ГЛАВА I

n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ЛИНЕЙНЫЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. Линейное (аффинное) n-мерное пространство

1. Определение линейного пространства. Часто приходится встречаться с объектами, над которыми производятся операции сложения и умножения на числа. Приведем несколько примеров.

1. В геометрии объектами такого рода являются векторы в трехмерном пространстве, т. е. направленные отрезки. При этом, если два направленных отрезка можно совместить параллельным переносом, то считается, что они определяют один и тот же вектор. Поэтому удобно все эти отрезки откладывать от одной какой-либо точки, которую мы будем называть началом координат. Операция сложения векторов, как известно, определяется следующим образом: суммой векторов x и y мы считаем диагональ параллелограмма со сторонами x и y. Известным образом вводится также умножение на числа.

2. В алгебре мы встречаемся с системами n чисел $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ (например, строки матрицы, совокупность коэффициентов линейной формы и т. д.). Для таких систем операции сложения и умножения на числа обычно определяются так: суммой систем $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ называется

система $x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n)$. Произведением системы $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ на число λ мы считаем систему $\lambda x=(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n)$.

3. В анализе определяются операции сложения функций и умножения их на числа. В дальнейшем мы для определенности будем рассматривать совокупность всех непрерывных функций, заданных на сегменте $[a, b]$.

В приведенных примерах одни и те же операции сложения и умножения на числа производятся над совершенно разными объектами. Для того чтобы изучить все такие примеры с единой точки зрения, мы введем понятие линейного, или аффинного, пространства.

Определение 1. *Множество R элементов $x, y, z, \ldots$ называется линейным (аффинным) пространством, если:*

a) *каждым двум элементам x и y поставлен в соответствие элемент z, называемый суммой элементов x и y; сумма элементов x и y обозначается через $x+y$,*

b) *каждому элементу x и каждому числу λ из некоторого поля поставлен в соответствие элемент λx, называемый произведением элемента x на число λ.*

Эти операции должны удовлетворять следующим требованиям (аксиомам):

I. 1° $x+y=y+x$ (коммутативность).

2° $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность).

3° *Существует элемент* 0 *такой, что* $x+0=x$ *для любого* x. Элемент 0 называется *нулевым элементом.*

4° *Для каждого x существует элемент, обозначаемый через $-x$, такой, что $x+(-x)=0$.*

II. 1° $1\cdot x=x$,

2° $\alpha(\beta x)=\alpha\beta(x)$.

III. 1° $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

2° $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Мы не случайно не сказали, как именно определяются операции сложения и умножения на числа. От этих операций требуется только, чтобы были выполнены сформулированные выше аксиомы. Поэтому всякий раз, когда мы встречаемся с операциями, удовлетворяющими перечисленным выше условиям, мы вправе считать их операциями сложения и умножения на числа, а совокупность элементов, для которых эти операции установлены, — линейным пространством.

Предоставляем читателю проверить, что в приведенных примерах 1–3 эти аксиомы выполнены. Поэтому 1–3 являются примерами линейных пространств.

Рассмотрим еще несколько примеров.

4. Совокупность всех многочленов степени, не превышающей натурального числа n, с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа образует линейное пространство.

Заметим, что множество многочленов степени n не образует линейного пространства, так как сумма двух многочленов степени n может оказаться многочленом более низкой степени: например

$$(t^n + t) + (-t^n + t) = 2t.$$

5. Элементами пространства R являются матрицы порядка n. Суммой матриц $\|a_{ik}\|$ и $\|b_{ik}\|$ называется матрица $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, произведением матрицы $\|a_{ik}\|$ на число λ — матрица $\|\lambda a_{ik}\|$. Нулевым элементом при этом будет матрица, состоящая из одних нулей. Можно проверить, что все аксиомы линейного пространства здесь выполнены.

6. Совокупность всех многочленов степени, не превышающей натурального числа n, и имеющих положительные коэффициенты, не образует линейного пространства: если многочлен $P(x)$ входит в эту совокупность, то $-P(x)$ в нее не входит.

7. Не образует линейного пространства и совокупность непрерывных функций на сегменте $[a, b]$ таких, что $|f(x)| \leqslant 1$: из того, что $|f_1(x)| \leqslant 1$ и $|f_2(x)| \leqslant 1$, не следует $|f_1(x) + f_2(x)| \leqslant 1$.

Элементы линейного пространства мы будем называть *векторами*. То обстоятельство, что это слово часто употребляется в более узком смысле (так, как в примере 1), не должно нас смущать. Геометрические представления, связанные с этим словом, помогут нам уяснить, а иногда и предвидеть, ряд результатов.

Если числа $\lambda, \mu, \ldots$, участвующие в определении линейного пространства, вещественны, то пространство называется *вещественным линейным пространством*. Если же эти числа $\lambda, \mu, \ldots$ берутся из поля комплексных чисел, то R называется *комплексным линейным пространством*.

Более общо, мы можем предполагать, что $\lambda, \mu, \ldots$ — элементы произвольного поля K. Тогда R называется *линейным пространством над полем* K. Многие понятия и теоремы, излагаемые ниже, в частности, все содержание этого параграфа, автоматически переносятся на линейные пространства над любым полем. Однако в главе I мы будем обычно предполагать, что R — вещественное линейное пространство.

2. Число измерений (размерность) пространства. Важную роль в дальнейшем будет играть понятие линейной зависимости и линейной независимости векторов.

Определение 2. *Пусть R — линейное пространство. Векторы $x, y, z, \ldots, v$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots + \theta v = 0. \tag{1}$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются линейно независимыми. Другими словами, *векторы $x, y, z, \ldots, v$ называются линейно независимыми, если равенство*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots + \theta v = 0$$

возможно только при $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \theta = 0$.

Пусть векторы $x, y, z, \ldots, v$ линейно зависимы, т. е. пусть они связаны соотношением вида (1), в котором хотя бы один из коэффициентов, например α, отличен от нуля. Тогда

$$\alpha x = -\beta y - \gamma z - \ldots - \theta v$$

и, разделив на α и положив

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \lambda, \quad -\frac{\gamma}{\alpha} = \mu, \quad \ldots, \quad -\frac{\theta}{\alpha} = \zeta,$$

получим:

$$x = \lambda y + \mu z + \ldots + \zeta v. \tag{2}$$

Если вектор x выражается через векторы $y, z, \ldots, v$ в виде (2), то мы будем говорить, что x есть *линейная комбинация* векторов $y, z, \ldots, v$.

Таким образом, *если векторы $x, y, z, \ldots, v$ линейно зависимы, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.* Мы предоставляем читателю проверить, что верно и обратное, т. е. что *векторы, один из которых есть линейная комбинация остальных, линейно зависимы.*

Упражнения. 1. Проверить, что если среди векторов $x, y, z, \ldots, v$ имеется нулевой вектор, то эти векторы обязательно линейно зависимы.

2. Показать, что если к линейно зависимым векторам $x, y, z, \ldots$ добавить еще произвольные векторы $u, v, \ldots$, то все эти векторы вместе также будут линейно зависимы.

3. Доказать, что если векторы $y, z, \ldots, v$ линейно независимы и вектор x есть их линейная комбинация

$$x = \alpha y + \beta z + \ldots + \delta v, \tag{3}$$

то представление (3) единственно.

Указание. Предположить, что есть другое представление:

$$x = \alpha_1 y + \beta_1 z + \ldots + \delta_1 v, \tag{4}$$

и вычесть равенство (4) из равенства (3).

Перейдем теперь к определению понятия *числа измерений* (*размерности*) пространства.

В совокупности векторов на прямой всякие два вектора пропорциональны, т. е. линейно зависимы. На плоскости можно найти два линейно независимых вектора, но уже всякие три вектора линейно зависимы. Если R — совокупность векторов трехмерного пространства, то три линейно независимых вектора в R найти можно, но всякие четыре вектора линейно зависимы.

Мы видим, что максимальное число линейно независимых векторов на прямой, плоскости, в трехмерном пространстве совпадает с тем, что в геометрии принято называть числом измерений прямой, плоскости, пространства. Естественно поэтому следующее общее

Определение 3. *Линейное пространство R называется n-мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов и нет большего числа линейно независимых векторов.*

Если в пространстве R можно найти любое число линейно независимых векторов, то R называется *бесконечномерным.*

Бесконечномерные пространства составляют предмет специального изучения. Мы будем в этой книге заниматься в основном пространствами конечного числа измерений.

Найдем в каждом из рассмотренных выше примеров 1–5 размерность соответствующего пространства.

1. Как мы уже указали, в пространстве R примера 1 имеется три линейно независимых вектора, а всякие четыре вектора линейно зависимы. Поэтому R трехмерно.

2. R — пространство, векторами которого являются системы n действительных чисел.

В этом пространстве можно указать n линейно независимых векторов, например

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ x_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

(мы предоставляем читателю доказать, что эти векторы действительно линейно независимы).

Упражнение. Показать, что векторы

$$\begin{aligned} x_1 &= (\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{1n}), \\ x_2 &= (0, \quad \eta_{22}, \ldots, \eta_{2n}), \\ x_3 &= (0, \quad 0, \quad \ldots, \eta_{3n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (0, \quad 0, \quad \ldots, \eta_{nn}) \end{aligned}$$

в пространстве R также линейно независимы ($\eta_{11}\eta_{22}\ldots\eta_{nn} \neq 0$).

