$. Тогда условия на параметры во второй части совпадут с условиями на параметры из вычитаемого. Поэтому предыдущее выражение равно

$$\frac{q^{-p(D)/4}}{(\infty)_q} \left(\sum_{\substack{i_l + \alpha_l \in \mathbb{Z}, l=1, \dots, k \\ i_s = i_{s-1} - \frac{d_s + 2}{2} \\ i_l \geq i_{l-1} - \frac{d_l}{2}, l \neq s}} \frac{z^{\sum_{l=1}^k i_l} q^{\sum_{l=1}^k i_l^2}}{\prod_{l=1, l \neq s-1}^{k-1} (i_{l+1} - i_l + \frac{d_{l+1}}{2}) q!} + \right.$$

$$+ \sum_{\substack{i_l + \alpha_l \in \mathbb{Z}, l=1, \dots, k \\ i_l \geq i_{l-1} - \frac{d_l}{2}, l=2, \dots, k}} \left(\frac{\sum_{z^l=1}^k i_l \sum_{i_l^2}^k q^{i_s - i_{s-1} + \frac{d_s+2}{2}}}{(i_s - i_{s-1} + \frac{d_s+2}{2})_q! \prod_{l=1, l \neq s-1}^{k-1} (i_{l+1} - i_l + \frac{d_{l+1}}{2})_q!} \right). \tag{9}$$

Сложив, получаем

$$\frac{q^{-\rho(D)/4}}{(\infty)_q} \sum_{\substack{i_l + \alpha_l \in \mathbb{Z}, l=1, \dots, k \\ i_s \geq i_{s-1} - \frac{d_s+2}{2} \\ i_l \geq i_{l-1} - \frac{d_l}{2}, l \neq s}} \frac{\sum_{z^l=1}^k i_l \sum_{i_l^2}^k q^{i_s - i_{s-1} + \frac{d_s+2}{2}}}{(i_s - i_{s-1} + \frac{d_s+2}{2})_q! \prod_{l=1, l \neq s-1}^{k-1} (i_{l+1} - i_l + \frac{d_{l+1}}{2})_q!}. \tag{10}$$

Сделаем теперь замену $i_s := i_s + 1/2$, $i_{s-1} := i_{s-1} - 1/2$. Тогда мы получим:

$$\text{ch } L^D - \text{ch } L^{D'} = q^{\frac{\rho(D') - \rho(D) + 2d_s + 2}{4}} \text{ch } L^{D''}.$$

Предложение доказано. □

Следствие 6. $L^D \simeq L^{D'} \oplus L^{D''}$.

Литература

1. B. Feigin, E. Feigin, *Q-characters of the tensor products in \mathfrak{sl}_2 -case*, Mosc. Math. J. **2** (2002), No. 3, 567–588.
2. B. Feigin, S. Loktev, *On generalized Kostka polynomials and quantum Verlinde rule*, Differential Topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 194, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 61–79 (q-alg 9812093).
3. Anne Schilling, S. Ole Warnaar, *Supernomial coefficients, polynomial identities and q-series*, Ramanujan J. **2** (1998), No. 4, 459–494. (q-alg 9701007)
4. S. O. Warnaar, *The Andrews-Gordon identities and q-multinomial coefficients*, Comm. Math. Phys. **184** (1997), No. 1, 203–232. (q-alg 9601012)
5. B. Feigin, A. Stoyanovskii, *Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта*, *Функц. анализ и его приложения* **28** (1994), 55–72.
6. B. Feigin, T. Miwa, *Extended vertex operator algebras and monomial bases*, Statistical physics on the eve of the 21-st century, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1999, pp. 366–390. q-alg 9901067.
7. B. Feigin, R. Kedem, S. Loktev, T. Miwa, E. Mukhin, *Combinatorics of the $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ spaces of coinvariants*, q-alg 9908003.

8. B. Feigin, R. Kedem, S. Loktev, T. Miwa, E. Mukhin, Combinatorics of the $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ spaces of coinvariants II, q-alg 0009198.
9. A. N. Kirillov, M. Shimozono, A generalization of Kostka-Foulkes polynomials, q-alg 9803062.
10. A. Shilling, S. Ole Warnaar, Inhomogeneous lattice paths, generalized Kostka polynomials and A_{n-1} supernomials, q-alg 9802111.

Б. Ф.: Институт теоретической физики им. Ландау, Россия, Московская область, 142432, Черноголовка. E-mail: feigin@mccme.ru
и Независимый Московский Университет, Россия, Москва, Большой Власьевский переулок, 7.

Е. Ф.: Независимый Московский Университет, Россия, Москва, Большой Власьевский переулок, 7. E-mail: evgfeig@mccme.ru

С. Г. Влэдуц, М. А. Цфасман

Бесконечные глобальные поля и обобщённая теорема Брауэра—Зигеля

Работа преследует две цели. Во-первых, мы начинаем развивать теорию бесконечных глобальных полей, т. е., бесконечных алгебраических расширений \mathbb{Q} или $\mathbb{F}_r(t)$. Мы получаем ряд инвариантов таких полей, а также определяем для них некие дзета-функции и изучаем их свойства. Во-вторых, мы доказываем обобщения оценок Одлджко—Серра и теоремы Брауэра—Зигеля для последовательности числовых полей с растущим дискриминантом, учитывая, в том числе, и неархимедовы точки. Это приводит к асимптотическому выражению для отношения $\log hR / \log \sqrt{|D|}$, верному и без обычного предположения о том, что $n / \log \sqrt{|D|} \rightarrow 0$, и тем самым включающему, в частности, случай неразветвлённых башен. Приводятся контрпримеры башен полей классов, показывающие, что вышеупомянутое предположение действительно необходимо для выполнения классической теоремы Брауэра—Зигеля. В качестве простого следствия, мы улучшаем существующие оценки на регуляторы.

Перед Вами — изложение наших результатов, полностью опубликованных в [1]. Предлагаемый текст представляет собой слегка переделанное предисловие к этой работе и не содержит доказательств.

Глобальным полем K называется конечное алгебраическое расширение либо поля \mathbb{Q} рациональных чисел, либо поля $\mathbf{Q}_r = \mathbb{F}_r(t)$ рациональных функций от одной переменной с конечным полем констант. *Бесконечным глобальным полем K* называется либо бесконечное алгебраическое расширение поля \mathbb{Q} , либо такое бесконечное алгебраическое расширение поля \mathbf{Q}_r , что $K \cap \mathbb{F}_r = \mathbb{F}_r$. В первом случае мы называем K *бесконечным*

числовым полем, а во втором — бесконечным функциональным полем над \mathbb{F}_r .

Первой причиной написания данной работы послужила попытка убедить себя и читателя в существовании (ещё не построенной) нетривиальной теории таких полей. В частности, мы строим ряд их инвариантов, а также определяем для них некие дзета-функции и изучаем их.

Вторая причина куда более приземлённая. Мы доказываем обобщения оценок Одлыжко—Серра и теоремы Брауэра—Зигеля для последовательностей числовых полей с растущим дискриминантом, учитывая, в том числе, и неархимедовы точки. Это приводит к асимптотическим оценкам и точным формулам для отношения $\log hR / \log \sqrt{|D|}$, верным без обычного предположения о том, что $n / \log \sqrt{|D|} \rightarrow 0$, и таким образом включающим, в частности, случай неразветвлённых башен. Затем приводятся примеры башен полей классов, показывающие, что вышеупомянутое предположение действительно необходимо для выполнения обычной теоремы Брауэра—Зигеля.

Ставя своей целью изучение бесконечных глобальных полей, следует позаботиться об интересных примерах. Для «больших» полей, таких как $\bar{\mathbb{Q}}$ или \mathbb{Q}^{ab} , определяемые нами инварианты тривиальны, но есть большое число «меньших» полей, например пределы (то есть, объединения) полей из данной неразветвлённой (или «не слишком сильно» разветвлённой) башни полей. Именно для таких «меньших» полей становится интересной теория, развиваемая в этой работе.

Для начала заметим, что бесконечное глобальное поле всегда является пределом башни конечных полей:

$$\mathcal{K} = \operatorname{ind} \lim_{i \rightarrow \infty} K_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \quad \text{где } K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$$

Эта башня, конечно же, не единственна. Мы будем искать инварианты \mathcal{K} , т. е., такие параметры башни $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$, которые зависят не от самой башни, а лишь от её предела.

Мы будем использовать следующее обозначение. Пусть $\{K_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ — последовательность попарно неизоморфных глобальных полей, числовых или функциональных; положим

$$g_i = \operatorname{род}(K_i)$$

в функциональном случае, и

$$g_i = \log \sqrt{|D_i|}$$

в числовом; будем называть g_i *родом* числового поля.

Внимание: Здесь и ниже мы используем следующее соглашение. В числовом случае запись \log обозначает натуральный логарифм \log_e . В случае функционального поля над \mathbb{F}_r та же запись \log обозначает \log_r . Как мы увидим ниже, это оправдано единой формой получаемых результатов.

Одна из причин полагать, что такое определение рода для числового поля естественно, заключается в том, что для любого наперёд заданного g_0 существует лишь конечное число числовых полей K , чей род не превосходит g_0 . То же самое верно и в случае функциональных полей с данным полем констант.

У нас остаются сомнения по поводу того, должен ли род числового поля определяться как $g = \log \sqrt{|D|}$, т. е. как в данной статье, или как $g = \log \sqrt{|D|} + 1$. Последнее определение имеет то преимущество, что при неразветвлённом накрытии число $g - 1$ умножается на степень расширения. Преимущество же первого определения состоит в том, что \mathbb{Q} оказывается рода 0 и не имеет неразветвлённых расширений, как и кривая рода 0. Однако для бесконечных числовых полей и других асимптотических рассмотрений данный вопрос не актуален, так как оба эти определения дают одни и те же результаты.

Будем называть последовательность $\{K_i\}$ глобальных полей *семейством*, если K_i неизоморфно K_j при $i \neq j$. Семейство называется *башней*, если $K_i \subset K_{i+1}$ для любого i . Для любого семейства $g_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. В случае функционального поля мы также предполагаем, что у всех полей K_i одно и то же поле констант \mathbb{F}_r .

Для числового поля положим

$$n_i = [K_i : \mathbb{Q}] = r_1(K_i) + 2r_2(K_i),$$

где r_1 и r_2 обозначают, соответственно, количество вещественных вложений и количество пар комплексных вложений. Предположим также, что $g_i > 0$ для любого i , то есть, $K_i \neq \mathbb{Q}$ в числовом случае, и K_i неизоморфно $\mathbb{F}_r(T)$ в функциональном. Это предположение не ограничивает общности наших рассуждений.

Будем рассматривать множество $A = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}; 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, \dots\}$, состоящее из всех степеней простых чисел и двух вспомогательных символов \mathbb{R} и \mathbb{C} , в качестве множества индексов. Инварианты, которые мы собираемся определить, будут параметризованы элементами $\alpha \in A$. В случае функционального поля над \mathbb{F}_r множество A может быть сведено к множеству $A_r = \{r, r^2, r^3, \dots\}$ в том смысле, что для $\alpha \in A \setminus A_r$ определяемые нами инварианты будут равны нулю.

Для q , являющегося степенью простого числа, положим

$$N_q(K_i) := |\{v \in P(K_i) : \text{Norm}(v) = q\}|,$$

где $P(K_i)$ — множество всех неархимедовых точек поля K_i . Положим также $N_{\mathbb{R}}(K_i) = r_1(K_i)$ и $N_{\mathbb{C}}(K_i) = r_2(K_i)$.

Обозначим через h_i число классов идеалов поля K_i (которое в функциональном случае равно числу \mathbb{F}_r -значных точек на якобиане кривой, соответствующей полю K_i); R_i будет обозначать регулятор K_i в числовом случае и будет равен 1 в функциональном.

Для бесконечного глобального поля $\mathcal{K} = \bigcup K_i$ и для $\alpha \in A$ определим величины

$$\phi_\alpha = \phi_\alpha(\mathcal{K}) := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{N_\alpha(K_i)}{g_i}.$$

Конечно же, нам необходимо доказать, что эти пределы существуют и не зависят от выбора башни.

Заметим, что $\phi_{\mathbb{R}}$ и $\phi_{\mathbb{C}}$ конечны, так как отношение $n/g_i = r_1(K_i)/g_i + 2r_2(K_i)/g_i$ ограничено на множестве всех числовых полей не равных \mathbb{Q} оценкой Минковского.

Обобщая, назовём семейство глобальных полей $\mathcal{K} = \{K_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ *асимптотически точным*, если для любого $\alpha \in A$ существует предел

$$\phi_\alpha = \phi_\alpha(\mathcal{K}) := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{N_\alpha(K_i)}{g_i}.$$

Будем называть семейство \mathcal{K} *асимптотически хорошим* (соответственно, *плохим*), если существует $\alpha \in A$ такое, что $\phi_\alpha > 0$ (соответственно, $\phi_\alpha = 0$ для любого $\alpha \in A$).

Важно отметить, что мы используем символ \mathcal{K} как для обозначения бесконечного глобального поля, так и для обозначения асимптотически точного семейства. В этом нет ничего страшного, так как ниже мы докажем, что для бесконечных глобальных полей все наши определения и результаты не зависят от выбора башни.

Понятие асимптотически точного семейства намного более общее, чем понятие башни. В частности, стандартный диагональный метод показывает, что любое семейство содержит асимптотически точное подсемейство.

Существование множества величин $\phi = \{\phi_\alpha\}$ позволяет дать следующее определение. *Предельной дзета-функцией* асимптотически точного семейства будем называть произведение

$$\zeta_{\mathcal{K}}(s) = \zeta_\phi(s) = \prod_q (1 - q^{-s})^{-\phi_q},$$

где q пробегает все степени простых чисел. Здесь и ниже, возводя в комплексную степень функцию от s , определённую при $\operatorname{Re} s > a \geq 0$, и такую, что её значения вещественны и положительны при вещественных $s > a$, мы будем иметь в виду её единственное аналитическое продолжение, которое вещественно и положительно при всех вещественных s . «Полная» дзета-функция определяется в числовом случае как

$$\tilde{\zeta}_{\mathcal{K}}(s) = \tilde{\zeta}_{\phi}(s) = e^s 2^{-\phi_{\mathbb{R}}} \pi^{-s\phi_{\mathbb{R}}/2} (2\pi)^{-s\phi_{\mathbb{C}}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{\phi_{\mathbb{R}}} \Gamma(s)^{\phi_{\mathbb{C}}} \prod_q (1 - q^{-s})^{-\phi_q}.$$

В функциональном случае, в соответствии с нашим соглашением, положим

$$\tilde{\zeta}_{\mathcal{K}}(s) = \tilde{\zeta}_{\phi}(s) = r^s \prod_{m=1}^{\infty} (1 - r^{-ms})^{-\phi_m}.$$

Произведения, определяющие $\zeta_{\phi}(s)$ и $\tilde{\zeta}_{\phi}(s)$, абсолютно сходятся при $\operatorname{Re}(s) \geq 1$. Эти функции зависят лишь от $\phi = \{\phi_{\alpha}\}$ и не зависят от конкретной последовательности числовых полей. Следовательно, $\zeta_{\mathcal{K}}(s)$ и $\tilde{\zeta}_{\mathcal{K}}(s)$ корректно определены для бесконечного глобального поля \mathcal{K} .

Дзета-функция семейства является, таким образом, пределом корней g -ой степени из обычных дзета-функций полей, образующих данное семейство K_i . Более того, при $\operatorname{Re} s \geq 1 + \varepsilon$ сходимость равномерна.

Верно также, что семейство асимптотически точно тогда и только тогда, когда существует предел $\lim \zeta_{K_i}(s)^{1/g_i}$.

Положим теперь в числовом случае

$$\begin{aligned} \xi_{\mathcal{K}}(s) = \xi_{\phi}(s) &= (\log \tilde{\zeta}_{\phi})' = \tilde{\zeta}'_{\phi} / \tilde{\zeta}_{\phi} \\ &= 1 - \frac{\phi_{\mathbb{R}}}{2} \log \pi - \phi_{\mathbb{C}} \log 2\pi + \frac{1}{2} \phi_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{s}{2}\right) + \phi_{\mathbb{C}} \psi(s) - \sum_q \phi_q \frac{\log q}{q^s - 1}, \end{aligned}$$

где $\psi(s) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)$, а в функциональном случае определим

$$\xi_{\mathcal{K}}(s) = \xi_{\phi}(s) = (\log_r \tilde{\zeta}_{\phi})' = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\phi_{r^m}}{r^{ms} - 1}.$$

Изучая числовой случай, мы часто будем предполагать выполненной обобщённую гипотезу Римана (ОГР) для числовых полей, хотя большинство наших результатов будут иметь также и безусловную (но более слабую) формулировку. Чтобы различать эти две ситуации, мы всегда будем писать ОГР в соответствующих случаях. Заметим, что функциональный случай в этом не нуждается, так как ОГР в нём доказана.

Преполагая ОГР выполненной, можно доказать, что вышеупомянутое произведение абсолютно сходится при $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$, и верна следующая

ОГР-теорема А (Основное ОГР-неравенство). Для бесконечного глобального поля \mathcal{K} (и для любого асимптотически точного семейства глобальных полей)

$$\xi_{\mathcal{K}}\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Эта теорема накладывает сильные ограничения на возможные значения $\phi = \{\phi_{\alpha}\}$, а именно

ОГР-следствие А (Основное ОГР-неравенство). Для бесконечного глобального поля (и для любого асимптотически точного семейства глобальных полей)

$$\sum_q \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q}-1} + \phi_{\mathbb{R}}(\log 2\sqrt{2\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}) + \phi_{\mathbb{C}}(\log 8\pi + \gamma) \leq 1,$$

где суммирование ведётся по всем q , являющимся степенями простых чисел, а γ — константа Эйлера.

В числовом случае этот результат является ОГР-обобщением оценки Одлыжко—Серра для дискриминантов числовых полей. Действительно, так как все члены неотрицательны, получаем

$$\phi_{\mathbb{R}}(\log 2\sqrt{2\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}) + \phi_{\mathbb{C}}(\log 8\pi + \gamma) \leq 1,$$

откуда следует

$$D \geq (8\pi e^{\gamma + \frac{\pi}{2}})^{r_1} (8\pi e^{\gamma})^{2r_2} e^{o(n)}.$$

В случае функционального поля над \mathbb{F}_r неравенство упрощается. (Напомним, что согласно нашим обозначениям символ \log в числовом случае обозначает \log_e , а в функциональном \log_r).

Следствие А' (Основное неравенство в случае функционального поля). Для бесконечного глобального поля (и для любого асимптотически точного семейства функциональных полей)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\phi_{r^m}}{r^{m/2}-1} \leq 1.$$

Этот результат, в свою очередь, обобщает теорему Дринфельда—Влэдуца, утверждающую, что для числа N , равного числу точек степени один на алгебраической кривой над конечным полем \mathbb{F}_r , выполняется неравенство

$$N \leq (\sqrt{r}-1)g + o(g)$$

при g стремящемся к бесконечности, то есть $\phi_r \leq \sqrt{r} - 1$. Действительно, для получения этого неравенства достаточно в сумме из следствия отбросить все члены кроме первого.

Созерцая теорему А и следствие А, естественно заинтересоваться значением $\xi_{\mathcal{K}}(\frac{1}{2})$, которое равно *дефекту*, то есть разности между правой и левой частями неравенства из следствия А. Оказывается, что этот дефект связан с предельным распределением нулей дзета-функции.

Будем опять считать, что ОГР выполнена. Пусть $\mathcal{K} = \{K_j\}$ — асимптотически точное семейство полей. Для каждого K_j определим на \mathbb{R} меру

$$\Delta_{K_j} := \frac{\pi}{g_{K_j}} \sum_{\zeta_{K_j}(\rho)=0} \delta_{t(\rho)},$$

где $t(\rho) = (\rho - \frac{1}{2})/i$, причём ρ пробегает множество всех нетривиальных нулей дзета-функции $\zeta_{K_j}(s)$, а $\delta_{t(\rho)}$, как обычно, обозначает меру Дирака, сосредоточенную в точке $t(\rho)$. Из ОГР следует, что $t(\rho)$ вещественно, и Δ_{K_j} — дискретная мера на \mathbb{R} . Более того, Δ_{K_j} является мерой медленного роста.

ОГР-теорема Б (Явная ОГР-формула). *Для бесконечного глобального поля \mathcal{K} (и для любого асимптотически точного семейства числовых полей) в пространстве мер медленного роста на \mathbb{R} существует предел*

$$\Delta_{\mathcal{K}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_{K_j}.$$

Более того, мера $\Delta_{\mathcal{K}}$ имеет непрерывную плотность $M_{\mathcal{K}}$,

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{K}}(t) &= \operatorname{Re} \left(\xi_{\mathcal{K}} \left(\frac{1}{2} + it \right) \right) = 1 - \sum_q \phi_q h_q(t) \log q \\ &+ \frac{1}{2} \phi_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \psi \left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2} \right) + \phi_{\mathbb{C}} \operatorname{Re} \psi \left(\frac{1}{2} + it \right) - \frac{\phi_{\mathbb{R}}}{2} \log \pi - \phi_{\mathbb{C}} \log 2\pi, \end{aligned}$$

где

$$h_q(t) = \frac{\sqrt{q} \cos(t \log q) - 1}{q + 1 - 2\sqrt{q} \cos(t \log q)}, \quad \psi(s) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s).$$

ОГР-следствие Б (Основное ОГР-равенство). *Для бесконечного числового поля \mathcal{K} (и для любого асимптотически точного семейства числовых полей)*

$$\xi_{\mathcal{K}} \left(\frac{1}{2} \right) = M_{\mathcal{K}}(0).$$

Иными словами,

$$\sum_q \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q}-1} + \phi_{\mathbb{R}}(\log 2\sqrt{2\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}) + \phi_{\mathbb{C}}(\log 8\pi + \gamma) = 1 - M_{\mathcal{K}}(0).$$

Это означает, что разность между 1 и левой частью основного неравенства, называемая дефектом бесконечного глобального поля (или семейства), на самом деле является «относительным числом» нулей, накапливающихся у вещественной критической точки $\frac{1}{2}$.

Аналогичное утверждение верно и в функциональном случае, причём его намного проще доказать (см. [2]). Так как дзета-функция периодична, мы можем, конечно же, рассматривать пространство периодических мер на \mathbb{R} , чтобы получить теорему В и следствие В для функционального случая. Мы можем, кроме того, упростить их формулировки, используя меры на окружности. Рассмотрим в качестве окружности фактор $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, представленный как интервал $(-\pi, \pi]$. Для нуля ρ дзета-функции $\zeta_{\mathcal{K}_j}(s)$ определим $t(\rho)$ следующим образом:

$$t(\rho) = \frac{\rho - \frac{1}{2}}{i} \pmod{2\pi}.$$

Пусть

$$\Delta_j := \frac{\pi}{g_j} \sum_{\zeta_{\mathcal{K}_j}(\rho)=0} \delta_{t(\rho)}.$$

Тогда Δ_j — мера общей массы 2π на $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, и Δ_j симметрична по отношению к $t \mapsto -t$.

Следствие Б' (Явная формула и основное равенство в функциональном случае). *В функциональном случае в слабой топологии на пространстве мер на $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ существует предел*

$$\Delta_{\mathcal{K}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_j.$$

Более того, мера $\Delta_{\mathcal{K}}$ обладает непрерывной плотностью $M_{\mathcal{K}}$,

$$M_{\mathcal{K}}(t) = \operatorname{Re} \left(\xi_{\mathcal{K}} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\log_e r} t \right) \right) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} m \phi_{r^m} h_m(t),$$

где

$$h_m(t) = \frac{r^{m/2} \cos(mt) - 1}{r^m + 1 - 2r^{m/2} \cos(mt)},$$

которая зависит только от множества чисел $\phi = \{\phi_{r^m}\}$. Выполняется следующее основное равенство:

$$\xi_{\mathcal{K}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\phi_{r^m}}{r^{m/2} - 1} = M_{\mathcal{K}}(0).$$

Если в числовом случае не использовать ОГР, то результаты становятся значительно слабее.

