В. И. АРНОЛЬД

Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов

МОСКВА
2002

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО ЦЕНТРА НЕПРЕРЫВНОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 514/515
ББК 22.1
А84

Аннотация

Комплексные числа описывают движения евклидовой плоскости, одному вращению трёхмерного пространства соответствует два кватерниона, различие которых (физики назвали это явление спином) связано со свойствами группы преобразований. «Вращения» электронов отличаются от вращений твёрдых тел именно различием спинов, играющих решающую роль при описании электронных оболочек атомов.

В брошюре, наряду с основными фактами классической теории комплексных чисел и кватернионов, рассказаны некоторые новые результаты и гипотезы. Например, комплексной версией тетраэдра оказывается октаэдр, а гипотеза, что кватернионная его версия — икосаэдр, не доказана.

Текст брошюры представляет собой дополненную обработку записи лекции, прочитанной В. И. Арнольдом для школьников 9—11 классов 17 ноября 2002 года на Малом мехмате МГУ.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов, учителей ...

ISBN 5-94057-025-9

Арнольд Владимир Игоревич

Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов

Редактор *В. В. Трушков*. Техн. редактор *В. М. Гуровиц*.
Запись и расшифровка лекции: *Р. И. Богданов*, *М. Р. Богданов*.

Лицензия ИД №01335 от 24/III 2000 г. Подписано к печати 5/III 2002 г.
Формат $60 \times 88\ {}^{1}/_{16}$. Физ. печ. л. 2,50. Усл. печ. л. 2,50. Тираж 1500 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11.

Отпечатано в типографии РА «Фантазия».
111024, Москва, Е-24, Авиамоторная ул., 20/17.

Теории комплексных чисел, кватернионов и спинов относятся к небольшому числу наиболее фундаментальных частей геометрии, имеющих наиболее важные приложения в физике. Описываемое ниже геометрическое построение теории комплексных чисел французы приписали Аргану, хотя за семь лет до Аргана его опубликовал датский математик Вессель (который, впрочем, исходил скорее из будущих инженерных приложений, например, к ещё не построенной тогда теории уравнений Максвелла и переменного тока).

Комплексные числа

Рассмотрим на евклидовой плоскости систему ортонормированных координат.

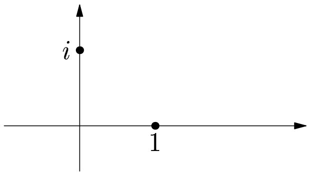

Рис. 1. Вещественные базисные векторы на плоскости комплексных чисел.

Базисные векторы обозначим через 1 по одной оси, i по другой оси (от слова «imaginary», т. е. мнимый). Точка плоскости представляется в виде $a + b \cdot i$ (единицу при a не пишем):

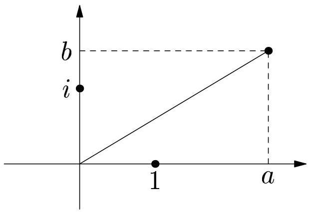

Рис. 2. Вещественная и мнимая часть комплексного числа.

Векторы на плоскости можно складывать:

$$\begin{array}{ccccc} z_1 & = & a_1 & + & b_1 \cdot i \\ z_2 & = & a_2 & + & b_2 \cdot i \\ \hline \multicolumn{5}{c}{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i} \end{array}$$

Кроме сложения комплексных чисел, определим их умножение. Таблица умножения:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i = i \cdot 1.$$

Самое главное начинается при умножении i на i:

$$i \cdot i = -1.$$

Число i называют *мнимым*, так как не существует вещественного числа a, для которого выполнялось бы равенство

$$a^2 = -1.$$

Произведение двух любых комплексных чисел определяется по закону дистрибутивности:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Иными словами, умножая a_1 на a_2 и b_1 на b_2, получаем вещественную часть произведения (их разность), а умножая a_1 на b_2 и b_1 на a_2 — мнимую часть (сумму этих двух произведений). Определение умножения закончено.

Замечание. Все свойства умножения (коммутативность: $z_1 z_2 = z_2 z_1$; ассоциативность: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$; дистрибутивность по отношению к сложению: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$) выполняются очевидным образом.

С алгебраической точки зрения теория комплексных чисел этим исчерпывается.

Движения плоскости

Комплексные числа — математический аппарат для описания движений плоскости. Чтобы в этом убедиться, мы введём еще дополнительное

Определение. Комплексное число

$$\overline{z} = a - b \cdot i$$

называется *комплексно сопряжённым* к числу $z = a + b \cdot i$.

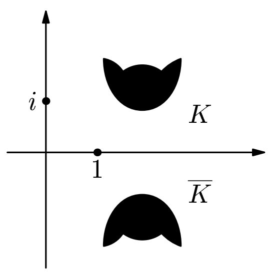

Рис. 3. Комплексное сопряжение кошки K.

Геометрически переход от z к $\overline{z}$ — это отражение относительно оси $O1$.

Теорема. *Сопряжённое число к сумме двух комплексных чисел равно сумме чисел, сопряжённых к слагаемым*:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2.$$

Теорема. *Сопряжённое число к произведению двух комплексных чисел равно произведению чисел, сопряжённых к множителям*:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2.$$

Определение. Произведение комплексного числа на сопряжённое ему число называется *квадратом модуля* комплексного числа:

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Лемма. *Модуль комплексного числа — действительное неотрицательное число.*

Доказательство. Квадрат модуля не меняется при сопряжении:

$$\overline{z\overline{z}} = \overline{z}z = z\overline{z},$$

поэтому он является действительным числом. Кроме того, $|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2 \geqslant 0$, поэтому модуль — тоже действительное неотрицательное число. □

Определение. *Аргумент* α не равного нулю комплексного числа равен углу поворота от положительной полуоси $O1$ в сторону положительной мнимой полуоси Oi до направления комплексного числа.

Замечание. Если $|z| = 1$, то

$$a = \cos\alpha, \quad b = \sin\alpha.$$

Те, кто не знаком с функциями синус и косинус, могут считать это замечание их определением.

Применим теперь комплексные числа для изучения движений евклидовой плоскости. Рассмотрим комплексное число $w \in \mathbb{C}$. Рассмотрим преобразование «умножение на комплексное число z», переводящее каждую точку w в точку zw, где $|z| = 1$, $\arg z = \alpha$.

Теорема. *Преобразование умножения на комплексное число с модулем единица является поворотом плоскости* $\{w\}$.

Доказательство. Рассмотрим комплексное число w. Сосчитаем модуль комплексного числа, в которое переходит w при нашем преобразовании:

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = (z\overline{z}) \cdot (w\overline{w}) = w\overline{w} = |w|^2.$$

Следовательно, любой вектор переходит в вектор такой же длины. Кроме того, расстояние между концами векторов также сохраняется:

$$|zw_1 - zw_2| = |z(w_1 - w_2)| = |w_1 - w_2|.$$

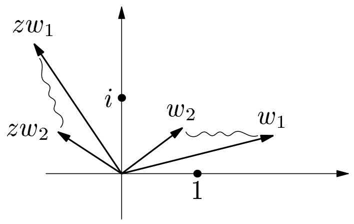

Рис. 4. Операция умножения на комплексное число с модулем единица.

Таким образом, преобразование умножения на комплексное число с модулем единица сохраняет длины.

Важная деталь: это преобразование сохраняет ориентацию. □

Задача. Вращение плоскости $\{w\}$ по часовой стрелке переходит при нашем преобразовании во вращение по часовой стрелке (т. е. в ту же сторону, что и исходное).

Отступление про ориентацию. Для определения ориентации нужна формула, которую от студентов зачастую скрывают, — формула площади параллелограмма. Пусть на евклидовой плоскости с ортонормированными координатами $\{(X,Y)\}$ имеется параллелограмм. Первый вектор, задающий параллелограмм, обозначим через $A = (x_1, y_1)$, второй — через $B = (x_2, y_2)$.

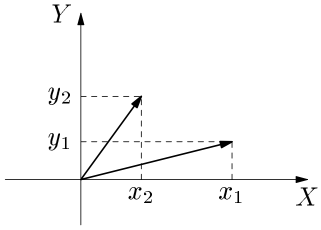

Рис. 5. Ориентация плоскости парой векторов.

Теорема. *Площадь* $S(A,B)$ *параллелограмма, порожденного векторами* A *и* B, *является линейной функцией от вектора* A :

$$S(A_1 + A_2, B) = S(A_1, B) + S(A_2, B).$$

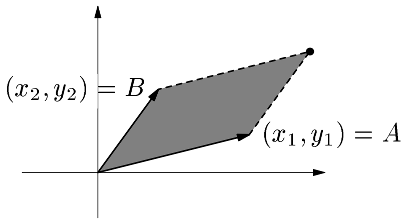

Рис. 6. Параллелограмм, порождённый парой векторов A и B.

Площадь надо считать со знаком «плюс», если поворот от A к B — в направлении вращения от первой координатной полуоси ко второй (на нашем рисунке — «против часовой стрелки»). Соответственно, со знаком «минус», если поворот от A к B — в противоположную сторону. Линейность зависимости площади от первого вектора означает также, что

$$S(kA, B) = kS(A, B).$$

Эти два простых факта содержат в скрытом виде всю «теорию определителей».