3. R — пространство непрерывных функций. Пусть N — произвольное целое число. Тогда функции $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = t$, ..., $f_N(t) = t^{N-1}$ образуют совокупность N линейно независимых векторов (доказательство предоставляем читателю). Мы видим, что в этом пространстве имеется произвольное число линейно независимых функций, т. е. R бесконечномерно.

4. R — пространство многочленов степени $\leqslant n-1$. В нем n многочленов $1, t, \ldots, t^{n-1}$ линейно независимы.

5. В пространстве квадратных матриц $\|a_{ik}\|$ порядка n все матрицы, у которых на одном каком-либо месте стоит единица, а на остальных местах нули, линейно независимы.

В примерах 1, 2, 4 и 5 мы нашли систему таких линейно независимых векторов $f_1, \ldots, f_n$, что каждый вектор g есть их линейная комбинация. Чтобы установить, что размерность каждого из этих пространств равна числу векторов $f_1, \ldots, f_n$, нам остается доказать, что в этих пространствах нельзя найти другой системы линейно независимых векторов $g_1, \ldots, g_l$ в количестве, превосходящем n. Этот факт можно вывести из следующей полезной леммы, которой мы неоднократно будем пользоваться и в дальнейшем.

Лемма. *Пусть в линейном пространстве задана система из векторов*

$$f_1, \ldots, f_k.$$

Пусть, далее, каждый из векторов

$$g_1, \ldots, g_l$$

есть линейная комбинация векторов $f_1, \ldots, f_k$. Тогда, если векторы $g_1, \ldots, g_l$ линейно независимы, то $l \leqslant k$.

Другими словами, среди линейных комбинаций k векторов $f_1, \ldots, f_k$ не может быть больше чем k линейно независимых.

Доказательство леммы проведем по индукции. При $k = 1$ она очевидна. Предположим, что лемма верна для $k - 1$ векторов $f_1, \ldots, f_{k-1}$, и докажем при этом, что она верна для k векторов.

Итак, пусть среди линейных комбинаций векторов

$$f_1, \ldots, f_k$$

есть линейно независимые векторы $g_1, \ldots, g_l$:

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_{11} f_1 + \ldots + \alpha_{1k} f_k, \\ g_2 &= \alpha_{21} f_1 + \ldots + \alpha_{2k} f_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_l &= \alpha_{l1} f_1 + \ldots + \alpha_{lk} f_k. \end{aligned} \tag{5}$$

Нам надо показать, что $l \leqslant k$. Если все коэффициенты при f_k равны нулю, лемма доказана, так как в этом случае, по предположению индукции, имеет место равенство $l \leqslant k-1$, а значит, и подавно, $l \leqslant k$. Пусть хотя бы один из коэффициентов при f_k, например α_{lk}, не равен нулю. Чтобы провести индукцию, мы построим $l-1$ новых линейно независимых векторов, которые будут линейными комбинациями векторов $f_1, \ldots, f_{k-1}$. Для этого из последнего равенства выразим f_k:

$$f_k = \frac{1}{\alpha_{lk}} g_l - \frac{\alpha_{l1}}{\alpha_{lk}} f_1 - \ldots - \frac{\alpha_{l,k-1}}{\alpha_{l,k}} f_{k-1}.$$

Это выражение для f_k подставим теперь в каждое из первых $l-1$ равенств (5) и соберем подобные члены. Мы получим равенства следующего вида:

$$\begin{gathered}
g_1 - \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{lk}} g_l = \beta_{11} f_1 + \ldots + \beta_{1,k-1} f_{k-1}, \\
g_2 - \frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{lk}} g_l = \beta_{21} f_1 + \ldots + \beta_{2,k-1} f_{k-1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g_{l-1} - \frac{\alpha_{l-1,k}}{\alpha_{lk}} g_l = \beta_{l-1,1} f_1 + \ldots + \beta_{l-1,k-1} f_{k-1}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Эти равенства означают, что каждый из $l-1$ векторов

$$g_1' = g_1 - \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{lk}} g_l, \quad \ldots, \quad g_{l-1}' = g_{l-1} - \frac{\alpha_{l-1,k}}{\alpha_{lk}} g_l$$

есть линейная комбинация векторов $f_1, \ldots, f_{k-1}$. Если мы докажем, что они линейно независимы, то, по предположению индукции, отсюда будет следовать, что $l-1 \leqslant k-1$, т. е. $l \leqslant k$.

Таким образом, нам осталось показать, что векторы $g_1', \ldots, g_{l-1}'$ линейно независимы. Но это почти очевидно. Действительно, предположим, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}$ — такие числа, что

$$\lambda_1 g_1' + \ldots + \lambda_{l-1} g_{l-1}' = 0,$$

т. е. что

$$\lambda_1\left(g_1-\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{lk}}g_l\right)+\ldots+\lambda_{l-1}\left(g_{l-1}-\frac{\alpha_{l-1,k}}{\alpha_{lk}}g_l\right)=0.$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\ldots+\lambda_{l-1}g_{l-1}-\\ -\left(\lambda_1\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{lk}}+\ldots+\lambda_{l-1}\frac{\alpha_{l-1,k}}{\alpha_{lk}}\right)g_l=0.$$

Так как векторы $g_1,\ldots,g_l$ линейно независимы, то все коэффициенты в последнем равенстве равны нулю. В частности, $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{l-1}=0$, а это означает, что векторы $g_1',\ldots,g_{l-1}'$ линейно независимы. Лемма полностью доказана.

Из доказанной леммы вытекает следующий, часто оказывающийся полезным результат: *если в пространстве R существуют k линейно независимых векторов $f_1,\ldots,f_k$ таких, что каждый вектор из R есть их линейная комбинация, то пространство R k-мерно.*

Доказательство этого факта ввиду его простоты мы оставляем читателю.

В каждом из примеров 2, 4 и 5 такая система была выбрана. Таким образом показано, что в примерах 2 и 4 размерность пространства равна n, а в примере 5 размерность пространства равна n^2.

Упражнение. Показать, что если векторы $f_1,\ldots,f_k$, входящие в условие леммы, линейно зависимы, то $l<k$ (а не только $l\leqslant k$).

3. Базис и координаты в n-мерном пространстве.

Определение 4. *Совокупность n линейно независимых векторов $e_1,e_2,\ldots,e_n$ n-мерного пространства R называется базисом в R.*

Например, в пространстве R, рассмотренном в примере 1 (трехмерном пространстве), базис образуют любые три вектора, не лежащие в одной плоскости.

По определению n-мерного пространства в нем существует n линейно независимых векторов, т. е. существует базис.

Покажем, что произвольную систему из k линейно независимых векторов $f_1, \ldots, f_k$, где $k < n$, можно дополнить до базиса в n-мерном пространстве R.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — какой-либо базис в R. Если бы каждый из векторов $e_1, \ldots, e_n$ был линейной комбинацией векторов f_i, то, согласно лемме, мы имели бы, что $n \leqslant k$, в то время как, по предположению, $k < n$. Значит, среди векторов $e_1, \ldots, e_n$ есть хотя бы один, например e_{p_1}, не являющийся линейной комбинацией векторов $f_1, \ldots, f_k$. Добавив вектор e_{p_1} к $f_1, \ldots, f_k$, мы получим систему из $k+1$ векторов, которые по-прежнему линейно независимы (почему?).

Если $k + 1 < n$, то среди векторов $e_1, \ldots, e_n$ снова есть вектор e_{p_2}, не являющийся линейной комбинацией векторов $f_1, \ldots, f_k, e_{p_1}$. Добавим и этот вектор к системе. Этот процесс можно продолжить до тех пор, пока мы дойдем до n линейно независимых векторов, т. е. до базиса. Этот базис содержит $f_1, \ldots, f_k$, и тем самым наше утверждение доказано.

Т е о р е м а 1. *Каждый вектор x из n-мерного пространства R можно представить, и при том единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис в R. Присоединим к ним произвольный вектор x из R. Векторов $x, e_1, e_2, \ldots, e_n$ уже $n+1$. Поэтому по определению n-мерного пространства они должны быть линейно зависимы, т. е.

$$\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0, \tag{7}$$

где не все α_i равны нулю. Число α_0 заведомо отлично от нуля, так как иначе из формулы (7) следовала бы линейная зависимость векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Выразим из (7) вектор x:

$$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}e_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0}e_n.$$

Мы доказали, что каждый вектор $x \in R$ *) есть линейная комбинация векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Докажем теперь единственность полученного разложения. Предположим, что существуют два разложения:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$$

и

$$x = \xi_1' e_1 + \xi_2' e_2 + \ldots + \xi_n' e_n.$$

Вычитая, получим:

$$0 = (\xi_1 - \xi_1')e_1 + (\xi_2 - \xi_2')e_2 + \ldots + (\xi_n - \xi_n')e_n.$$

Так как $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы, то это возможно лишь, если

$$\xi_1 - \xi_1' = \xi_2 - \xi_2' = \ldots = \xi_n - \xi_n' = 0,$$

т. е.

$$\xi_1 = \xi_1', \quad \xi_2 = \xi_2', \quad \ldots, \quad \xi_n = \xi_n'.$$

Единственность разложения доказана.

Определение 5. *Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ есть базис в n-мерном пространстве и*

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n, \tag{8}$$

то числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются координатами вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Теорема 1 означает, что *при заданном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ каждый вектор имеет координаты и притом однозначно определенные.*

*) Запись $x \in R$ означает, что x принадлежит R.