Теорема В (Безусловное основное неравенство). Для бесконечного числового поля \mathcal{K} (и для любого асимптотически точного семейства числовых полей)

$$\xi_{\mathcal{K}}(1) \geq 0.$$

Следствие В (Безусловное основное неравенство). Для бесконечного числового поля \mathcal{K} (и для любого асимптотически точного семейства числовых полей)

$$\sum_q \frac{\phi_q \log q}{q-1} + (\gamma/2 + \log 2\sqrt{\pi})\phi_{\mathbb{R}} + (\gamma + \log 2\pi)\phi_{\mathbb{C}} \leq 1.$$

Отбрасывая все неархимедовы члены, мы получаем на этот раз безусловное неравенство Старка:

$$D \geq (4\pi e^{\gamma})^{r_1} (2\pi e^{\gamma})^{2r_2} e^{o(n)}.$$

Безусловное неравенство Одлыжко

$$D \geq (4\pi e^{\gamma+1})^{r_1} (4\pi e^{\gamma})^{2r_2} e^{o(n)}$$

также можно обобщить, используя неархимедовы точки.

Наш следующий результат, связанный с дзета-функцией, касается поведения чисел классов и регуляторов. Для любого асимптотически точного семейства \mathcal{K} глобальных полей рассмотрим предел

$$\text{BS}(\mathcal{K}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log h_i R_i}{g_i}.$$

При некоторых условиях, о которых мы будем говорить ниже, этот предел существует и зависит лишь от множества чисел $\phi = \{\phi_{\alpha}\}$. Следовательно, $\text{BS}(\mathcal{K})$ корректно определено для бесконечного глобального поля \mathcal{K} , а также и для любого асимптотически точного семейства \mathcal{K} . Мы можем также определить

$$\kappa(\mathcal{K}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log \kappa_i}{g_i},$$

где κ_i — вычет $\zeta_{\mathcal{K}_i}(s)$ в 1; этот инвариант существует при тех же условиях.

Значение $BS(\mathcal{K})$ описывается теоремой Брауэра—Зигеля. В наших терминах классическая теорема Брауэра—Зигеля утверждает, что

$$BS(\mathcal{K}) = 1 \quad \text{и} \quad \kappa(\mathcal{K}) = 0,$$

если семейство \mathcal{K} удовлетворяет следующим двум условиям:

- (i) семейство \mathcal{K} асимптотически плохое;
- (ii) либо выполняется ОГР, либо все поля K_i нормальны над \mathbb{Q} .

Действительно, обычно используемое в этом утверждении предположение о том, что $n/\log \sqrt{|D|} \rightarrow 0$, означает, что $\phi_\alpha = 0$ для любого α , так как из него следует, что $\phi_{\mathbb{R}} = \phi_{\mathbb{C}} = 0$, а для любого простого p

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\phi_{p^m} \leq \phi_{\mathbb{R}} + 2\phi_{\mathbb{C}}.$$

Обобщим теорему Брауэра—Зигеля, отказываясь от первого условия.

ОГР-теорема Г (Обобщённая ОГР-теорема Брауэра—Зигеля). *Для бесконечного глобального поля \mathcal{K} (и для любого асимптотически точного семейства глобальных полей), существуют пределы $BS(\mathcal{K})$ и $\kappa(\mathcal{K})$, причём*

$$BS(\mathcal{K}) = \log \bar{\zeta}_{\mathcal{K}}(1),$$

$$\kappa(\mathcal{K}) = \log \zeta_{\mathcal{K}}(1).$$

ОГР-следствие Г (Обобщённая ОГР-теорема Брауэра—Зигеля). *Для бесконечного глобального поля (и для любого асимптотически точного семейства глобальных полей)*

$$BS(\mathcal{K}) = 1 + \sum_q \phi_q \log \frac{q}{q-1} - \phi_{\mathbb{R}} \log 2 - \phi_{\mathbb{C}} \log 2\pi,$$

$$\kappa(\mathcal{K}) = \sum_q \phi_q \log \frac{q}{q-1},$$

где суммирование ведётся по всем q , являющимся степенями простых чисел.

В функциональном случае, конечно же

$$BS(\mathcal{K}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log_r h_i}{g_i},$$

где h_i равно числу \mathbb{F}_r -точек на якобиане кривой X_i , соответствующей полю K_i . Для другого параметра выполняется равенство $\kappa(\mathcal{K}) = BS(\mathcal{K}) - 1$, в силу чего он становится неинтересен.

Следствие Г' (Обобщённая теорема Брауэра—Зигеля в функциональном случае). Для бесконечного функционального поля \mathcal{K} (и для любого асимптотически точного семейства функциональных полей), существует предел $BS(\mathcal{K})$, и выполняется равенство:

$$BS(\mathcal{K}) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{r^m} \log_r \frac{r^m}{r^m - 1}.$$

В числовом случае половина теоремы D не зависит от гипотезы Римана:

Теорема Д (Обобщённое неравенство Брауэра—Зигеля). Для бесконечного числового поля \mathcal{K} (и для любого асимптотически точного семейства числовых полей)

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log h_i R_i}{g_i} \leq 1 + \sum_q \phi_q \log \frac{q}{q-1} - \phi_{\mathbb{R}} \log 2 - \phi_{\mathbb{C}} \log 2\pi,$$

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log \kappa_i}{g_i} \leq \sum_q \phi_q \log \frac{q}{q-1},$$

где суммирование ведётся по всем q , являющимся степенями простых чисел.

Пока мы не смогли доказать обобщённую теорему Брауэра—Зигеля без предположения об истинности ОГР. В общем случае не известно даже, верна ли сама классическая теорема Брауэра—Зигеля, если не предполагать нормальности тех полей, о которых в ней идёт речь. Однако, доказательство обобщённой теоремы Брауэра—Зигеля для бесконечных числовых полей становится возможным, если потребовать выполнения у них некоторых специальных свойств.

Теорема Е (Безусловная обобщённая теорема Брауэра—Зигеля для бесконечных числовых полей). Для бесконечного почти нормального асимптотически хорошего семейства числовых полей \mathcal{K} существуют пределы $BS(\mathcal{K})$ и $\kappa(\mathcal{K})$, причём

$$BS(\mathcal{K}) = \log \bar{\zeta}_{\mathcal{K}}(1),$$

$$\kappa(\mathcal{K}) = \log \zeta_{\mathcal{K}}(1).$$

Следствие Е (Безусловная обобщённая теорема Брауэра—Зигеля для бесконечных числовых полей). Для бесконечного почти нор-

мального асимптотически хорошего числового поля \mathcal{K}

$$\text{BS}(\mathcal{K}) = 1 + \sum_q \phi_q \log \frac{q}{q-1} - \phi_{\mathbb{R}} \log 2 - \phi_{\mathbb{C}} \log 2\pi,$$

$$\kappa(\mathcal{K}) = \sum_q \phi_q \log \frac{q}{q-1},$$

где суммирование ведётся по всем q , являющимся степенями простых чисел.

Заметим, что безусловная классическая теорема Брауэра—Зигеля не получается нашими методами. Однако, зная, что она справедлива, мы можем заключить, что для бесконечных нормальных числовых полей обобщённая теорема Брауэра—Зигеля выполнена безусловно.

Наш следующий вопрос заключается в асимптотическом поведении отношений Брауэра—Зигеля $\frac{\log hR}{g}$ и $\frac{\log \kappa}{g}$. Справедлива

ОГР-теорема Ж (ОГР-оценки). Для любого семейства числовых полей

$$\text{BS}_{\text{lower}} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(h_i R_i)}{g_i} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(h_i R_i)}{g_i} \leq \text{BS}_{\text{upper}},$$

$$0 \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(\kappa_i)}{g_i} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(\kappa_i)}{g_i} \leq \kappa_{\text{upper}},$$

где

$$\text{BS}_{\text{lower}} = 1 - \frac{\log 2\pi}{\gamma + \log 8\pi} \approx 0.5165\dots,$$

$$\text{BS}_{\text{upper}} = 1 + \frac{\log \frac{3}{2} + \log \frac{5}{4} + \log \frac{7}{6}}{\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} + \log 2\sqrt{2\pi} + \frac{\log 2}{\sqrt{2}-1} + \frac{\log 3}{\sqrt{3}-1} + \frac{\log 5}{\sqrt{5}-1} + \frac{\log 7}{\sqrt{7}-1}} \approx 1.0938\dots,$$

$$\kappa_{\text{upper}} = \frac{\log 2 + \log \frac{3}{2}}{\frac{\gamma}{2} + \log 2\sqrt{2\pi} + \frac{\log 2}{\sqrt{2}-1} + \frac{\log 3}{\sqrt{3}-1}} \approx 0.2164\dots$$

В дальнейшем мы дадим другие оценки в случае чисто вещественных и чисто мнимых полей.

Функциональный случай рассматривался в нашей работе [2]. Верна следующая

Теорема Ж' (Оценка в функциональном случае). Для любого семейства функциональных полей над \mathbb{F}_r

$$1 \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\log_r h_i}{g_i} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log_r h_i}{g_i} \leq 1 + (\sqrt{r} - 1) \log_r \frac{r}{r-1}.$$

В случае числового поля, как обычно, без ОГР теорема G становится более слабой.

Теорема 3 (Безусловные оценки). *Для любого семейства числовых полей*

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log h_i R_i}{g_i} \leq \text{BS}_{\text{unc,upper}}, \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log \kappa_i}{g_i} \leq \kappa_{\text{unc,upper}},$$

где

$$\text{BS}_{\text{unc,upper}} = 1 + \frac{\sum_{\substack{p=3 \\ \text{prime}}}^{23} \log \frac{p}{p-1}}{\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + \log 2\sqrt{\pi} + 2 \sum_{\substack{p=2 \\ \text{prime}}}^{23} \log p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{m+1}}} \approx 1.1588 \dots,$$

$$\kappa_{\text{unc,upper}} = 1 + \frac{\sum_{\substack{p=3 \\ \text{prime}}}^5 \log \frac{p}{p-1}}{\frac{\gamma}{2} + \log 2\sqrt{\pi} + 2 \sum_{\substack{p=2 \\ \text{prime}}}^5 \log p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{m+1}}} \approx 0.3151 \dots$$

Для бесконечного почти нормального асимптотически хорошего числового поля \mathcal{K} имеются также и нижние оценки

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\log h_i R_i}{g_i} \geq \text{BS}_{\text{unc,lower}},$$

где

$$\text{BS}_{\text{unc,lower}} = 1 - \frac{\log 2\pi}{\gamma + \log 4\pi} \approx 0.4087 \dots$$

Если заметить, что возможные значения отношения Брауэра—Зигеля при предположении ОГР лежат в интервале

$$(0.5165 \dots, 1.0938 \dots),$$

и что классическое значение в теореме Брауэра—Зигеля равно 1, то естественно возникает вопрос о том, существует ли в общем случае пример, когда оно отлично от 1.

Оказывается, что пример существует. Метод построения примеров таких бесконечных глобальных полей заключается в том, чтобы рассмотреть предел башни полей классов, заданной некоторыми условиями на разложение идеалов.

ОГР-теорема И. *Поле*

$$K = \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{11}, \sqrt{2}, \sqrt{-23})$$

имеет бесконечную неразветвлённую 2-башню \mathcal{K} , для которой

$$BS(\mathcal{K}) \in (BS_{\text{lower}}(\mathcal{K}), BS_{\text{upper}}(\mathcal{K})),$$

где

$$BS_{\text{lower}}(\mathcal{K}) = 1 - \frac{10 \log 2\pi}{g},$$

$$BS_{\text{upper}}(\mathcal{K}) = BS_{\text{lower}}(\mathcal{K}) + \frac{(\sqrt{23} - 1) \log \frac{23}{22}}{\log 23} \left(1 - \frac{10(\gamma + \log 8\pi)}{g} \right),$$

то есть, численно,

$$0.5939 \dots \leq BS(\mathcal{K}) \leq 0.6025 \dots$$

Заметим, что в примере на нижнюю оценку $\kappa(\mathcal{K})$ необходимости нет, так как очевидная оценка $\kappa(\mathcal{K}) = 0$ достигается для любого асимптотически плохого семейства числовых полей, например для любой башни полей, абелевых над \mathbb{Q} .

Без ОГР верхняя оценка менее точна.

Теорема К. *Поле*

$$K = \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{11}, \sqrt{2}, \sqrt{-23})$$

имеет бесконечную неразветвлённую 2-башню \mathcal{K} , для которой

$$BS(\mathcal{K}) \in (BS_{\text{lower}}(\mathcal{K}), BS_{\text{unc,upper}}(\mathcal{K})),$$

где $BS_{\text{lower}}(\mathcal{K})$ такое же, как и выше, а $BS_{\text{unc,upper}}(\mathcal{K}) \approx 0.7108 \dots$

Наша верхняя оценка показывает, что условие $n/\log |D| \rightarrow 0$ (или, в наших терминах, $\phi_\alpha = 0$ для любого α) в классической теореме Брауэра—Зигеля действительно является существенным. Другими словами, отношение Брауэра—Зигеля $BS(\mathcal{K})$ может быть строго меньше 1. А может ли оно быть строго больше 1? Может ли $\kappa(\mathcal{K})$ быть строго положительным числом? На этот счёт также есть пример.

ОГР-теорема Л. *Поле*

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67})$$

обладает бесконечной неразветвлённой 2-башней \mathcal{K} , в которой девять простых идеалов, лежащих над 2, 3, 5, 7 и 71 полностью

распадаются. Для этой башни $BS(\mathcal{K}) \in (BS_{\text{lower}}(\mathcal{K}), BS_{\text{upper}}(\mathcal{K}))$ и $\kappa(\mathcal{K}) \in (\kappa_{\text{lower}}(\mathcal{K}), \kappa_{\text{upper}}(\mathcal{K}))$, где

$$BS_{\text{lower}}(\mathcal{K}) = 1 + \frac{2 \log \frac{3}{2} + 2 \log \frac{5}{4} + 2 \log \frac{7}{6} + \log \frac{5041}{5040}}{g},$$

$$BS_{\text{upper}}(\mathcal{K}) = BS_{\text{lower}}(\mathcal{K}) + \frac{1}{g} \sum_{p=11}^{47} \log \frac{p}{p-1} +$$

$$+ \frac{\sqrt{53}-1}{g \log 53} \left(g - \gamma - \frac{\pi}{2} - \log 8\pi - 2 \sum_{p=2}^7 \frac{\log p}{\sqrt{p}-1} - \frac{\log 71^2}{70} - \sum_{p=11}^{47} \frac{\log p}{\sqrt{p}-1} \right) \log \frac{53}{52},$$

$$\kappa_{\text{lower}}(\mathcal{K}) = \frac{2 \log 2 + 2 \log \frac{3}{2} + 2 \log \frac{5}{4} + 2 \log \frac{7}{6} + \log \frac{5041}{5040}}{g},$$

$$\kappa_{\text{upper}}(\mathcal{K}) = BS_{\text{upper}}(\mathcal{K}) - 1 + \frac{2 \log 2}{g},$$

при этом все суммы берутся по простым p . В численном выражении

$$BS(\mathcal{K}) \in (1.0602\dots, 1.0798\dots),$$

$$\kappa(\mathcal{K}) \in (0.1135\dots, 0.1331\dots).$$

Без гипотезы Римана, как обычно, верхняя оценка меняется.

Теорема М. Поле

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67})$$

обладает бесконечной неразветвлённой 2-башней \mathcal{K} , в которой девять простых идеалов, лежащих над 2, 3, 5, 7 и 71, полностью распадаются. Для данной башни $BS(\mathcal{K}) \in (BS_{\text{lower}}(\mathcal{K}), BS_{\text{unc,upper}}(\mathcal{K}))$ и $\kappa(\mathcal{K}) \in (\kappa_{\text{lower}}(\mathcal{K}), \kappa_{\text{unc,upper}}(\mathcal{K}))$, где $BS_{\text{lower}}(\mathcal{K})$ и $\kappa_{\text{lower}}(\mathcal{K})$ такие же, как и выше, а $BS_{\text{unc,upper}}(\mathcal{K}) \approx 1.0951\dots$, $\kappa_{\text{unc,upper}}(\mathcal{K}) \approx 0.1454\dots$

Из различных оценок для $BS(\mathcal{K})$, найденных в этой статье, можно составить следующую таблицу.

		нижняя оценка	нижний пример	верхний пример	верхняя оценка
ОГР	все поля	0.5165	0.5939–0.6025	1.0602–1.0798	1.0938
	чисто вещественные	0.7419	0.8009–0.8648	1.0602–1.0798	1.0938
	чисто комплексные	0.5165	0.5939–0.6025	1.0482–1.0653	1.0764
безусловно	все поля	0.4087	0.5939–0.7108	1.0602–1.0921	1.1588
	чисто вещественные	0.6625	0.8009–0.9248	1.0602–1.0921	1.1588
	чисто комплексные	0.4087	0.5939–0.7108	1.0482–1.0951	1.0965

А вот таблица для $\kappa(\mathcal{K})$. Заметим, что нижняя оценка 0 для $\kappa(\mathcal{K})$ всегда достижима.

		верхний пример	верхняя оценка
ОГР	все поля	0.1135–0.1331	0.2164
	чисто вещественные	0.1135–0.1331	0.1874
	чисто мнимые	0.1162–0.1333	0.2164
безусловно	все поля	0.1135–0.1454	0.3151
	чисто вещественные	0.1135–0.1454	0.2816
	чисто мнимые	0.1162–0.1631	0.3151

В функциональном случае примером \mathcal{K} с $BS(\mathcal{K}) = 1$ и $\kappa(\mathcal{K}) = 0$ является любая башня полей, такая что $\phi_\alpha = 0$ для любого α . В частности, любая башня полей, абелевых над $\mathbb{F}_r(t)$, обладает этим свойством. В примере на достижение верхней оценки должно выполняться $\phi_r = \sqrt{r} - 1$ и $\phi_\alpha = 0$ для любого α . Существование таких башен известно только тогда, когда r является полным квадратом. Для такого r этим свойством обладают различные башни модулярных кривых.

В качестве приложения обобщенной теоремы Брауэра—Зигеля, можно получить оценку на регуляторы числовых полей для асимптотически хороших семейств, более сильную, чем известная оценка Циммерта.

Теорема Н (Оценка на регуляторы). Для асимптотически хорошей башни почти нормальных числовых полей $\mathcal{K} = \{K_i\}$

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\log R_i}{g_i} \geq (\log \sqrt{\pi e} + \frac{\gamma}{2})\phi_{\mathbb{R}} + (\log 2 + \gamma)\phi_{\mathbb{C}}.$$

Преполняя ОГР верной, мы получаем ту же самую оценку на регуляторы и для всех асимптотически хороших семейств числовых полей.

Наша работа, результатом которой стала статья [1], была начата более десяти лет назад. Теперь мы убеждены, что существует нетривиальная теория бесконечных глобальных полей, хотя мы всё ещё не понимаем, на что она должна быть похожа.

Литература

1. M. A. Tsfasman and S. G. Vlăduț. Infinite global fields and generalized Brauer—Siegel theorem. *Moscow Math. J.*, 2002, vol. 2, No. 2, pp. 329–402.
2. M. A. Tsfasman and S. G. Vlăduț. Asymptotic properties of zeta-functions. *J. Math. Sci. (New York)*, 1997, vol. 84, No. 5, pp. 1445–1467. MR 98h:11079

Institut de Mathématiques de Luminy, Case 907, 13288, Marseille, France,
Московский Независимый университет, и Институт проблем передачи
информации РАН Добрушинская математическая лаборатория, Москва
E-mail: tsfasman@iml.univ-mrs.fr

Institut de Mathématiques de Luminy, Case 907, 13288, Marseille, France, и
Институт проблем передачи информации РАН Добрушинская математическая
лаборатория, Москва E-mail: vladut@iml.univ-mrs.fr

С. В. Шадрин

Компактификация и эйлерова характеристика пространств вещественных мероморфных функций

Аннотация

Работа состоит из двух частей. Сначала для каждой компоненты связности H_0 пространства вещественных мероморфных функций мы строим компактификацию $N(H_0)$. Затем мы выражаем эйлеровы характеристики пространств H_0 и $N(H_0)$ через топологические инварианты функций, образующих H_0 .

§ 1. Введение

1.1. *Вещественной мероморфной функцией* называется тройка (P, τ, f) , где P — компактная риманова поверхность, $\tau: P \rightarrow P$ — антиголоморфная инволюция, и $f: P \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ — голоморфное отображение на сферу Римана $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющее условию $f(\tau(z)) = \overline{f(z)}$.

Любой полином с вещественными коэффициентами $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, $a_i \in \mathbb{R}$, является вещественной мероморфной функцией. В наших обозначениях эта функция записывается как тройка $(\widehat{\mathbb{C}}, \eta, p)$, где $\eta: z \mapsto \bar{z}$ — стандартная инволюция.

1.2. Пространство вещественных мероморфных функций H снабжено естественной топологией [9] (мы напомним определение топологии в разделе 3). Пространство H состоит из счётного числа компонент связности. Каждая компонента связности является незамкнутым конечномерным вещественным многообразием.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 01-01-00660, и INTAS, грант 00-0259

В работах [8, 9] найдены целочисленные топологические инварианты вещественных мероморфных функций. Каждая компонента связности выделяется заданием этих инвариантов [10]. Простейшими инвариантами являются, например, степень n отображения f и род g кривой P .

1.3. Для каждой компоненты связности H_0 пространства H мы строим компактификацию $N(H_0)$. Наша конструкция компактификации является вещественным аналогом компактификации Натансона—Тураева [13].

Компактификация $N(H_0)$ имеет естественную структуру клеточного пространства. Элементы пространства $N(H_0)$ называются *вещественными декорированными функциями*.

Другие конструкции компактификации пространства мероморфных функций в не вещественном случае изложены в [2, 4, 7]. У этих конструкций пока, по-видимому, нет вещественных аналогов.

1.4. Рассмотрим следующие три объекта: функцию (P, τ, f) , компоненту связности H_0 , содержащую эту функцию, и компактификацию $N(H_0)$ этой компоненты связности: $(P, \tau, f) \in H_0 \subset N(H_0)$.

Топологические инварианты функции (P, τ, f) вычисляются очень легко. В связи с этим возникает следующая задача: зная топологические инварианты функции (P, τ, f) , вычислить какие-нибудь топологические характеристики многообразия H_0 и клеточного пространства $N(H_0)$.

Ранее была известна только формула для размерности: $\dim H_0 = \dim N(H_0) = 2g + 2n - 2$. Наша работа посвящена вычислению эйлеровой характеристики $\chi(N(H_0))$ клеточного пространства $N(H_0)$ и эйлеровой характеристики $\chi(H_0)$ многообразия H_0 . При этом под эйлеровой характеристикой некомпактного многообразия H_0 мы понимаем разность $\chi(H_0) = \chi(N(H_0)) - \chi(N(H_0) \setminus H_0)$ (дополнение $N(H_0) \setminus H_0$ также имеет естественную структуру клеточного пространства).

1.5. Основным результатом этой работы является теорема, связывающая эйлерову характеристику пространств H_0 и $N(H_0)$ с кратностью отображения Ляшко—Лойенги.

Грубо говоря, ситуация следующая. Понятие множества критических значений продолжается естественным образом на декорированные функции. Так вот, эйлерова характеристика пространства H_0 (пространства $N(H_0)$) равна числу вещественных мероморфных (вещественных декорированных) функций, множество критических значений которых состоит ровно из двух элементов: i и $-i$.

1.6. Эйлерова характеристика пространства H_0 равна либо 1, либо 0 (в зависимости от топологических инвариантов функций $(P, \tau, f) \in H_0$).

Подсчет эйлеровой характеристики компактификации $N(H_0)$ несколько сложнее. Нам удалось выразить $\chi(N(H_0))$ через число некоторых гра-

фов (структура которых зависит от топологических инвариантов функций $(P, \tau, f) \in H_0 \subset N(H_0)$).

1.7. Статья организована следующим образом:

В разделе 2 мы приводим результаты [8, 9, 10] о топологических инвариантах вещественных мероморфных функций (так, как это было сделано в [11]). В разделе 3 мы описываем конструкцию компактификации. В разделе 4 содержится вся необходимая нам информация об отображении Ляшко—Лойенги. В разделе 5 мы формулируем и доказываем теоремы о компактификации. Разделы 6 и 7 посвящены выражению эйлеровой характеристики через кратность отображения Ляшко—Лойенги (соответственно, формулировка и доказательство). И, наконец, разделы 8–10 посвящены вычислению эйлеровой характеристики.