Возьмем базис $e = (1,0)$, $f = (0,1)$. Тогда наши векторы $A = A_1$ и $B = A_2$ можно представить в виде

$$A_1 = x_1 e + y_1 f, \quad A_2 = x_2 e + y_2 f.$$

Вычисляем площадь $S(A_1, A_2)$. Вследствие линейности получаем сумму четырёх слагаемых

$$S(A_1, A_2) = x_1 x_2 S(e,e) + x_1 y_2 S(e,f) + y_1 x_2 S(f,e) + y_1 y_2 S(f,f).$$

Здесь $S(e,e) = 0$, потому что параллелограмм, натянутый на пару (e,e), является вырожденным. По этой же самой причине $S(f,f) = 0$. Далее заметим, что $S(e,f) = 1$; но $S(f,e) = -1$, так как направление вращения от f к e — в обратную сторону. Следовательно, вся площадь равна

$$S(A_1, A_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Это число называется *определителем* приведённой ниже квадратной таблицы из четырёх компонент наших векторов, называемой *матрицей* параллелограмма:

$$S(A_1, A_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Мы обсуждаем вопрос: сохраняется ли при умножении на z ориентация? Надо взять на плоскости $\{w\}$ основной параллелограмм и посмотреть, куда он переходит. Если площадь образа положительна, то ориентация сохраняется, а если площадь образа отрицательна, то ориентация основного (а значит, и любого) параллелограмма меняется. Образы векторов e и f суть

$$ze = z = a + bi, \quad zf = zi = -b + ai.$$

Следовательно, матрица параллелограмма-образа имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы положителен (при $z \neq 0$), так как

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 - (-b) \cdot b = a^2 + b^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, умножение на ненулевое комплексное число z сохраняет ориентацию плоскости умножаемых чисел.

Исследуем, на какой угол поворачивается вектор w при его умножении на z? Возьмём простейший вектор и посчитаем, на какой угол он повернется при нашем преобразовании.

Замечание. Алгебраисты считают простейшим числом число 0, но нам оно не подходит, мы возьмём в качестве простейшего число $w = 1$. Тогда умножение на z переведёт его в $zw = z = a + bi$.

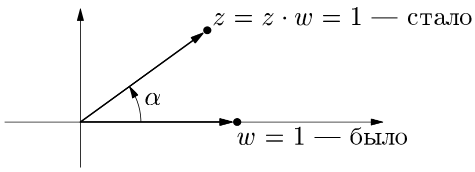

Рис. 7. Поворот вектора w при умножении на число z.

Из этого следует, что наше преобразование поворачивает вектор $w = 1$ на угол $\alpha = \arg z$.

Следствие. *Умножение на комплексное число z, такое что $|z| = 1$, является поворотом плоскости на угол, равный* $\arg z$.

Теорема. *При умножении комплексных чисел их аргументы складываются:*

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w.$$

Доказательство. Мы уже доказали, что вектор $w = 1$ при умножении на z поворачивается на угол α. Но поскольку умножение на z есть поворот, то на такой же угол поворачивается и любой вектор w. Введём обозначение $\arg w = \beta$. Тогда число zw имеет аргументом $\alpha + \beta$, т. е. $\arg(zw) = \arg w + \alpha$. $\square$

Это приводит к тригонометрическим тождествам, которые иначе невозможно понять. Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$, $|z| = 1$, $|w| = 1$. Тогда

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Поскольку $\arg z = \alpha$, то $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$. Точно так же, поскольку $\arg w = \beta$, то $c = \cos\beta$, $d = \sin\beta$. Поэтому получаем для вещественных и мнимых частей произведения zw выражения

$$\cos(\alpha + \beta) = ac - bd = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) = ad + bc = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.$$

Формула умножения комплексных чисел легко запоминается и не путается ни с чем другим. А тригонометрических формул в ней содержится очень много, что делает из них излюбленный экзаменаторами вопрос на приемных экзаменах.

Теория вращений и движений евклидовой плоскости исчерпывается приведёнными формулами.

Задача. Докажите, что *при любом натуральном* n

$$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

(эта формула называется *формулой Муавра*, так как её открыл гораздо раньше совсем другой человек).

Пример. Из этой формулы следует (путём раскрытия скобок в биноме правой части), что и $\cos(n\varphi)$, и $\sin(n\varphi)$ — вещественные многочлены с целыми коэффициентами от переменных $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Или, иными словами, *тригонометрические многочлены* (линейные комбинации синусов и косинусов кратных углов) *можно рассматривать как ограничения обычных многочленов от двух переменных* (x *и* y) *на окружность* ($x^2 + y^2 = 1$).

В частности, очень часто полезны формулы

$$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \qquad \sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \quad \sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Поскольку косинус — чётная функция, а синус — нечётная функция от φ, то $\cos(n\varphi)$ можно представить в виде многочлена от одного лишь аргумента $x = \cos\varphi$ (заменив везде $\sin^2\varphi$ на $1 - \cos^2\varphi$). Эти замечательные многочлены от одной переменной называются многочленами Чебышева, они обладают многими полезными свойствами («наименее уклоняются от нуля», доставляют «фигуры Лиссажу» на экране осциллографа* и т. д.). Простейшие из этих многочленов переписываются в других обозначениях следующим образом:

$$\mathcal{F}_1(x) = x, \quad \mathcal{F}_2(x) = 2x^2 - 1, \quad \mathcal{F}_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad \ldots$$

Однако, с самого начала возник вопрос: кроме вращений и движений плоскости $\mathbb{R}^2$ существуют вращения и движения пространства $\mathbb{R}^3$. Как

* См., например, *В. И. Арнольд*, Математические методы классической механики (М.: Эдиториал УРСС, 2000).

их описывать? Кое-что здесь сделал уже Вессель примерно в 1820 году. Но окончательную теорию построил позднее ирландский математик Гамильтон.

Одним туманным вечером по пути из Тринити-колледжа в Дублине Гамильтон прибег к помощи алкогольных паров. Это и привело его к замечательной теореме, которую мы изложим ниже (и которую он пытался перед этим найти много лет). Говорят, что он был так поражён открытой им формулой, что сейчас же вырезал её перочинным ножиком на перилах деревянного мостика через канал, по которому он в это время шёл. Но я, хоть и искал эту надпись, вырезанную тогда Гамильтоном, не нашёл её на этом мостике*.

Обобщение комплексных чисел до понятия кватернионов

Оказывается, для описания вращений в $\mathbb{R}^3$ нужны 4 числа, поэтому нам требуются вектора 4-мерного вещественного пространства — *кватернионы*. Вырезанная Гамильтоном на перилах формула $ijk = -1$ даёт таблицу умножения кватернионов.

Итак, кватернион — это вектор 4-мерного вещественного пространства с базисом 1, i, j, k (которые называются базисными кватернионами): $a + bi + cj + dk$. Число a называется *вещественной частью* (*скаляром*), а трёхмерный вектор $v = bi + cj + dk$ — *мнимой частью* кватерниона. Слово «вектор» впервые появилось именно в этой теории. Во времена Гамильтона векторов не было, так что ему пришлось выдумывать всю терминологию.

«Числа» 1, i, j, k называются *базисными кватернионами.*

Сложение двух кватернионов — покомпонентное. Оно коммутативно и ассоциативно.

Самое трудное — придумать, как умножать кватернионы. Умножение дистрибутивно относительно сложения, так что достаточно уметь умножать базисные кватернионы.

---

* Описанный эпизод произошёл 16 октября 1843 года на Брукгамском мосту через Королевский канал, где Гамильтон и вырезал формулу $ijk = -1$. В письме своему сыну Арчибальду от 5 августа 1865 года Гамильтон пишет о судьбе этой формулы: «...Но, конечно, как надпись, она уже стёрлась». (*Л. С. Полак*, Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике, М.: Физматлит, 1960, 103–104.) — *Прим. ред.*

Таблица Гамильтона умножения базисных кватернионов:

$$
\begin{array}{llll}
1 \cdot 1 = 1, & 1 \cdot i = i, & 1 \cdot j = j, & 1 \cdot k = k; \\
i \cdot 1 = i, & i \cdot i = -1, & i \cdot j = k, & i \cdot k = -j; \\
j \cdot 1 = j, & j \cdot i = -k, & j \cdot j = -1, & j \cdot k = i; \\
k \cdot 1 = k, & k \cdot i = j, & k \cdot j = -i, & k \cdot k = -1.
\end{array}
$$

Заметим, что разные мнимые кватернионные «единицы» при умножении не коммутируют, а антикоммутируют: $ij = k$, но $ji = -k$. Если знать, что $ij = k$, то остальное легко вывести из условия ассоциативности умножения. Например, $ik = iij = -j$, поскольку $i^2 = -1$.

Правило умножения базисных кватернионов получается из формулы $ij = k$ циклическими перестановкам:

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j.$$

Умножение не коммутативно, но ассоциативно. Некоммутативным оно и должно быть, чтобы описывать вращения трёхмерного пространства, которые не все коммутируют.

Для любых кватернионов p, q, r имеют место следующие равенства:

$$
\begin{gathered}
p + q = q + p \quad \text{(коммутативность по сложению)}, \\
(p + q) + r = p + (q + r) \quad \text{(ассоциативность по сложению)}, \\
(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r) \quad \text{(ассоциативность по умножению)}, \\
p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r \quad \text{(дистрибутивность)}.
\end{gathered}
$$

Такая операция умножения не требует умственных способностей, а подобна умножению многозначных чисел*.

Пусть даны два кватерниона,

$$p = a_1 + v_1, \quad q = a_2 + v_2.$$

Посчитаем их произведение. Начнём с вычисления вещественной части ответа:

$$\mathrm{Re}(pq) = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2.$$

* Декарт предложил метод полного исключения геометрии и воображения из математики, как самый «демократический»: ведь любой тупица продвигается при подобном методе столь же успешно, как и самый гениальный ум.

Ясно, что произведение вещественных частей $a_1 a_2$ в ответ войдёт, но при перемножении членов с другими базисными кватернионами возникают $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$, а других вещественных слагаемых в произведении нет. По определению, *скалярным произведением* двух векторов трёхмерного евклидова пространства с ортонормированным базисом (i, j, k) называется билинейная функция от этих векторов

$$b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 = (v_1, v_2).$$

Задача. Доказать, что скалярное произведение двух векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними:

$$(v_1, v_2) = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos(v_1, v_2).$$

Вычислим мнимую часть произведения кватернионов pq.

$$\mathrm{Im}(pq) = a_1 v_2 + a_2 v_1 + [v_1, v_2],$$

где $[v_1, v_2]$ — векторное произведение векторов v_1 и v_2. Компоненты векторного произведения легко вычислить — это определители:

$$[v_1, v_2] = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k.$$

Задача. Доказать, что $[v_1, v_2]$ перпендикулярно v_1 и v_2.