Если вектор x имеет в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а вектор y — координаты $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, т. е. если

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$
$$y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n,$$

то

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + (\xi_2 + \eta_2)e_2 + \ldots + (\xi_n + \eta_n)e_n,$$

т. е. вектор $x + y$ имеет координаты $\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n + \eta_n$. Вектор λx имеет координаты $\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots$ $\ldots, \lambda\xi_n$.

Таким образом, *при сложении векторов x и y их координаты складываются. При умножении вектора x на число λ его координаты умножаются на это число.*

Ясно также, что нулевой вектор, и только он, имеет все координаты равными нулю.

Примеры. 1. Для случая трехмерного пространства наше определение координат вектора совпадает с имеющимся в аналитической геометрии определением координат вектора в некоторой (вообще говоря, не прямоугольной) системе координат.

2. Пусть R — пространство, векторами которого являются системы $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из n чисел. Возьмем базис (см. упражнение на стр. 13)

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 1, 1, \ldots, 1), \\ e_2 &= (0, 1, 1, \ldots, 1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Найдем координаты $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ вектора $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ в этом базисе. По определению

$$x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n,$$

т. е.

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \eta_1(1, 1, \ldots, 1) + \eta_2(0, 1, \ldots, 1) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \eta_n(0, 0, \ldots, 1) = (\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \ldots, \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n).$$

Таким образом, числа $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\eta_1 = \xi_1, \\ &\eta_1 + \eta_2 = \xi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n = \xi_n, \end{aligned}$$

откуда

$$\eta_1 = \xi_1, \quad \eta_2 = \xi_2 - \xi_1, \quad \ldots, \quad \eta_n = \xi_n - \xi_{n-1}.$$

Рассмотрим теперь в R базис, в котором связь между координатами вектора $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и числами ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$, определяющими этот вектор, наиболее проста. Пусть

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

Тогда

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \\ = \xi_1(1, 0, \ldots, 0) + \xi_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + \xi_n(0, 0, \ldots, 1) = \\ = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n.$$

Таким образом, *в пространстве R, где каждый вектор определяется как система n чисел $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, эти числа можно трактовать как координаты век-*

тора $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *в базисе* $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 =$ $= (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

Упражнение. Доказать, что в любом базисе

$$\begin{aligned} e_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\\ e_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}) \end{aligned}$$

координаты $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ вектора $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ суть линейные комбинации чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

3. R — пространство, векторами которого являются многочлены степени $\leqslant n-1$. Простейшим базисом является совокупность векторов $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $\ldots$, $e_n = t^{n-1}$. Координатами многочлена $P(t) = a_0 t^{n-1} +$ $+ a_1 t^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$ в этом базисе являются, как легко видеть, его коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Выберем теперь другой базис:

$$e'_1 = 1,\ e'_2 = t - a,\ e'_3 = (t-a)^2,\ \ldots,\ e'_n = (t-a)^{n-1}.$$

Каждый многочлен $P(t)$ может быть по формуле Тейлора представлен в виде:

$$P(t) = P(a) + P'(a)(t-a) + \ldots + \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(t-a)^{n-1}.$$

Таким образом, в этом базисе $P(t)$ имеет координаты

$$P(a), P'(a), \ldots, \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

4. Изоморфизм n-мерных пространств. В разобранных выше примерах некоторые пространства с точки зрения рассматриваемых здесь свойств не отличаются друг от друга. Таковы, например, обычное трехмерное пространство R примера 1 и пространство R', в котором векторы определяются как тройки действительных чисел. В самом деле, выбрав в R определенную систему координат, мы можем каждому вектору из R поставить в соответствие совокупность трех его координат, т. е. вектор пространства R'. При сложении векторов координаты их складываются, а при умножении на число все координаты вектора умножаются на это число. Поэтому геометрические факты, вытекающие из определения линейного пространства, которые имеют место в R, мы можем параллельно изложить как в R, так и в пространстве R' троек чисел.

Поскольку единственными операциями, которые введены в линейных пространствах, являются операции сложения векторов и умножения вектора на число, то естественно ввести следующее

Определение 6. *Линейные пространства R и R' называются изоморфными, если между векторами $x \in R$ и векторами $x' \in R'$ можно установить взаимно однозначное соответствие* *) $x \leftrightarrow x'$ *так, что если вектору x соответствует вектор x', а вектору y соответствует вектор y', то*

1° *вектору $x + y$ соответствует вектор $x' + y'$,*

2° *вектору λx соответствует вектор $\lambda x'$.*

Из определения изоморфизма следует, что если $x, y, \ldots$ — векторы из R, а $x', y', \ldots$ — соответствующие им векторы из R', то равенство $\lambda x + \mu y + \ldots = 0$ равносильно равенству $\lambda x' + \mu y' + \ldots = 0$. Следовательно, линейно независимым векторам из R соответствуют линейно независимые векторы из R', и обратно.

Возникает вопрос, какие пространства изоморфны между собой и какие нет.

---

*) Соответствие, установленное между элементами двух множеств R и R', называется взаимно однозначным, если:

1° каждому элементу из R соответствует один и только один элемент из R',

2° каждый элемент из R' соответствует при этом одному и только одному элементу из R.

Два пространства различной размерности заведомо не изоморфны друг другу.

В самом деле, пусть R и R' изоморфны. Из сделанного выше замечания следует, что максимальное число линейно независимых векторов в R и R' одно и то же, т. е. размерности пространств R и R' равны. Следовательно, пространства различной размерности не могут быть между собой изоморфны.

Т е о р е м а 2. *Все пространства, имеющие одну и ту же размерность n, изоморфны друг другу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть R и R' — два n-мерных пространства. Выберем в R базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и в R' какой-либо базис $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Поставим в соответствие вектору

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n \tag{9}$$

вектор

$$x' = \xi_1 e'_1 + \xi_2 e'_2 + \ldots + \xi_n e'_n,$$

т. е. линейную комбинацию векторов e'_i с теми же коэффициентами, что и в (9).

Это соответствие взаимно однозначно. В самом деле, каждый вектор x может быть однозначно представлен в виде (9). Поэтому числа ξ_i, а значит, и вектор x', определяются по вектору x однозначно. Ввиду равноправности, в нашем построении, пространств R и R', каждому x' отвечает элемент из R и притом только один.

Из установленного закона соответствия сразу следует, что если $x \leftrightarrow x'$ и $y \leftrightarrow y'$, то $x+y \leftrightarrow x'+y'$ и $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$. Изоморфизм пространств R и R', таким образом, доказан.

Итак, единственной существенной характеристикой конечномерного линейного пространства является его размерность.

В § 3 мы еще вернемся к понятию изоморфизма по другому поводу.

5. Подпространства линейного пространства.

Определение 7. *Подпространством R' пространства R называется совокупность элементов из R таких, что они сами образуют линейное пространство относительно уже введенных в R операций сложения и умножения на числа.*

Иначе говоря, совокупность R' элементов $x, y, \ldots$ из R образует линейное подпространство пространства R, если из $x \in R'$, $y \in R'$ следует $x + y \in R'$, $\lambda x \in R'$.

Примеры. 1. Нулевое подпространство, т. е. подпространство, состоящее из единственного элемента — нуля.

2. Все пространство R.

Нулевое подпространство и все пространство называются обычно *несобственными* подпространствами. Приведем несколько более содержательных примеров подпространств.

3. R — трехмерное пространство. Рассмотрим какую-либо плоскость в R, проходящую через начало координат. Совокупность R' всех векторов, лежащих в этой плоскости, есть подпространство.

4. В пространстве, векторами которого являются системы n чисел $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, совокупность всех тех векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, для которых $\xi_1 = 0$, образует подпространство. Более общо: совокупность векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, удовлетворяющих условию

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n = 0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — какие-то фиксированные числа, образует подпространство.

5. В пространстве всех непрерывных функций совокупность многочленов степени $\leqslant n$ является подпространством.

Очевидно, что во всяком подпространстве R' какого-либо пространства R содержится нулевой элемент пространства R.

Поскольку любое подпространство само по себе является линейным пространством, то все такие понятия, как базис, число измерений пространства и т. д., которые мы ввели выше, применимы и к подпространствам. Так как в подпространстве не может быть больше линейно независимых векторов, чем во всем пространстве, то *размерность любого подпространства не превосходит размерности всего пространства.*

Упражнения. 1. Доказать, что если подпространство R' пространства R имеет ту же размерность, что и все пространство R, то оно совпадает с R.

2. Доказать, что если R_1 и R_2 — подпространства пространства R, и если $R_1 \subset R_2$ и размерности R_1 и R_2 совпадают, то $R_1 = R_2$.