В конце почти каждого раздела (кроме разделов 5, 7 и 9) есть пункт, в котором содержание раздела разбирается на примере. Примером во всех разделах служит одна и та же компонента связности пространства вещественных мероморфных функций.

1.8. Автор выражает благодарность С. М. Натанзону за многочисленные полезные советы и обсуждения.

Результаты этой работы кратко изложены в [14]. Имеется также английский перевод, см. [15].

§ 2. Вещественные мероморфные функции

2.1. Как уже было сказано, *вещественной мероморфной функцией* называется тройка (P, τ, f) , где P — компактная риманова поверхность, $\tau: P \rightarrow P$ — антиголоморфная инволюция (то есть, (P, τ) — вещественная алгебраическая кривая), и $f: P \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — мероморфная функция, удовлетворяющая условию $f(\tau(z)) = \eta(f(z))$ ($\eta: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, $\eta(z) = \bar{z}$). Функции (P_1, τ_1, f_1) и (P_2, τ_2, f_2) считаются совпадающими, если существует биголоморфное отображение $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$, такое, что $f_1 = f_2 \varphi$ и $\varphi \tau_1 = \tau_2 \varphi$.

Естественную топологию пространства вещественных мероморфных функций мы напомним ниже, при построении компактификации.

2.2. Рассмотрим кривую (P, τ) . Множество $P^\tau \subset P$ неподвижных точек инволюции τ состоит из простых попарно непересекающихся замкнутых контуров, называемых *овалами*. Если множество $P \setminus P^\tau$ несвязно (связно), то кривая называется *разделяющей (неразделяющей)*.

Топологическим типом кривой (P, τ) называется набор чисел (g, k, ε) , где g — род поверхности P , k — число овалов, и ε — число,

равное 1 для разделяющих кривых и 0 для неразделяющих.

2.3. Пусть функция (P, τ, f) определена на неразделяющей кривой топологического типа $(g, k, 0)$. Пусть $c \subset P^\tau$ — овал кривой (P, τ) . Ориентируем произвольным образом овал c и контур $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Поскольку $f(c) \subset \widehat{\mathbb{R}}$, можно определить степень отображения $f|_c: c \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$. *Индексом функции (P, τ, f) на овале $c \subset P^\tau$* называется абсолютное значение степени отображения $f|_c$.

Тогда *топологическим типом функции (P, τ, f)* называется набор чисел $(g, n, 0|I)$, где n — число листов накрытия f , а $I = (i_1, \dots, i_k)$ — совокупность индексов функции (P, τ, f) на овалах.

Обозначим через $H(g, n, 0|I)$ множество функций топологического типа $(g, n, 0|I)$.

Теорема А. [8, 10] *Множество $H = H(g, n, 0|I)$ непусто, если и только если $0 \leq k \leq g$; $\sum_{j=1}^k i_j \leq n - 2$ и $\sum_{j=1}^k i_j \equiv n \pmod{2}$. В этом случае H — связное пространство размерности $2(g + n - 1)$.*

2.4. Пусть функция (P, τ, f) определена на разделяющей кривой.

Ориентируем сферу $\widehat{\mathbb{C}}$ и поверхность P как комплексные многообразия. Кроме того, ориентируем контур $\widehat{\mathbb{R}}$ по возрастанию чисел. Выберем компоненту связности P_1 дополнения $P \setminus P^\tau$. Ориентация поверхности P_1 индуцирует ориентацию на её границе $P^\tau = \partial P_1$. Поскольку $f(P^\tau) \subset \widehat{\mathbb{R}}$, введённые ориентации позволяют определить *степени $I = (i_1, \dots, i_k)$* функции (P, τ, f) на овалах кривой (P, τ) . Произвол выбора компоненты связности P_1 приводит к тому, что набор степеней определён с точностью до замены $I \mapsto -I$.

Пусть топологический тип кривой (P, τ) равняется $(g, k, 1)$. Тогда *топологическим типом функции (P, τ, f)* называется набор чисел $(g, n, 1|I)$, где n — число листов накрытия f , а I — совокупность степеней функции (P, τ, f) на овалах. Топологический тип определён с точностью до замены $(g, n, 1|I) \mapsto (g, n, 1|-I)$.

Говорят, что топологический тип $(g, n, 1|I)$ *допускает расширение*, если $|\sum_{j=1}^k i_j| < \sum_{j=1}^k |i_j| = n - 2$.

Обозначим через $H(g, n, 1|I)$ множество функций топологического типа $(g, n, 1|I)$. Из наших определений следует, что $H(g, n, 1|I) = H(g, n, 1|-I)$.

Теорема В. [9, 10] *Множество $H = H(g, n, 1|I)$ непусто, если и*

только если $1 \leq k \leq g + 1$; $k \equiv g + 1 \pmod{2}$; $\sum_{j=1}^k i_j \equiv n \pmod{2}$ и либо $n = 1$, $g = 0$, $i_1 = \pm 1$, либо $n = 2$, $k = g + 1$, $i_1 = \dots = i_k = 0$, либо $n \geq 2$, $|\sum_{j=1}^k i_j| = \sum_{j=1}^k |i_j| = n$, $i_j \neq 0$, либо $n \geq 3$, $\sum_{j=1}^k |i_j| \leq n - 2$. Кроме того, если множество H непусто и топологический тип $(g, n, 1|I)$ не допускает расширения, то H — связное пространство размерности $2(g + n - 1)$.

2.5. Пусть топологический тип $(g, n, 1|I)$ допускает расширение и множество $H = H(g, n, 1|I)$ непусто. Для каждой функции $(P, \tau, f) \in H$ рассмотрим компоненту связности H_0 пространства H , содержащую функцию (P, τ, f) . Найдется функция $(P', \tau', f') \in H_0$, такая, что $P'_1 \cap (f')^{-1}(\Lambda)$ — связная поверхность (здесь P'_1 — та из компонент связности дополнения $P' \setminus (P')^{\tau'}$, с помощью которой определяется топологический тип $(g, n, 1|I)$; $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$). Расширенным топологическим типом функции $(P, \tau, f) \in H$ называется набор чисел $(g, n, 1|I, \xi)$, где ξ — род поверхности $P'_1 \cap (f')^{-1}(\Lambda)$. Расширенный топологический тип определён с точностью до замены $(g, n, 1|I, \xi) \mapsto (g, n, 1|-I, (g - k + 1)/2 - \xi)$.

Обозначим через $H(g, n, 1|I, \xi)$ подмножество H , состоящее из всех функций расширенного топологического типа $(g, n, 1|I, \xi)$. Из наших определений следует, что $H(g, n, 1|I, \xi) = H(g, n, 1|-I, (g - k + 1)/2 - \xi)$.

Теорема С. [9, 10] Множество $H_0 = H(g, n, 1|I, \xi)$ непусто, если и только если $0 \leq \xi \leq (g - k + 1)/2$. В этом случае H_0 — связное пространство размерности $2(g + n - 1)$.

2.6. Приведем пример компоненты связности.

Рассмотрим вещественные мероморфные функции вида $(\widehat{\mathbb{C}}, \eta, f_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{Im } z > 0\}$. Здесь $\eta(z) = \bar{z}$ — стандартная инволюция, а через f_λ мы обозначаем двулистное вещественное накрытие сферы сферой с двумя простыми критическими значениями: λ и $\bar{\lambda}$.

Множество таких функций образует компоненту связности пространства вещественных мероморфных функций. Нетрудно убедиться, что в наших обозначениях это пространство $H(0, 2, 1|(2))$. Отображение $(\widehat{\mathbb{C}}, \eta, f_\lambda) \mapsto \lambda$ задаёт гомеоморфизм $H(0, 2, 1|(2)) \rightarrow \Lambda$, то есть это пространство гомеоморфно открытому диску.

§ 3. Конструкция компактификации

3.1. Пусть H_0 — это одно из связных непустых пространств, описанных в разделе 2, то есть либо $H_0 = H(g, n, 0|I)$, либо $H_0 = H(g, n, 1|I)$ и топологический тип $(g, n, 1|I)$ не допускает расширения, либо $H_0 = H(g, n, 1|I, \xi)$.

В этом разделе мы построим компактификацию N_0 пространства H_0 . Наша компактификация является прямым аналогом компактификации Натансона—Тураева, построенной в [13] для пространства всех мероморфных функций.

Ниже, в разделе 5, мы докажем компактность и хаусдорфовость пространства N_0 , а также тот факт, что пространство N_0 компактифицирует пространство H_0 .

3.2. *Вещественной декорированной функцией* называется набор из пяти объектов $(P, \tau, f, E, \{D_e\})$, описанных ниже. $(P, \tau, f) \in H_0$ — это вещественная мероморфная функция с $2(g+n-1)$ критическими значениями (то есть все критические значения f — простые); E — это конечное подмножество в $\widehat{\mathbb{C}}$, инвариантное относительно комплексного сопряжения ($\eta(E) = E$, где $\eta: z \mapsto \bar{z}$); $\{D_e\}$ — это множество попарно непересекающихся замкнутых дисков, пронумерованных элементами e множества E , таких, что $e \in \text{Int } D_e$, каждый из дисков D_e содержит по меньшей мере два критических значения функции (P, τ, f) , границы дисков не содержат критических значений (P, τ, f) и если $\eta(e) = e'$, то $\eta(D_e) = D_{e'}$.

Заметим, что множество E в определении вещественной декорированной функции может быть пустым. В таком случае вещественная декорированная функция превращается в обычную вещественную мероморфную функцию без кратных критических значений.

3.3. Мы хотим наложить на декорированные функции некоторые отношения эквивалентности. Для этого необходимо уточнить наши обозначения. Будем рассматривать функцию (P, τ, f) как разветвлённое накрытие $f: S_g \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ фиксированой сферой с g ручками S_g сферы Римана $\widehat{\mathbb{C}}$. При этом под P мы подразумеваем комплексную структуру на S_g ; τ — это инволюция S_g , антиголоморфная относительно структуры P ; накрытие f удовлетворяет условию вещественности $f\tau = \eta f$. Структура P (но не инволюция τ) определяется по накрытию f однозначно [5]. Переформулируем условия совпадения: функции (P_1, τ_1, f_1) и (P_2, τ_2, f_2) считаются совпадающими, если существует гомеоморфизм $\varphi: S_g \rightarrow S_g$, такой, что $f_1 = f_2\varphi$ и $\varphi\tau_1 = \tau_2\varphi$.

Две декорированные функции считаются эквивалентными, если одна получается из другой композицией описанных ниже отображений

A_α и B_β . Отображение $A_\alpha: (P_0, \tau_0, f_0, E, \{D_e\}) \mapsto (P_1, \tau_1, f_1, E, \{D_e\})$ определяется путём $\alpha: [0, 1] \rightarrow H_0$, $\alpha: t \mapsto (P_t, \tau_t, f_t)$, таким, что на множестве $f_0^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{e \in E} D_e) \subset S_g$ комплексная структура, инволюция и на-

крытие не меняются. Отображение $B_\beta: (P_0, \tau_0, f_0, E, \{D_e^0\}) \mapsto (P_1, \tau_1, f_1, E, \{D_e^1\})$ определяется изотопией $\{\beta_t: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}\}_{t \in [0,1]}$ тождественного гомеоморфизма сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ ($\beta_0 = \text{id}$) в классе вещественных гомеоморфизмов ($\eta\beta_t = \beta_t\eta$), оставляющих неподвижными точки множества E и критические значения (P_0, τ_0, f_0) , лежащие в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{e \in E} D_e^0$. При этом $D_e^t = \beta_t(D_e^0)$

для каждого $e \in E$; накрытие $f_t: S_g \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ совпадает с $f_0\beta_t$; P_t отслеживает изменение комплексной структуры при изменении накрытия; инволюция $\tau_t: S_g \rightarrow S_g$ совпадает с τ_0 .

3.4. Пользуясь случаем, напомним топологию пространства вещественных мероморфных функций, определённых на кривых рода g : последовательность (P_n, τ_n, f_n) сходится к точке (P, τ, f) , если существуют последовательность (P'_n, τ'_n, f'_n) и точка (P', τ', f') , совпадающие с исходными, такие, что $f'_n \rightarrow f'$ как накрытия $S_g \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ и $\tau'_n \rightarrow \tau'$ как инволюции S_g .

3.5. Обозначим через N_0 множество всех классов эквивалентности декорированных функций. В этом пункте мы введём на N_0 структуру топологического пространства.

Открытая окрестность точки $x \in N_0$ определяется выбором декорированной функции $(P, \tau, f, E, \{D_e\})$ из класса эквивалентности x и множеством попарно непересекающихся замкнутых дисков $\{B_l \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{e \in E} D_e\}$, таких, что каждый диск содержит ровно одно критическое значение (P, τ, f) и каждое критическое значение, лежащее в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{e \in E} D_e$, принад-

лежит одному из дисков. При этом на диски $\{B_l\}$ накладывается условие вещественности: $\eta(\{B_l\}) = \{B_l\}$. Соответствующая окрестность точки $x \in N_0$ состоит из классов эквивалентности декорированных функций $(P', \tau', f', E', \{D_{e'}\})$, таких, что $\bigcup_{e' \in E'} D_{e'} \subset \bigcup_{e \in E} D_e$ и накрытие f' может

быть представлено в виде композиции ψf_α , где ψ — вещественный гомеоморфизм сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ ($\eta\psi = \psi\eta$), тождественный вне $\bigcup B_l \cup \bigcup_{e \in E} D_e$, а $(P_\alpha, \tau_\alpha, f_\alpha, E, \{D_e\})$ — образ декорированной функции $(P, \tau, f, E, \{D_e\})$ при отображении A_α для некоторого (произвольного) α . При этом P' определяется из накрытия f' , а τ' совпадает с τ_α как инволюция поверхности S_g .

Множество $X \subset N_0$ открыто, если для любой точкой $x \in X$ найдётся некоторая открытая окрестность $U(x)$ точки x , целиком лежащая в X .

Повторяя, с естественной модификацией, рассуждения из [13], нетрудно видеть, что открытые множества задают на пространстве N_0 топологию.

3.6. Будем обозначать построенную компактификацию N_0 пространства $H_0 = H(g, n, 0|I)$ (соответственно, $H(g, n, 1|I)$, $H(g, n, 1|I, \xi)$) через $N(g, n, 0|I)$ (соответственно, $N(g, n, 1|I)$, $N(g, n, 1|I, \xi)$).

3.7. Рассмотрим построенную компактификацию на примере.

Одна из возможных компактификаций открытого диска $\Lambda = \{z \in \widehat{\mathbb{C}}: \text{Im } z > 0\}$ это замкнутый диск $C(\Lambda) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}}: \text{Im } z \geq 0\}$. Установим гомеоморфизм между $N(0, 2, 1|(2))$ и диском $C(\Lambda) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}}: \text{Im } z \geq 0\}$.

Действительно, в случае пространства $H(0, 2, 1|(2))$ вещественные декорированные функции с непустым множеством E это просто функции вида $(\widehat{\mathbb{C}}, \eta, f_\lambda, \{\mu\}, \{D_\mu\})$, где $\mu \in \widehat{\mathbb{R}}$ и $\lambda \in D_\mu$. Две такие функции эквивалентны тогда и только тогда, когда точка μ у них совпадает.

Гомеоморфизм $N(0, 2, 1|(2)) \rightarrow C(\Lambda)$ задаётся формулами: $(\widehat{\mathbb{C}}, \eta, f_\lambda, \{\mu\}, \{D_\mu\}) \mapsto \mu$, $(\widehat{\mathbb{C}}, \eta, f_\lambda, \emptyset, \emptyset) \mapsto \lambda$.

§ 4. Отображение Ляшко—Лойенги и его свойства

4.1. Для исследования свойств построенного в предыдущем разделе пространства N_0 нам понадобится отображение Ляшко—Лойенги.

4.2. Обозначим через Π^m пространство вещественных наборов из m неупорядоченных (не обязательно различных) точек римановой сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ (вещественность означает неподвижность относительно инволюции $\eta: z \rightarrow \bar{z}$). Пространство Π^m естественно отождествляется с $\mathbb{R}P^m$.

Представим Π^m в виде объединения непересекающихся подмногообразий. Пусть $P = (p_1, \dots, p_r)$ и $Q = (q_1, \dots, q_s)$ — неубывающие последовательности натуральных чисел, возможно пустые, такие, что $m = \sum_{j=1}^r p_j + 2 \sum_{j=1}^s q_j$. Обозначим через $\Pi(P|Q)$ множество наборов, состоящих из $r \geq 0$ попарно различных точек окружности $\widehat{\mathbb{R}}$, $s \geq 0$ попарно различных точек полуплоскости $\Lambda = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} | \text{Im } z > 0\}$ и s точек из $\eta(\Lambda)$, сопряжённых точкам Λ . При этом точки из $\widehat{\mathbb{R}}$ взяты с кратностями p_1, \dots, p_r (неупорядоченно), точки из Λ и $\eta(\Lambda)$ — с кратностями q_1, \dots, q_s .

Множество $\Pi(P|Q)$ — подмногообразие в Π^m размерности $r + 2s$ (не обязательно связное). Очевидно, что $\Pi^m = \bigsqcup \Pi(P|Q)$.

4.3. Рассмотрим компактификацию N_0 компоненты связности H_0 , содержащей n -листные функции, определённые на кривых рода g .

Отображение Ляшко—Лойенги $\Pi: N_0 \rightarrow \Pi^{2(n+g-1)}$ сопоставляет

декорированной функции $(P, \tau, f, E, \{D_e\})$ набор точек, состоящий из критических значений функции (P, τ, f) , лежащих в $\widehat{C} \setminus \bigcup_{e \in E} D_e$, и из точек $e \in E$, взятых с кратностями, равными количеству критических значений функции (P, τ, f) , лежащих в D_e .

Лемма 4.1. *Отображение Ляшко—Лойенги непрерывно.*

Лемма 4.2. *Ограничение отображения Ляшко—Лойенги на прообраз любой компоненты связности любого из подмногообразий $\Pi(P|Q)$ представляет собой конечнолистное неразветвлённое накрытие.*

4.4. Отображение $\Pi_H: H_0 \rightarrow \Pi^{2(g+n-1)}$, сопоставляющее вещественной мероморфной функции набор её критических значений (с учётом кратностей), также называется *отображением Ляшко—Лойенги* [1].

Лемма 4.3. *Отображение Π_H непрерывно.*

Лемма 4.4. *Ограничение отображения Π_H на прообраз любой компоненты связности любого из подмногообразий $\Pi(P|Q)$ представляет собой конечнолистное неразветвлённое накрытие.*

4.5. Все леммы этого раздела очевидным образом следуют из данных нами определений.

4.6. Рассмотрим пример. Пусть $H_0 = H(0, 2, 1|(2))$. Тогда отображение Ляшко—Лойенги $\Pi: N(0, 2, 1|(2)) \rightarrow \Pi^2$ действует по формулам:

$$(\widehat{C}, \eta, f_\lambda, \{\mu\}, \{D_\mu\}) \mapsto (\mu, \mu), \quad (\widehat{C}, \eta, f_\lambda, \emptyset, \emptyset) \mapsto (\lambda, \bar{\lambda}).$$

Представим пространство Π^2 в виде объединения подмногообразий типа $\Pi(P|Q)$: $\Pi^2 = \Pi(2|\emptyset) \sqcup \Pi(1, 1|\emptyset) \sqcup \Pi(\emptyset|1)$. В нашем случае отображение Π представляет собой однолистное накрытие над $\Pi(\emptyset|1)$ и над $\Pi(2|\emptyset)$, и нульлистное накрытие над $\Pi(1, 1|\emptyset)$.

§ 5. Свойства пространства N_0

5.1. Теорема 5.1 доказывается так же, как и аналогичные утверждения [13] в комплексном случае.

Теорема 5.1. *Пространство N_0 хаусдорфово. Пространство N_0 компактно.*

Схема доказательства. Для доказательства хаусдорфовости топологии пространства N_0 достаточно построить непересекающиеся окрестности

точек $x, y \in N_0$, таких, что $ll(x) = ll(y)$. А это нетрудно сделать явно, используя леммы 4.1–4.2.

Компактность доказывается выделением из любой последовательности точек N_0 сходящейся подпоследовательности. Пользуясь леммой 4.1 и компактностью пространства $\Pi^{2(g+n-1)}$, мы находим образ частичного предела при отображении Ляшко—Лойенги. Тогда из леммы 4.2 следует существование частичного предела. \square

5.2. Опишем вложение пространства H_0 в пространство N_0 . Обозначим через H_0^* подпространство в H_0 , состоящее из функций, все критические значения которых простые. Очевидно, что подпространство H_0^* открыто и всюду плотно в пространстве H_0 . Отображение $C^*: H_0^* \rightarrow N_0$ сопоставляет функции (P, τ, f) декорированную функцию $(P, \tau, f, \emptyset, \emptyset)$.

Теорема 5.2. *Отображение C^* есть непрерывное вложение подпространства H_0^* в пространство N_0 . Отображение C^* продолжается по непрерывности до отображения $C: H_0 \rightarrow N_0$. Отображение C есть непрерывное вложение пространства H_0 в пространство N_0 . Образ $C(H_0)$ открыт и всюду плотен в пространстве N_0 .*

Схема доказательства. Непрерывность отображения C^* следует из данных нами определений.

Построим отображение $C: H_0 \rightarrow N_0$, продолжающее по непрерывности отображение C^* . Пусть $(P_0, \tau_0, f_0) \in H_0$ — функция с непростыми критическими значениями. Обозначим множество её непростых критических значений через E . Очевидно, что $\eta(E) = E$. Выберем замкнутые попарно непересекающиеся диски $\{D_e\}_{e \in E}$, такие, что $e \in D_e$, D_e не содержит других критических значений (P_0, τ_0, f_0) и если $\eta(e) = e'$, то $\eta(D_e) = D_{e'}$. По определению, $C: (P_0, \tau_0, f_0) \mapsto (P_1, \tau_1, f_1, E, \{D_e\})$, где $(P_t, \tau_t, f_t)_{t \in [0,1]}$ — произвольный путь в пространстве H_0 , такой, что на множестве $f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{e \in E} D_e) \subset S_g$ комплексная структура, инволюция и накрытие не меняются, и у функции (P_1, τ_1, f_1) все критические значения простые.

Из определения эквивалентности декорированных функций следует, что отображение C определено корректно. Также очевидно, что отображение C непрерывно и $C|_{H_0^*} = C^*$. Тот факт, что образ $C(H_0)$ открыт и всюду плотен в пространстве N_0 следует непосредственно из определения топологии пространства N_0 . \square

5.3. Теперь мы имеем два отображения Ляшко—Лойенги, определённых на пространстве H_0 : отображение ll_H и отображение $ll \circ C$. Очевидно, что эти два отображения совпадают, $ll_H \equiv ll \circ C$.

§ 6. Выражение эйлеровой характеристики через кратность отображения Ляшко—Лойенги

6.1. Обозначим через $\Pi_0 = \Pi(P_0|Q_0)$ такое подмногообразие пространства $\Pi^{2(g+n-1)}$, что $P_0 = \emptyset$, $Q_0 = (g+n-1)$. Иначе говоря, Π_0 — подмногообразие наборов из двух точек кратности $g+n-1$, одна из которых лежит в Λ , а другая получается из первой сопряжением. Очевидно, что Π_0 гомеоморфно диску.

Рассмотрим компактификацию N_0 компоненты связности H_0 , содержащей n -листные функции, определённые на кривых рода g .

Теорема 6.3. *Эйлерова характеристика $\chi(N_0)$ пространства N_0 равна кратности ограничения отображения Ляшко—Лойенги $\Pi: N_0 \rightarrow \Pi^{2(g+n-1)}$ на прообраз подмногообразия Π_0 .*

Эйлерова характеристика $\chi(H_0)$ пространства H_0 равна кратности ограничения отображения Ляшко—Лойенги $\Pi_H: H_0 \rightarrow \Pi^{2(g+n-1)}$ на прообраз подмногообразия Π_0 .

Доказательство этой теоремы мы вынесли в следующий раздел.