Выбор направления перпендикуляра подчинён требованиям ориентации («правило правой руки»).

Тройка векторов $(v_1, v_2, [v_1, v_2])$ ориентирует пространство так же, как базисная тройка (i, j, k). Это значит, что одну из троек можно непрерывно перетянуть в другую, оставляя векторы линейно независимыми во всё время перетягивания. Например, тройки (i, j, k) и (j, k, i) ориентируют пространство одинаково, а (i, k, j) — иначе.

Векторное произведение двух векторов меняет знак при их перестановке.

Пример. $[i, j] = k = -[j, i], [i, i] = 0$.

Произведение линейно по v_1 и по v_2.

Это описание умножения завершает описание алгебры кватернионов по Гамильтону. Основное значение этой операции состоит в доставляемом ею описании вращений трёхмерного евклидова пространства. Напомню, что вращение евклидовой ориентированной плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол α

задаётся отождествлением плоскости $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$ и преобразованием умножения на z, $w \mapsto zw$, где $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

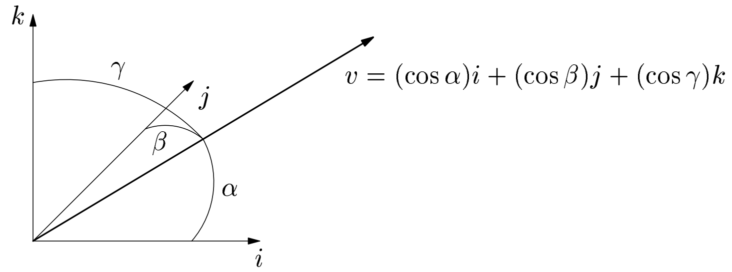

Рис. 9. Орт оси вращения и его направляющие косинусы.

Для кватернионов можно предугадать кватернионный аналог числа z. Но заканчивающее выбор кватерниона замечание приводит к теории спина (вероятно, первооткрывателем формулы для него является Родригес).

Мы начинаем с евклидова ориентированного пространства $\mathbb{R}^3$ с ортонормированным ориентированным базисом i, j, k. Вращение пространства $\mathbb{R}^3$ определяется своей осью вращения и углом поворота вокруг этой оси. Ось можно задать ортом v, который задаётся своими углами α, β, γ с осями (i, j, k): $v = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma$. Вращение на положительный угол вокруг этой оси совпадает с вращением на противоположный угол вокруг противоположного направления оси.

Рассмотрим орт оси вращения. Этот вектор имеет компонентами косинусы направляющих углов (образованных вектором и направляющими векторами осей). По теореме Пифагора, длина вектора v равна единице.

Переходим к решающей формуле — для кватерниона, описывающего вращение. Эту формулу скрывают от мехматян или физиков (в теории твёрдого тела рассказывают в виде матриц Паули).

Какова размерность группы всех вращений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$? Мы употребляем три направляющих косинуса и угол поворота. Получается четыре вещественных числа. Кажется, что размерность многообразия всех вращений равна четырём, но это не верно. Есть соотношение на эти 4 числа: $\|v\| = 1$. Размерность группы $SO(3)$ вращений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг точки O равна трём.

Задача. Посчитать размерность групп $SO(n)$ всех вращений пространств $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$ и т. д. вокруг начала координат.

В обозначении $SO(n)$ буква O обозначает ортогональность, т.е. сохранение преобразованиями группы длин векторов из $\mathbb{R}^n$, а буква S («специальное») — сохранение ориентации.

Теперь мы сопоставим каждому вращению трёхмерного ориентированного евклидова пространства кватернион нормы единица.

Определение. *Сопряжённым* к кватерниону $q = a + v$ называется кватернион $\overline{q} = a - v$.

Определение. *Квадратом нормы* кватерниона q называется число $q \cdot \overline{q} = a^2 - (v, (-v)) = a^2 + \|v\|^2 \geqslant 0$.

Это — всегда вещественное число, оно положительно при $q \neq 0$. Действительно, написанное выражение есть сумма квадратов вещественных чисел

$$q\overline{q} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0.$$

Поэтому и норма — вещественное неотрицательное число.

Пусть дан какой-либо кватернион с нормой единица,

$$q = a + v: \quad \|q\| = 1.$$

По определению нормы

$$a^2 + \|v\|^2 = 1.$$

Естественно принять a и $\|v\|$ за косинус и синус некоторого угла:

$$a = \cos\varphi, \quad \|v\| = \sin\varphi.$$

Мы представили наш кватернион в виде $q = \cos\varphi + \sin\varphi \cdot v'$, где v' — орт оси. Вектор трёхмерного пространства v' имеет норму единица. Если мы хотим описывать при помощи нашего кватерниона вращение трёхмерного пространства, то в качестве орта v' естественно взять орт оси вращения. Для получения кватерниона осталось выбрать в последней формуле угол φ. Пусть θ — сама величина угла поворота. Современное понимание физики отличается от понимания физики два столетия назад, поэтому нужна «двойка Родригеса»: оказывается, в качестве φ для построения кватерниона, описывающего поворот на угол θ вокруг оси v', нужно выбрать половину угла поворота, $\varphi = \theta/2$,

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot v'.$$

Двойка Родригеса и есть причина спина в физике.

Замечание. Из-за двойки вращение определяет кватернион неоднозначно. Угол поворота θ определён по модулю $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Входящий в определение кватерниона угол $\theta/2$ определён по модулю πn. Если n нечётно, то при прибавлении $2\pi n$ к углу θ кватернион изменит знак. Надо было бы писать $\pm q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot v'$.

Иными словами, одному и тому же повороту отвечают два кватерниона (различающиеся знаком).

Все кватернионы нормы единица ($\|q\| = 1$) образуют сферу S^3 в $\mathbb{R}^4$. Соответствие, сопоставляющее каждому кватерниону нормы единица вращение, задаёт отображение сферы S^3 на всю группу вращений — двулистное накрытие: $S^3 \to SO(3) = S^3/\pm 1$.

Теорема. *Отображение накрытия является гомоморфизмом, т. е. произведение переходит в произведение*: *если $g(q)$ — вращение, соответствующее кватерниону q, то*

$$g(q_1 q_2) = g(q_1) g(q_2). \qquad (*)$$

Умножение кватернионов является алгебраической записью умножения вращений (эта группа некоммутативна). Это аналог теоремы сложения аргументов при перемножении комплексных чисел. Легко доказывается следующая

Лемма. $|q_1 q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$.

Поэтому, если $|q_1| = 1$, то умножение на такой кватернион сохраняет длины. Отсюда легко вывести формулу $(*)$ (я пропущу в этом выводе некоторые детали).

Пусть z — кватернион и $|z| = 1$. Будем действовать кватернионом z на кватернион w странным образом:

$$w \mapsto z w z^{-1}. \qquad (**)$$

Определение. *Обратным кватернионом* к кватерниону z называется такой кватернион z^{-1}, что $z^{-1} z = 1$.

Такой обратный кватернион единственен и его легко найти для любого ненулевого кватерниона z таким же образом, как это делается и для комплексных чисел («инверсия»). В нашем случае просто $z^{-1} = \overline{z}$, так как $z\overline{z} = 1$. Странное преобразование $(**)$ — это вращения пространства $\mathbb{R}^4$ (доказательство аналогично случаю $\mathbb{C}$).

Если $w = 1$, то при этом вращении $1 \mapsto z \cdot 1 \cdot \overline{z}$, то есть вектор 1 остаётся при преобразовании $(**)$ на месте. Вращение евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ оставляет на месте единицу. Ортогональное дополнение к вектору 1 переходит в себя и вращение пространства $\mathbb{R}^4$ задаёт вращение евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Можно непосредственно проверить, что так получается то самое вращение трёхмерного пространства, которое мы раньше описывали при помощи оси и угла поворота.

Рассмотрим действие $(**)$ для произведения z_1z_2: $z_1z_2w(z_1z_2)^{-1}$. Как вычислить $(z_1z_2)^{-1}$?

Подсказка из зала: $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

— Неверно!

Пример. Пусть a означает снять пиджак, а b — снять рубашку. Тогда ba — снять пиджак, затем снять рубашку — эквивалентно раздеться. Обратное — одеться. Надо сначала надеть рубашку, и лишь потом надеть пиджак. Поэтому $(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Следовательно, произведение z_1z_2 переводит точку w в точку

$$(z_1z_2)w(z_1z_2)^{-1} = z_1z_2wz_2^{-1}z_1^{-1} = z_1(z_2wz_2^{-1})z_1^{-1}.$$

Операция $(**)$ действия кватерниона z_1z_2 эквивалентна тому, что на результат операции $(**)$ действия кватерниона z_2 на w действует операцией $(**)$ кватернион z_1:

$$(z_1z_2)w(z_1z_2)^{-1} = z_1[z_2wz_2^{-1}]z_1^{-1}.$$

Иными словами, для любого чисто мнимого (ортогонального к 1) вектора w имеет место тождество

$$(g(z_1z_2))(w) = (g(z_1))[(g(z_2))(w)].$$

В более коротких обозначениях, вращения g, соответствующие кватернионам z нормы единица, удовлетворяют условию гомоморфности,

$$g(z_1z_2) = g(z_1)g(z_2),$$

так что трудно описываемое умножение вращений $g(z)$ сведено к легко выполнимому перемножению соответствующих им кватернионов.

Этот кватернионный метод описания движений используется даже в космических исследованиях, при организации ориентации спутников.

Докажем обещанное выше совпадение операции $(**)$ действия кватерниона

$$z = \cos(\theta/2) + v'\sin(\theta/2)\,, \quad |v'| = 1,$$

с поворотом на угол θ вокруг оси его мнимой части (с ортом v') в пространстве $\mathbb{R}^3$ чисто мнимых кватернионов.