В каждом пространстве R можно строить подпространства следующим общим приемом: возьмем в R произвольное (конечное или бесконечное) множество векторов $e, f, g, \ldots$; тогда *совокупность R' всех линейных комбинаций выбранных векторов $e, f, g, \ldots$ есть подпространство пространства R.* Действительно, складывая между собой и умножая на числа линейные комбинации векторов $e, f, g, \ldots$, мы снова получим линейные комбинации векторов $e, f, g, \ldots$, т. е. элементы из R'. Полученное таким образом подпространство R' называется *подпространством, порожденным векторами $e, f, g, \ldots$* Оно является наименьшим линейным подпространством, содержащим данные векторы $e, f, g, \ldots$

Подпространство R', порожденное линейно независимыми векторами $e_1, e_2, \ldots, e_k$, является k-мерным и векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ образуют в нем базис. Действительно, в R' имеется система k линейно независимых векторов, именно, сами векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$. С другой стороны, если $x_1, x_2, \ldots, x_l$ — произвольные линейно независимые векторы из R', то так как они являются линейными комбинациями векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, то, согласно лемме п. 2, $l \leqslant k$. Следовательно, R' k-мерно и набор векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$ есть один из возможных базисов в R'.

Упражнение. Показать, что в n-мерном пространстве существуют подпространства всех меньших размерностей.

Если исключить из рассмотрения не представляющее интереса нулевое подпространство, то самыми простыми являются одномерные подпространства. Базис всякого такого подпространства состоит из одного вектора e_1. Таким образом, одномерное подпространство состоит из векторов вида αe_1, где α — произвольное число.

Прибавим к каждому из векторов αe_1 один и тот же вектор x_0. Мы получим совокупность векторов вида $x = x_0 + \alpha e_1$, где α пробегает все числа, а e_1 и x_0 — фиксированные векторы. Эту совокупность векторов естественно, по аналогии с трехмерным пространством, назвать *прямой* в линейном пространстве R.

Аналогично, векторы вида $\alpha e_1 + \beta e_2$, где e_1 и e_2 — фиксированные линейно независимые векторы, а α и β — произвольные числа, образуют двумерное подпространство. Совокупность векторов

$$x = x_0 + \alpha e_1 + \beta e_2,$$

где x_0 — фиксированный вектор, мы называем *плоскостью* (двумерной).

Упражнения. 1. Показать, что в пространстве, где векторами являются системы n действительных чисел $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, совокупность векторов, удовлетворяющих соотношению

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n = 0$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — фиксированные числа, не все равные нулю), образует подпространство размерности $n-1$.

2. Показать, что если два подпространства R_1 и R_2 пространства R имеют общим лишь нулевой вектор, то сумма их размерностей не превосходит размерности R.

3. Показать, что размерность подпространства, порожденного векторами $e, f, g, \ldots$, равна максимальному числу линейно независимых векторов среди них.

6. Разложение пространства R в прямую сумму подпространств. Сумма и пересечение подпространств. Пусть заданы два подпространства n-мерного пространства R. Обозначим их R_1 и R_2.

Определение 8. *Если каждый вектор x пространства R можно, и притом единственным образом, представить как сумму двух векторов*

$$x = x_1 + x_2,$$

где $x_1 \in R_1$, а $x_2 \in R_2$, то говорят, что пространство R разложено в прямую сумму подпространств R_1 и R_2.

Это обычно записывают так:

$$R = R_1 \oplus R_2.$$

Теорема 3. *Для того чтобы пространство R разлагалось в прямую сумму подпространств R_1 и R_2, достаточно, чтобы*:

1. *Подпространства R_1 и R_2 имели только один общий вектор $x = 0$ (нулевой вектор).*

2. *Сумма размерностей этих подпространств была равна размерности пространства R.*

Доказательство. Выберем некоторый базис $e_1, \ldots, e_k$ в подпространстве R_1 и базис $f_1, \ldots, f_l$ в подпространстве R_2. Поскольку сумма размерностей R_1 и R_2 есть n, то общее число этих векторов $k + l = n$.

Покажем, что векторы

$$e_1, \ldots, e_k, \quad f_1, \ldots, f_l$$

линейно независимы, т. е. образуют базис пространства R. Действительно, пусть

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_l f_l = 0;$$

отсюда

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k = -\mu_1 f_1 - \ldots - \mu_l f_l.$$

Левая часть этого равенства есть вектор из R_1, а правая из R_2. Так как, по условию, единственный общий вектор R_1 и R_2 есть нулевой вектор, то

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k = 0, \\ \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_l f_l = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Но каждый из наборов $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_l$ состоит из линейно независимых векторов, так как это базисы в R_1 и R_2. Поэтому из первого равенства (10) следует, что

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

а из второго следует, что

$$\mu_1 = \ldots = \mu_l = 0.$$

Следовательно, система $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$ состоит из n линейно независимых векторов, т. е. это есть базис в пространстве R.

Мы доказали, что при выполнении условий теоремы существует базис, первые k векторов которого образуют базис в R_1, а последние l — базис в R_2.

Произвольный вектор x из R можно разложить по векторам этого базиса

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_l f_l.$$

При этом

$$x_1 = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k \in R_1$$

и

$$x_2 = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_l f_l \in R_2.$$

Таким образом,

$$x = x_1 + x_2,$$

где $x_1 \in R_1$ и $x_2 \in R_2$. Покажем, что это разложение единственно. Предположим, что существуют два разложения:

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{где} \quad x_1 \in R_1, \quad x_2 \in R_2,$$

и

$$x = x_1' + x_2', \quad \text{где} \quad x_1' \in R_1, \quad x_2' \in R_2.$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем:

$$0 = x_1 - x_1' + x_2 - x_2',$$

откуда

$$x_1 - x_1' = x_2' - x_2.$$

Так как вектор, стоящий в левой части равенства, принадлежит R_1, а вектор, стоящий в правой части, принадлежит R_2, то каждый из этих векторов равен нулю, т. е.

$$x_1' = x_1,$$
$$x_2' = x_2.$$

Единственность разложения доказана.

Допустим, что нам задано два произвольных подпространства R_1 и R_2 линейного пространства R.

Легко проверить, что совокупность векторов, принадлежащих обоим этим подпространствам, также есть подпространство R_0 пространства R.

Это подпространство называется *пересечением* R_1 и R_2 и обозначается

$$R_0 = R_1 \cap R_2.$$

Например, если R_1 и R_2 — два двумерных подпространства трехмерного пространства (две плоскости, проходящие через начало координат), то $R_1 \cap R_2$ есть одномерное подпространство (прямая, по которой пересекаются эти плоскости).

По двум подпространствам R_1 и R_2 можно построить еще одно подпространство, которое называется их *суммой*. Оно определяется следующим образом.

Векторами этого подпространства являются всевозможные суммы вида

$$x = x_1 + x_2, \tag{11}$$

где $x_1 \in R_1$, $x_2 \in R_2$.

Легко проверить, что элементы вида (11) образуют подпространство. Это подпространство $\tilde{R}$ называется суммой подпространств R_1 и R_2 и обозначается

$$\tilde{R} = R_1 + R_2.$$

Заметим, что, в отличие от прямой суммы двух подпространств, запись элемента из R в виде (11) может быть неоднозначной.

Упражнение. Показать, что сумма двух различных двумерных подпространств трехмерного пространства R есть все это пространство.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть заданы два подпространства R_1 и R_2 пространства R. Тогда сумма размерностей R_1 и R_2 равна размерности их суммы плюс размерность пересечения.*

Доказательство. Выберем в пересечении $R_0 = R_1 \cap R_2$ базис

$$e_1, \ldots, e_k. \tag{12}$$

Дополним этот базис с одной стороны до базиса в R_1:

$$e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l \tag{13}$$

и с другой стороны до базиса в R_2:

$$e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_m. \tag{14}$$

Покажем, что векторы

$$f_1, \ldots, f_l, e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_m \tag{15}$$

образуют базис в сумме $\tilde{R} = R_1 + R_2$.

Сначала покажем, что эти векторы линейно независимы. Действительно, пусть

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_l f_l + \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_k e_k + \nu_1 g_1 + \ldots + \nu_m g_m = 0.$$

Тогда

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_l f_l + \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_k e_k = -\nu_1 g_1 - \ldots - \nu_m g_m.$$

Левая часть этого равенства есть вектор из R_1, правая — из R_2. Таким образом, эта правая часть есть одновременно вектор из R_1 и из R_2, т. е. принадлежит R_0 и, значит, выражается как линейная комбинация базиса $e_1, \ldots, e_k$ подпространства R_0:

$$-\nu_1 g_1 - \ldots - \nu_m g_m = c_1 e_1 + \ldots + c_k e_k.$$

В силу линейной независимости векторов (14) это возможно только, когда все коэффициенты — нули. В частности, $\nu_1 = \ldots = \nu_m = 0$, т. е.

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_l f_l + \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_k e_k = 0.$$

Из линейной независимости векторов (13) получаем, что и все коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_l, \mu_1, \ldots, \mu_k$ равны нулю. Таким образом, линейная независимость системы (15) доказана.

Покажем теперь, что всякий вектор $x \in \tilde{R}$ выражается как линейная комбинация векторов этой системы. По определению $\tilde{R}$ вектор x можно представить в виде:

$$x = x_1 + x_2,$$

где $x_1 \in R_1$, $x_2 \in R_2$. Так как $x_1 \in R_1$, то его можно представить как линейную комбинацию векторов (13). Аналогично $x_2 \in R_2$ и x_2 можно представить как линейную комбинацию векторов (14). Складывая, получим, что вектор x представим как линейная комбинация системы (15).