6.2. Очевидны следующие следствия теоремы 6.3.

Следствие 6.1. *Пусть $g+n-1 > 1$. Тогда эйлерова характеристика пространства N_0 равна числу попарно неэквивалентных декорированных функций $(P, \tau, f, E, \{D_e\}) \in N_0$, таких, что $E = \{i, -i\}$, $D_{\pm i} = \{z \mid |z \mp i| \leq 1/2\}$ и все критические значения (P, τ, f) лежат в дисках $D_{\pm i}$.*

Условие $g+n-1 > 1$ связано с нашим требованием в определении декорированной функции, чтобы в каждом диске D_e лежало по меньшей мере два критических значения.

Следствие 6.2. *Эйлерова характеристика пространства H_0 равна числу вещественных мероморфных функций $(P, \tau, f) \in H_0$, множество критических значений которых состоит из двух элементов, i и $-i$.*

Очевидно, что подобное возможно только в роде нуль, но это мы обсудим ниже.

6.3. Рассмотрим наш пример — пространство $H(0, 2, 1|(2))$. Мы знаем, что оно гомеоморфно открытому диску, а его компактификация — замкнутому диску. Следовательно эйлеровы характеристики пространства $H(0, 2, 1|(2))$ и его компактификации равны единице.

Соответствующие кратности отображения Ляшко—Лойенги мы вычисляли в пункте 6, и они также равнялись единице.

§ 7. Доказательство теоремы 6.3 (об эйлеровой характеристике)

7.1. Построим клеточное разбиение пространства N_0 . Для этого, пользуясь леммой 4.2, мы построим клеточное разбиение пространства $\Pi^{2(g+n-1)}$, согласованное со стартификацией $\Pi(P|Q)$.

Пусть Π — компонента связности $\Pi(P|Q) \subset \Pi^{2(g+n-1)}$, $P = (p_1, \dots, p_r)$, $Q = (q_1, \dots, q_s)$. Очевидно, что Π конечнолистно неразветвлённо покрывает $\Pi(P'|Q') \subset \Pi^{r+2s}$, где $P' = (1, \dots, 1)$ (всего r единиц), $Q' = (1, \dots, 1)$ (всего s единиц).

Построим клеточное разбиение подмногообразия $\Pi(P'|Q')$. Очевидно, что $\Pi(P'|Q')$ гомеоморфно произведению $W^r(\widehat{\mathbb{R}}) \times W^s(\Lambda)$, где через $W^k(X)$ обозначено пространство наборов из k попарно несовпадающих точек пространства X . Следовательно достаточно построить клеточное разбиение каждого из пространств $W^r(\widehat{\mathbb{R}})$ и $W^s(\Lambda)$.

7.2. Пространство $W^k(\widehat{\mathbb{R}})$ мы разбиваем на две клетки. Одна из них, k -мерная, состоит из наборов (x_1, \dots, x_k) , не содержащих ∞ . Координатами на этой клетке служат числа $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, на которые наложено соотношение $x_1 < \dots < x_k$. Вторая клетка, $(k-1)$ -мерная, состоит из наборов $(x_1, \dots, x_{k-1}, \infty)$ (содержащих ∞). Координатами на этой клетке служат числа $x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$, на которые наложено соотношение $x_1 < \dots < x_{k-1}$.

Для построения клеточного разбиения пространства $W^k(\Lambda)$ нам необходимо ввести некоторые обозначения. Пусть $z_1, z_2 \in \Lambda$. Запись $z_1 \prec z_2$ означает, что $\operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2$. Запись $z_1 \preceq z_2$ означает, что $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z_2$. Каждая клетка состоит из наборов (z_1, \dots, z_k) , таких, что координатами служат числа $(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_k, \operatorname{Im} z_k)$, на которые наложено одно соотношение вида $z_1 * z_2 * \dots * z_k$, где знак «*» обозначает либо \prec , либо \preceq . Всего, таким образом, имеется 2^{k-1} клетки.

7.3. Мы построили клеточное разбиение пространств $W^r(\widehat{\mathbb{R}})$ и $W^s(\Lambda)$. Их прямое произведение задаёт клеточное разбиение пространства $\Pi(P'|Q')$. Поднимая с помощью накрытий это разбиение, мы получаем клеточное разбиение пространств $\Pi(P|Q)$, а значит и $\Pi^{2(g+n-1)}$. Далее, пользуясь леммой 4.2, мы получаем клеточное разбиение пространства N_0 .

Построенные клеточные разбиения не задают структуру клеточных пространств на $\Pi^{2(g+n-1)}$ и на N_0 . Однако для подсчёта эйлеровой характеристики достаточно произвольного разбиения пространства на непересекающиеся клетки.

Красивый пример структуры клеточного пространства на частном случае пространства вещественных мероморфных функции описан в [3].

Очевидна следующая лемма:

Лемма 7.5. *Каждая клетка построенного клеточного разбиения пространства N_0 целиком лежит либо в $C(H_0)$, либо в $N_0 \setminus C(H_0)$.*

7.1. Доказательство теоремы 6.3

Для доказательства теоремы 6.3 достаточно показать (здесь используется лемма 4.2), что у всех компонент связности всех многообразий вида $\Pi(P|Q)$, кроме Π_0 , эйлерова характеристика равна нулю. Здесь эйлерова характеристика — это альтернированная сумма числа построенных клеток разной размерности.

Для этого достаточно показать, что эйлерова характеристика любого многообразия $\Pi(P'|Q')$, кроме $\Pi_0 \subset \Pi^2$, равна нулю. Если $P' \neq \emptyset$ ($r > 0$), то $\chi(\Pi(P'|Q')) = 0$, так как $\chi(W^k(\widehat{\mathbb{R}})) = 0$. Осталось рассмотреть случай, когда $r = 0$ и $s \geq 2$. Тогда $\Pi(P'|Q') = W^s(\Lambda)$. Всего в клеточном разбиении пространства $W^s(\Lambda)$ участвует 2^{s-1} клетки. Размерность клетки вычисляется по формуле $\dim = 2 + 2(\prec) + (\asymp)$, где (\prec) и (\asymp) — это количество соответствующих знаков в соотношении, задающем клетку. Таким образом, эйлерова характеристика $\chi(W^s(\Lambda))$ равна $\binom{c-1}{0} - \binom{c-1}{1} + \binom{c-1}{2} - \dots \pm \binom{c-1}{c-1} = (1-1)^{c-1} = 0$, что нам и требовалось.

Из этого сразу следует наша теорема, так как $\chi(\Pi_0) = 1$. \square

§ 8. Эйлерова характеристика компонент связности пространства вещественных мероморфных функций

8.1. Обозначим через H_1 компоненту связности $H(g, n, 0|I)$.

Теорема 8.4. *Если $g = 0$, то $\chi(H_1) = 1$. Если же $g \neq 0$, то $\chi(H_1) = 0$.*

Рассмотрим компоненту связности $H_2 = H(g, n, 1|I)$ (топологический тип $(g, n, 1|I)$, $I = (i_1, \dots, i_k)$ не допускает расширения). Напомним, что при $g = 0$ у функций, лежащих в H_2 , ровно один овал, то есть $k = 1$, $I = (i_1)$.

Теорема 8.5. *Если $g = 0$ и $|i_1| = n$, то $\chi(H_2) = 1$. В любом другом случае $\chi(H_2) = 0$.*

Обозначим через H_3 компоненту связности $H(g, k, 1|I, \xi)$.

Теорема 8.6. *Вне зависимости от топологических инвариантов $\chi(H_3) = 0$.*

Доказательства теорем 8.4–8.6. Рассмотрим произвольную компоненту связности H_0 пространства вещественных мероморфных функций.

Из построения отображения C (теорема 5.2) и следствия 6.2 следует, что эйлерова характеристика пространства H_0 равна числу функций $(P, \tau, f) \in H_0$, таких, что у них только два критических значения, i и $-i$.

Рассмотрим такую функцию. Поскольку у неё только одно критическое значение в диске $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z > 0\}$, любая компонента связности прообраза диска Λ представляет собой диск. То же можно сказать и про $\eta(\Lambda) = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z < 0\}$. Следовательно род поверхности P равен нулю. Также можно утверждать, что прообраз контура $\widehat{\mathbb{R}}$ состоит из одной компоненты связности.

Очевидно, что в каждом пространстве H_0 таких функций не более одной. Необходимые и достаточные условия существования такой функции следующие: $g = 0$, и либо $\varepsilon = 0$, либо $|i_1| = n$. Отсюда следуют теоремы 8.4–8.6. \square

8.2. Применим теорему 8.5 к нашему примеру, пространству $H(0, 2, 1|(2))$. Получается, что $\chi(H(0, 2, 1|(2))) = 1$.

§ 9. Эйлерова характеристика компактификации в случае неразделяющих кривых

Обозначим через N_1 компактификацию $N(g, n, 0|I)$, $I = (i_1, \dots, i_k)$. Для вычисления эйлеровой характеристики $\chi(N_1)$ пространства N_1 в общем случае нам понадобятся неразделяющие графы. При определении неразделяющего графа мы предполагаем, что все индексы i_j отличны от нуля (либо, что их вообще нет, то есть $k = 0$, $I = ()$).

Неразделяющим графом называется следующий набор информации:

1. Двудольный граф с пометками на вершинах и рёбрах это:
 - а) Множество вершин $V = V_w \sqcup V_b$. Это множество разбито на два равномошных подмножества ($|V_w| = |V_b|$). Вершины, принадлежащие V_w (V_b), мы считаем покрашенными в *белый* (*чёрный*) цвет.
 - б) Множество рёбер E . Каждое ребро соединяет вершины разного цвета. Граф (V, E) связан.

- с) Функция $\zeta_V: V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$. Мы требуем, чтобы $g = k + |E| - |V| + 1 + \sum_{v \in V} \zeta_V(v)$.
- д) Функция $\zeta_E: E \rightarrow \mathbb{N}$. Должно выполняться равенство $n = \sum_{e \in E} \zeta_E(e) - \sum_{j=1}^k i_j$.

2. Структура корневых вершин и рёбер:

Выделены подмножества корневых вершин $V_\omega^r \subset V_\omega$, $V_b^r \subset V_b$. Корневых вершин каждого цвета ровно k . Функция ζ_V принимает на всех корневых вершинах значение 0.

Из каждой корневой вершины выходит ровно одно ребро. Обозначим через E_ω^r (E_b^r) множество рёбер, выходящих из корневых вершин белого (чёрного) цвета. Функция ζ_E устанавливает изоморфизмы $E_\omega^r \rightarrow I$ и $E_b^r \rightarrow I$ множеств E_ω^r и E_b^r и набора индексов $I = (i_1, \dots, i_k)$.

3. Автоморфизм γ графа (V, E) :

- а) Автоморфизм γ меняет цвет вершин.
- б) $\zeta_V \circ \gamma = \zeta_V$, $\zeta_E \circ \gamma = \zeta_E$.
- с) На рёбрах, которые при автоморфизме γ переходят в себя, функция ζ_E принимает чётные значения.
- д) Автоморфизм γ переводит корневые вершины в корневые.

В качестве примера к этому определению, мы опишем единственный неразделяющий граф для пространства $N(1, 3, 0|(1))$: $V = \{v_{-2}, v_{-1}, v_1, v_2\}$, $V_\omega = \{v_{-2}, v_1\}$, $V_b = \{v_{-1}, v_2\}$, $V_\omega^r = \{v_{-2}\}$, $V_b^r = \{v_2\}$, $E = \{(v_{-2}, v_{-1}), (v_{-1}, v_1), (v_1, v_2)\}$, $E_\omega^r = \{(v_{-2}, v_{-1})\}$, $E_b^r = \{(v_1, v_2)\}$, $\zeta_V \equiv 0$, $\zeta_E(E_{\omega,b}^r) = 1$, $\zeta_E((v_{-1}, v_1)) = 2$, $\gamma(v_i) = v_{-i}$.

Теорема 9.7. Если $k > 0$ и хотя бы один из индексов i_j равен нулю, то $\chi(N_1) = 0$. В любом другом случае эйлерова характеристика $\chi(N_1)$ равна числу различных неразделяющих графов.

Доказательство. Пусть топологический тип $(g, k, 0|I)$ таков, что у функций из $H_1 = H(g, k, 0|I)$ имеется овал нулевого индекса. Тогда для любой декорированной функции $(P, \tau, f, E, \{D_e\}) \subset N_1 = N(H_1)$ верно следующее: либо функция (P, τ, f) имеет вещественное критическое значение в $\widehat{C} \setminus \bigcup D_e$, либо множество E содержит вещественную точку, либо имеют место оба утверждения. Следовательно образ отображения

Ляшко—Лойенги не содержит многообразия Π_0 . Тогда, по теореме 6.3, $\chi(N_1) = 0$.

Теперь пусть топологический тип $(g, k, 0|I)$ таков, что у функций из $H_1 = H(g, k, 0|I)$ либо вообще нет овалов, либо все овалы ненулевого индекса. Тогда пространство N_1 будет содержать декорированные функции, описанные в следствии 6.1.

Каждой декорированной функции $(P, \tau, f, E, \{D_e\})$, такой, что $E = \{i, -i\}$, $D_{\pm i} = \{z \mid |z \mp i| \leq 1/2\}$ и все критические значения (P, τ, f) лежат в дисках $D_{\pm i}$, мы сопоставим неразделяющий граф.

А именно, выберем произвольную функцию (P, τ, f) из класса эквивалентности $(P, \tau, f, E, \{D_e\})$. Разрежем поверхность P по овалам. Далее, заклеим все образовавшиеся дырки накрытиями дисков Λ и $\eta(\Lambda)$ так, чтобы снова получилась вещественная мероморфная функция (P', τ', f') . Очевидно, что топологический тип полученной функции равняется $(g - k, n + \sum_{j=1}^k i_j, 0|I')$, $I' = ()$.

Каждой компоненте связности $f^{-1}(\Lambda)$ ($f^{-1}(\eta(\Lambda))$) мы сопоставим белую (чёрную) вершину со значением ζ_V , равным роду этой компоненты. Корневые вершины получатся из доклеенных дисков. Каждой компоненте связности $f^{-1}(\mathbb{R})$ мы сопоставим ребро со значением ζ_E , равным числу листов накрытия контура $\widehat{\mathbb{R}}$ этой компонентой. Ребро выходит из вершины, если соответствующие компоненты поверхности P' граничат друг с другом.

Аutomорфизм графа порождается инволюцией τ' . Нетрудно убедиться, что построенный граф — неразделяющий, то есть удовлетворяет всем необходимым условиям.

Лемма 9.6. *Неэквивалентным декорированным функциям сопоставляются разные неразделяющие графы. Каждый неразделяющий граф может быть получен как граф некоторой функции.*

Доказательство. Второе утверждение леммы доказывается явным построением. Первое утверждение леммы очевидным образом выводится из леммы 9.7 которую мы сейчас сформулируем.

В работе [12] подробно выписаны стандартные рассуждения, позволяющие доказывать подобные леммы. \square

Рассмотрим два n -листных накрытия $f_1, f_2: U \rightarrow D$ диска D связной поверхностью U с простыми точками ветвления. Пусть f_1 и f_2 задают топологически эквивалентные накрытия над границей диска.

Лемма 9.7. *Найдутся сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $\varphi: U \rightarrow U$ и $\psi: D \rightarrow D$, такие, что $\psi f_1 = f_2 \varphi$.*

Эта лемма напрямую следует из результатов [8, 10, 6] о топологической классификации накрытий сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ с одним непростым критическим значением.

Закончим доказательство теоремы. Из леммы 9.6 следует, что число функций, описанных в следствии 6.1, равно числу неразделяющих графов. Следовательно эйлерова характеристика пространства $N(g, k, 0|I)$ равна числу неразделяющих графов. \square

§ 10. Эйлерова характеристика компактификации в случае разделяющих кривых

10.1. Обозначим через N_2 компактификацию $N(g, n, 1|I)$ (топологический тип $(g, n, 1|I)$, $I = (i_1, \dots, i_k)$ не допускает расширения). Для вычисления эйлеровой характеристики $\chi(N_2)$ пространства N_2 в общем случае нам понадобятся разделяющие графы. При определении разделяющего графа мы предполагаем, что все индексы i_j отличны от нуля.

Разделяющим графом называется следующий набор информации:

1. Двудольный граф с пометками на вершинах и рёбрах:

- Множество вершин $V = V_w \sqcup V_b$. Это множество разбито на два подмножества (не обязательно равномошных). Вершины, принадлежащие подмножеству V_w (V_b) мы считаем покрашенными в *белый* (*чёрный*) цвет.
- Множество рёбер E . Каждое ребро соединяет вершины разного цвета. Граф (V, E) связан.
- Функция $\zeta_V: V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$. Мы требуем, чтобы $g = (k - 1) + 2(|E| - |V| + 1) + 2 \sum_{v \in V} \zeta_V(v)$.
- Функция $\zeta_E: E \rightarrow \mathbb{N}$. Должно выполняться равенство $n = 2 \sum_{e \in E} \zeta_E(e) - \sum_{j=1}^k |i_j|$.

2. Структура корневых вершин и рёбер:

Выделены подмножества корневых вершин $V_w^r \subset V_w$, $V_b^r \subset V_b$. Общее число корневых вершин равно k . Количество корневых вершин белого цвета равно количеству отрицательных степеней i_j в наборе

$I = (i_1, \dots, i_k)$. Функция ζ_V принимает на всех корневых вершинах значение 0.

Из каждой корневой вершины выходит ровно одно ребро. Обозначим через E^r множество рёбер, выходящих из корневых вершин. Определим на множестве E^r функцию ζ_R : если ребро $e \in E^r$ выходит из корневой вершины белого (чёрного) цвета, то $\zeta_R(e) = -\zeta_E(e)$ ($\zeta_R(e) = \zeta_E(e)$). Функция ζ_R должна устанавливать изоморфизм множества E^r и набора степеней $I = (i_1, \dots, i_k)$.

В качестве примера к этому определению мы опишем единственный разделяющий граф для пространства $N(1, 3, 1|(1, 2))$: $V = \{v_0, v_1, v_2\}$, $V_w = \{v_1\}$, $V^r = V_b = \{v_0, v_2\}$, $E = E^r = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2)\}$, $\zeta_V \equiv 0$.

Теорема 10.8. Если $|\sum_{j=1}^k i_j| = n$, то $\chi(N_2) = 1$. Если хотя бы одна из степеней i_j равна нулю, то $\chi(N_2) = 0$. Если же $\sum_{j=1}^k |i_j| \leq n - 2$ и $i_j \neq 0$, то эйлерова характеристика $\chi(N_2)$ равна числу различных разделяющих графов.

Доказательство. Если одна из степеней i_j равна нулю, то $\chi(N_2) = 0$ по тем же соображениям, что и при доказательстве теоремы 9.7.

Пусть ни одна из степеней i_j не равна нулю. Каждой декорированной функции $(P, \tau, f, E, \{D_e\}) \in N_2$, такой, что $E = \{i, -i\}$, $D_{\pm i} = \{z \mid |z \mp i| \leq 1/2\}$ и все критические значения (P, τ, f) лежат в дисках $D_{\pm i}$, мы сопоставим разделяющий граф.

А именно, выберем произвольную функцию (P, τ, f) из класса эквивалентности $(P, \tau, f, E, \{D_e\})$. Пусть P_1 — та из компонент связности дополнения $P \setminus P^\tau$, по которой определён топологический тип $(g, k, 1|I)$. Отрежем от неё по овалам остальную часть кривой P . Далее, заклеим все образовавшиеся дырки в P_1 накрытиями дисков Λ и $\eta(\Lambda)$ так, чтобы снова получилась мероморфная функция (уже не вещественная). Полученную при этом поверхность мы обозначим через P'_1 .

Каждой компоненте связности $f^{-1}(\Lambda)$ ($f^{-1}(\eta(\Lambda))$) мы сопоставим белую (чёрную) вершину со значением ζ_V , равным роду этой компоненты. Корневые вершины получатся из доклеенных дисков. Каждой компоненте связности $f^{-1}(\widehat{\mathbb{R}})$ мы сопоставим ребро со значением ζ_E , равным числу листов накрытия контура $\widehat{\mathbb{R}}$ этой компонентой. Ребро выходит из вершины, если соответствующие компоненты поверхности P'_1 граничат друг с другом. Корневые рёбра и изоморфизм ζ_R получаются из следов овалов на P'_1 .

Нетрудно убедиться, что построенный граф — разделяющий, то есть удовлетворяет всем необходимым условиям.

Лемма 10.8. *Неэквивалентным декорированным функциям сопоставляются разные разделяющие графы. Каждый разделяющий граф может быть получен как граф некоторой функции.*

Доказательство. Первое утверждение леммы следует непосредственно из леммы 9.7. Второе утверждение леммы доказывается явным построением. \square

Докажем третье утверждение теоремы. Из леммы 10.8 следует, что число функций, описанных в следствии 6.1, равно числу разделяющих графов. Следовательно эйлерова характеристика пространства N_2 равна числу разделяющих графов.

Если же $|\sum_{j=1}^k i_j| = n$, то нетрудно видеть, что разделяющий граф ровно один. Теорема доказана. \square

10.2. Обозначим через N_3 компактификацию $N(g, n, 1|I, \xi)$, $I = (i_1, \dots, i_k)$.

Теорема 10.9. *Если хотя бы одна из степеней i_j равна нулю, то $\chi(N_3) = 0$. В любом другом случае $\chi(N_3) = 1$.*

Доказательство. Если одна из степеней i_j равна нулю, то $\chi(N_3) = 0$ по тем же соображениям, что и при доказательстве теоремы 9.7. В любом другом случае нам достаточно убедиться, что в пространстве $N_3 = N(g, k, 1|I, \xi)$ ровно одна декорированная функция, удовлетворяющая условиям следствия 6.1.

Рассмотрим функцию $(P, \tau, f) \in H(g, k, 1|I, \xi)$. Пусть у неё нет критических значений на контуре $\widehat{\mathbb{R}}$. Пусть P_1 — та из компонент связности дополнения $P \setminus P^\tau$, по которой определён расширенный топологический тип $(g, k, 1|I, \xi)$.

Лемма 10.9. $f^{-1}(\Lambda) \cap P_1$ и $f^{-1}(\eta(\Lambda)) \cap P_1$ — *связные множества.*

Эта лемма в несколько иной формулировке доказана в [10].

Из лемм 9.7 и 10.9 следует, что в N_3 ровно одна функция, удовлетворяющая условиям следствия 6.1. Теорема доказана. \square

10.3. Применим теорему 10.8 к нашему примеру, пространству $N(0, 2, 1|(2))$. Нетрудно видеть, что разделяющий граф ровно один: $V = \{v_0, v_1\}$, $V_w = \{v_1\}$, $V^r = V_b = \{v_0\}$, $E = E^r = \{(v_0, v_1)\}$, $\zeta_v \equiv 0$.