1) *Ось орта* v' переходит при этой операции в себя. Действительно, имеют место следующие три очевидные факта.

а) Умножение на вещественное число $\cos(\theta/2)$ переводит в себя любую проходящую через ноль прямую.

б) Умножение на чисто мнимый кватернион v' переводит кватернионы оси с ортом v' в кватернионы с нулевой мнимой частью (поскольку векторное произведение любого вектора на себя равно нулю).

в) Обратный к z кватернион $z^{-1} = \overline{z}$ имеет такой же, как z, вид (с противоположным θ), поэтому умножение на z^{-1} справа обладает, как и умножение на z слева, свойствами а) и б).

Утверждение 1) непосредственно вытекает из фактов а), б) и в).

2) Чтобы доказать, что угол поворота вращения $(**)$ вокруг оси орта v' равен θ, достаточно применить эту операцию к какому-либо чисто мнимому кватерниону w из ортогонального дополнения к орту v' в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ чисто мнимых кватернионов.

Умножение w на z слева поворачивает этот вектор внутри указанного ортогонального дополнения на угол $\theta/2$ (согласно теореме о сложении аргументов при перемножении комплексных чисел). Умножение на z^{-1} справа — тоже поворот на $\theta/2$ (например, это можно вывести из того, что

$$wz^{-1} = w\overline{z} = \overline{z\overline{w}},$$

а чисто мнимые кватернионы при сопряжении меняют знак). Утверждение 2) доказано.

Замечание. В квантовой физике (например, при описании вращения электронов) оказывается, что физически важным является не элемент группы вращений $SO(3)$, а именно один из двух соответствующих ему кватернионов нормы единица, который и называется *спином электрона*, имеющим два значения (обычно обозначаемые в физике через $\pm 1/2$).

При отождествлении в одну точку каждой пары противоположных точек сферы S^n в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ из сферы получается n-мерное гладкое многообразие, которое называется *вещественным n-мерным проективным пространством* и обозначается через $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (рис. 9).

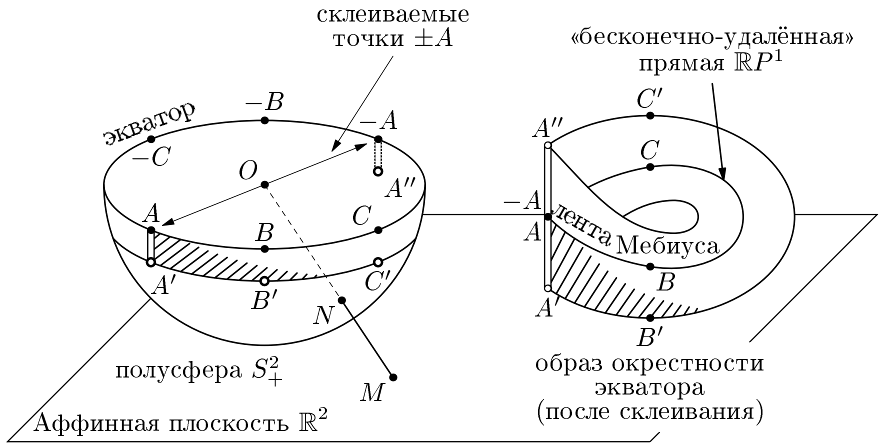

Рис. 9. Построение проективной плоскости приклеиванием ленты Мёбиуса к кругу $A'B'C'$ (или проективной прямой $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ «бесконечно-удалённых» точек к аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$).

Это многообразие можно также описать как многообразие всех проходящих через O прямых OM в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$: ведь такая прямая как раз и определяется парой $\pm N$ своих (противоположных) точек пересечения с единичной сферой.

Пример. Проективная прямая $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ есть окружность S^1, поскольку при отождествлении точек φ и $\varphi+\pi$ окружности $\{\varphi \bmod 2\pi\}$ получается окружность $\{\varphi \bmod \pi\} = S^1/\pm 1 \approx S^1$.

Проективная плоскость $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ получается из аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$ добавлением «бесконечно-удалённой прямой» $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$, содержащей по *одной* бесконечно-удалённой точке на каждой прямой аффинной плоскости (двигаясь вдоль прямой в обе стороны, мы придём в одну и ту же бесконечно-удалённую точку).

Чтобы всё это ясно увидеть, можно начать, отождествляя противоположные точки не со всей сферы S^2, а лишь с замкнутой полусферы S^2 (скажем, южнее экватора). Тогда склеивать придётся только каждую точку A экватора с противоположной, $-A$, а открытая строго южная полусфера при склеивании не пострадает (рис. 9).

Между прочим, из этой же конструкции видно, что окрестность бесконечно-удалённой (а значит, и любой) прямой на проективной плоскости $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ диффеоморфна ленте Мёбиуса (которую Мёбиус так и открыл), вследствие чего проективная плоскость $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ неориентируема (как и все чётномерные проективные пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n}$ и в отличие от нечётномерных $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$, которые все ориентируемы).

Итак, $SO(3) = S^3/\pm 1 = \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ — ориентируемое трёхмерное проективное пространство. Его можно представить себе как совокупность поворотов на всевозможные углы, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, вокруг всевозможных осей, заданных всеми векторами ω единичной сферы.

Совокупность всех таких вращений можно описать как шар $\{\omega\}$ радиуса π в трёхмерном евклидовом пространстве. Но на границе этого шара нужно ещё отождествить противоположные точки, так как вращение на угол π вокруг вектора ω совпадает с вращением на угол π вокруг вектора $-\omega$ (а других совпадающих вращений в нашем шаре нет).

Задача. Существуют ли автоморфизмы $A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ алгебры кватернионов, т. е. преобразования (скажем, вещественно-линейные), для которых при всех кватернионах x и y выполняются соотношения

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \quad A(xy) = A(x)A(y) \ ?$$

Замечание. Для поля комплексных чисел группа автоморфизмов состоит из двух элементов: $A(z) = z$ и $A(z) = \overline{z}$.

Кватернионное сопряжение не является автоморфизмом, так как для любых кватернионов z и w имеет место легко проверяемое тождество $\overline{zw} = \overline{w}\cdot\overline{z}$, а не $\overline{z}\cdot\overline{w}$ (*кватернионное сопряжение* — «*антиавтоморфизм*»).

Примером автоморфизма алгебры кватернионов является, однако, изменение знаков *двух* из трёх мнимых компонент:

$$A(a + bi + cj + dk) = a + bi - cj - dk.$$

Задача. Найти *все* автоморфизмы алгебры кватернионов (они похожи на этот).

Некоторые примеры

Определение. Преобразование (вещественно гладкое) комплексной проективной плоскости на себя называется *псевдопроективным*, если оно переводит каждую комплексную проективную прямую в комплексную проективную прямую.

Задача. Докажите, что *всякое псевдопроективное преобразование комплексной проективной плоскости на себя является либо комплексным проективным преобразованием, либо его произведением на комплексное сопряжение* (я не знаю, верно ли это без предположения гладкости, например — для гомеоморфизмов).

Рассмотрим тетраэдр в евклидовом трёхмерном пространстве. Направления из его центра на вершины определяют четыре точки на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Группа проективных преобразований, сохраняющих эти точки, совпадает с группой A_3 симметрий тетраэдра, состоящей из 24 ортогональных преобразований евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, сохраняющих тетраэдр.

Вложив $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ в комплексную проективную плоскость $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, мы получим и там 4 точки. Чтобы «комплексифицировать» группу A_3, рассмотрим группу всех сохраняющих эту четвёрку псевдопроективных преобразований комплексной плоскости.

Задача. Доказать, что так определённая «*комплексификация группы A_3 симметрий тетраэдра*» *есть группа B_3 всех* 48 *симметрий октаэдра или двойственного октаэдру куба в трёхмерном евклидовом пространстве.* Этот куб можно получить, добавив к вершинам тетраэдра с центром в нуле четыре противоположных точки.

Замечание. Можно надеяться, что *кватернионной версией группы A_3 симметрий тетраэдра* (*а равно и комплексной версией группы B_3 симметрий куба или октаэдра*) *окажется группа H_3 из* 120 *симметрий икосаэдра.* Однако это подтверждается только странными формулами для чисел рёбер: эти числа равны (рис. 10) $6 = 2 \cdot 3$ для тетраэдра, $12 = 3 \cdot 4$ для октаэдра (или куба), $30 = 5 \cdot 6$ для икосаэдра (или додекаэдра).

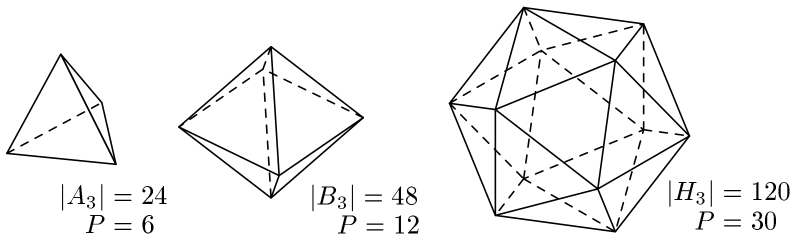

Рис. 10. Тетраэдр, октаэдр и икосаэдр, их группы симметрий и числа ребер Р. Слова тетраэдр, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр означают «четырёхгранник», «восьмигранник», «двадцатигранник» и «двенадцатигранник».

Все эти три числа имеют вид $(n + 1)(n + 2)$, где $n = 1, 2, 4$ — размерность (многообразия вещественных чисел, комплексных чисел и кватернионов, соответственно).

Главная трудность исследования кватернизации состоит в отсутствии готового определения (роль которого при комплексификации играл переход от проективных преобразований к псевдопроективным).

Можно предполагать, что роль пары тетраэдров, вписанных в куб (и связанных с дробью $|B_3|/|A_3| = 48/24 = 2$) играет в кватернионном случае пятёрка кубов, вписанных в додекаэдр (ребрами каждого из этих пяти кубов являются некоторые из диагоналей пятиугольных граней додекаэдра, рис. 11). При симметриях додекаэдра эти 5 кубов переставляются, подобно тому, как это происходит с парой тетраэдров, вписанных в куб, при действии группы 48 симметрий куба (совпадающих с симметриями двойственного кубу октаэдра, вершинами которого являются центры граней куба).