Итак мы получили, что векторы

$$f_1, \ldots, f_l,\ e_1, \ldots, e_k,\ g_1, \ldots, g_m,$$

с одной стороны, линейно независимы и, с другой стороны, всякий вектор из $\tilde{R}$ есть их линейная комбинация. В силу замечания на стр. 16 отсюда следует, что эти векторы образуют базис в $\tilde{R}$. Итак, мы имеем k векторов (12), образующих базис в R_0, $k+l$ векторов (13), образующих базис в R_1, $k+m$ векторов (14), образующих базис в R_2, и $k+l+m$ векторов (15), образующих базис в $\tilde{R} = R_1 + R_2$. Утверждение теоремы обращается, таким образом, в тождество

$$(k+l) + (k+m) = (k+l+m) + k.$$

Теорема доказана.

Упражнение. Проверить теорему для случая, когда R_1 и R_2 — двумерные подпространства трехмерного пространства.

Из доказанной теоремы следует, например, что двум 15-мерным подпространствам «тесно» в 28-мерном пространстве — они пересекаются по крайней мере по двумерному подпространству (плоскости). Действительно, сумма их размерностей равна 30, а размерность суммы не может, конечно, превосходить размерности всего пространства, т. е. 28.

Упражнения. 1. Каково наименьшее число измерений пространства, в котором две плоскости могут пересечься в точке?

2. Доказать, что если $R_1 \cap R_2$ есть нулевое подпространство, то $\tilde{R} = R_1 + R_2$ есть прямая сумма R_1 и R_2, т. е. $\tilde{R} = R_1 \oplus R_2$.

Из результата этого упражнения видно, что теорема 3 этого пункта есть частный случай теоремы 4.

Упражнение. Показать, что если имеется разложение R

в прямую сумму
$$R = R_1 \oplus R_2,$$
то пересечение R_1 и R_2 равно нулю и, следовательно, сумма размерностей этих подпространств равна n.

7. Преобразование координат при изменении базиса. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиса n-мерного пространства. Пусть, далее, каждый вектор e'_i выражается через векторы первого базиса формулами
$$\left.\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n,\\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$
Тогда переход от первого базиса ко второму задается матрицей $\boldsymbol{A} = \|a_{ik}\|$, определитель которой отличен от нуля *).

Обозначим через ξ_i координаты вектора x в первом базисе, а через ξ'_i — его координаты во втором базисе. Найдем, как выражаются координаты ξ'_i через ξ_i.

Мы имеем:
$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n = \xi'_1 e'_1 + \xi'_2 e'_2 + \ldots + \xi'_n e'_n.$$
Подставив в это равенство вместо e'_i их выражения через e_i, получим:
$$\begin{aligned} x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n = {} & \xi'_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n) + \\ & + \xi'_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \xi'_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n). \end{aligned}$$
Так как e_i линейно независимы, то коэффициенты при них в правой и левой частях равенства одинаковы.

*) Если бы определитель матрицы $\boldsymbol{A}$ был равен нулю, то векторы $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ были бы линейно зависимы.

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= a_{11}\xi_1' + a_{12}\xi_2' + \ldots + a_{1n}\xi_n', \\ \xi_2 &= a_{21}\xi_1' + a_{22}\xi_2' + \ldots + a_{2n}\xi_n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= a_{n1}\xi_1' + a_{n2}\xi_2' + \ldots + a_{nn}\xi_n'. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Сравним формулы (16) и (17). Между ними есть два существенных отличия: во-первых, поменялись местами штрихованные и нештрихованные буквы и, во-вторых, в формулах (16) при суммировании меняется первый индекс, а в формулах (17) второй.

Таким образом, *координаты ξ_i вектора x в первом базисе выражаются через координаты того же вектора x во втором базисе с помощью матрицы $\boldsymbol{A}'$, транспонированной к $\boldsymbol{A}$.*

Этот результат можно представить и в другой форме. Решим уравнения (17) относительно $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$. Получим:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + \ldots + b_{1n}\xi_n, \\ \xi_2' &= b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + \ldots + b_{2n}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n' &= b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2 + \ldots + b_{nn}\xi_n, \end{aligned}$$

где b_{ik} являются элементами матрицы, обратной к матрице $\boldsymbol{A}'$. Таким образом, мы видим, что *координаты вектора преобразуются с помощью матрицы $\boldsymbol{B} = \|b_{ik}\|$, являющейся обратной к $\boldsymbol{A}'$, где $\boldsymbol{A}'$ — матрица, транспонированная к матрице $\boldsymbol{A}$, задающей преобразование базиса.*

§ 2. Евклидово пространство

1. Определение евклидова пространства. В предыдущем параграфе линейное (аффинное) пространство было определено как множество элементов (векторов) с заданными в нем операциями умножения на числа и сложения.

С помощью этих операций можно сформулировать, чтó такое прямая, плоскость, число измерений пространства, чтó такое параллельные прямые и т. д.

Однако этих понятий недостаточно, чтобы охватить все многообразие фактов, составляющих содержание так называемой евклидовой геометрии. Например, в одних терминах сложения и умножения на число мы не сможем дать определение длины вектора, угла между векторами, скалярного произведения векторов и т. д. Ввести эти понятия проще всего следующим образом.

Выберем в качестве основного понятие скалярного произведения, которое определим аксиоматически.

В терминах сложения векторов, умножения их на числа и скалярного произведения векторов мы сможем развить всю евклидову геометрию.

Определение 1. *Будем говорить, что в вещественном пространстве R определено скалярное произведение, если каждой паре векторов $x, y \in R$ поставлено в соответствие действительное число, которое обозначим через (x, y) причем это соответствие обладает следующими свойствами* (удовлетворяет следующим аксиомам):

1° $(x, y) = (y, x)$, *т. е. скалярное произведение симметрично.*

2° $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, *где λ — действительное число.*

3° $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (*дистрибутивность скалярного произведения*).

4° *Скалярное произведение вектора с самим собой неотрицательно*: $(x, x) \geqslant 0$, *и обращается в нуль, лишь если $x = 0$.*

Аффинное пространство, в котором определено скалярное произведение, удовлетворяющее условиям 1°–4°, мы называем евклидовым.

Примеры. 1. Под векторами пространства R мы будем понимать векторы изучаемого в элементарной геометрии трехмерного пространства (пример 1 § 1). Скалярное произведение векторов определим как произведение их длин на косинус угла между ними. Можно проверить, что аксиомы 1°–4° действительно выполнены. Мы предоставляем эту проверку читателю.

2. Векторами пространства R мы назовем всякую систему n действительных чисел $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Сложение векторов и умножение их на число определим так (пример 2 § 1):

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n),$$
$$\lambda x = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n),$$

где

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

Скалярное произведение векторов x и y определим формулой

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n.$$

Легко проверить, что аксиомы 1°–3° действительно выполнены. Аксиома 4° также справедлива, так как $(x, x) = \sum \xi_i^2 \geqslant 0$ и $(x, x) = \sum \xi_i^2 = 0$ только при $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$.

3. Рассмотрим пример более общий, чем пример 2.

Вектор по-прежнему определим как совокупность n действительных чисел. Сложение векторов и умножение их на числа определим так же, как в примере 2.

Зададимся некоторой матрицей $\|a_{ik}\|$. Скалярное произведение векторов x и y определим формулой

$$\begin{aligned}(x, y) = a_{11}\xi_1\eta_1 + a_{12}\xi_1\eta_2 + \ldots + a_{1n}\xi_1\eta_n &+ \\ + a_{21}\xi_2\eta_1 + a_{22}\xi_2\eta_2 + \ldots + a_{2n}\xi_2\eta_n &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ + a_{n1}\xi_n\eta_1 + a_{n2}\xi_n\eta_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n\eta_n&. \end{aligned} \tag{1}$$

Посмотрим, какие условия нужно наложить на матрицу $\|a_{ik}\|$, чтобы выражение, определяемое формулой (1), действительно удовлетворяло всем аксиомам скалярного произведения.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что аксиомы 2° и 3° выполнены для всякой матрицы $\|a_{ik}\|$. Для того чтобы была выполнена аксиома 1°, т. е. чтобы выражение (x, y) было симметричным относительно x и y, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{ik} = a_{ki}, \tag{2}$$

т. е. чтобы матрица $\|a_{ik}\|$ была симметричной.

Аксиома 4° требует, чтобы выражение

$$(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \tag{3}$$

было неотрицательно для любых $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и обращалось в нуль, лишь если $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$.

Однородный многочлен («квадратичная форма»), определяемый формулой (3), называется *положительно определенным,* если он принимает лишь неотрицательные значения и обращается в нуль, лишь когда все ξ_i равны нулю. Аксиома 4° требует, следовательно, чтобы квадратичная форма (3) была положительно определенной.

Итак, всякая матрица $\|a_{ik}\|$ задает скалярное произведение, определяемое формулой (1), если только эта матрица симметрична [условие (2)] и соответствующая ей квадратичная форма — положительно определенная.

Если в качестве матрицы $\|a_{ik}\|$ взять единичную матрицу, т. е. положить $a_{ii} = 1$ и $a_{ik} = 0$ $(i \neq k)$, то скалярное произведение (x, y) примет вид

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i$$

и мы получим евклидово пространство, определенное в примере 2.

Упражнение. Показать, что матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ непригодна для построения скалярного произведения (соответствующая ей квадратичная форма не является положительно определенной), а матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ определяет скалярное произведение, удовлетворяющее аксиомам 1°–4°.

В дальнейшем (§ 6) будут указаны простые условия, дающие возможность проверить, будет ли данная квадратичная форма положительно определенной.