Литература

1. В. И. Арнольд, Топологическая классификация тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и рёбер, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, 30:1, 1–14
2. S. Diaz, D. Edidin, Towards the homology of Hurwitz space, *J. Diff. Geom.* 43 (1996), 66–98
3. A. Gabrielov, A. Eremenko, Rational functions with real critical points and the B. and M. Shapiro conjecture in real enumerative geometry, to appear in *Annals of Math.*
4. J. Harris, D. Mumford, On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, *Invent. Math.* 67 (1982), 23–86
5. B. Kerckjarto, *Vorlesungen über Topologie I. Flächentopologie*, Berlin, Springer-Verlag, 1923
6. A. G. Khovanskii, S. Zdravkovska, Branched covers of S^2 and braid groups, *J. Knot Theory Ramific.*, 1996, 5:1, 55–75
7. M. Kontsevich, Enumeration of rational curves via torus action, in: *The moduli space of curves*, PM 129, Birkhäuser, Basel, 1995, 335–368
8. С. М. Натанзон, Пространства вещественных мероморфных функций на вещественных алгебраических кривых, *Докл. АН СССР*, 1984, 279:4, 803–805
9. С. М. Натанзон, Вещественные мероморфные функции на вещественных алгебраических кривых, *Докл. АН СССР*, 1987, 297:1, 40–43
10. S. M. Natanzon, Topology of 2–dimensional coverings and meromorphic functions on real and complex algebraic curves, *Selecta Math. Soviet.*, 1993, 12:3, 251–291
11. С. М. Натанзон, С. В. Шадрин, Топологическая классификация унитарных функций произвольного рода, *Успехи мат. наук*, 2000, 55:6, 151–152
12. S. Natanzon, B. Shapiro, A. Vainshtein, Topological classification of generic real rational functions, to appear in *J. Knot Theory Ramific.*, math. AG/0110235
13. S. Natanzon, V. Turaev, A compactification of the Hurwitz space, *Topology*, 1999, 38:4, 889–914
14. С. В. Шадрин, Эйлерова характеристика пространств вещественных мероморфных функций, *Функц. анализ и его прил.* 36:2 (2002), 92–94
15. S. V. Shadrin, A compactification and the Euler characteristic of the spaces of real meromorphic functions, arXiv: math. CV/0202060

Независимый московский университет

E-mail: shadrin@mccme.ru

О. К. Шейнман

Казимиры второго порядка аффинных алгебр Кричевера—Новикова $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ и $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$

Друзьям и коллегам по Независимому московскому университету

Аннотация

Дано описание казимиров второго порядка для аффинных алгебр Кричевера—Новикова $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ и $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$. Вводятся более общие операторы, которые мы назвали полуказимирами. Доказано, что полуказимиры корректно определены на конформных блоках и, для некоторых пространств модулей римановских поверхностей с двумя отмеченными точками и фиксированными струями локальных координат в них, имеется естественное соответствие между их касательными векторами и полуказимирами, рассматриваемыми на конформных блоках.

§ 1. Введение

Описание операторов Казимира (казимиров, лапласианов) — один из центральных вопросов теории представлений алгебр Ли. Трудно перечислить все приложения казимиров. Теория специальных функций, конструкции гамильтонианов и исследование свойств квантовых систем, обладающих симметриями, теория вполне интегрируемых систем — далеко не полный список их приложений.

Во всех этих вопросах особый интерес представляют казимиры второго порядка. Ниже под словом «казимир» мы всегда имеем ввиду «казимир второго порядка»

Казимиры алгебры Ли \mathfrak{g} могут быть охарактеризованы как операторы, которые

1. коммутируют с операторами $\rho(g)$ для всех (возможно, принадлежащих заданному классу) представлений ρ алгебры \mathfrak{g} и $g \in \mathfrak{g}$,
2. могут быть определённым образом выражены через $\rho(g)$. (Точный смысл этому придаётся в главе 4)

Казимиры принадлежат более широкому классу *сплетающих операторов*, который получится, если опустить второе требование (то есть сохранить только требование перестановочности).

Для конечномерных полупростых алгебр Ли описание казимиров основано, главным образом, на теореме И. М. Гельфанда о центре универсальной обёртывающей алгебры. С развитием теории алгебр Каца—Мууди возник новый подход к построению казимиров [6, 5]. Он тесно связан со следующим фундаментальным явлением. С каждым (так называемым *допустимым*) представлением аффинной алгебры Каца—Мууди $\widehat{\mathfrak{g}}$ канонически связано специальное представление алгебры Вирасоро (Vir), называемое представлением Сугавара. Оно действует в том же векторном пространстве, что и исходное представление $\widehat{\mathfrak{g}}$. Обозначим через \mathcal{D}^1 сумму Vir и $\widehat{\mathfrak{g}}$, центры которых отождествлены. В допустимом представлении алгебры \mathcal{D}^1 каждый элемент e алгебры Vir действует, во-первых, в силу этого представления, а во-вторых — в силу представления Сугавара. Для полупростой алгебры \mathfrak{g} и её алгебры петель $\widehat{\mathfrak{g}}$, некоторая линейная комбинация Δ_e этих двух действий всегда даёт сплетающий оператор. Один из них называется *казимиром*, именно, тот, который соответствует векторному полю нулевой степени (мы не рассматриваем здесь вырожденный случай так называемого критического уровня, когда имеется бесконечное число казимиров указанного вида).

Кричевер и Новиков ввели и рассмотрели [8, 9, 10] тензоры со специальными свойствами на римановых поверхностях, именно, мероморфные тензоры с полюсами лишь в паре фиксированных точек P_{\pm} поверхности. Мы называем такие тензоры тензорами Кричевера—Новикова. Например, мы говорим о функциях Кричевера—Новикова (которые образуют ассоциативную алгебру \mathcal{A}), векторных полях, λ -формах Кричевера—Новикова, и так далее. В [8, 9, 10] введены два новых класса алгебр Ли. Это центральные расширения алгебр Ли векторных полей Кричевера—Новикова и \mathfrak{g} -значных функций Кричевера—Новикова, где \mathfrak{g} — конечномерная комплексная полупростая или редуцируемая алгебра Ли. Пусть $\widehat{\mathcal{L}}$ обозначает первую из них (она называется алгеброй Кричевера—Новикова

типа *Вирасоро*), а $\widehat{\mathfrak{g}}$ — вторую (она называется алгеброй Кричевера—Новикова *аффинного типа*). Для рода 0 они совпадают, соответственно, с обычной алгеброй Вирасоро и обычной аффинной алгеброй Каца—Муди. Для аффинных алгебр Кричевера—Новикова описанный выше способ построения казимиров был реализован в [18].

Настоящая статья посвящена описанию казимиров второго порядка (и некоторых их обобщений) для алгебр Кричевера—Новикова. Она представляет собой расширенный и модифицированный вариант доклада, сделанного автором на конференции, посвящённой 10-летию Независимого московского университета, и статьи [23].

Мы ограничиваемся алгебрами Кричевера—Новикова, которые соответствуют алгебрам $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$, представляющим простой и редуцируемый случаи соответственно. В этих случаях для $\widehat{\mathfrak{g}}$ мы используем более подробные обозначения: $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ для первой из них, и $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ для второй. Здесь g обозначает род римановой поверхности, а индекс 2 отвечает числу отмеченных точек.

Наше описание казимиров основано на вышеприведённой конструкции операторов Δ_e , где *Vir* и аффинная алгебра Каца—Муди заменены соответствующими алгебрами Кричевера—Новикова $\widehat{\mathcal{L}}$ и $\widehat{\mathfrak{g}}$. Немедленно возникают следующие вопросы: сколько существует независимых казимиров? Почему только один сплетающийся оператор из описанных выше рассматривается как казимир алгебры Кричевера—Новикова? Обычное объяснение состоит в том, что один из элементов алгебры *Vir* является выделенным, поскольку задаёт градуировку на аффинной алгебре. Это объяснение не работает в случае алгебр Кричевера—Новикова, поскольку там нет выделенных векторных полей (в частности, алгебры Кричевера—Новикова не являются градуированными). Ниже мы связываем вопрос о числе независимых казимиров с некоторым коциклом γ на \mathcal{D}^1 . Оказывается, что только один элемент $e \in \mathcal{L}$ задаёт казимир, а именно тот, для которого $\gamma(e, A) = 0$ при всех $A \in \mathcal{A}$. Пользуясь этим, мы доказываем, что для аффинных алгебр Кричевера—Новикова $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ и $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ казимир второго порядка параметризуется логарифмическими мероморфными связностями (в расслоениях) на римановой поверхности, имеющими полюса в P_{\pm} . Заметим, что в [23] вопрос рассматривался при фиксированной связности. В частности, для алгебр Каца—Муди ($g = 0$) имеет место единственность казимира с точностью до пропорциональности.

Далее мы рассматриваем более слабые условия по сравнению с теми, которые определяют казимир. Пусть $\mathcal{A}_{\pm} \subset \mathcal{A}$ — подалгебра, состоящая из элементов положительного порядка в точке P_{\pm} . Для некоторого под-

пространства $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ (см. определение ниже) имеет место следующее разложение [8]: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_+$. Рассмотрим такие векторные поля e , что $\gamma(e, A) = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_0$. Операторы Δ_e для таких векторных полей мы называем *полуказимирами*.

Оказывается, между полуказимирами и пространствами модулей римановых поверхностей имеется следующая связь. Пусть $\mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ — пространство модулей римановых поверхностей рода g с двумя отмеченными точками P_{\pm} и фиксированными струями локальных координат (порядка 1 в P_+ и порядка p в P_-). Для $\Sigma \in \mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ пусть $T_{\Sigma}\mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ обозначает касательное пространство к этому пространству модулей в точке Σ . Рассмотрим, также, пространство коинвариантов (или *конформных блоков*) *регулярной подалгебры* \mathfrak{g}_r (см. определение в разделе 4.3) в некотором представлении алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$. Оказывается, полуказимиры корректно определены на конформных блоках и (по теореме 4.2) *для некоторого p существует естественная проекция пространства $T_{\Sigma}\mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ на пространство операторов, индуцированных полуказимирами на конформных блоках над Σ .*

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы вводим аффинные алгебры Кричевера—Новикова и их представления. За доказательствами мы отсылаем к [21]. В разделе 3 мы вводим алгебры векторных полей Кричевера—Новикова, определяем представление Сугавара и формулируем его коммутационные соотношения с операторами представления аффинной алгебры. Эти два раздела могут рассматриваться как введение в алгебры Кричевера—Новикова и их представления. В разделе 4 мы вводим казимирсы и полуказимиры и получаем сформулированные выше результаты (теоремы 4.1 и 4.2). Заметим, что при этом мы не используем классификацию 2-коциклов на \mathcal{D}^1 . Для рода 0 такая классификация дана в [1], а для произвольного рода недавно появилась в [17]. Поэтому в разделе 5 мы заново получаем некоторые из результатов раздела 4, уже с использованием классификации коциклов.

На постановки задач и некоторые подходы данной статьи сильно повлияла моя долгая совместная работа с Мартином Шлихенмайером. В частности, для алгебр типа Гейзенберга (когда \mathfrak{g} коммутативна) именно он понял, что коциклы на \mathcal{D}^1 являются препятствием к тому, чтобы операторы Δ_e были казимирами (см. ниже лемму 4.2). Я благодарен М. Шлихенмайеру за многочисленные обсуждения и гостеприимство, оказанное мне в Университете города Маннхайм. Я также благодарен Б. Фейгину и С. Локтеву за обсуждения коциклов на \mathcal{D}^1 и коинвариантов.

§ 2. Аффинные алгебры Кричевера—Новикова и их представления

2.1. Аффинные алгебры Кричевера—Новикова

Пусть Σ — компактная алгебраическая кривая рода g над \mathbb{C} с двумя отмеченными точками P_{\pm} , $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ — алгебра мероморфных функций на Σ , регулярных вне точек P_{\pm} , \mathfrak{g} — комплексная редуцированная алгебра Ли. Тогда

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm}) \oplus \mathbb{C}c \quad (2.1)$$

называется *аффинной алгеброй Кричевера—Новикова* [8, 20]. Скобка на $\widehat{\mathfrak{g}}$ задаётся соотношениями

$$[x \otimes A, y \otimes B] = [x, y] \otimes AB + \gamma(x \otimes A, y \otimes B)c, \quad [x \otimes A, c] = 0,$$

где γ — коцикл, определяемый формулой

$$\gamma(x \otimes A, y \otimes B) = (x, y) \operatorname{res}_{P_{+}}(A dB); \quad (2.2)$$

а (\cdot, \cdot) невырожденная инвариантная билинейная форма на \mathfrak{g} (для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ мы берём $(x, y) = \operatorname{tr}(xy)$). Как правило, мы опускаем символ \otimes в наших обозначениях. Мы также часто пишем \mathcal{A} вместо $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$.

В [21] введены фермионные представления аффинных алгебр Кричевера—Новикова. Они образуют весьма представительный класс (гипотетически, их неприводимые факторы — это всё неприводимые представления общего положения). Здесь мы используем их как основной пример и модель для наших конструкций. Ниже в этом разделе мы систематически описываем эти представления, отсылая к [21] за доказательствами.

2.2. Голоморфные расслоения. Параметры Тюринга

Каждое фермионное представление связано с голоморфным векторным расслоением на римановой поверхности Σ . Поэтому начнём с рассмотрения голоморфного расслоения F ранга r и степени gr на Σ . По теореме Римана—Роха расслоение F имеет r голоморфных сечений Ψ_1, \dots, Ψ_r , которые образуют базис в слое над каждой точкой за исключением gr из них. В случае общего положения (который только и рассматривается здесь) эти точки являются попарно различными. Мы называем их *точками вырождения* и обозначаем $\gamma_1, \dots, \gamma_{gr}$. Следуя терминологии [11, 12, 15], назовём множество введённых сечений *оснащением*, а расслоение с заданным оснащением — *оснащённым*.

Задавшись локальной тривиализацией расслоения F , можно рассматривать сечения Ψ_1, \dots, Ψ_r как векторзначные функции (скажем,

столбцы). Из этих функций можно составить матрицу Ψ . Полученная матрица обратима везде, кроме точек γ_i , $i = 1, \dots, gr$, в которых $\det \Psi$ имеет простые полюса: $\det \Psi(\gamma_i) = 0$, $(\det \Psi)'(\gamma_i) \neq 0$. Мы называем $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{gr}$ *дивизором Тюринга* расслоения F . Наложим ещё одно условие общности положения: $\text{rank } \Psi(\gamma_i) = r - 1$, $i = 1, \dots, gr$. Тогда для каждого $i = 1, \dots, gr$ существует единственное с точностью до пропорциональности нетривиальное решение системы линейных уравнений $\Psi(\gamma_i)\alpha_i = 0$. Введем обозначение $\alpha_i = (\alpha_{ij})_{i=1, \dots, gr}^{j=1, \dots, r}$ ($i = 1, \dots, gr$). Дивизор Тюринга расслоения и числа $(\alpha_{ij})_{i=1, \dots, gr}^{j=1, \dots, r}$ называются параметрами Тюринга расслоения F [11, 24]. Оснащение определено однозначно с точностью до действия группы $GL(r)$ на Ψ *правым* умножением, в противоположность функциям склейки, действующим *левым* умножением. Мы видим, что указанное действие группы $GL(r)$ перестановочно с действием функций склейки; таким образом, оно переводит сечения в сечения. Благодаря этому параметры Тюринга определены однозначно с точностью до пропорциональности и *левого* действия группы $GL(r)$. Подчеркнем, что эквивалентные оснащённые расслоения имеют *одно и то же* множество точек вырождения $\gamma_1, \dots, \gamma_{gr}$, в то время как для неоснащенных расслоений инвариантом является лишь *класс* дивизора. Согласно [24], параметры Тюринга определяют расслоение однозначно с точностью до эквивалентности.

В [11, 12, 15] предлагается следующее описание пространства мероморфных сечений расслоения F в терминах его параметров Тюринга (рассматриваются только те мероморфные сечения, которые голоморфны вне точек P_{\pm}). В слое над произвольной точкой P вне носителя дивизора D элементы $\Psi_j(P)$ ($j = 1, \dots, r$) образуют базис. Следовательно для каждого мероморфного сечения S его значение $S(P)$ можно выразить в терминах этого базиса. Таким образом, каждому сечению S можно сопоставить вектор-функцию $f = (f_1, \dots, f_r)^T$ на римановой поверхности Σ так что вне носителя D

$$S(P) = \sum_{j=1}^r \Psi_j(P) f_j(P). \tag{2.3}$$

По формуле Крамера $f_j = \det(\Psi_1, \dots, \Psi_{j-1}, S, \Psi_{j+1}, \dots, \Psi_r) (\det \Psi)^{-1}$. Отсюда видно, что функции f_j можно продолжить в точки дивизора D . Там они будут иметь не более чем простые полюса, так как Ψ_1, \dots, Ψ_r голоморфны в точках дивизора D , а $\det \Psi$ имеет там простые нули. Ввиду (2.3) в локальных координатах в окрестности точки γ_i имеем $S(z) = \Psi(\gamma_i)(\text{res}_{\gamma_i} f)z^{-1} + O(1)$. Левая часть последнего соотношения голоморфна. Следовательно вычеты функций f_j , $j = 1, \dots, r$ в точке

γ_i удовлетворяют системе линейных уравнений $\Psi(\gamma_i)(\text{res}_{\gamma_i} f) = 0$. Это в точности система, определяющая параметры Тюринга в точке γ_i . Согласно предположению, ранг матрицы $\Psi(\gamma_i)$ равен $r - 1$. Следовательно вектора $\text{res}_{\gamma_i} f$ и α_i пропорциональны.

Предложение 2.1 ([11, 12]). *Пространство мероморфных сечений расслоения F , голоморфных вне отмеченных точек P_{\pm} , изоморфно пространству мероморфных векторно-значных функций $f = (f_1, \dots, f_r)^T$ (на той же римановой поверхности), голоморфных вне точек P_{\pm} и дивизора D , имеющих не более чем простые полюса в точках D и удовлетворяющих условиям*

$$(\text{res}_{\gamma_i} f_j) \alpha_{ik} = (\text{res}_{\gamma_i} f_k) \alpha_{ij}, \quad i = 1, \dots, gr, j = 1, \dots, r.$$

Обозначим введённое только что пространство функций F_{KN} .

2.3. Базисы Кричевера—Новикова

Введем базис в F_{KN} , имея ввиду его использование при построении полубесконечных мономов на этом пространстве. Для каждой пары целых чисел n, j ($0 \leq j < r$) построим вектор-функцию $\psi_{n,j} \in F_{KN}$. Число n называется *степенью* функции $\psi_{n,j}$. Функция $\psi_{n,j}$ определяется заданием её асимптотического поведения в точках P_{\pm} . Рассмотрим $\psi_{n,j}$ как столбец и составим из этих столбцов матрицу Ψ_n . Потребуем, чтобы

$$\Psi_n(z_+) = z_+^n \sum_{s=0}^{\infty} \xi_{n,s}^+ z_+^s, \quad \xi_{n,0}^+ = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

и

$$\Psi_n(z_-) = z_-^{-n} \sum_{s=0}^{\infty} \xi_{n,s}^- z_-^s, \quad \xi_{n,0}^- = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где z_{\pm} — локальная координата в точке P_{\pm} и звёздочки обозначают произвольные комплексные числа.

Мы можем сказать в этом случае, что матрица Ψ_n имеет нуль порядка n в одной из точек P_{\pm} и полюс порядка не выше n в другой. Ее детерминант имеет gr простых полюсов в точках дивизора D и дополнительный (заранее не фиксированный) дивизор нулей вне точек P_{\pm} . Назовем $\{\psi_{n,j}\}$ *базисом Кричевера—Новикова* в F_{KN} .

Случай $r = 1$ является исключительным и требует специального определения базиса Кричевера—Новикова.

Пример. Для случая алгебры $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ (состоящей из сечений одномерного тривиального расслоения) требования к базису Кричевера—Новикова, сформулированные в [8], таковы:

$$A_m = \alpha_m^{\pm} z_{\pm}^{\pm m + \varepsilon_{\pm}} (1 + O(z_{\pm})), \quad \alpha_m^{\pm} \in \mathbb{C}, \alpha_m^+ = 1, \quad (2.6)$$

где $\varepsilon_+ = 0$ для любого $m \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_- = -g$ для $m > 0$ или $m < -g$, и $\varepsilon_- = -g - 1$ для $-g \leq m \leq 0$. Для $m > 0$ и $m < -g$ сумма порядков в отмеченных точках равна $(-g)$ (напомним, что в нашем случае $r = 1$). Следовательно существует в точности g нулей (и не существует полюсов) вне P_{\pm} .

Обозначим через \mathcal{A}_+ (соответственно, $\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_0$) векторное пространство, порождённое элементами $A_m, m > 0$ (соответственно, $m < -g, -g \leq m \leq 0$). Имеет место следующее разложение [8]:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_+. \quad (2.7)$$

Другой важный пример рассмотрен в разделе 3.1.

Предложение 2.2 ([21]). 1°. Существует единственная матрично-значная функция Ψ_n , которая удовлетворяет условиям (2.4), (2.5).

2°. Размерность пространства, порождённого вектор-функциями $\psi_{n,j}$ (при фиксированном n), равна g .

Алгебра $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ естественным образом действует в пространстве F_{KN} , умножая элементы последнего на функции. Введем структурные константы этого действия посредством соотношений [21, Предложение 2.3]:

$$A_m \psi_{n,j} = \sum_{k=m+n}^{m+n+\bar{g}} \sum_{j'=0}^{r-1} C_{m,n,j}^{k,j'} \psi_{k,j'}, \quad (2.8)$$

где $\bar{g} = g + 1$ при $-g \leq m \leq 0$ и $\bar{g} = g$ в остальных случаях. Это соотношение выражает тот факт, что $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ -модуль F_{KN} является почти градуированным, то есть k в (2.8) удовлетворяет ограничениям $|m + n - k| < \text{const}$, где const не зависит от m, n .

Пусть τ — представление алгебры \mathfrak{g} в векторном пространстве \mathbb{C}^l . Пусть $\tau(x) = (x_{i'}^i)$, где $x \in \mathfrak{g}, (x_{i'}^i) \in \mathfrak{gl}(l)$ — матрица, представляющая элемент x , а индексы i, i' пробегают $\{1, \dots, l\}$. Каждому базисному элементу $\psi_{n,j}$ ($n \in \mathbb{Z}, j = 0, \dots, r - 1$) сопоставим набор базисных элементов $\{\psi_{n,j}^i: i = 1, \dots, l\}$ пространства $F_{KN}^{\tau} = F_{KN} \otimes \mathbb{C}^l$. Определим действие

алгебры Ли $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ на F_{KN}^{τ} :

$$(xA_m)\psi_{n,j}^i = \sum_{k=m+n}^{m+n+\bar{g}} \sum_{j'=0}^{r-1} \sum_{i'} C_{m,n,j}^{k,j'} x_{i'}^i \psi_{k,j'}^{i'}. \quad (2.9)$$

Действие \mathfrak{g} не меняет индексов n, j и при данных индексах n, j , роль старшего вектора играет $\psi_{n,j}^i$. Из определений следует, что это действие почти градуировано.

2.4. Фермионные представления

Занумеруем символы $\psi_{n,j}^i$ в порядке лексикографического возрастания троек (n, j, i) . Пусть $N = N(n, j, i)$ — номер тройки (n, j, i) . Нормализуем эту нумерацию условием $N(-1, 0, l) = 0$. Введем следующее обозначение: $\psi_N = \psi_{n,j}^i$.

Введем фермионное представление, соответствующее F и τ , следующим образом. Пространство V_F представления порождено над \mathbb{C} формальными выражениями (*полубесконечными мономами*) вида $\psi_{N_0} \wedge \psi_{N_1} \wedge \dots$, где $N_0 < N_1 < \dots$ и знак монома меняется при перестановке ψ_N и $\psi_{N'}$. Мы требуем также, чтобы существовало число t такое что $N_k = k + t$ для достаточно больших k . Следуя [5], мы называем t *зарядом* монома.

Степень монома ψ заряда t определяется равенством

$$\deg \psi = \sum_{k=0}^{\infty} (N_k - k - t). \quad (2.10)$$

Заметим, что в нумерации $\psi_{n,j}^i$ при фиксированном n имеется произвол; степень монома от этого произвола не зависит.

Введём представление $\pi_{F,\tau}$ алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$, действующее в пространстве V_F . Согласно (2.9) каждый элемент алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ действует на символы ψ_N линейными подстановками почти градуированным образом. Более того, число символов ψ_N фиксированной степени не зависит от этой степени. Это в точности означает, что если символы ψ_N рассматривать как формальный базис бесконечномерного векторного пространства, то действие элемента алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ может быть задано в этом базисе бесконечной матрицей с лишь конечным числом ненулевых диагоналей. Следуя [6], мы обозначаем алгебру таких матриц \mathfrak{a}_{∞} .

Замечание. Другими словами, \mathfrak{a}_{∞} алгебра разностных операторов в 1-мерной решётке. Это замечание устанавливает связь с результатами работы [15].