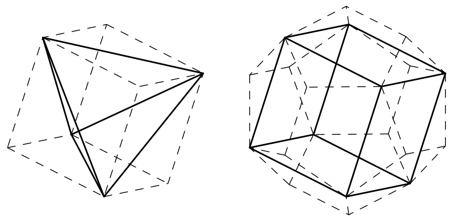

Рис. 11. Тетраэдр, вписанный в куб, и куб, вписанный в додекаэдр.

Теория стереографической проекции сферы на плоскость превращается при переходе от комплексных чисел к кватернионам (с неизбежным учётом двойки Родригеса) в замечательную параметризацию кватернионной проективной прямой $\mathbb{H}\mathrm{P}^1 \approx S^4$ кватернионами, аналогичную формулам «тангенса половинного угла»,

$$\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}, \quad t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

параметризующим окружность $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ и сферу Римана $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Об этой кватернионной стереографической проекции и об её приложениях к исследованию спинорных двулистных накрывающих $\mathrm{Spin}(4)$ и $\mathrm{Spin}(5)$ групп $SO(4)$ и $SO(5)$ вращений сфер размерностей 3 и 4 можно прочесть в статье: *В. И. Арнольд,* Лагранжев грассманиан кватернионного гиперсимплектического пространства (Функц. анализ и его прил., т. 85, №1 (2001), 74–77).

Указанные формулы, как это ни странно, во-первых, были открыты при решении знаменитой задачи теории чисел: как найти все «пифагоровы тройки» целых чисел (X, Y, Z), являющихся длинами сторон прямоугольного треугольника, так что $X^2 + Y^2 = Z^2$?

Простейшие примеры ($3^2+4^2=5^2$, $12^2+5^2=13^2$) много использовались в Древнем Египте, чтобы строить прямые углы, используя узлы на верёвке (например, при строительстве пирамид). Но общая формула была за тысячи лет до Пифагора опубликована, вместе с теоремой Пифагора и с доказательствами, на вавилонских клинописных табличках халдеев: каждая несократимая пифагорова тройка имеет вид

$$X=u^2-v^2,\quad Y=2uv,\quad Z=u^2+v^2,$$

где (u,v) — взаимно простые целые числа (разной чётности, чтобы тройка получилась несократимая).

С другой стороны, те же формулы имеют топологическое содержание, описывая структуру множества всех комплексных точек окружности (т.е. комплексных решений уравнения окружности $x^2+y^2=1$ — так называемой римановой поверхности для окружности). Они же доставляют, как мы увидим, также условия интегрируемости в элементарных функциях так называемых «абелевых дифференциалов», вроде $\sqrt{1-x^2}\,dx$ (общие абелевы интегралы — это все интегралы вида $\int R(x,y)\,dx$ вдоль кривой $H(x,y)=0$, где H — многочлен, R — рациональная функция).

Дифференциальное уравнение Ньютона

Дифференциальное *уравнение Ньютона*

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F(x),$$

описывающее движение точки x единичной массы по прямой под действием силового поля F, имеет *первый интеграл энергии*

$$H(x,y)=\mathrm{const},\quad \text{где } H=\frac{y^2}{2}+U(x);$$

$y=dx/dt$ — скорость; U — потенциальная энергия, определяемая условием $F(x)=-dU/dx$.

Если F — многочлен степени n, то уравнение закона сохранения энергии, $H(x,y)=E$, определён на «фазовой плоскости» с координатами x и y алгебраическую кривую (гиперэллиптическую), зависящую от «постоянной энергии E», а время t движения вдоль неё определяется абелевым интегралом от дифференциальной формы $dt=dx/y$ (поскольку $y=dx/dt$).

Соответствующее этому движению фазовой точки векторное поле на фазовой кривой $H = E$ естественно продолжается на всю комплексную риманову поверхность (так, что $dt = 1$ на векторах поля). Удивительным фактом оказывается то, что это векторное поле описывает движение по римановой поверхности заполняющей её «несжимаемой жидкости» (имеет «дивергенцию ноль», что в других терминах означает «замкнутость» формы dt, т. е. то, что она оказывается локально полным дифференциалом).

Задача. Пусть потенциальная энергия U — многочлен четвёртой степени с двумя минимумами («двумя потенциальными ямами»). Рассмотрим периодические движения в той и в другой яме, с одинаковыми значениями постоянной полной энергии, E. Спрашивается, период которого из них больше: движения в более глубокой яме или в менее глубокой?

Ответ. Эта задача — топологическая. Оба периода одинаковы, поскольку риманова поверхность фазовой кривой $H = E$ — тор, периодические движения — два его меридиана, а потоки несжимаемой жидкости на торе через любые два меридиана одинаковы.

Замечание. Интегралы дифференциальной формы $dt = dx/y$ по всевозможным замкнутым путям на торе, выходящим из одной и той же точки, образуют «решётку»: абелеву группу $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \Gamma$, где ω_1 и ω_2 — интегралы вдоль параллели и вдоль меридиана тора. Значение t интеграла по выходящим из выбранной точки незамкнутым путям является многозначной функцией от конечной точки на торе, причём все значения этой многозначной функции в точке получаются из одного из них прибавлением всех чисел из решётки Γ.

Таким образом, сама наша торическая риманова поверхность представляет собой (с точностью до комплексного диффеоморфизма) фактор-пространство $\mathbb{C}/\Gamma = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$, где комплексное число $\lambda = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ не вещественно.

Выбирая различные многочлены четвёртой степени, можно получить, что все невещественные значения λ_2 и все торические римановы поверхности доставляются этой конструкцией (что доказать уже не так легко).

Все сферические римановы поверхности комплексно диффеоморфны стандартной сфере Римана $S^2 = \mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Ввиду столь большой важности этих вопросов, я скажу о них несколько слов.

От теоремы Пифагора к римановым поверхностям

Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$ и будем сначала искать на ней точки с рациональными координатами (x, y). Одна такая точка известна: $(x = 1, y = 0)$. Проведём через эту точку прямую с тангенсом угла наклона t к оси Ox (т. е. с уравнением $y = t(x - 1)$, рис. 12).

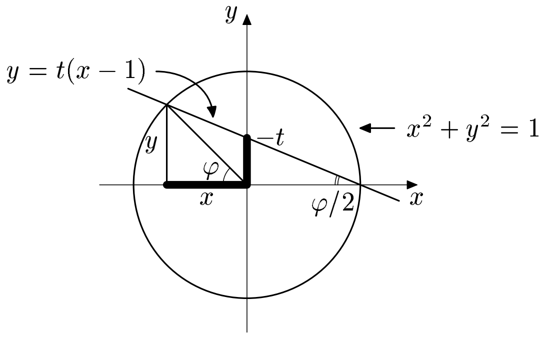

Рис. 12. Построение рациональной параметризации окружности тангенсом t половинного угла.

Одна точка пересечения этой прямой с окружностью нам уже известна. Поэтому второй корень x получающегося при фиксированном t квадратного уравнения для координаты x точки пересечения прямой с окружностью выражается через значение параметра прямой t рационально. Следовательно, окружность — «рациональная кривая», допускающая параметризацию

$$x = P(t), \quad y = Q(t), \tag{1}$$

где P и Q — рациональные функции.

Проводя те же вычисления явно, мы легко находим, что

$$P = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad Q = -\frac{2t}{1 + t^2}.$$

При рациональных значениях x и y число $t = \frac{y}{x-1}$ рационально, а при рациональном значении t мы находим рациональных x и y по формулам (1). При $-t = u/v$ с целыми u и v мы находим указанные выше формулы всех «пифагоровых» троек (где $x = X/Z$, $y = Y/Z$). Исследование несократимости (взаимной простоты) несложно (не надо, чтобы u и v оба были нечётными!).

С другой стороны, поверхность, образованная *комплексными* решениями уравнения $x^2+y^2=1$, включая «бесконечно-удалённые», оказывается, как это показывает параметризация комплексным параметром t, сферой Римана, $S^2=\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

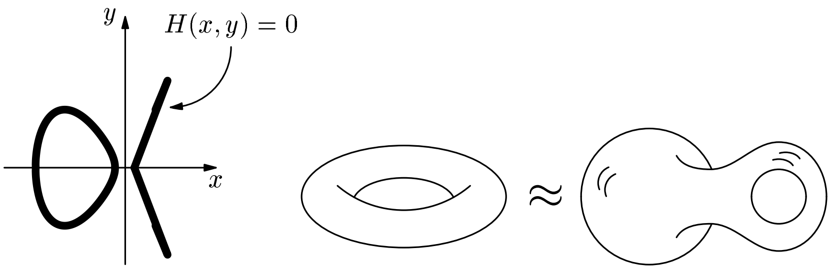

Рис. 13. Эллиптическая кривая степени 3: её вещественные точки и её риманова поверхность.

Для других многочленов $H(x,y)$ получились бы другие поверхности $H=0$, которые могут и не быть сферами. Например, уравнение «эллиптической кривой»

$$y^2=x^3-x+E$$

задаёт при почти всех E поверхность тора $S^1\times S^1$, называемого также «сферой с одной ручкой» (рис. 13).

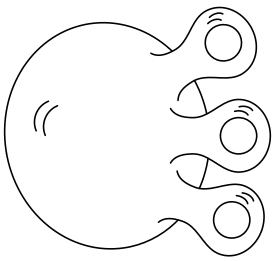

Рис. 14. Риманова поверхность рода $g=3$: сфера с тремя ручками.

В общем случае (например, при замене показателя 3 в x^3 более высоким показателем $2g+1$) получается в качестве римановой поверхности сфера с g ручками (рис. 14, число g называется *родом* поверхности).