4. Векторами пространства R мы будем называть непрерывные функции, заданные на интервале (a, b); скалярное произведение таких функций определим как интеграл их произведения

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

Можно проверить, что при таком определении скалярного произведения аксиомы 1°–4° выполнены.

5. Будем считать векторами многочлены от t степени не выше $n-1$. Скалярное произведение двух многочленов определим как и в предыдущем примере:

$$(P, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)\,dt.$$

Аксиомы 1°–4° проверяются как и в примере 4.

2. Длина вектора. Угол между векторами. Определим с помощью введенного понятия скалярного произведения длину вектора и угол между векторами.

Определение 2. *Длиной вектора x в евклидовом пространстве называется число*

$$\sqrt{(x, x)}. \tag{4}$$

Длину вектора x будем обозначать через $|x|$.

Естественно пожелать, чтобы угол между векторами, длина вектора и скалярное произведение были связаны обычным соотношением: скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними. Так как в этой фразе смысл всех слов, кроме слов «угол между векторами», нам уже известен, то этим предписывается следующее

Определение 3. *Углом между векторами x и y мы назовем число*

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x||y|},$$

т. е. положим

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \tag{5}$$

Векторы x и y называются *ортогональными*, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$, т. е. если

$$(x, y) = 0.$$

С помощью введенных понятий можно перенести на евклидовы пространства ряд теорем элементарной геометрии *).

Рассмотрим один пример. Если x и y — ортогональные векторы, то $x + y$ естественно считать диагональю

*) Можно было бы, конечно, определить евклидово пространство иначе, чем в п. 1, введя аксиоматически понятия длины вектора и угла между векторами (а не скалярное произведение). Однако соответствующая система аксиом была бы более сложной.

прямоугольника со сторонами x и y. Докажем, что

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2,$$

т.е. *квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов длин двух его непараллельных сторон* (теорема Пифагора).

Доказательство. По определению квадрата длины вектора

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y).$$

В силу дистрибутивности скалярного произведения (аксиома 3°)

$$(x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y).$$

В силу ортогональности векторов x и y

$$(x,y) = (y,x) = 0.$$

Следовательно,

$$|x+y|^2 = (x,x) + (y,y) = |x|^2 + |y|^2,$$

что и требовалось доказать.

Эту теорему можно обобщить: *если векторы $x, y, z, \ldots$ попарно ортогональны, то*

$$|x+y+z+\ldots|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \ldots$$

3. Неравенство Коши–Буняковского. В предыдущем пункте у нас остался пробел. Мы определили угол φ между векторами x и y формулой

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x||y|}.$$

Для того чтобы можно было определить φ из этого равенства, нужно доказать, что

$$-1 \leqslant \frac{(x,y)}{|x||y|} \leqslant 1$$

или, что то же самое, что

$$\frac{(x,y)^2}{|x|^2|y|^2} \leqslant 1,$$

т. е.

$$(x,y)^2 \leqslant (x,x)(y,y). \tag{6}$$

Это неравенство называется *неравенством Коши–Буняковского.*

Итак, *для того чтобы иметь право определить угол между двумя векторами формулой* (5), *мы должны доказать неравенство Коши–Буняковского* *).

Чтобы доказать его, рассмотрим вектор $x - ty$, где t — произвольное действительное число. Согласно аксиоме 4° скалярного произведения

$$(x - ty, x - ty) \geqslant 0,$$

т. е. для любого t

$$t^2(y,y) - 2t(x,y) + (x,x) \geqslant 0.$$

Мы видим, что стоящий слева квадратный относительно t трехчлен принимает лишь неотрицательные значения. Следовательно, дискриминант уравнения

$$t^2(y,y) - 2t(x,y) + (x,x) = 0$$

не может быть положительным, т. е.

$$(x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

---

*) В примере 1 п. 1 этого параграфа нет надобности доказывать это неравенство. Действительно, там в силу принятого в векторном исчислении определения скалярного произведения величина $\frac{(x,y)}{|x||y|}$ есть косинус некоторого уже заранее определенного угла между векторами и поэтому она по абсолютной величине не превосходит 1.

У п р а ж н е н и е. Доказать, что знак равенства в (6) имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

П р и м е р ы. Мы доказали неравенство (6) для аксиоматически заданного евклидова пространства. Разберем, как выглядит это неравенство в приведенных выше (п. 1) примерах евклидовых пространств.

1. В примере 1 неравенство (6) не означает ничего нового (см. сноску на стр. 41).

2. Так как в примере 2 скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i,$$

то

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad (y, y) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2;$$

поэтому неравенство (6) имеет здесь вид:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2\right).$$

3. В примере 3 скалярное произведение имеет вид:

$$(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k,$$

где

$$a_{ik} = a_{ki} \tag{2}$$

и

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi_k \geqslant 0 \tag{3}$$

для любых ξ_i. Поэтому неравенство (6) означает:

Если числа a_{ik} удовлетворяют условиям (2) *и* (3), *то имеем место неравенство*

$$\left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi_k\right) \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \eta_i \eta_k\right).$$

У п р а ж н е н и е. Показать, что если числа a_{ik} удовлетворяют условиям (2) и (3), то $a_{ik}^2 \leqslant a_{ii} a_{kk}$. (У к а з а н и е. Выбрать в только что выведенном неравенстве специальным образом числа $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.)

4. В примере 4 скалярное произведение задается интегралом $\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt$, поэтому неравенство (6) имеет вид:

$$\left(\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(t)\,dt \cdot \int\limits_a^b g^2(t)\,dt.$$

Это неравенство играет важную роль в разных вопросах анализа.

Приведем пример неравенства, являющегося следствием неравенства Коши–Буняковского.

Для любых векторов x и y в евклидовом пространстве R имеет место неравенство

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \tag{7}$$

Доказательство.

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y);$$

так как (в силу неравенства Коши–Буняковского) $2(x,y) \leqslant 2|x||y|$, то

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) \leqslant (x,x) + 2|x||y| + (y,y) = (|x|+|y|)^2,$$

т. е. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$, что и требовалось доказать. (См. также § 3, стр. 63.)

Упражнение. Написать неравенство (7) в каждом из примеров евклидовых пространств, разобранных в начале этого параграфа.

В геометрии расстояние между двумя точками x и y *) определяется как длина вектора $x-y$. В общем случае n-мерного евклидова пространства *определим расстояние между x и y формулой*

$$d = |x-y|.$$

*) Мы будем обозначать одной и той же буквой вектор и точку, являющуюся его концом (векторы мы проводим из начала координат, см. стр. 7).

§ 3. Ортогональный базис. Изоморфизм евклидовых пространств

1. Ортогональный базис. В § 1 мы ввели понятие базиса (системы координат) аффинного пространства. В аффинном пространстве у нас нет оснований предпочитать одни базисы другим — там все базисы равноправны *).

В евклидовом пространстве существуют наиболее удобные базисы, а именно ортогональные базисы. Они играют здесь ту же роль, что и прямоугольные системы координат в аналитической геометрии.

Определение 1. *Будем говорить, что n векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, ни один из которых не равен нулю, образуют ортогональный базис в n-мерном евклидовом пространстве R, если они попарно ортогональны. Векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют ортогональный нормированный базис, если они попарно ортогональны и имеют каждый длину* 1, *т. е. если*

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases} \tag{1}$$

Для того чтобы данное нами определение ортогонального базиса было корректным, необходимо доказать, что входящие в определение векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$

*) Точный смысл этого утверждения таков. Если внимательно посмотреть приведенное в § 1 доказательство изоморфизма аффинных пространств, то легко заметить, что там доказано несколько больше, чем сформулировано, а именно, доказано, что между двумя n-мерными пространствами можно установить изоморфное соответствие так, чтобы заданный базис одного пространства перешел в заданный базис другого пространства. В частности, если в R заданы два базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, то существует изоморфное отображение пространства R на себя, при котором первый базис переходит во второй.

действительно образуют базис, т. е. линейно независимы.

Докажем это, т. е. покажем, что равенство

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \tag{2}$$

возможно лишь, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Умножим обе части равенства (2) скалярно на e_1. Получим:

$$\lambda_1(e_1, e_1) + \lambda_2(e_1, e_2) + \ldots + \lambda_n(e_1, e_n) = 0.$$

Но по определению ортогонального базиса

$$(e_1, e_1) \neq 0, \quad (e_1, e_k) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq 1.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 0$. Аналогично, умножая (2) скалярно на e_2, получим, что $\lambda_2 = 0$ и т. д. Мы доказали, таким образом, что $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы.

Чтобы доказать существование ортогональных базисов, воспользуемся так называемым *процессом ортогонализации*, который часто встречается в геометрии. Он состоит в том, что из данных линейно независимых векторов $f_1, \ldots, f_m$ строятся m попарно ортогональных векторов $e_1, \ldots, e_m$.

Опишем этот процесс. Пусть даны m линейно независимых векторов $f_1, \ldots, f_m$.

По этим векторам мы построим процессом ортогонализации m попарно ортогональных векторов.

Положим $e_1 = f_1$. Вектор e_2 будем искать в виде: $e_2 = f_2 + \alpha e_1$. Число α подберем так, чтобы $(e_2, e_1) = 0$, т. е. $(f_2 + \alpha e_1, e_1) = 0$. Отсюда

$$\alpha = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)}.$$

Предположим, что попарно ортогональные и отличные от нуля векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ уже построены. Вектор e_k ищем в виде:

$$e_k = f_k + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1}, \tag{3}$$

т. е. вектор e_k мы получаем из вектора f_k «исправлением» его с помощью линейной комбинации уже построенных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$.