Таким образом, выбор базиса $\{\psi_N\}$ определяет вложение алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ в \mathfrak{a}_∞ . Так как \mathfrak{a}_∞ обладает стандартным действием в V_F , мы получаем представление $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ в V_F . Напомним [5, 21], что действие базисных элементов $E_{IJ} \in \mathfrak{a}_\infty$ на полубесконечные мономы $\psi = \psi_{I_0} \wedge \psi_{I_1} \wedge \dots$ определяется правилом Лейбница:

$$r(E_{IJ})\psi = (E_{IJ}\psi_{I_0}) \wedge \psi_{I_1} \wedge \dots + \psi_{I_0} \wedge (E_{IJ}\psi_{I_1}) \wedge \dots + \dots \quad (2.11)$$

Ввиду условия $I_k = k + m$ ($k \gg 1$) действие (2.11) корректно определено для $I \neq J$. При $I = J$ правая часть равенства (2.11) содержит бесконечно много членов. В этом случае применяется стандартная регуляризация [5, 21]; она приводит к проективному представлению $\pi_{F,\tau}$ алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$. Это почти градуированное представление, как следует из почти градуированности действия (2.9) в пространстве F_{KN} . Другая стандартная процедура позволяет преобразовать γ в любой когомологичный коцикл. Этого можно достичь, добавляя скаляры к операторам $\pi_{F,\tau}(x_\alpha A_m)$, где x_α — генераторы алгебры \mathfrak{g} . Такая модификация представления приводит к добавлению кограницы к γ . Следовательно, согласно [16, 17], γ можно представить как $(2\pi i)^{-1}(x, y) \oint A dB$, где обозначения — такие же как в (2.2). 2-коцикл на $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ называется *локальным* если существует $L \in \mathbb{Z}_+$, такое что $\gamma(xA_i, yA_j) = 0$ для любых $i, j \in \mathbb{Z}$, таких что $|i - j| > L$, и любых $x, y \in \mathfrak{g}$. Поскольку γ , очевидно, локален — согласно [13, 14, 17] он когомологичен коциклу, пропорциональному (2.2). Следовательно $\pi_{F,\tau}$ можно рассматривать без потери общности как представление алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Гипотеза. Классы эквивалентности фермионных представлений алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с парами, состоящими из класса эквивалентности голоморфного расслоения ранга r и степени gr на Σ и класса эквивалентности l -мерного представления алгебры \mathfrak{g} .

Для $l = r$ эта гипотеза доказана в [21] (по поводу определения эквивалентности фермионных представлений также см. [21]).

Очевидно, действие \mathfrak{a}_∞ сохраняет заряд монома, так как бесконечные «хвосты» мономов в правой и левой частях соотношения (2.11) одинаковы. Следовательно фермионное пространство можно разложить в прямую сумму $\widehat{\mathfrak{g}}$ -инвариантных подпространств, отвечающих всевозможным значениям заряда. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ подпространство заряда m порождено мономом $|0\rangle = \psi_m \wedge \psi_{m+1} \wedge \dots$ под действием универсальной обёртывающей алгебры $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$. Этот моном называется *вакуумным мономом*, или просто *вакуумом* заряда m . Каждый вакуумный моном обладает следующим свойством: $\pi_{F,\tau}(xA)|0\rangle = 0$ для $A \in \mathcal{A}_+$, а также для $A = 1$ и любой строго верхнетреугольной матрицы $x \in \mathfrak{g}$.

§ 3. Алгебры векторных полей Кричевера—Новикова и их представления

3.1. Алгебры векторных полей и их центральные расширения

Пусть \mathcal{L} — алгебра Ли мероморфных векторных полей на Σ , которые могут иметь полюса только в точках P_{\pm} [8, 9, 10]. Как впервые отмечено в [8], для каждого целого $s \geq 0$ в \mathcal{L} имеется пара подалгебр $\mathcal{L}_{\pm}^{(s)}$, которые состоят из векторных полей порядка не менее s в точках P_{\pm} соответственно. Имеет место следующее разложение в прямую сумму подпространств [8]: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{+}^{(s)} \oplus \mathcal{L}_{0}^{(s)} \oplus \mathcal{L}_{-}^{(s)}$, где $\mathcal{L}_{0}^{(s)}$ — некоторое дополнительное пространство. Подалгебры $\mathcal{L}_{\pm}^{(s)}$ интересуют нас в связи с деформациями пространств модулей римановых поверхностей.

Как векторное пространство, \mathcal{L} имеет базис Кричевера—Новикова $\{e_m : m \in \mathbb{Z}\}$. При $g > 1$ базисное векторное поле e_m определяется своим асимптотическим поведением в окрестности точек P_{\pm} [8]:

$$e_m(z_{\pm}) = \epsilon_m^{\pm} z_{\pm}^{\pm m + \epsilon_{\pm}} (1 + \mathcal{O}(z_{\pm})) \frac{\partial}{\partial z_{\pm}}, \quad \epsilon_m^{\pm} \in \mathbb{C}, \quad \epsilon_m^{+} = 1, \quad (3.1)$$

где $\epsilon_{+} = 1$, $\epsilon_{-} = 1 - 3g$, z_{\pm} — локальная координата в P_{\pm} . Таким образом, как векторное пространство подалгебра $\mathcal{L}_{+}^{(s)}$ порождена элементами e_m , $m \geq s - 1$, подалгебра $\mathcal{L}_{-}^{(s)}$ — элементами e_m , $m \leq -s - 3g + 1$, а в качестве подпространства $\mathcal{L}_{0}^{(s)}$ можно взять линейную оболочку элементов e_m , $-s - 3g + 1 < m < s - 1$.

Рассмотрим центральные расширения алгебры \mathcal{L} . Каждое из них задаётся 2-коциклом вида

$$\chi(e, f) = \text{res}_{P_{+}} \left(\frac{1}{2} (e'''f - ef''') - R(e'f - ef') \right) \quad (3.2)$$

(ср. Лемма 5.1), где R — некоторая проективная связность, то есть такая функция точки и локальной координаты, которая преобразуется при замене последней следующим образом:

$$R(u)u_z^2 = R(z) + \frac{u_{zzz}}{u_z} - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{zz}}{u_z} \right)^2.$$

Благодаря этому правая часть равенства (3.2) действительно является вычетом корректно определённой 1-формы. Пусть $\widehat{\mathcal{L}}$ обозначает центральное расширение алгебры \mathcal{L} , задаваемое коциклом (3.2).

3.2. Действие векторных полей в пространстве V_F

Рассмотрим действие алгебры \mathcal{L} в пространстве F_{KN} . Заметим, что мы не можем применять векторное поле $e \in \mathcal{L}$ к вектор-функциям $\psi \in F_{KN}$, наивно рассматривая его как дифференциальный оператор первого порядка. Причина в том, что векторное поле $e \in \mathcal{L}$, вообще говоря, не имеет нулей в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_{gl}$ дивизора Тюринга расслоения. Следовательно $e\psi$ вообще говоря имеет полюса второго порядка в этих точках. Таким образом, $e\psi \notin F_{KN}$. И всё-таки действие \mathcal{L} на F_{KN} можно определить.

В соответствии с [2] каждое голоморфное расслоение, в том числе и F , может быть наделено мероморфной (следовательно, плоской) связностью ∇ , имеющей логарифмические особенности в точках P_{\pm} . Поскольку ∇ является плоской, $[\nabla_e, \nabla_f] - \nabla_{[e,f]} = 0$ для любых $e, f \in \mathcal{L}$. Следовательно $\nabla_{[e,f]} = [\nabla_e, \nabla_f]$ и ∇ определяет представление алгебры \mathcal{L} в пространстве голоморфных сечений расслоения F . С помощью сопряжения матрицей Ψ (см. раздел 2.2) мы можем перенести это представление на пространство F_{KN} вектор-функций Кричевера—Новикова. Ниже мы фиксируем произвольную связность ∇ , логарифмическую в P_{\pm} и регулярную вне этих точек. Применяя описанную выше (разделы 2, 3) процедуру подъёма представления с пространства F_{KN} на V_F , получим представление центрального расширения алгебры \mathcal{L} .

В локальных координатах, пусть $e = E(z)\partial$, где $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ и $\nabla_e = E(z)(\partial + \omega)$. Тогда действие векторного поля e на ψ может быть записано в двух нижеследующих эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} e\psi &= \Psi^{-1} \nabla_e \Psi \psi, \\ e\psi &= E(\partial + \omega_{\Psi})\psi, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\omega_{\Psi} = \Psi^{-1}\omega\Psi + \Psi^{-1}\Psi'$ (матрица Ψ введена в разделе 2.2). Ввиду (3.3), $e \mapsto e\psi$ — корректно определённый дифференциальный оператор первого порядка в пространстве векторнозначных функций Кричевера—Новикова (заметим, что $(\partial + \omega_{\Psi})\psi$ — векторнозначная 1-форма; умножение на E возвращает её в пространство векторнозначных функций).

Лемма 3.1. 1°. *Пространство F_{KN} инвариантно относительно действия (3.3).*

2°. *Действие (3.3) почти градуировано.*

Доказательство. 1° вытекает из определения действия (3.3).

Чтобы доказать 2°, заметим, что Ψ регулярна и невырождена в точках P_{\pm} . Следовательно ω_{Ψ} также имеет простые полюса в P_{\pm} . Поэтому, ∂ и ω_{Ψ} уменьшают порядки функции ψ в точках P_{\pm} на одну и ту же величину.

Применим (3.1). Для $n \neq 0$ порядок функций $e_m \psi_{n,j}$ равен $n + m$ в P_+ и $-n - m - 3g$ в P_- ; для $n = 0$ эти порядки равны $n + m$ и $-n - m - 3g$ соответственно. Следовательно, для некоторых констант $D_{m,n,j}^{k,j'}$ выполняются следующие условия:

$$e_m \psi_{n,j}^i = \sum_{k=m+n+\varepsilon}^{m+n+3g+\varepsilon} \sum_{j'=0}^{l-1} D_{m,n,j}^{k,j'} \psi_{k,j'}^i, \quad (3.4)$$

где $\varepsilon = 0$ при $n \neq 0$ и $\varepsilon = 1$ при $n = 0$. \square

Поскольку действие \mathcal{L} на F_{KN} почти градуировано, его можно продолжить на пространство фермионного представления как представление алгебры $\widehat{\mathcal{L}}$ (по схеме, подробно описанной в разделе 2).

Лемма 3.2. *Элементы подалгебры $\mathcal{L}_+^{(2)}$ аннулируют вакуумные векторы фермионных представлений (старшего веса).*

Доказательство. По определению (см. раздел (а)) $e_m \in \mathcal{L}_+^{(2)}$ тогда и только тогда, когда $m \geq 1$. В этом случае, согласно (3.4), действие векторного поля e увеличивает значение индекса n : $k > n$ для всех $\psi_{k,j'}^i$, которые встречаются в правой части соотношения (3.4). Но так как вакуумный моном содержит $\psi_{n,j}^i$, он также содержит справа от него все $\psi_{k,j'}^i$, $k > n$. Поэтому e_m аннулирует вакуум. \square

3.3. Представление Сугавара

Следующий факт является одним из наиболее фундаментальных в теории представлений аффинных алгебр. Каждое допустимое представление аффинной алгебры канонически определяет представление (соответствующей) алгебры типа Вирасоро, действующее в том же самом пространстве. Последнее называется представлением Сугавара. Для алгебр Кричевера—Новикова представление Сугавара рассматривается в [3, 9, 18]. Здесь мы напомним основные факты об этом представлении.

Введем следующие обозначения. Для $x \otimes A \in \widehat{\mathfrak{g}}$ обозначим соответствующий оператор представления через $x(A)$. Для базисного элемента $A_n \in \mathcal{A}$ обозначим $x(A_n)$ через $x(n)$.

Модуль (представление) V над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ называется допустимым если $x(n)v = 0$ для каждого $v \in V$, $x \in \mathfrak{g}$ и достаточно больших n .

Пусть V — допустимый модуль. Предполагается, что центральный элемент алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ действует умножением на скаляр $c \in \mathbb{C}$. В настоящей работе достаточно представлять себе V как одно из фермионных представлений, введённых выше.

Ниже в этом разделе предполагается, что \mathfrak{g} — простая или коммутативная алгебра Ли. Причина этого в том, что нам необходимо иметь на \mathfrak{g} невырожденную инвариантную билинейную форму. На любой простой алгебре \mathfrak{g} такая форма имеется и единственна; если \mathfrak{g} коммутативна, потребуем, чтобы она была снабжена такой формой.

Возьмем в \mathfrak{g} базис $u_i, i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$ и соответствующий двойственный базис $u^i, i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$ по отношению к инвариантной билинейной симметрической форме (\cdot, \cdot) . Элемент Казимира $\Omega^0 = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} u_i u^i$ универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ не зависит от выбора базиса. Ниже во всех случаях, когда i содержится как среди верхних, так и среди нижних индексов, предполагается суммирование по i .

Пусть $2k$ — собственное значение оператора Ω^0 в присоединённом представлении. Если \mathfrak{g} проста, то k есть *дуальное число Кокстера*. В коммутативном случае $k = 0$.

Введем базисы в пространствах 1-форм и квадратичных дифференциалов Кричевера—Новикова. Обозначим их элементы $\{\omega^m | m \in \mathbb{Z}\}$ и $\{\Omega^k : k \in \mathbb{Z}\}$ соответственно. Эти элементы выбираются так, чтобы выполнялись *соотношения двойственности*:

$$\text{res}_{P_+} A_m \omega^n = \delta_m^n, \quad \text{res}_{P_+} e_m \Omega^k = \delta_m^k,$$

где δ_m^n — символ Кронекера. Элементы ω^n имеют следующее асимптотическое поведение [9]:

$$\omega^n(z_{\pm}) = \mu_n^{\pm} z_{\pm}^{\mp n + \varepsilon_{\pm}} (1 + \mathcal{O}(z_{\pm})) dz_{\pm}, \quad \mu_n^{\pm} \in \mathbb{C}, \mu_n^+ = 1, \quad (3.5)$$

где $\varepsilon_+ = -1, \varepsilon_- = 0, z_{\pm}$ — локальная координата в P_{\pm} .

Для $Q \in \Sigma$ определим формальную сумму («производящую функцию»)

$$\hat{x}(Q) = \sum_n x(n) \cdot \omega^n(Q). \quad (3.6)$$

Начиная с этого места предположим, что в рядах по 1-формам и 2-формам индекс суммирования всегда пробегает \mathbb{Z} , если не оговорено противное. Определим операторнозначный квадратичный дифференциал $T(Q)$ (*тензор энергии-импульса*):

$$T(Q) := \frac{1}{2} \sum_i \widehat{u}_i(Q) \widehat{u}^i(Q) := \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_i :u_i(n) u^i(m) : \omega^n(Q) \omega^m(Q). \quad (3.7)$$

Здесь $:\dots:$ означает нормальное упорядочение. Разложим квадратичный дифференциал $T(Q)$ по базисным квадратичным дифференциалам:

$$T(Q) = \sum_k L_k \cdot \Omega^k(Q), \quad (3.8)$$

где L_k — операторнозначные коэффициенты. С помощью соотношений действительности получаем

$$L_k = \oint_{c_0} T(Q)e_k(Q) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_i :u_i(n)u^i(m):l_k^{nm}, \quad (3.9)$$

где

$$l_k^{nm} = \oint_{c_0} \omega^n(Q)\omega^m(Q)e_k(Q).$$

Заметим, что для фиксированного k пары (n, m) , такие, что $l_k^{nm} \neq 0$, удовлетворяют неравенству вида $C_2 \leq m + n \leq C_1$ где C_1, C_2 — константы, зависящие лишь от k и g . Благодаря этому свойству и нормальному упорядочению, L_k корректно определены в пространстве допустимого представления. Например, если $m, n > 0$ или $m, n < -g$, то $k \leq m + n \leq k + g$. Для $g = 0$ из этого следует, что $l_k^{nm} = \delta_k^{m+n}$, что приводит к обычному определению оператора Сугавара для $g = 0$ (см. [5] и ссылки там).

Мы рассматриваем класс нормальных упорядочений, которые удовлетворяют следующему требованию:

$$:x(n)y(m): = x(n)y(m), \quad \text{если } n \leq 0. \quad (3.10)$$

Нормальное упорядочение определяет класс когомологий коцикла в нижеследующей теореме 3.3. Во всех остальных отношениях наши рассуждения не зависят от выбора нормального упорядочения.

Теорема 3.3 ([18]). Пусть \mathfrak{g} — конечномерная, полупростая или коммутативная, алгебра Ли. Пусть $2k$ — собственное значение её казимира в присоединённом представлении и $\widehat{\mathfrak{g}}$ — соответствующая аффинная алгебра Кричевера—Новикова. Пусть V — допустимое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$, в котором центральный элемент действует как $c \cdot id$. Если $c + k \neq 0$, то нормализованные операторы Сугавара $L_k^* = -(c + k)^{-1}L_k$ определяют представление алгебры Ли $\widehat{\mathcal{L}}$, которое имеет «геометрический» коцикл

$$\chi(e, f) = \frac{c \cdot \dim \mathfrak{g}}{(c + k)} \cdot \oint_{c_0} \left(\frac{1}{2}(e'''f - ef''') - R \cdot (e'f - ef') \right) dz,$$

где $e, f \in \mathcal{L}$, R — мероморфная проективная связность, голоморфная вне точек P_{\pm} .

Для каждого $e = \sum \lambda_k e_k \in \mathcal{L}$ (сумма конечна) введём $T(e) = \sum \lambda_k L_k^*$. По теореме 3.3 $e \mapsto T(e)$ — представление алгебры $\widehat{\mathcal{L}}$. Оно называется представлением Сугавара.

В разделе 4 нам понадобится следующее утверждение:

Лемма 3.4 ([18, 25]).

- (1) $[L_k, x(r)] = -(c + k)x(e_k A_r)$.
- (2) $[L_k, \hat{x}(Q)] = (c + k)e_k \cdot \hat{x}(Q)$,

где $e \cdot \hat{x}(Q) := \sum_n x(n)(e \cdot \omega^n)(Q)$, eA — производная функции A , а $e \cdot \omega$ — производная Ли 1-формы ω в направлении векторного поля e .

3.4. Действие операторов Сугавара на вакуумные векторы

Лемма 3.5. *Операторы Сугавара элементов подалгебры $\mathcal{L}_+^{(2)}$ аннулируют вакуумные векторы представлений алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$.*

Доказательство. Согласно разделу (а), $e_k \in \mathcal{L}_+^{(2)}$ тогда и только тогда, когда $k \geq 1$. Рассмотрим операторы Сугавара L_k для $k \geq 1$. Мы хотим показать, что если $l_k^{mn} \neq 0$, то либо $m \geq 1$, либо $n \geq 1$. Если это верно, то, принимая во внимание нормальное упорядочение, на втором месте в произведении $:u(m)u(n):$ стоит оператор представления подалгебры $\hat{\mathfrak{g}}_+$. Следовательно это произведение аннулирует вакуум.

Рассмотрим в соотношении (3.9) член, содержащий l_k^{mn} . Согласно (3.5) и (3.1)

$$\text{ord}_{P_+} \omega^m = -m - 1, \text{ord}_{P_+} \omega^n = -n - 1, \text{ord}_{P_+} e_k = k + 1.$$

Таким образом, $\text{ord}_{P_+} \omega^m \omega^n e_k = -m - n + k - 1$. Чтобы вычет 1-формы $\omega^m \omega^n e_k$ в точке P_+ был ненулевым, эта 1-форма обязана по крайней мере иметь полюс в P_+ . Следовательно, $-m - n + k - 1 \leq -1$. Отсюда следует, что $m + n \geq k \geq 1$ и следовательно либо $m > 0$, либо $n > 0$. \square

§ 4. Казимиры, полуказимиры и пространства модулей

В этом разделе мы даём описание казимиров второго порядка для алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$. Пусть C_2 обозначает пространство этих казимиров. Мы также вводим *полуказимиры* и устанавливаем их связь с пространством модулей $\mathcal{M}_{\mathfrak{g},2}^{(p)}$ и коинвариантами.

4.1. Казимиры второго порядка

Для любой аффинной алгебры Каца—Муди существует только один казимир второго порядка — в каждом представлении он действует как сумма оператора представления некоторого элемента алгебры Вирасоро и его оператора Сугавара [5]. Основное свойство этого оператора состоит в том, что он коммутирует со всеми операторами представления рассматриваемой аффинной алгебры.

Основываясь на этой идее, мы будем строить казимиры второго порядка для $\widehat{\mathfrak{g}}$ как операторы вида $\Delta_e := \widehat{e} - T(e)$, где $e \in \mathcal{L}$, \widehat{e} — оператор представления векторного поля e , а $T(e)$ — его оператор Сугавара. Слова «второго порядка» означают, что рассматриваемые операторы квадратично зависят от операторов представления алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$.

По определению

$$T(e) = T_0(e) + T_1(e),$$

где $T_1(e)$ — оператор Сугавара для $\widehat{\mathfrak{sl}}_{\mathfrak{g},2}$, $T_0(e)$ — для $\widehat{\mathfrak{k} \otimes \mathcal{A}}$, где \mathfrak{k} — центр алгебры \mathfrak{g} , аналогично [5] (см. так же [25])

Рассмотрим на римановой поверхности Σ алгебру Ли $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ дифференциальных операторов вида $e + xA$, $e \in \mathcal{L}$, $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ (то есть алгебру дифференциальных операторов Кричевера—Новикова порядка не выше 1). Как векторное пространство $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1 = \mathcal{L} \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm}))$. В частности, для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1)$ имеем $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1 = \mathcal{D}^1$. Коммутационные соотношения между векторными полями и токами в $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ хорошо известны:

$$[e, x \otimes A] = x \otimes (eA). \quad (4.1)$$

Ниже мы будем рассматривать проективные представления $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ (проективные $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модули). Такое представление определяется как представление *некоторого* центрального расширения $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{g}}^1$ алгебры $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$. Предполагая, что действие центрального элемента даётся тождественным оператором, назовём коцикл этого центрального расширения *коциклом проективного $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модуля (представления)*. Как установлено в разделе 2.4, коцикл фермионного представления, будучи ограничен на $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$, становится кратным коциклу (2.2). Мы называем проективный $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модуль, обладающий этим свойством, *нормализованным*, так же как и его коцикл. Мы называем проективное представление алгебры $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ *допустимым*, если его ограничения на $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ и \mathcal{L} допустимы.

Лемма 4.1. *Для полупростой алгебры Ли \mathfrak{g} и допустимого нормализованного проективного $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модуля V имеем*

1°. $[\widehat{e}, x(A)] = x(eA)$ для всех $A \in \mathcal{A}$, $e \in \mathcal{L}$.

2°. $[\Delta_e, x(A)] = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. 1°. Из (4.1) и определения $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{g}}^1$ -модуля вытекает, что

$$[\widehat{e}, x(A)] = x(eA) + \gamma(e, xA) \circ id, \quad (4.2)$$

где γ — коцикл на $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$.

Для полупростой алгебры \mathfrak{g} каждый коцикл на $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ удовлетворяет условию

$$\gamma(e, xA) = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathcal{L}, A \in \mathcal{A}, x \in \mathfrak{g}. \quad (4.3)$$

По определению коцикла

$$\gamma(e, [xA, yB]) + \gamma(yB, [e, xA]) + \gamma(xA, [yB, e]) = 0$$

для всех $e \in \mathcal{L}, A, B \in \mathcal{A}, x, y \in \mathfrak{g}$. Последнее эквивалентно соотношению

$$\gamma(e, [x, y]AB) + \gamma(yB, x(eA)) + \gamma(xA, -y(eB)) = 0. \quad (4.4)$$

Возьмем в последнем равенстве $B \equiv 1$. Тогда $\gamma(yB, x(eA)) = \gamma(y, x(eA)) = 0$, так как, по условию леммы, γ кратно коциклу (2.2), а последний равен нулю, если один из аргументов равен константе. Далее, $eB \equiv 0$, следовательно $\gamma(xA, -y(eB)) = 0$. Первое слагаемое в (4.4) равно $\gamma(e, [x, y]A)$. Поэтому $\gamma(e, [x, y]A) = 0$ для всех $e \in \mathcal{L}, A \in \mathcal{A}, x, y \in \mathfrak{g}$. Если \mathfrak{g} полупроста, то она совпадает со своим коммутатором. Следовательно (4.3) следует из последнего равенства.

Утверждение 2° немедленно следует из леммы 3.3(1) и 1°. □

Пункт 2° леммы 4.1 доказан в [18] в предположении, что пункт 1° справедлив.