Весь набор связных замкнутых гладких ориентируемых поверхностей (без краев или особенностей) исчерпывается сферами с g ручками ($g=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$).

Основная теорема теории интегрирования абелевых дифференциалов вдоль алгебраических кривых $H(x,y) = 0$ состоит в том, что *все такие интегралы* (*от произвольных рациональных форм* $R(x,y)\,dx$) *берутся в элементарных функциях если и только если род римановой поверхности кривой* $H = 0$ *равен нулю* (*т. е. если она диффеоморфна сфере*).

Например, для $H = x^2+y^2-1$ все такие интегралы берутся, так как они сведены нами выше к интегралам от рациональных функций от переменной t

$$\int R(x,y)\,dx = \int R(P(t),Q(t))P'(t)\,dt$$

(это — «теория подстановок Эйлера», топологический смысл которой от студентов всегда скрывают).

Каждая кривая рода 0 рациональна, т.е. допускает рациональную параметризацию, аналогичную найденной нами для окружности явно (доказать эту параметризуемость не очень трудно, но все же тут требуется некоторое владение комплексной геометрией).

Если же род римановой поверхности кривой $H = 0$ больше нуля, то интеграл от подходящей рациональной дифференциальной формы вдоль этой кривой оказывается многозначной функцией в комплексной области со столь сложным ветвлением, какого не может иметь никакая элементарная функция. Поэтому интегралы в этом случае не всегда сводятся к элементарным функциям.

Простейшей задачей такого рода является задача о вычислении длины дуги эллипса, сводящаяся как раз к интегрированию вдоль кривой рода $g = 1$ (которая поэтому-то и называется *эллиптической кривой*).

Таким образом, наша теория связывает комплексный анализ и с топологией, и с теорией чисел, и с теорией алгоритмической разрешимости задачи интегрирования.

Замечание. Такое же топологическое доказательство имеет и теорема Абеля о невозможности решения в радикалах общего уравнения пятой (или более высокой) степени, например, уже уравнения

$$x^5 + ax + 1 = 0$$

(к которому, впрочем, сводятся все уравнения пятой степени). Здесь нужно исследовать ветвление пятизначной комплексной функции x аргумента a, заданной выписанным уравнением, когда комплексная переменная a обходит вокруг точек ветвления этой пятизначной функции.

Ветвление функции описывается перестановками пяти локальных листов $x_j(a)$, и перестановки, соответствующие всевозможным путям, не проходящим через точку ветвления, образуют группу называемую «группой монодромии» многозначной функции x от аргумента a, рис. 15.

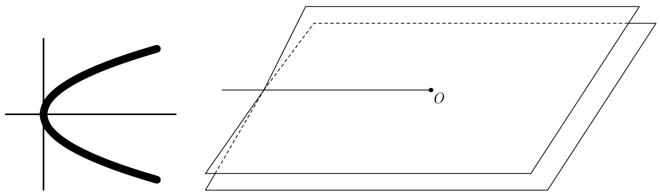

Рис. 15. Группа монодромии функции «квадратный корень» состоит из двух перестановок обоих корней.

Группа монодромии любой комбинации радикалов разрешима (сводится к косому произведению коммутативных групп). А группа монодромии указанной выше пятизначной функции содержит все перестановки 5 элементов и потому неразрешима. Значит неразрешимо в радикалах и наше уравнение (даже если добавить к радикалам все однозначные функции). Об этой теореме Абеля можно прочитать подробнее в книге В. Б. Алексеева «Теорема Абеля в задачах и решениях»(М.: Наука, 1976), воспроизводящей мои лекции школьникам 1964 года.

Если уравнение кривой $H(x, y) = 0$ задано, то найти её род g не так уж легко. Здесь помогает соображение «итальянской алгебраической геометрии»: если степень n многочлена H фиксирована, то *род будет одним и тем же для почти всех значений коэффициентов многочлена.* Ибо те специальные многочлены, для которых род иной, редки. Подобно тому, как те значения параметра c, для которых уравнение $x^n = c$ имеет нетипичное, то есть отличное от n, число корней, специальные многочлены образуют множество, задаваемое комплексным уравнением («дискриминант равен нулю»), т. е. двумя вещественными уравнениями (в указанном выше примере — $c = a + bi = 0$ означает систему $(a = 0, b = 0)$).

Поэтому *неспециальные многочлены H образуют в пространстве всех многочленов данной степени n связное множество*, при движении вдоль которого топологические инварианты (например, род) соответствующей движущейся точке римановой поверхности остаются неизменными.

Остаётся найти род g для *одного* неспециального примера. Это не так уж трудно сделать: годится, например, почти вырожденная кривая $H = 0$, где $H = L_1 \cdot \ldots \cdot L_n + \varepsilon$, и где L_j — линейные неоднородные функции общего положения. Эта риманова поверхность получается из n сфер добавлением N трубочек, где N — число точек пересечения n прямых (рис. 16).

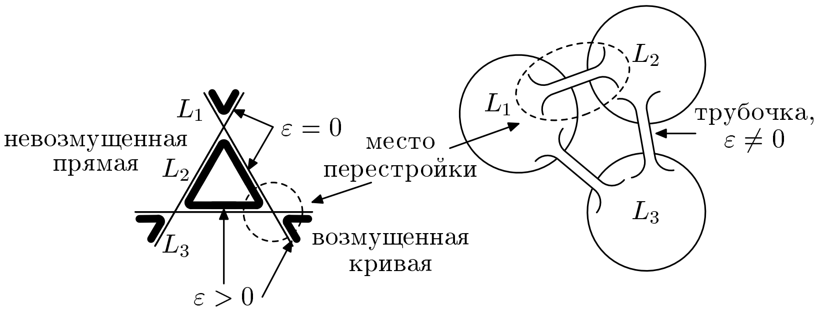

Рис. 16. Топология вещественной алгебраической кривой и римановой поверхности почти вырожденной кривой степени 3 (до возмущения число сфер $n = 3$, число соединяющих трубочек $N = 3$, род $g = 1$).

Ответ называется *формулой Римана–Гурвица*:

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Чтобы её запомнить, заметим, что роды кривых степени $n = 1$ (прямых) и степени $n = 2$ (эллипсов, гипербол, парабол) равны нулю, т. е. эти кривые допускают рациональные параметризации, а их римановы поверхности диффеоморфны сферам.

Рациональные кривые называются ещё *уникурсальными*, т. е. однопробегаемыми, так как каждую из них можно начертить (в вещественном случае) одним росчерком пера, не отрывая его от бумаги (здесь нужно или иметь в виду кривую на *проективной* плоскости, или же предполагать вещественную часть кривой в аффинной плоскости *компактной*: эллипс уникурсален, а аффинная часть гиперболы — нет).

Доказательство уникурсальности рациональной кривой получается просто при рассмотрении вещественных значений рационально параметризующей кривую переменной t.

Если исходная кривая $H = 0$ не гладкая, то каждая её особенность уменьшает род соответствующей римановой поверхности (на которой, например, точке простого самопересечения исходной кривой соответствуют две точки «на разных листах»). Оказывается, кривая степени n

с $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ особыми точками (а больше их и не бывает) имеет уже род 0, т. е. она рациональна и уникурсальна, а интегралы от рациональных форм вдоль неё вычислимы в элементарных функциях. Такова, к примеру, «вырожденная эллиптическая кривая» (рис. 17) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ (с особой точкой простого самопересечения $x = 1, y = 0$).

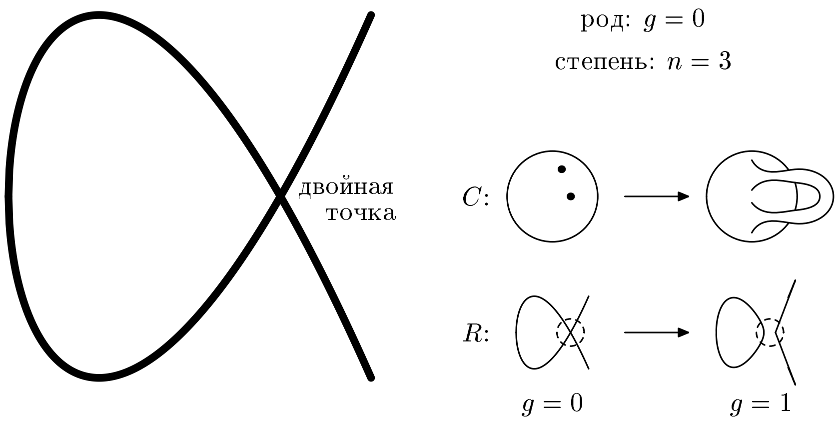

Рис. 17. Уникурсальная особая кривая, вдоль которой берутся все абелевы интегралы, и её малая перестройка в неособую эллиптическую кривую (в вещественной и в комплексной области).

Замечание. В качестве параметра t, через который координаты x и y точек нашей уникурсальной кривой выражаются рационально, можно взять тангенс угла наклона к оси Ox прямой, соединяющей изучаемую точку кривой с точкой самопересечения (проведите вычисления $x(t)$ и $y(t)$ — они позволят вычислять все абелевы интегралы вдоль нашей кривой).

Между прочим, эта конструкция поясняет, как на римановой поверхности кривой вместо точки самопересечения исходной кривой появляются две обыкновенные точки. Два значения t_1 и t_2 параметра t, соответствующие точке самопересечения исходной кривой, — это тангенсы наклона углов наклона к оси x обеих гладких ветвей исходной кривой, проходящих через её точку самопересечения.

Переход от кривой с самопересечениями к её гладкой римановой поверхности, на которой точка самопересечения представлена несколько раз, называется *нормализацией* исходной кривой.

Оказывается, всякая алгебраическая кривая может быть алгебраически нормализована, т. е. может быть получена из некоторой гладкой алгебраической кривой (из своей римановой поверхности) алгебраическим отображением (отображением, которое, правда, может посылать в некоторые — особые — точки кривой-образа несколько разных точек римановой поверхности).

Задача. Нормализовать лемнискату $y^2 = x^2 - x^4$. Уникурсальна ли эта кривая?