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ находим из условия ортогональности вектора

$$e_k = f_k + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1}$$

к векторам $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$:

$$\begin{aligned}
(f_k + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1},\ e_1) &= 0,\\
(f_k + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1},\ e_2) &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(f_k + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1},\ e_{k-1}) &= 0.
\end{aligned}$$

Так как векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ попарно ортогональны, то эти равенства записываются в виде:

$$\begin{aligned}
(f_k, e_1) + \lambda_1 (e_1, e_1) &= 0,\\
(f_k, e_2) + \lambda_2 (e_2, e_2) &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(f_k, e_{k-1}) + \lambda_{k-1} (e_{k-1}, e_{k-1}) &= 0.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = -\frac{(f_k, e_1)}{(e_1, e_1)}, \quad \lambda_2 = -\frac{(f_k, e_2)}{(e_2, e_2)}, \quad \ldots,\\
\lambda_{k-1} = -\frac{(f_k, e_{k-1})}{(e_{k-1}, e_{k-1})}.
\end{gathered} \tag{4}$$

До сих пор не было использовано то, что векторы $f_1, f_2, \ldots, f_m$ линейно независимы. Мы используем это при доказательстве того, что построенный вектор e_k отличен от нуля. Заметим предварительно, что вектор e_k есть линейная комбинация векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, f_k$. Но вектор e_{k-1} можно заменить линейной комбинацией вектора f_{k-1} и векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{k-2}$ и т. д. Окончательно мы получаем, что вектор e_k записывается в виде

$$e_k = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_{k-1} f_{k-1} + f_k. \tag{5}$$

Теперь ясно, что $e_k \neq 0$. Действительно, в противном случае правая часть равенства (5) была бы нулем, что противоречит линейной независимости векторов $f_1, f_2, \ldots, f_k$, так как коэффициент при f_k равен 1. Итак, доказано, что $e_k \neq 0$.

Мы построили по векторам $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ и f_k вектор e_k. Таким же образом по $e_1, e_2, \ldots, e_k$ и f_{k+1} мы построим e_{k+1} и т. д.

Продолжая этот процесс до тех пор, пока не будут исчерпаны заданные векторы $f_1, f_2, \ldots, f_m$, получаем m отличных от нуля и попарно ортогональных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Докажем теперь следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Во всяком n-мерном пространстве существуют ортогональные базисы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению n-мерного пространства (§ 1, п. 2) в нем существует какой-то базис $f_1, \ldots, f_n$. С помощью процесса ортогонализации из него можно построить ортогональный базис $e_1, \ldots, e_n$, что и доказывает теорему.

Если заменить векторы e_k векторами

$$e'_k = \frac{e_k}{|e_k|},$$

то это будут, как нетрудно видеть, попарно ортогональные векторы длины 1, т. е. мы получим ортогональный нормированный базис.

Нетрудно видеть, что таких базисов существует много. Действительно, уже из данного базиса $f_1, \ldots, f_n$ можно построить разные ортогональные базисы, если начинать построение с разных векторов f_k. Позднее, в гл. II, мы рассмотрим вопрос о том, как связаны между собой различные ортогональные базисы.

Примеры ортогонализации. 1. Пусть R — трехмерное пространство. Процесс ортогонализации в нем означает следующее: пусть даны три линейно независимых вектора f_1, f_2, f_3. Положим $e_1 = f_1$. Проводим затем плоскость через $e_1 = f_1$ и f_2 и в этой плоскости выбираем вектор e_2, ортогональный к e_1. Наконец, во всем пространстве находим вектор, ортогональный к e_1 и к e_2 (т. е. к построенной ранее плоскости).

2. Пусть R — трехмерное пространство, векторами в котором мы считаем многочлены степени не выше второй. Скалярное произведение зададим формулой

$$\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

Векторы $1, t, t^2$ образуют базис в R. Применим к этому базису процесс ортогонализации: $e_1 = 1$; вектор e_2 ищем в виде: $t + \alpha \cdot 1$; из условия ортогональности

$$0 = (t + \alpha \cdot 1, 1) = \int_{-1}^{1} (t + \alpha)\,dt = 2\alpha$$

получаем $\alpha = 0$. Значит, $e_2 = t$. Вектор e_3 ищем в виде: $t^2 + \beta t + \gamma \cdot 1$. Из условий ортогональности получаем $\beta = 0$, $\gamma = -\frac{1}{3}$, т.е. $e_3 = t^2 - \frac{1}{3}$. Окончательно получаем ортогональный базис $1, t, t^2 - \frac{1}{3}$. Если разделить каждый вектор на его длину, то получим ортогональный нормированный базис.

3. Пусть R — пространство многочленов степени не выше чем $n - 1$. Скалярное произведение определим так же, как и в предыдущем примере.

Возьмем базис $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$. Процесс ортогонализации приводит нас, как и в примере 2, к последовательности многочленов

$$1,\ t,\ t^2 - \frac{1}{3},\ t^3 - \frac{3}{5}t,\ \ldots$$

Эти многочлены с точностью до множителей совпадают с многочленами

$$\frac{1}{2^k \cdot k!} \frac{d^k (t^2 - 1)^k}{dt^k},$$

которые называются многочленами Лежандра. Многочлены Лежандра образуют ортогональный, но не нормированный базис в R. Умножая каждый из этих многочленов на соответствующий множитель, мы можем построить ортогональный и нормированный базис; его элементы будем обозначать через $P_k(t)$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортогональный нормированный базис евклидова пространства R. Найдем, как выражается скалярное произведение двух векторов через их координаты в этом базисе. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора x, а $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — координаты вектора y в этом базисе, т. е.

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$
$$y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n.$$

Тогда

$$(x, y) = (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,\ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n),$$

и так как

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k, \end{cases}$$

то

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \ldots + \xi_n \eta_n, \tag{6}$$

т. е. *в нормированном ортогональном базисе скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат* (ср. пример 2 § 2).

Упражнения. 1. Показать, что в произвольном базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$ скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k,$$

где $a_{ik} = a_{ki}$, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — координаты векторов x и соответственно y.

2. Показать, что если в некотором базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$ скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \ldots + \xi_n \eta_n,$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — координаты векторов x и y, то этот базис является ортогональным и нормированным.

Найдем координаты вектора x в нормированном ортогональном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Пусть
$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n.$$
Умножив обе части этого равенства скалярно на e_1, получим
$$(x, e_1) = \xi_1(e_1, e_1) + \xi_2(e_2, e_1) + \ldots + \xi_n(e_n, e_1) = \xi_1$$
и, аналогично,
$$\xi_2 = (x, e_2), \quad \ldots, \quad \xi_n = (x, e_n). \tag{7}$$
Итак: *координаты вектора в ортогональном нормированном базисе суть скалярные произведения этого вектора на соответствующие базисные векторы.*

Скалярное произведение вектора x на вектор e длины единица естественно назвать *проекцией* вектора x на вектор e. Доказанное утверждение означает, что, как и в аналитической геометрии, *координаты вектора в ортогональном нормированном базисе суть проекции этого вектора на базисные векторы* (на оси координат).

Примеры. 1. Пусть $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)$ — нормированные многочлены Лежандра нулевой, первой, ..., n-й степени. Пусть, далее, $Q(t)$ — произвольный многочлен степени n. Представим $Q(t)$ в виде линейной комбинации многочленов Лежандра. Совокупность многочленов степени $\leqslant n$ образуют $(n+1)$-мерное линейное пространство, $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)$ образуют ортогональный базис в нем. Поэтому всякий многочлен степени $\leqslant n$ представим в виде
$$Q(t) = c_0 P_0(t) + c_1 P_1(t) + \ldots + c_n P_n(t).$$
Коэффициенты c_i, как это следует из (7), вычисляются по формулам
$$c_i = \int\limits_{-1}^{1} Q(t) P_i(t)\, dt.$$

2. Рассмотрим на интервале $(0, 2\pi)$ систему функций

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \ldots,\ \cos nt,\ \sin nt. \tag{8}$$

Их линейная комбинация

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + \ldots + b_n \sin nt$$

называется тригонометрическим многочленом n-го порядка. Совокупность тригонометрических многочленов n-го порядка образует $(2n+1)$-мерное пространство R_1. Определим в R_1 скалярное произведение, как обычно, т. е. положим

$$(P, Q) = \int_0^{2\pi} P(t)Q(t)\,dt.$$

Легко проверить, что система (8) будет ортогональным базисом. Действительно,

$$\int_0^{2\pi} \cos kt\, \cos lt\, dt = 0, \quad \text{если} \quad k \neq l,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt\, \cos lt\, dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt\, \sin lt\, dt = 0, \quad \text{если} \quad k \neq l.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 kt\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 kt\, dt = \pi, \quad \text{а} \quad \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi,$$

то функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt \tag{8'}$$

образуют в R_1 ортогональный нормированный базис.

2. Перпендикуляр из точки на подпространство. Кратчайшее расстояние от точки до подпространства *).

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть* R_1 — *подпространство евклидова пространства* R. Мы будем говорить, что вектор $h \in R$ ортогонален подпространству R_1, если он ортогонален любому вектору x из R_1.