Лемма 4.2 (М. Шлихенмайер¹). *Для коммутативной алгебры Ли \mathfrak{g} и произвольного допустимого представления V соответствующей аффинной алгебры (типа Гейзенберга) имеем*

$$[\Delta_e, x(A)] = \gamma(e, A) \cdot id, \quad \text{для всех} \quad e \in \mathcal{L}, A \in \mathcal{A},$$

где γ — коцикл на $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$.

Доказательство. Соотношение (4.2) верно всегда (но на этот раз γ может быть нетривиальным коциклом). Сравнение (4.2) с леммой 3.3(1) доказывает утверждение. □

Теперь рассмотрим на примере $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$, что происходит в случае ре-дуктивной алгебры.

Лемма 4.3. *Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ и таких же V, e , как в лемме 4.1, выполняются следующие коммутационные соотношения:*

$$[\hat{e}, x(A)] = x(eA) + \lambda(x)\gamma(e, A) \circ id, \quad (4.5)$$

где γ — коцикл на \mathcal{D}^1 и $\lambda(x) = l^{-1} \operatorname{tr} x$.

¹Личное сообщение.

Доказательство. Соотношение (4.2) снова верно. Произвольный элемент $x \in \mathfrak{g}$ можно представить в виде $x = x_0 + \lambda(x)1_l$, где $x_0 \in \mathfrak{sl}(l)$, $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, а 1_l обозначает единичную матрицу ранга l . По лемме 4.2 $\gamma(e, x_0A) = 0$. Следовательно $\gamma(e, xA) = \lambda(x)\gamma(e, 1_lA)$. Очевидно, соответствие $e + A \mapsto e + 1_lA$ является гомоморфизмом алгебр Ли: $\mathcal{D}^1 \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$. Следовательно $\gamma(e, 1_lA)$ определяет коцикл на \mathcal{D}^1 . \square

Лемма 4.4. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ и представление алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ допустимо. Тогда для произвольных $e \in \mathcal{L}$, $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$ имеем

$$[\Delta_e, xA] = \lambda(x)\gamma(e, A) \circ id,$$

где γ — коцикл на \mathcal{D}^1 , а $\lambda(x) = l^{-1} \operatorname{tr} x$.

Доказательство. По лемме 3.4 имеем $[T(e), x(A)] = x(eA)$. Теперь лемма следует из сравнения последнего соотношения с леммой 4.3. \square

Замечание. В [23] ошибочно полагалось, что имея дело с представлением алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$, представление Сугавара T надо брать для его ограничения на подалгебру $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$. При этом соотношение $[T(e), x(A)] = x(eA)$ могло бы не выполняться в случае когда x — диагональная матрица. Выше (см. определение $T(e)$) мы исправили эту ошибку.

Определение 4.5. Те из операторов Δ_e , которые коммутируют со всеми операторами представления алгебр $\widehat{\mathfrak{g}}$ и \mathcal{A} в V , называются *казимирами* (второго порядка) алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ в представлении V .

Замечание. Требование коммутирования Δ_e с \mathcal{A} имеет различный смысл для $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ и $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$. Рассмотрим фермионные представления как типичный пример. Пространство мономов данного заряда, вообще говоря, неприводимо относительно $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ (см. [5] для случая рода 0), но приводимо относительно $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$. Элементы вида $d(\lambda)A \in \widehat{\mathfrak{g}}$ (где $d(\lambda) = \operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$) принадлежат центру алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$. Они коммутируют со всеми операторами подалгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ и, следовательно, приводят фермионное представление последней. В этом случае требование перестановочности операторов Δ_e с \mathcal{A} означает, что Δ_e корректно определены на $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ -подмодулях фермионного представления.

Следующая лемма представляет собой простое следствие определения 4.1 и леммы 4.4.

Лемма 4.6. Δ_e является казимиром для $\widehat{\mathfrak{g}}$ (в некотором представлении) тогда и только тогда, когда $\gamma(e, A) = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}$, где γ — коцикл на \mathcal{D}^1 , соответствующий рассматриваемому представлению.

Замечание. Следующее утверждение показывает, что условия, налагаемые на казимиры, весьма ограничительны: *при заданном коцикле γ на \mathcal{D}^1 векторные поля, удовлетворяющие условию леммы 4.5, образуют подалгебру Ли в \mathcal{L} .* Чтобы доказать это, предположим, что $e_1, e_2 \in \mathcal{L}$ — такие векторные поля, что $\gamma(e_1, A) = \gamma(e_2, A) = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}$. По определению коцикла, $\gamma([e_1, e_2], A) + \gamma(e_2, [e_1, A]) - \gamma(e_1, [e_2, A]) = 0$ для любых двух таких векторных полей и произвольного A . Два члена последнего соотношения равны 0, так как $[e_1, A], [e_2, A]$ — функции, следовательно $\gamma([e_1, e_2], A) = 0$.

Обозначим коцикл представления V через γ_V . Согласно доказательству леммы 4.2, γ_V определяет коцикл $\gamma_V(e, 1_A)$ на \mathcal{D}^1 . Мы сохраним для этого коцикла обозначение γ_V .

4.2. Казимиры фермионного представления

Покажем, что фермионные представления удовлетворяют всем условиям, необходимым для проведения вышеизложенных конструкций. Главное состоит в том, что каждое фермионное представление является допустимым проективным \mathcal{D}^1 -модулем.

В разделах 2, 3 показано, что фермионное представление является проективным модулем над $\mathcal{A}, \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ и \mathcal{L} . Аналогичные соображения показывают, что оно также является проективным модулем над \mathcal{D}^1 и $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$. Пусть снова фермионное представление задано голоморфным расслоением F с мероморфной (следовательно, плоской) связностью ∇ , имеющей логарифмические особенности в точках P_{\pm} (см. раздел 3.2), и неприводимым представлением τ алгебры \mathfrak{g} . Ввиду плоскостности, $[\nabla_e, \nabla_f] - \nabla_{[e,f]} = 0$ для любых $e, f \in \mathcal{L}$. Следовательно $\nabla_{[e,f]} = [\nabla_e, \nabla_f]$ и ∇ определяет представление алгебры \mathcal{L} в пространстве голоморфных сечений расслоения F . По определению связности, для каждого голоморфного сечения s , каждого $e \in \mathcal{L}$ и каждого $A \in \mathcal{A}$ имеем $\nabla_e(As) = (eA)s + A\nabla_e s$, где eA определено соотношением (4.1). Другими словами, $[\nabla_e, A] = eA$, то есть отображение $e + A \rightarrow \nabla_e + A$ приводит к представлению алгебры \mathcal{D}^1 . Путем сопряжения матрицей Ψ (см. разделы 2.2, 3.2) это представление можно перенести на пространство F_{KN} вектор-функций Кричевера—Новикова. Мы будем записывать действие элемента $e \in \mathcal{L}$ на $\psi \in F_{KN}$ как $e\psi$. Пространство V_F , введённое в разделах 2.3, 2.4, порождено полубесконечными мономами над $F_{KN}^{\tau} = F_{KN} \otimes V_{\tau}$ со следующим $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -действием:

$$(xA)(\psi \otimes v) = A\psi \otimes xv \quad \text{и} \quad e(\psi \otimes v) = e\psi \otimes v$$

где V_{τ} — пространство представления τ , $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$, $\psi \in F_{KN}$ и $v \in V_{\tau}$. Применяя вышеописанную (разделы 2, 3) процедуру подъёма представ-

лений с пространства F_{KN}^T на пространство V_F , получим проективные представления алгебр \mathcal{D}^1 , \mathcal{D}_g^1 . Несложно доказать, что эти проективные представления допустимы. Таким образом, в случае фермионных представлений мы находимся в рамках предположений предыдущего раздела. В частности, мы можем изучать коциклы на \mathcal{D}^1 и \mathcal{D}_g^1 , возникающие из фермионных представлений.

Рассмотрим подробнее коциклы на \mathcal{D}^1 , возникающие из фермионных представлений. Возьмем вакуум в виде $|0\rangle = \psi_M \wedge \psi_{M+1} \wedge \dots$. Пусть

$$\nabla_{e_k} = z^k \left(\partial + \omega_{-1} \frac{dz}{z} + O(1) dz \right) \tag{4.6}$$

— локальное поведение ∇ в точке P_+ . Для произвольного $N \in \mathbb{Z}$ пусть $n(N)$ и $j(N)$ обозначают первые две компоненты тройки (n, j, i) , такие, что $N = N(n, j, i)$ (раздел 2.2). Пусть ω_j — j -й диагональный элемент матрицы ω_{-1} . Наше главное наблюдение — следующая лемма:

Лемма 4.7. *Предположим, что мы имеем фермионное представление алгебры \mathcal{D}_g^1 , такое, что $M < 0$, ∇ удовлетворяет (4.6) и $\sum_{N=M}^{-1} \omega_{j(N)} \notin \mathbb{Z}$. Тогда коцикл γ этого представления обладает следующими свойствами:*

- 1°. $\gamma(A_{-k}, e_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$;
- 2°. $\gamma(A_{-k}, e_m) = 0$ для всех $m > k$.
- 3°. $\gamma(A_0, e_m) = 0$ для всех $m \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. $\gamma(A_{-k}, e_m) = A_{-k} \circ \nabla_{e_m} - \nabla_{e_m} \circ A_{-k} - e_m A_{-k}$. Достаточно вычислить это выражение на вакуумном векторе представления.

1°. Для $m = k$ одно из слагаемых $A_{-k} \circ \nabla_{e_k}$ или $\nabla_{e_k} \circ A_{-k}$ аннулирует вакуум. Например, для $k > 0$ это будет первое слагаемое. В предположениях леммы $-\nabla_{e_k} \circ A_{-k} - e_k A_{-k}$ отлично от нуля на вакуумном векторе. Покажем это с помощью прямых вычислений с формальными рядами, например, в точке P_+ .

Локально $A_{-k} = z^{-k}(1 + O(z))$, $e_k = z^{k+1}(1 + O(z)) \frac{\partial}{\partial z}$. Подействуем этими объектами на вектор-функцию Кричевера—Новикова ψ_N степени n . Рассматривая порядки в точке P_{\pm} , можно забыть для простоты о сопряжении матрицей Ψ . Ввиду (4.6) имеем

$$\nabla_{e_k} \circ A_{-k} \psi_N = z^k \left(z \frac{\partial}{\partial z} + \omega_{k-1} \right) z^{-k} z^n (1 + O(z)) = (n - k + \omega_{-1}) z^n (1 + O(z)).$$

Для другого члена имеем $e_k A_{-k} = (-k)(1 + O(z))$. Следовательно

$$(-\nabla_{e_k} \circ A_{-k} - e_k A_{-k}) \psi_N = (2k - n + \omega_j) \psi_N + \dots,$$

где $n = n(N)$, $j = j(N)$, а многоточие обозначает члены старшей степени. Ввиду регуляризации,

$$(-\nabla_{e_k} \circ A_{-k} - e_k A_{-k})|0\rangle = \left(\sum_{N=M}^{-1} (2k - n(N)) + \omega_{j(N)} \right) |0\rangle. \quad (4.7)$$

Для $k < 0$ в игру вместо $\nabla_{e_k} \circ A_{-k}$ вступает член $A_{-k} \circ \nabla_{e_k}$. Это приводит к соотношению

$$(A_{-k} \circ \nabla_{e_k} - e_k A_{-k})|0\rangle = \left(\sum_{N=M}^{-1} (k + n(N)) + \omega_{j(N)} \right) |0\rangle. \quad (4.8)$$

Если $\sum_{N=M}^{-1} \omega_{j(N)} \notin \mathbb{Z}$, то и правая, и левая части (4.7), (4.8) отличны от нуля для любого $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, 1° доказано.

Доказательство 2°, 3° аналогично. □

По определению 4.1 и лемме 4.4 $\Delta(e)$ является казимиром тогда и только тогда, когда

$$\gamma(A_k, e) = 0, \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}. \quad (4.9)$$

Мы будем искать решения (4.9) в виде

$$e = \sum_{m \geq m_0} a_m e_m, \quad (4.10)$$

где $m_0 \in \mathbb{Z}$.

Лемма 4.8. *Для каждого фермионного представления, коцикл которого γ удовлетворяет условиям леммы 4.6, уравнение (4.9) имеет 1-мерное пространство решений вида (4.10). Для образующей этого пространства имеем $m_0 = 0$.*

Доказательство. Для векторных полей вида (4.10) соотношения (4.9) выглядят следующим образом

$$\sum_{m \geq m_0} a_m \gamma(A_{-k}, e_m) = 0, \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0. \quad (4.11)$$

Это бесконечная система линейных уравнений на неизвестные a_m . По лемме 4.6 она имеет треугольную матрицу, следовательно для каждого $k \neq 0$ из k -го уравнения a_k можно выразить через значения a_m с $m < k$. Для $k = 0$, напротив, $\gamma(A_0, e_m) = 0$ для всех $m \in \mathbb{Z}$, так как $A_0 = \text{const}$ (лемма 4.6). Таким образом, a_0 — независимая константа. Для $m < 0$ имеем $a_m = 0$ поскольку последнее справедливо для достаточно больших (отрицательных) значений m . Для $m > 0$ значения a_m можно выразить через a_0 . Этим предложение доказано. □

Объединяя леммы 4.5, 4.7, получим следующую теорему.

Теорема 4.9. *Для любого фермионного представления, коцикл γ которого удовлетворяет условиям леммы 4.6, и любой (фиксированной) плоской связности ∇ существует ровно один, с точностью до пропорциональности, казимир. Соответствующее векторное поле имеет простой нуль в P_+ .*

Нормализуем казимир условием $a_0 = 1$. Тогда его собственное значение совпадает с собственным значением оператора $\Delta(e_0)$, поскольку по леммам 3.2, 3.4 операторы из $\Delta(\mathcal{L}_+^{(2)})$ аннулируют вакуум.

Варьируя плоскую связность ∇ при фиксированном расслоении, получим пространство казимиров второго порядка, размерность которого согласуется с размерностью соответствующего пространства инвариантов алгебры [22].

Для произвольного векторного поля вида (4.10) можно утверждать, что и его действие, и действие его оператора Сугавара корректно определены. Чтобы показать первое, напомним, что для каждого $v \in V$ и достаточно больших n справедливо $e_n v = 0$. Для операторов Сугавара имеем $L_e = \sum_{m,n} l_e^{m,n} :u_m u_n:$, где $l_e^{m,n} = \text{res}_{P_+}(\omega^m \omega^n e)$. Но для данных m, n $\text{res}_{P_+} \omega^m \omega^n e_k \neq 0$ только для конечного числа значений k . Следовательно, коэффициенты $l_e^{m,n}$ также корректно определены.

4.3. Полуказимиры и пространство модулей $M_{g,2}^{(p)}$

Из леммы 4.5 и предыдущего раздела можно заключить, что перестановочность Δ_e со всеми элементами алгебры \mathcal{A} накладывает очень сильные ограничения на e . Здесь мы рассмотрим более слабые условия.

Определение 4.10. Назовем оператор вида Δ_e полуказимиром, если $[\Delta_e, A_k] = 0$ для любого $k < 0$.

Пусть $\tilde{\mathcal{A}}_- \subset \mathcal{A}$ — подпространство, порождённое всеми $A_k, k < 0$. Заметим, что как алгебра Ли $\tilde{\mathcal{A}}_-$ является подалгеброй в \mathcal{A} (в то время как в качестве ассоциативной алгебры — нет). При $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ можно также рассматривать $\tilde{\mathcal{A}}_-$ как подалгебру Ли в $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ (но не в $\hat{\mathfrak{g}}$), интерпретируя элементы \mathcal{A} как скалярные матрицы. Как подалгебра в $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$, $\tilde{\mathcal{A}}_-$ перестановочна с $\mathfrak{sl}(l) \otimes \mathcal{A}_-$. Следовательно $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{sl}(l) \otimes \mathcal{A}_- \oplus \tilde{\mathcal{A}}_-$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$. Назовем \mathfrak{g}_r *регулярной подалгеброй*.

Определим *коинварианты* регулярной подалгебры в $\hat{\mathfrak{g}}$ -модуле V как факторпространство $V/\mathcal{U}(\mathfrak{g}_r)V$, где $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_r)$ обозначает подалгебру универсальной обёртывающей алгебры для $\hat{\mathfrak{g}}$, соответствующей подпространству \mathfrak{g}_r (эта подалгебра, в частности, не содержит единицы).

Согласно определению 4.2, оператор Δ_e корректно определён на пространстве коинвариантов алгебры \mathfrak{g}_r . Этим определяется значение полуказамиров для конформной теории поля. С другой стороны, замечание 4.2 не приложимо к полуказамирам, так как соответствующие векторные поля образуют не подалгебру, а лишь векторное подпространство.

Для векторного поля e , определяющего полуказамир, вместо (4.9) имеем

$$\gamma(A_{-k}, e) = 0, \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}, k > 0. \quad (4.12)$$

Для полуказамиров имеем систему уравнений, аналогичную (4.11), но лишь для $k > 0$. Таким образом, коэффициенты a_m с $m \leq 0$ оказываются независимыми, а все остальные выражаются через них. Пусть $\tilde{\mathcal{L}}_- \subset \mathcal{L}$ — подпространство, порождённое векторами $\{e_k : k \leq 0\}$. Введём отображение $\Gamma: \tilde{\mathcal{L}}_- \rightarrow \mathcal{L}$ следующим образом: возьмём $e \in \tilde{\mathcal{L}}_-$ и представим его в виде (4.10); затем подставим соответствующие значения a_m ($m \leq 0$) в (4.11) и вычислим a_m , $m > 0$. Обозначим через $\Gamma(e)$ векторное поле, которое соответствует всему множеству коэффициентов a_m . Мы утверждаем следующее.

Лемма 4.11. *Пространство полуказамиров совпадает с $\Delta(\Gamma(\tilde{\mathcal{L}}_-))$. Оно порождено элементами $\Delta(\Gamma(e_k))$, где $k \leq 0$.*

Как упоминалось выше, полуказамиры корректно определены на пространстве коинвариантов подалгебры \mathfrak{g}_r . Для $e \in \tilde{\mathcal{L}}_-$ пусть $\bar{\Delta}(e)$ — оператор, индуцированный оператором $\Delta(\Gamma(e))$ на коинвариантах. Отображение $\bar{\Delta}$ определено на $\tilde{\mathcal{L}}_-$ и по лемме 4.8 его образ — это пространство C_2^s полуказамиров, рассматриваемых как операторы на коинвариантах.

Наш следующий шаг — показать, что только конечное число базисных полуказамиров задаёт нетривиальные операторы на коинвариантах и для подходящего натурального p установить соответствие между касательным пространством к $\mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ и пространством полуказамиров, рассматриваемых на коинвариантах.

Лемма 4.12. *Для фермионного представления V существует такое $p \in \mathbb{Z}_+$, что $\mathcal{L}_-^{(p)} \subseteq \ker \bar{\Delta}$.*

Доказательство. Для фермионного представления определённого заряда пространство коинвариантов алгебры \mathfrak{g}_r конечномерно. Это — известный факт для аффинных алгебр Каца—Муди. Несложно свести доказательство утверждения в рассматриваемом почти градуированном случае к известному, просто рассматривая ассоциированные градуированные объекты.

Рассмотрим разложение

$$V = \bigoplus_{n \leq 0} V_n,$$

определяющее структуру почти градуированного $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модуля на V . Виду конечномерности коинвариантов существует такое s , что

$$\bigoplus_{n < s} V_n \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}_r)V.$$

Поскольку V — почти градуированный \mathcal{L} -модуль, существует такое $\nu \in \mathbb{Z}_+$, что $\widehat{\partial}_k V_n \subseteq \bigoplus_{m \leq k+n+\nu} V_m$. Очевидно, $k+n+\nu < s$ для всех $n \leq 0$ при условии $k < s - \nu$. Следовательно $\widehat{\partial}_k V \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}_r)V$ для всех $k < s - \nu$.

Найдем такое $k' \in \mathbb{Z}$, что $T(e_k)V \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}_r)V$ для всех $k < k'$. Поскольку V — почти градуированный $(\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A})$ -модуль, существует такое $\nu' \in \mathbb{Z}_+$, что $u(i)V_n \subseteq \bigoplus_{m \leq i+n+\nu'} V_m$ для всех $u \in \mathfrak{g}$, $i \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $u^\mu(i)u_\mu(j)V_n \subseteq \bigoplus_{m \leq i+j+n+2\nu'} V_m$. Ряд (3.9) для $T(e_k)$ содержит член $:u^\mu(i)u_\mu(j):$ при условии, что $l_k^{ij} \neq 0$. Последнее выполняется для

$$i + j \leq k + g. \tag{4.13}$$

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что в предположении $g > 1$ имеем для базисных элементов $A_m \in \mathcal{A}$, ω_m (1-форма), $e_m \in \mathcal{L}$ следующее поведение в точке P_- : $A_m = O(z^{-m-g})$, $\omega_m = O(z^{m+g-1})dz$, $e_m = O(z^{-m-3g+1})\frac{\partial}{\partial z}$. Эти соотношения выполняются также для $g = 1$, если положить $\omega_m = A_{1-m}dz$, $e_m = A_{m+1}\frac{\partial}{\partial z}$, а также для $g = 0$. Ввиду (3.9), имеем $l_k^{ij} = -\text{res}_{P_-} e_k \omega^i \omega^j$. В точке P_- имеем $e_k \omega^i \omega^j = O(z^{-k+i+j-g-1})$. Если $l_k^{ij} \neq 0$, то $-k+i+j-g-1 \leq -1$, откуда следует (4.13). Следовательно

$$T(e_k)V_n \subseteq \bigoplus_{m \leq n+k+g+2\nu'} V_m.$$

Таким образом, мы можем взять $k' = s - g - 2\nu'$.

Ясно, что для $p = \max(\nu - s, |k'|)$ и $e \in \mathcal{L}_-^{(p)}$ имеем $\Delta(e)V \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}_r)V$, а значит $e \in \ker \overline{\Delta}$. \square

Пусть $\mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ — пространство модулей кривых рода g с двумя отмеченными точками P_\pm , фиксированной 1-струёй локальной координаты в P_+ и фиксированной p -струёй локальной координаты в P_- . Имеется каноническое отображение $\theta: \mathcal{L} \mapsto T_\Sigma \mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$. Оно восходит к [7]. Когомологическая и геометрическая версии этого отображения даны в [19] и [4] соответственно. Пусть $\bar{\theta}$ обозначает ограничение отображения θ

на подпространство $\tilde{\mathcal{L}}_-$. Пусть V — фермионное представление алгебры \mathcal{D}_g^1 , γ_V — его коцикл. Пусть, также, $C_2^s = C_2^s(V)$ обозначает полуказимир второго порядка алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ в представлении V . Мы предполагаем, что полуказимиры действуют на коинвариантах.

Теорема 4.13. *Возьмем p как в лемме 4.9.*

- 1°. *Отображение $\tilde{\theta}: \tilde{\mathcal{L}}_- \mapsto T_{\Sigma} \mathcal{M}_{g,2}^{(p-1)}$ сюръективно и $\ker \tilde{\theta} = \mathcal{L}_-^{(p)}$.*
- 2°. *Для таких V , что γ_V удовлетворяет условиям леммы 4.6, отображение $\bar{\Delta}: \tilde{\mathcal{L}}_- \mapsto C_2^s(V)$ сюръективно и $\mathcal{L}_-^{(p)} \subseteq \ker \bar{\Delta}$.*
- 3°. *Отображение $\bar{\Delta} \circ \tilde{\theta}^{-1}: T_{\Sigma} \mathcal{M}_{g,2}^{(p-1)} \mapsto C_2^s(V)$ сюръективно.*

Доказательство. 1° является простым следствием только что упомянутых известных результатов. Согласно утверждению 4.4 [19], отображение $\theta: \mathcal{L} \mapsto T_{\Sigma} \mathcal{M}_{g,2}^{(p-1)}$ сюръективно и $\ker \theta = \mathcal{L}_+^{(2)} \oplus \mathcal{L}_-^{(p)}$. Утверждение следует теперь из разложения $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^{(2)} \oplus \tilde{\mathcal{L}}_-$.