Математические троицы

Три варианта — вещественный, комплексный и кватернионный — имеют многие математические теории, причём единство как соответствующих теорем, так и их приложений (то в топологии, то в физике, то в теории чисел или в алгебре) распознать не всегда легко.

Приведу лишь несколько примеров*.

Пример 1. Совпадение проективной прямой с окружностью:

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^1 = S^1.$$

Комплексификацией этого факта оказывается удивительная теорема Понтрягина (открытая им в тридцатые годы, но не опубликованная, и потому известная на западе под именами тех математиков, которые в шестидесятые годы опубликовали свои доказательства в ответ на мой вопрос, известно ли им доказательство этой теоремы Понтрягина).

Теорема. *Факторпространство комплексной проективной плоскости по её вещественному диффеоморфизму «комплексное сопряжение» диффеоморфен четырёхмерной сфере*:

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^2 / \operatorname{Conj} \approx S^4.$$

Таким образом, при комплексификации размерность единица проективного пространства заменилась двойкой, и вдобавок пришлось факторизовать по группе автоморфизмов поля комплексных чисел (что можно было бы делать и в вещественном случае, где, однако, единственный автоморфизм — тождественное преобразование).

---

* Более подробное обсуждение большего набора фактов можно найти в статье: *В. И. Арнольд*, «Полиматематика: является ли математика единой наукой или набором ремёсел» в сборнике «Mathematics: Frontier and Perspectives», изданном международным математическим союзом и Американским математическим обществом в 2000 году в ознаменование конца тысячелетия (под ред. В. И. Арнольда, М. Атья, П. Лакса и Б. Мазура). Планируемый русский перевод объявлен издательством «Фазис», Москва.

Угадать кватернионный аналог предыдущей теоремы нелегко, но анализ разумного её доказательства показывает следующее*:

$$\mathbb{H}\mathrm{P}^4 / \mathrm{Aut} / \mathrm{Conj} \approx S^{13}.$$

Здесь начинать приходится с кватернионно четырёхмерного (т.е. вещественно шестнадцатимерного) проективного пространства, а факторизовать — по трёхмерной (изоморфной $SO(3)$) группе автоморфизмов и ещё по антиавтоморфизму кватернионного сопряжения.

Поучительно, однако, что доказательство всех трёх перечисленных выше фактов совершенно параллельны — нужно только заменять вещественные числа на комплексные (и кватернионы), а квадратичные формы (которые в вещественном случае записываются в подходящей системе координат в виде $\sum_{m=1}^{n} a_m x_m^2$) — на вещественные эрмитовы (и гиперэрмитовы) формы, которые записываются в таком же виде с заменой только квадратов x_m^2 на квадраты модулей $|x_m^2|$.

Определение эрмитовых и гиперэрмитовых форм (в комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ и кватернионном $\mathbb{H}^n$) — это обычные вещественные квадратичные формы (в соответствующем $\mathbb{R}^{2n}$ или $\mathbb{R}^{4n}$), инвариантные относительно умножения векторов-аргументов на комплексные числа (кватернионы) нормы единица.

Геометрический объект, соответствующий положительно-определённой квадратичной форме f, — это эллипсоид $f = 1$. Так что эрмитовым (а в кватернионном случае — гиперэрмитовым) формам соответствуют эллипсоиды вращения со специальными симметриями: они переходят в себя при умножении всех векторов пространства эллипсоида на i в комплексном случае (на i, j, k — в кватернионном).

Теперь я могу описать второй пример удивительной кватернионизации.

Пример 2. Отталкивание электронных уровней, квантовый эффект Холла и характеристические числа.

В вещественном случае результат уже совершенно нетривиален и был обнаружен, несмотря на свою математическую фундаментальность, лишь вследствие развития квантовой механики (где он называется теорией фон Неймана–Вигнера). Рассмотрим многообразие всех эллипсов (с центром в начале координат) на евклидовой плоскости (или, если угодно, многообразие квадратичных форм, которые их задают).

---

* *В. И. Арнольд*, Родственники фактора комплексной проективной плоскости по комплексному сопряжению. Труды Матем. Института им. В. А. Стеклова РАН, том 224 (1999).

Некоторые из эллипсов являются окружностями. На первый взгляд кажется, что условие обращения эллипса в окружность — это одно соотношение равенства полуосей $a = b$, так что подмногообразие окружностей должно иметь коразмерность один в многообразии всех эллипсов.

Это, однако, не так: многообразие квадратичных форм

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

имеет размерность 3 (и координаты A, B, C), а многообразие окружностей — размерность 1 (так как окружность с центром в нуле определяется своим радиусом).

Выделяющее окружности условие «дискриминант равен нулю» для соответствующего квадратного уравнения, определяющего длины полуосей эллипса, имеет вид $(A + C)^2 = 4(AC - B^2)$, т. е. сводится к сумме двух квадратов, $(A - C)^2 + 4B^2 = 0$, и определяет одномерное подмногообразие в трёхмерном пространстве форм (а именно, прямую $A = C$, $B = 0$).

Теорема Вигнера–фон Неймана утверждает, что и для эллипсоидов в n-мерном пространстве при любом n *подмногообразие эллипсоидов вращения имеет коразмерность два*, так что *ни для эллипсоида общего положения, ни для членов однопараметрического семейства общего положения эллипсоиды вращения не встречаются.*

Если нарисовать график зависимости длин n полуосей $a_m(p)$ для эллипсоида такого семейства, зависящего от параметра p, то на плоскости (p, a) получаются n кривых $(m = 1, \dots, n)$, каждая из которых однозначно проектируется на ось значений параметра p, и которые попарно не пересекаются, хотя и могут иногда подходить довольно близко друг к другу (рис. 18).

В физике значения a_n называются «уровнями», а эффект их несовпадения истолковывается как «отталкивание» уровней друг другом при их сближении вследствие изменения параметра.

Впрочем, поскольку эта теорема — математическая, она имеет множество разных физических (и иных) приложений. Например, на вращение спутника вокруг его центра масс сильно влияет его «эллипсоид инерции», и, если этот эллипсоид окажется эллипсоидом вращения, то управлять ориентацией и кувырканием такого спутника легче. Теорема Вигнера–фон Неймана показывает, что *для того, чтобы сделать эллипсоид инерции спутника эллипсоидом вращения, недостаточно передвигать вдоль штанги одну «юстировочную массу»: подобных штанг должно быть не меньше двух.*

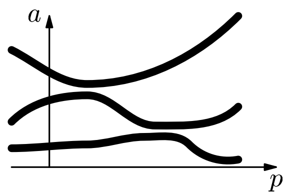

Рис. 18. Расталкивание собственных чисел.

Обратимся теперь к комплексификации теоремы об отталкивании уровней. Коразмерность два многообразия эллипсоидов вращения среди всех эллипсоидов заменяется при переходе от квадратичных форм в $\mathbb{R}^n$ к эрмитовым в $\mathbb{C}^n$ на вещественную коразмерность, равную трём.

Эллипсоиды вращения не встречаются здесь не только в однопараметрических семействах общего положения, но и в двупараметрических (а при трёх вещественных параметрах эрмитовы эллипсоиды с дополнительной симметрией встречаются для отдельных точек в трёхмерном пространстве параметров).

Я подробно исследовал возникающие здесь топологические вопросы (строение расслоения «собственных векторов», которые в математике соответствуют главным осям эллипсоида, а в физике называются «модами») в статье: *В. И. Арнольд*, Моды и квазимоды, Функц. анализ и его прил., т. 6 №2 (1972), 12–20.

Сегодня эти результаты называются теорией «целочисленного квантового эффекта Холла» (так как возможно экспериментальное наблюдение прохождения поверхности в трёхмерном пространстве-времени, точка которой определяется двумя параметрами, через специальные точки, где соответствующие эллипсоиды имеют дополнительную симметрию.

В топологических терминах это явление называется «приращением характеристического числа Черна комплексного расслоения собственных векторов над указанной поверхностью» при прохождении этой поверхности через специальные точки. Таким образом, топологическая теория целочисленного квантового эффекта Холла была построена и опубликована в 1972 г. до физической — просто путём комплексификации классической теоремы Вигнера–фон Неймана, недоставало только физической терминологии, появившейся позже.

Сегодня в таком же положении, как была в 1972 г. комплексная версия, находится кватернионная версия теоремы Вигнера–фон Неймана.

В этом случае вещественная коразмерность появления дополнительной симметрии (т.е. столкновения собственных уровней гиперэрмитовых форм) равна пяти. Эти числа — 2, 3 и 5 — уже встречались нам при анализе чисел рёбер тетраэдра, октаэдра и икосаэдра: каждое из них равно $d+1$, где d — вещественная размерность (вещественной, комплексной и соответственно кватернионной прямой).

Роль расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$ (со слоем S^1), фундаментального для комплексной теории квантового эффекта Холла, играет в кватернионном случае «второе расслоение Хопфа», $S^7 \to S^4$ (со слоем S^3).

Оба эти расслоения описывают просто стандартное построение проективного пространства ($\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \approx S^2$, $\mathbb{H}\mathrm{P}^1 \approx S^4$) из сферы соответствующего проективному векторного пространства ($S^3 \subset \mathbb{C}^3 \setminus 0$, $S^7 \subset \mathbb{H}^2 \setminus 0$): точке сферы расслоением сопоставляется прямая, соединяющая её с нулём. И, наконец, «характеристическим классам и числам Черна» комплексного случая (которые являются комплексификацией «характеристических классов Штифеля–Уитни» и «эйлеровой характеристики» вещественного случая) соответствуют в кватернионном случае «характеристические классы и числа Понтрягина» (перестраивающиеся при прохождении подвижного четырёхмерного пространства параметров через специальные точки пятимерного пространства).