2° вытекает из лемм 4.8, 4.9. Часть 3° немедленно следует из 1° и 2°. □

§ 5. Казимиры в терминах «геометрических» коциклов

Цель данного раздела — заново установить некоторые результаты предыдущих разделов при несколько иной постановке задачи. 2-коцикл на \mathcal{D}^1 называется локальным, если существует $L \in \mathbb{Z}$, такое, что $\gamma(A_i, A_j) = \gamma(e_i, e_j) = \gamma(A_i, e_j) = 0$ для всех $i, j \in \mathbb{Z}$, таких, что $|i - j| > L$. Локальные коциклы на \mathcal{D}^1 описываются следующим образом.

Лемма 5.1. *Каждый локальный коцикл на \mathcal{D}^1 в локальных координатах имеет вид*

$$\gamma(f_1 \partial + g_1, f_2 \partial + g_2) = \text{res}_{p_+} [a_1 (f_1 f_2''' - f_1''' f_2) + R (f_1 f_2' - f_1' f_2) + a_2 (f_1 g_2'' - f_2 g_1'') + T (f_1 g_2' - f_2 g_1') + a_3 g_1 d g_2],$$

где $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$.

Здесь R и T функции точки и координат на римановой поверхности, преобразующиеся при замене координат таким образом, что под знаком вычета оказывается 1-форма. R и T называются соответственно проективной и аффинной связностями.

Для $g = 0$ эта лемма и её доказательство имеется в [1]. Доказательству в случае $g > 1$ посвящена недавняя работа [17]. Данное леммой 5.1

описание коциклов приводит к другому подходу к (полу-)казимирам. Здесь мы рассмотрим этот подход.

Лемма 5.2. *Для каждого локального коцикла γ на \mathcal{D}^1 в локальных координатах выполняется следующее соотношение:*

$$\gamma(e, A) = \text{ges}_{P_+}(afA'' + TfA'),$$

где $e = f\partial$, $a \in \mathbb{C}$, а поведение T при замене локальных координат может быть описано одним из трех следующих эквивалентных соотношений:

$$1^\circ. a^{-1}T(u) = a^{-1}T(z)u_z^{-1} + u_{zz}u_z^{-2};$$

$$2^\circ. a^{-1}T(u)du = a^{-1}T(z)dz + d \ln u_z;$$

$$3^\circ. \text{существует } v, \text{ такое что } T(z) = a \frac{\partial}{\partial z} \ln v(z),$$

где u, z — локальные параметры, $u_z = u'(z)$, $v \partial \in \mathcal{L}$ — локальное представление векторного поля.

Доказательство. Выражение для γ получается немедленно, если в лемме 5.1 положить $f_1 = f$, $g_1 = 0$, $f_2 = 0$, $g_2 = A$.

Теперь найдём закон преобразования, которому должна удовлетворять пара a, T , чтобы выражение $\gamma_{a,T}(e, A) = \text{ges}_{P_+}(afA'' + TfA')$ не зависело от выбора локальных координат. Эта независимость, очевидно, эквивалентна требованию, чтобы $\Omega_{a,T}(A) := aA'' + TA'$ было квадратичным дифференциалом для каждого $A \in \mathcal{A}$. Легко показать, что искомый закон преобразования может быть записан в трех вышеприведённых эквивалентных формах. Наметим, например, как из 2° вывести 3° . Путем интегрирования обеих частей равенства 2° от какой-то фиксированной точки до текущей точки P получаем $a^{-1} \int^P T(u)du = a^{-1} \int^P T(z)dz + \ln u_z$. После экспоненцирования последнее равенство даёт $\exp(a^{-1} \int^P T(u)du) = \exp(a^{-1} \int^P T(z)dz)u_z$. Теперь несложно заметить, что $v(z) = \exp(a^{-1} \int^P T(z)dz)$ преобразуется как векторное поле. \square

Замечание. Утверждение 3° леммы 5.2 обеспечивает существование величины T с требуемым законом преобразования. Можно взять произвольное векторное поле из \mathcal{L} и построить T , как предписано соотношением леммы 5.2.3 $^\circ$.

Используя лемму 5.2, можно следующим образом уточнить лемму 4.4.

Лемма 5.3. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ и представление соответствующей алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ допустимо. Тогда для произвольных $e \in \mathcal{L}$, $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$ имеем

$$[\Delta_e, xA] = \lambda(x)\gamma(e, A) \circ id,$$

где в локальных координатах для $e = f\partial$ выполняется следующее соотношение: $\gamma(e, A) = \text{res}_{P_+}(afA'' + TfA')$ ($a \in \mathbb{C}$) и T удовлетворяет условиям леммы 5.2.

Из лемм 5.6, 5.3 можно видеть, что только коциклы вида

$$\gamma_{a,T}(f_1\partial + g_1, f_2\partial + g_2) = \text{res}_{P_+}[a(f_1g_2'' - f_2g_1'') + T(f_1g_2' - f_2g_1')], \quad a \in \mathbb{C}^\times$$

ответственны за перестановочность операторов Δ_e и $x(A)$.

По лемме 5.2 существуют T_V и $a \in \mathbb{C}$, такие, что $\gamma(e, A) = \text{res}_{P_+}(afA'' + T_VfA')$ и $aA'' + T_VA'$ — квадратичный дифференциал для каждого $A \in \mathcal{A}$. Пусть Ω_V обозначает векторное пространство всех квадратичных дифференциалов этого вида. Введем также обозначение $\Omega^{(2)}$ для пространства всех мероморфных квадратичных дифференциалов и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для естественного спаривания между векторными полями и квадратичными дифференциалами: $\langle e, \Omega \rangle := \text{res}_{P_+}(e\Omega)$ ($e \in \mathcal{L}$, $\Omega \in \Omega^{(2)}$).

Теорема 5.4. Δ_e является казимиром алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ в представлении V тогда и только тогда, когда $\langle e, \Omega \rangle = 0$ для каждого $\Omega \in \Omega_V$.

Доказательство. По определению скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$, лемму 5.3 можно записать в виде

$$[\Delta_e, xA] = \lambda(x)\langle e, \Omega \rangle \circ id,$$

где $\Omega = aA'' + T_VA'$. Из доказательства леммы 5.3 можно легко извлечь, что $\lambda(1_I) = 1$, следовательно,

$$[\Delta_e, A] = \langle e, \Omega \rangle \circ id.$$

Эти два соотношения означают, что Δ_e коммутирует со всеми элементами вида A и xA ($x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$) тогда и только тогда, когда $\langle e, \Omega \rangle = 0$ для всех $\Omega = aA'' + T_VA'$. Если A пробегает алгебру \mathcal{A} , то Ω пробегает Ω_V . Этим теорема доказана. \square

Пусть $\Omega_V^\perp := \{e \in \mathcal{L} : \langle e, \Omega \rangle = 0, \forall \Omega \in \Omega_V\}$.

Corollary 5.5. $C_2 \cong \Omega_V^\perp / (\Omega_V^\perp \cap \mathcal{L}_+^{(2)})$.

Это следует из теоремы 5.1 и лемм 3.2, 3.3.

5.1. Описание казимиров

В локальной координате z на Σ векторное поле e можно представить в виде $e = E\partial$, где $E = E(z)$ — локальная функция, $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$. В общем положении аффинную связность T можно выбрать так, чтобы она имела простые полюса в точках P_{\pm} (лемма 5.2.3°). Нижеследующий пример 5.1 показывает, что эта ситуация имеет место для тех T , которые возникают в фермионных представлениях. Предположим, что представление V зафиксировано и $T = T_V$.

По теореме 5.1, условие того, что Δ_e является казимиром, таково:

$$\oint_{c_0} E(aA'' + TA')dz = 0 \quad \text{для всех } A \in \mathcal{A}. \tag{5.1}$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание тот факт, что A произвольно, получаем дифференциальное уравнение

$$aE'' - (ET)' = 0. \tag{5.2}$$

Мы ищем его решения вида

$$E = \sum_{n \geq N} a_n E_n, \tag{5.3}$$

где $e_n = E_n \frac{\partial}{\partial z}$ в окрестности точки P_+ .

Лемма 5.6. *Для аффинной связности T общего положения, такой, что $T(z) = O(z^{-1})$ в точке P_+ , уравнение (5.2) имеет одномерное пространство решений вида (5.3).*

Доказательство. Доказательство сводится к решению уравнения (5.2) в степенных рядах в окрестности точки P_+ . Предположим для простоты что $\text{ord}_{P_+} e = -1$. По предположению, $E = \epsilon_{-1}z^{-1} + \epsilon_0 + \epsilon_1z + \dots$, $T = \tau_{-1}z^{-1} + \tau_0 + \tau_1z + \dots$. Следовательно для степенных рядов соотношение (5.2) выглядит так:

$$\begin{aligned} -2\epsilon_{-1}(1 + \tau_{-1}) &= 0, \\ \epsilon_0\tau_{-1} + \epsilon_{-1}\tau_0 &= 0, \\ \epsilon_1\tau_0 - (2 - \tau_{-1})\epsilon_2 &= 0, \\ \dots \end{aligned} \tag{5.4}$$

Для аффинной связности T общего положения имеем $1 + \tau_{-1} \neq 0$, следовательно первое соотношение даёт $\epsilon_{-1} = 0$. Аналогично, $\epsilon_0 = 0$. Из третьего соотношения мы получаем $\epsilon_2 = \frac{\tau_0}{2 - \tau_{-1}}\epsilon_1$. Таким образом, мы имеем

ровно одну независимую константу ϵ_1 . Остальные соотношения позволяют выразить константы ϵ_k ($k > 1$) через ϵ с меньшими номерами. Это остаётся верным и если $\text{ord}_{P_+} e < -1$. \square

Следующая теорема непосредственно вытекает из леммы 5.4.

Теорема 5.7. *Для аффинной связности T общего положения, такой, что $T(z) = O(z^{-1})$ в точке P_+ , существует только один (с точностью до пропорциональности) казимир второго порядка. Он соответствует векторному полю, которое в точке P_+ ведёт себя следующим образом: $e(z) = z(1 + O(z))\frac{\partial}{\partial z}$.*

5.2. Описание полуказимиров

По теореме 5.1 и по аналогии с (4.12), для векторного поля, определяющего полуказимир, имеем

$$\text{res}_{P_+}(aE'' - (ET)')A dz = 0 \quad \text{для всех } A \in \tilde{\mathcal{A}}_-. \tag{5.5}$$

Предположим для простоты, что $a = 1$ и возьмём $E'' - (ET)' = \sum a_i z^i$ в точке P_+ (сумма конечна слева). Мы работаем здесь только с локальными разложениями в точке P_+ . Для элемента $A_{-1} = \alpha_{-1}z^{-1} + \alpha_0 + \dots$, имеющего старшую степень в $\tilde{\mathcal{A}}_-$, соотношение (4.12) даёт $\beta_{-1}a_0 + \beta_0a_{-1}$, что позволяет выразить a_0 через a_{-1} . Аналогично, для следующего базисного элемента $A_{-2} \in \tilde{\mathcal{A}}_-$, соотношение (4.12) выражает a_1 через коэффициенты a с меньшими номерами. Таким образом, коэффициенты a_i , $i < 0$ независимы, а все остальные можно выразить через них.

Для полуказимиров вместо (5.4) имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & -2\epsilon_{-1}(1 + \tau_{-1}) = a_{-3}, \\ & \epsilon_0\tau_{-1} + \epsilon_{-1}\tau_0 = a_{-2}, \\ & \epsilon_{-1}\tau_2 + \epsilon_0\tau_1 + \epsilon_1\tau_0 + \epsilon_2\tau_{-1} - 2\epsilon_2 = a_0, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{5.6}$$

Из первых двух соотношений ϵ_{-1} , ϵ_0 могут быть выражены через независимые константы a_{-3} , a_{-2} . С помощью третьего соотношения ϵ_2 можно выразить через ϵ_1 . Остальные соотношения позволяют выразить ϵ_i через ϵ с меньшими номерами ($i \geq 2$). Таким образом, ϵ_i независимы тогда и только тогда, когда $i \leq 1$. Отсюда снова следует лемма 4.8.

Следующий пример показывает, что представления старшего веса, удовлетворяющие условиям теоремы 5.3, действительно существуют.

Пример. Рассмотрим фермионное представление, соответствующее двумерному расслоению общего положения на эллиптической кривой. Мы хотим показать, что коцикл такого представления соответствует аффинной связности T , имеющей полюс порядка 1 в точке P_+ .

Пусть γ обозначает этот коцикл. Прежде всего покажем, что *если* $\text{ord}_{P_+} T < -1$, *то существует такое* $m \geq 0$, *что* $\gamma(A_1, e_m) \neq 0$. Предположим, что $\text{ord}_{P_+} T = -m - 2$, $m \geq 0$. Поскольку $\text{ord}_{P_+} e_m = m + 1$ и A_1'' , A_1' голоморфны ($A_1'(P_+) \neq 0$ в общем положении), имеем $(A_1'' + TA_1')e_m = O(z^{-1})dz$. Следовательно в общем положении $\text{res}(A_1'' + TA_1')e_m \neq 0$.

Но для представлений старшего веса легко показать, что $\gamma(A_1, e_m) = 0$ для всех $m \geq 0$. Имеем $[A_1, e_m] = -e_m A_1 + \gamma(A_1, e_m)$. Для эллиптической кривой можно взять $e_m = A_{m+1} \frac{\partial}{\partial z}$. Следовательно $\gamma(A_1, e_m) = -[A_1, e_m] - e_m A_1 = e_m \circ A_1 - A_1 \circ e_m - A_{m+1} \frac{\partial A_1}{\partial z}$. Применим обе части последнего равенства к вакууму. Тогда $A_1 |0\rangle = 0$, $e_m |0\rangle = \lambda |0\rangle$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Очевидно, $A_{m+1} \frac{\partial A_1}{\partial z}$ — элемент подалгебры \mathcal{A}_+ . Следовательно $\gamma(A_1, e_m) = 0$. Мы получили, что

$$\text{ord}_{P_+} T \geq -1.$$

Остается понять, какая из двух возможностей имеет место: T регулярна в точке P_+ или имеет там полюс первого порядка. Легко проверить, что в первом случае $\text{res}_{P_+}(A_1'' + TA_1')e_{-1} = 0$, в то время как во втором этот вычет вообще говоря отличен от нуля. Следовательно по значению $\gamma(A_1, e_{-1})$ мы можем судить, какая из двух перечисленных возможностей имеет место. По лемме 4.6 вообще говоря, $\gamma(A_1, e_{-1}) \neq 0$, следовательно, $\text{ord}_{P_+} T = -1$.

Литература

1. Arbarello E., De Concini C., Кас V. G., Procesi C. *Moduli spaces of curves and representation theory*, Comm. Math. Phys., **117** (1988), 1–36
2. Билибрух А. А. 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем, Труды математического института им. Стеклова, **206** (1994)
3. Bonora L., Rinaldi M., Russo J., Wu K. *The Sugawara construction on genus g Riemann surfaces*, Phys. Lett. B, **208** (1988), 440–446
4. Grinevich P. G., Orlov A. Yu. *Flag spaces in KP theory and Virasoro action on $\det D_j$ and Segal-Wilson τ -function*, Preprint CLNS 945/89, Cornell University (1989)
5. Кас V. G., Raina A. K. *Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, Adv. Ser. in Math. Physics Vol. 2, World Scientific, 1987

6. Кац В. *Бесконечномерные алгебры Ли*, Москва, Мир, 1993.
7. Концевич М., *Алгебра Вирасоро и пространства Тейхмюллера*. Функц. анализ и его прил., **21** (1987), 78–79.
8. Кричевер И. М., Новиков С. П. *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов*, Функц. анализ и его прил., **2(21)** 1987, 46–63
9. Кричевер И. М., Новиков С. П. *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского*, Функц. анализ и его прил., **4(21)** 1987, 47–61
10. Кричевер И. М., Новиков С. П. *Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях*, Функц. анализ и его прил., **1(23)** 1989, 24–40
11. Кричевер И. М., Новиков С. П. *Голоморфные расслоения на римановых поверхностях и уравнение Кадомцева-Петвиашвили (КП). I*, Функц. анализ и его прил., **4(12)** 1978, 41–52
12. Кричевер И. М., Новиков С. П. *Голоморфные расслоения на алгебраических кривых и нелинейные уравнения*, Успехи математических наук, **6(35)** 1980, 47–68
13. Krichever I. M., Novikov S. P. *Virasoro-Gelfand-Fuks type algebras, Riemann surfaces, operator's theory of closed strings*, JGP, **5** 1988, 631–661
14. I. M. Krichever, S. P. Novikov *Riemann surfaces, operator fields, strings. Analogues of the Fourier-Laurent bases*, in: *Physics and Mathematics of Strings, Memorial Volume for Vadim Knizhnik*; L. Brink, D. Friedan, A. M. Polyakov (eds.), World Scientific, 1990
15. Кричевер И. М., Новиков С. П. *Голоморфные расслоения и коммутирующие разностные операторы. Двухточечные конструкции*, Успехи математических наук, **3(55)** 2000, 181–182
16. Pressley A., Segal G. *Loop Groups*, Oxford University Press, 1986
17. Schlichenmaier M. *Local cocycles and central extensions for multi-point algebras of Krichever—Novikov type*, J. Reine und Angewandte Mathematik; math/0112116, 2001.
18. Schlichenmaier M., Sheinman O. K. *Sugawara construction and Casimir operators for Krichever—Novikov algebras*, Journ. Math. Sci. **2(92)** 1998, 3807–3834; q-alg/9512016, 1995
19. Schlichenmaier M., Sheinman O. K. *Wess—Zumino—Witten—Novikov Theory, Knizhnik—Zamolodchikov equations and Krichever—Novikov algebras*, **1**, Успехи математических наук, **1(54)**, 1999, 213–250
20. Шейнман О. К. *Эллиптические аффинные алгебры Ли*, Функц. анализ и его прил., **3(24)** 1990, 51–61

21. Шейнман О.К. *Фермионная модель представлений аффинных алгебр Кричевера—Новикова*, Функц. анализ и его прил., 3 (35) (2001), 60–72
22. Шейнман О.К., *Алгебры Кричевера—Новикова и уравнения автодуальности на римановых поверхностях*, Успехи математических наук, 1 (56), 2001, 185–186
23. Sheinman O.K. *Second order casimirs for the affine Krichever-Novikov algebras $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ and $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$* , Moscow Mathematical Journal, 4 (1) 2001, 605–628
24. Тюрин А.Н. *Классификация векторных расслоений на алгебраических кривых*, Известия АН СССР, сер. мат., 29, 1965, 657–688.
25. *Sheinman O.K. Krichever—Novikov algebras, their representations and applications. Math. RT/0304020*

117966, Россия, Москва ГСП-1 ул. Губкина д. 8
Математический институт им. В. А. Стеклова, кафедра геометрии и топологии.
121002 Россия, Москва, б. Власьевский пер. д. 11
Независимый Московский институт.

Приложение

26—29 декабря 2001 года состоялась конференция «Фундаментальная математика сегодня», посвященная 10-летию Независимого Московского университета. В ней приняли участие основатели университета, преподавательский состав и молодые математики — выпускники и гости университета. Многие статьи настоящего сборника являются расширенными версиями докладов, прочитанных на конференции. Ниже мы публикуем полный список докладов, а также некоторые фотографии.

Программа конференции

A. Alexeevski, S. Natanzon. Klein topological field theory and Hurwitz numbers of complex and real algebraic curves

Sergei Arkhipov. A geometric realization of the category of modules over the small quantum group

V. I. Arnold. Astroidal geometry and hyperbolic polynomials

Ivan Arzhantsev. Affine embeddings of homogeneous spaces

A. A. Belavin, A. V. Odesskii, R. A. Usmanov. New relations in the algebra of the Baxter Q -operators

Michael Blank. Dynamical spectrum for random maps and Ulam conjecture

A. A. Bolibruch. Semistable Vector Bundles with Connections and the Riemann—Hilbert Problem

Alexander Braverman. Singularities of loop schemes and automorphic L-functions

Victor M. Buchstaber. Symmetric powers as algebraic variety

Yurii M. Burman. Whitney's index formula and Laplace integrals

P. Cartier. Cosmos and atom: a revival of Hermann Weyl's ideas about gauge invariance

Leonid Chekhov. Commutative and noncommutative Teichmuller spaces via graphs

- P. Deligne.* Tensor Categories
- Boris Dubrovin.* From integrable systems to Gromov—Witten invariants
- S. V. Duzhin.* Decomposable skew-symmetric functions
- A. Eskin, A. Zorich.* Billiards in rectangular polygons
- L. D. Faddeev.* Problem of mass for the quantum Yang—Mills theory: what is it
- William G. Faris.* Ornstein—Uhlenbeck and renormalization semi-groups
- V. Ginzburg.* Symplectic reflection algebras
- Vladimir A. Gordin.* Eigen-value Functional Optimization in Mathematical Physics and Stability Problems
- A. L. Gorodentsev.* Abelian Lagrangian Algebraic Geometry and ALAG-quantization
- A. Gorodetski.* Stable nonhyperbolic properties of dynamical systems and smooth realization of skew products
- P. G. Grinevich, S. P. Novikov.* Topological charge of the finite-gap Sine-Gordon solutions
- S. M. Gusein-Zade.* Indices of 1-forms on an isolated complete intersection singularity
- A. Ya. Helemskii.* Wedderburn-type theorems for operator algebras: traditional and “quantized” homological approaches
- Yulij Ilyashenko.* Centennial History of the Hilbert’s 16th problem
- Dmitry Kaledin.* Symplectic singularities in algebraic geometry
- Jean-Michel Kantor.* Recent works on lattice polytopes
- Oleg Karpenkov.* Energy of a knot: variational principles
- Anatole Katok.* Nonuniform hyperbolicity and rigidity
- L. Katzarkov.* Algebro Geometric methods in symplectic geometry
- Maxim Kazarian.* Multisingularities and cobordisms
- A. Khovanskii.* Parshin’s symbols, toric geometry and product of the roots of a system of equations
- A. A. Kirillov.* Representations and orbits of triangular groups
- S. K. Lando.* The Hurwitz problem and the geometry of spaces of meromorphic functions
- S. Loktev.* Coinvariants of one-dimensional lattice VOAs
- Valery Lunts.* Motivic measures and stable birational geometry
- R. MacPherson.* Intersection homology and torus actions
- Sergei Maksimenko.* Smooth shifts along trajectories of flows
- Sergey P. Novikov.* Discrete systems and integrability
- Grigori Olshanski.* Gelfand—Tsetlin schemes, measures of hypergeometric type, and point processes

Eugene Polulyakh. Dynamical systems which admit periodical decompositions

Alexei Rudakov. Representations of infinite-dimensional graded Lie \mathfrak{s} -algebras with $\mathfrak{sl}(3) \times \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{gl}(1)$ as the zero degree component

A. G. Sergeev. Seiberg—Witten equations and Abrikosov strings

S. Shadrin. Topological classification of unitary functions of arbitrary genus

Irina Shchepochkina. Classification of the real simple Lie superalgebras of vector fields

O. K. Sheinman. The second order casimirs for the affine Krichever—Novikov algebras $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ and $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$

S. B. Shlosman. Convex envelope of the Wiener loop

Mikhail Shubin. Capacities in spectral theory of magnetic Schrödinger operators

A. Skopenkov. The Whitehead link, the Hudson—Habegger invariant and classification of embeddings $S^1 \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}^7$

Alexei Skorobogatov. Rational points on certain Kummer surfaces

Vladlen Timorin. Four-dimensional geometry of circles

M. A. Tsfasman. Asymptotic Properties of Global Fields

V. A. Vassiliev. Combinatorial formulas for cohomology of spaces of knots

Misha Verbitsky. Proof of Mukai conjecture

A. M. Vershik. Metric classification of functions of several arguments, random matrix and space of Polish spaces

E. B. Vinberg. The dual horospherical Radon transform for polynomials

F. L. Zak. Order, rank, and class of projective algebraic varieties

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА СЕГОДНЯ.
К ДЕСЯТИЛЕТИЮ НМУ.

Редакторы С. К. Ландо, О. К. Шейнман.

Дизайн обложки У. Сопова

Подписано в печать 18.7.2003 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная № 1
Печать офсетная. Печ. л. 25,5 Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство НМУ, МЦНМО

121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД № 01335 от 24.3.2000 года.

Отпечатано с готовых диапозитивов во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14