Беда лишь в том, что физических названий эти готовые математические результаты пока ещё не получили (хотя я и надеюсь, что обилие различных полей и частиц в современной физике позволят указать и те экспериментально наблюдаемые ситуации, которые управляются описанной выше кватернионной теорией гиперэрмитовых матриц). Тройки «$\mathbb{R}$ — $\mathbb{C}$ — $\mathbb{H}$» и «классы Штифеля–Уитни — классы Черна — классы Понтрягина» указывают, что комплексификацией двухэлементной группы $\mathbb{Z}_2$ коэффициентов классов Штифеля–Уитни является группа целых чисел $\mathbb{Z}$ коэффициентов классов Черна, но что окажется кватернионной версией группы $\mathbb{Z}_2$ (или комплексной версией группы целых чисел $\mathbb{Z}$) пока ещё не решено (в качестве кандидатов выступают, в частности, $\mathbb{Z}$ и группа $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ целых комплексных чисел).

Спины и косы

Для обозначения двулистного накрытия группы вращений $SO(3)$ группой спинов $\mathrm{Spin}(3) = S^3 = SU(2)$ физики придумали красивый метод, основанный на математической *теории кос.* Пусть на поверхности M заданы n попарно различных точек. *Косой из n нитей на поверхности M* называется путь в пространстве таких наборов, начинающийся и кончающийся в заданном неупорядоченном наборе n точек из M.

При этом коса рассматривается как путь с точностью до гомотопии, т. е. непрерывная деформация, сохраняющая его начальный и конечный наборы и, конечно, деформирующая промежуточные наборы так, чтобы они всё время состояли из n различных точек, считается не меняющей косу.

Из кос из n нитей можно построить группу, продолжая один путь другим (обратная коса — это путь, пройденный в обратном направлении).

Например, косой a из двух нитей на ориентируемой плоскости является движение этих точек на полоборота в положительную сторону вокруг середины соединяющего их отрезка. Все косы a^k $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ различны, нетривиальны (отличны от неподвижного пути $a^0 = e$) и вместе с e образуют (изоморфную группе целых чисел $\mathbb{Z}$) группу $B(2)$ всех кос из 2 нитей на плоскости.

Группа $B(3)$ всех кос на плоскости из трёх нитей порождена двумя образующими a и b, вращающими пару точек I, II и пару точек II, III набора лежащих (в этом порядке) на прямой точек (I, II, III), рис. 19. Эти две образующие удовлетворяют соотношению $aba = bab$ (доказанному на рис. 19), а других соотношений нет (это доказать труднее).

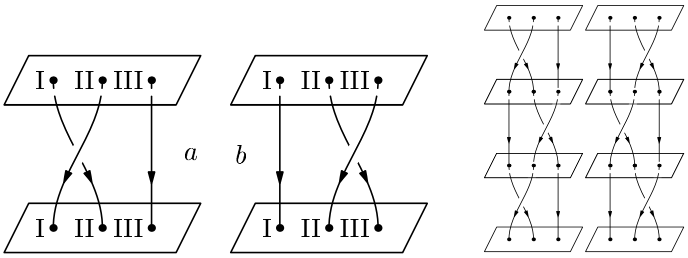

Рис. 19. Косы из трёх нитей на плоскости.

Косы на плоскости удобно изображать кривыми в трёхмерном пространстве-времени: для косы из n нитей график движения точек набора состоит из n кривых (которые и называются нитями), причём, по традиции, ось абсцисс располагается вертикально и ориентирована сверху вниз (эта традиция объясняется обычным расположением заплетаемой сверху вниз косы).

Идея объяснения двулистного накрытия вращений спинами состоит в том, чтобы рассмотреть косы из n нитей на сфере S^2 (например, при $n = 4$).

В группе кос на плоскости нет элементов конечного порядка: если m-я степень какой-либо косы тривиальна, то она и сама тривиальна. Для кос из двух нитей это очевидно, но уже при трёх нитях доказательство не столь просто.

Удивительным математическим фактом теории сферических кос является то, что в группе кос на сфере S^2 бывают элементы конечного порядка (например, второго — для кос из четырёх нитей).

Этот топологический результат очень близок к тому, что фундаментальная группа многообразия $SO(3) \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ состоит из двух элементов, так что спиновое накрытие $S^3 \to SO(3)$, сопоставляющее кватерниону единичной нормы заданное им вращение, двулистно.

П. Дирак, который изобрёл этот метод объяснения спинов, продемонстрировал физикам экспериментальное доказательство сформулированной теоремы о сферических косах. Для этого он реализовал нужную сферическую косу из четырёх нитей, нетривиально связав две концентрические сферы четырьмя верёвками в ограниченном ими слое (этот слой заменяет в сферическом случае трёхмерное пространство-время, в котором лежали нити косы, соответствующей движению набора n точек на плоскости).

Затем внутри шара, ограниченного меньшей сферой, помещается ещё меньшая сфера, соединённая с исходно меньшей (теперь средней) сферой так же, как та была соединена с самой большой сферой.

И, наконец, средняя сфера уничтожается. После этого бо́льшая и самая меньшая сфера оказываются связанными 4 верёвками тривиальным образом (после деформации верёвки становятся радиальными), хотя исходное соединение было совершенно нетривиальным и не могло быть распутано (сделано радиальным посредством деформации в слое между ограничивающими его концентрическими сферами).

В отличие от физиков, математики этой теоремы теории сферических кос обычно не знают, так как они спинами не интересуются.

Добавление

Определение. Функция, переводящая всякое ненулевое комплексное число z в

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

называется *функцией Жуковского.*

Теорема 1. *Функция Жуковского переводит окружность $|z| = r$ на плоскости комплексной переменной z в эллипс с центром в нуле с по-*

луосями a, b, где $2a = r + r^{-1}$, $2b = r - r^{-1}$, на плоскости комплексной переменной $w = F(z)$.

Доказательство. Вещественная и мнимая части числа z равны $r\cos\varphi$ и $r\sin\varphi$, поэтому

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

откуда

$$w = \frac{1}{2}[(r + r^{-1})\cos\varphi + i(r - r^{-1})\sin\varphi],$$

что и утверждалось. □

Функция Жуковского играет огромную роль в технике, и Жуковский ввел её ради вычисления подъёмной силы крыла самолета (где основанная на ней формула Жуковского остаётся фундаментальной).

Но она имеет и много других приложений.

Теорема 2 (Болина). *Отображение возведения комплексных чисел в квадрат, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, переводящее z в $w = z^2$, переводит гуков эллипс с центром в нуле в ньютонов эллипс с фокусом в нуле.*

Доказательство. Пусть комплексное число u пробегает окружность $|u| = r$. Тогда комплексное число $z = u + u^{-1}$ пробегает (по теореме 1) гуков эллипс с полуосями $2a$ и $2b$ (с центром в нуле). Этим способом можно получить эллипс с любым отношением длин полуосей. Квадрат числа z есть

$$z^2 = u^2 + u^{-2} + 2. \tag{1}$$

Первые два слагаемых в сумме описывают (опять по теореме 1) снова гуков эллипс. Его полуоси имеют длины $2A = r^2 - r^{-2}$. Квадрат расстояния от центра этого эллипса до его фокуса вычисляется по теореме Пифагора:

$$(2A)^2 - (2B)^2 = [(r^2 + r^{-2})^2 - (r^2 - r^{-2})^2] = 4,$$

то есть расстояние от центра эллипса $\{u^2 + u^{-2}\}$ до его фокуса есть $2C = 2$. □

Следовательно, после указанного в формуле (1) сдвига эллипса на $+2$ начало координат станет фокусом перенесённого эллипса, что и доказывает теорему.

Замечание. Этот результат можно переформулировать в физических терминах: траектории гармонического колебания по закону Гука вокруг начала координат на плоскости комплексного переменного переходят при возведении комплексных чисел в квадрат в траектории движения по закону всемирного тяготения (или по закону притяжения Кулона), сила которого обратно пропорциональна квадрату расстояния до притягивающего центра. Само движение в нужное движение при этом не переходит: скорости прохождения одной орбиты обоими движениями разные.

Замечание. Доказанная теорема Болина имеет замечательное обобщение на случай, когда возведение в квадрат заменено на возведение в другую степень α. В этом случае орбиты движения в поле притяжения (или отталкивания) степени A переходят в орбиты для поля степени B, где числа A и B связаны соотношением двойственности,

$$(A+3)(B+3)=4.$$

Например, закон Гука, для которого $A=1$, является двойственным закону всемирного тяготения, для которого $B=-2$. В качестве показателя степени α нужно в общем случае выбирать значение $\alpha=(A+3)/2$ (двойственному закону соответствует обратное преобразование, обратной степени $\beta=(B+3)/2=1/\alpha$).

Задача. Найти автодвойственные законы. (Ньютон их уже исследовал!)

Удивительным образом, вся эта теория двойственности переносится на случай, когда место степенного преобразования $w=z^\alpha$ занимает любой многочлен (или даже любая гладкая в комплексной области комплексная функция) $w(z)$ (например, $w=e^z$ или $w=\ln z$).

Двойственные потенциалы на плоскостях $\{z\}$ и $\{w\}$ даются формулами двух определяемых преобразованием вещественных функций комплексных переменных,

$$U(z)=|dw/dz|^2, \quad V(w)=-|dz/dw|^2.$$

Преобразование переводит орбиты движения точки z с постоянной полной энергией E в поле с потенциальной энергией U в орбиты движения точки w с постоянной полной энергией $-1/E$ в поле с потенциальной энергией V.

Эта удивительная двойственность движений в столь разных двумерных полях сохраняется для квантово-механического уравнения Шрёдингера (R. Faure). Но ни какие-либо обобщения на движения в пространствах другого числа измерений, ни кватернионные обобщения указанной двойственности не известны.

Литература к добавлению

1. *E. Kasner*, Differential-Geometric Aspects of Dynamics, AMS, 1913
2. *T. Needham*, Newton and Transmutation of Force, Amer. Math. Monthly, 100, №2 (1993), 119–137.
3. *В. И. Арнольд*, Псевдокватернионная геометрия, Функц. анализ и его прил., №1 (2002).