Если вектор h ортогонален векторам $e_1, e_2, \ldots, e_m$, то он ортогонален любой их линейной комбинации. Действительно, из равенств

$$(h, e_i) = 0$$

следует, что для любых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$

$$(h,\ \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m) = 0.$$

Поэтому, для того чтобы вектор h был ортогонален m-мерному подпространству R_1, достаточно, чтобы он был ортогонален m линейно независимым векторам из R_1 (базису в R_1 **)).

У п р а ж н е н и е. Показать, что совокупность всех векторов $y \in R$, ортогональных к подпространству R_1, также образует подпространство пространства R. Это подпространство называется *ортогональным дополнением* к подпространству R_1 в пространстве R.

Рассмотрим в пространстве R некоторое m-мерное подпространство R_1 ***) и вектор f, не принадлежащий R_1. Поставим задачу: опустить перпендикуляр из точки f на R_1, *т. е. найти вектор* f_0 *из* R_1 *такой, чтобы вектор* $h = f - f_0$ *был ортогонален* R_1. Вектор f_0 называется при этом *ортогональной проекцией*

---

*) Этот пункт можно при первом чтении пропустить.

**) Для случая, когда R_1 есть плоскость, эта теорема в элементарной геометрии называется теоремой о двух перпендикулярах.

***) Размерность самого пространства R для нас несущественна. Оно может быть даже бесконечномерным.

вектора f на подпространство R_1. Несколько позже мы увидим, что эта задача всегда имеет решение, притом единственное. Сейчас мы покажем, что, как и в элементарной геометрии, перпендикуляр есть кратчайшее расстояние от точки до подпространства. Другими словами, покажем, что *если f_1 есть отличный от f_0 вектор из R_1, то*

$$|f - f_1| > |f - f_0|.$$

Действительно, вектор $f_0 - f_1$, как разность двух векторов из R_1, принадлежит R_1 и, следовательно, ортогонален вектору $h = f - f_0$. По теореме Пифагора имеем:

$$|f - f_0|^2 + |f_0 - f_1|^2 = |f - f_0 + f_0 - f_1|^2 = |f - f_1|^2$$

и, значит,

$$|f - f_1| > |f - f_0|.$$

Покажем теперь, как фактически вычислить по f его ортогональную проекцию f_0 на подпространство R_1 (т. е. опустить перпендикуляр из f на R_1). Пусть базис подпространства R_1 состоит из векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Будем искать вектор f_0 в виде

$$f_0 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_m e_m, \tag{9}$$

где коэффициенты c_k найдем из условия ортогональности $f - f_0$ к R_1. Для того чтобы эта ортогональность имела место, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись m равенств $(f - f_0, e_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, т. е.

$$(f_0, e_k) = (f, e_k). \tag{10}$$

Подставляя сюда вместо f_0 его выражение (9), получаем систему m уравнений

$$c_1(e_1, e_k) + c_2(e_2, e_k) + \ldots + c_m(e_m, e_k) = (f, e_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{11}$$

относительно чисел c_i.

Рассмотрим сначала отдельно часто встречающийся случай, когда базис $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — ортогональный и нормированный. В этом случае задача решается особенно просто. Действительно, система (11) превращается в таком базисе в систему равенств

$$c_i = (f, e_i), \tag{12}$$

сразу определяющих нужные коэффициенты.

Так как в каждом m-мерном подпространстве можно выбрать ортогональный нормированный базис, то мы доказали, таким образом, что *у каждого вектора f существует, и притом только одна, ортогональная проекция f_0 на подпространство R_1.*

Вернемся теперь к случаю произвольного базиса. В этом случае система (11) также должна иметь единственное решение. Действительно, вектор f_0, по доказанному, существует и притом только один. В базисе $e_1, e_2, \ldots, e_m$ вектор f_0 имеет вполне определенные координаты $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Так как эти числа удовлетворяют системе (11), то эта система имеет, следовательно, единственное решение. Система m уравнений с неизвестными может иметь единственное решение, лишь если ее определитель отличен от нуля. Отсюда следует, что определитель системы (11)

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_2, e_1) & \ldots & (e_m, e_1) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_m, e_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (e_1, e_m) & (e_2, e_m) & \ldots & (e_m, e_m) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Этот определитель называется *определителем Грама векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$.*

Итак, пусть задано подпространство R_1 с базисом $e_1, \ldots, e_m$ и произвольный вектор f пространства R.

Ортогональная проекция f_0 *вектора* f *на* R_1 *имеет вид*

$$f_0 = c_1 e_1 + \ldots + c_m e_m.$$

При этом, если базис $e_1, e_2, \ldots, e_m$ *ортогонален, то*

$$c_i = (f, e_i).$$

Если же базис $e_1, \ldots, e_m$ *произволен, то коэффициенты* c_i *определяются как решение системы* (11).

Пример 1. Способ наименьших квадратов. Предположим, что величина y есть линейная функция величин $x_1, \ldots, x_m$, т.е. что

$$y_0 = c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m,$$

где $c_1, \ldots, c_m$ — постоянные, неизвестные нам коэффициенты. Часто коэффициенты $c_1, \ldots, c_m$ определяются экспериментально. Для этого производится ряд измерений величин $x_1, \ldots, x_m$ и y. Обозначим результаты k-го измерения через $x_{1k}, \ldots, x_{mk}$ и, соответственно, y_k. Коэффициенты $c_1, \ldots, c_m$ можно было бы попытаться определить из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}c_1 + x_{21}c_2 + \ldots + x_{m1}c_m = y_1, \\ x_{12}c_1 + x_{22}c_2 + \ldots + x_{m2}c_m = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}c_1 + x_{2n}c_2 + \ldots + x_{mn}c_m = y_n. \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Здесь число уравнений n равно числу произведенных измерений и обычно превосходит число неизвестных ($n > m$). Так как измерение величин $x_1, \ldots, x_m, y$ неизбежно связано с погрешностями, то система (13), вообще говоря, противоречива и о ее точном решении говорить бессмысленно. Поэтому уравнениям (13) можно удовлетворить лишь приближенно. Таким образом, ставится задача разыскать такие значения неизвестных $c_1, \ldots, c_m$, при которых левые части уравнения (13) были бы возможно более близки к соответствующим правым частям. В качестве «меры близости» берется так называемое *квадратичное уклонение* левых частей уравнений от свободных членов, т. е. величина

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{1k}c_1 + x_{2k}c_2 + \ldots + x_{mk}c_m - y_k)^2. \qquad (14)$$

Нам нужно найти числа $c_1, c_2, \ldots, c_m$, при которых квадратичное уклонение имеет наименьшее значение. Эту задачу на минимум можно решить непосредственно. Однако ее решение можно сразу получить из результатов, изложенных выше.

В самом деле, рассмотрим n-мерное евклидово пространство и в нем векторы $e_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $e_2 = (x_{21}, \ldots, x_{2n})$, $\ldots$, $e_m = (x_{m1}, \ldots, x_{mn})$ и $f = (y_1, \ldots, y_n)$. Правые части уравнений системы (13) являются компонентами вектора f, левые части — вектора

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_me_m.$$

Выражение (14) есть, следовательно, квадрат расстояния вектора $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_me_m$ от вектора f. Таким образом, условие, чтобы квадратичное уклонение было минимальным, равносильно следующей задаче: выбрать числа $c_1, c_2, \ldots, c_m$ так, чтобы расстояние от вектора f до вектора $f_0 = c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_me_m$ было наименьшим. Если обозначить через R_1 подпространство n-мерного пространства, состоящее из линейных комбинаций векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ *), то задача состоит в нахождении проекции вектора f на это подпространство. Как мы видели (формула (11)), числа $c_1, c_2, \ldots, c_m$,

*) Мы предполагаем,что ранг матрицы системы (13) равен m и, следовательно, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ линейно независимы.

решающие эту задачу, находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l}(e_1,e_1)c_1+(e_2,e_1)c_2+\ldots+(e_m,e_1)c_m=(f,e_1),\\ (e_1,e_2)c_1+(e_2,e_2)c_2+\ldots+(e_m,e_2)c_m=(f,e_2),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (e_1,e_m)c_1+(e_2,e_m)c_2+\ldots+(e_m,e_m)c_m=(f,e_m),\end{array}\right\} \qquad (15)$$

где

$$(f,e_k)=\sum_{j=1}^{n}x_{kj}y_j; \quad (e_i,e_k)=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}x_{kj}.$$

Система (15) называется в этом случае *системой нормальных уравнений.* Итак, приближенное решение системы (13) состоит в замене ее нормальной системой (15) m уравнений с m неизвестными. Изложенный метод называется *способом наименьших квадратов.*

Упражнение. Решить по способу наименьших квадратов систему уравнений

$$\begin{aligned}2c&=3,\\ 3c&=4,\\ 4c&=5.\end{aligned}$$

Решение. $e_1=(2,3,4)$, $f=(3,4,5)$. Нормальная система сводится в этом случае к одному уравнению:

$$(e_1,e_1)c=(e_1,f),$$

т. е.

$$29c=40; \qquad c=\frac{40}{29}.$$

Для случая, когда система (13) есть система n уравнений с одним неизвестным

$$\begin{aligned}x_1c&=y_1,\\ x_2c&=y_2,\\ &\ldots\ldots\\ x_nc&=y_n,\end{aligned} \qquad (13')$$

решение запишется следующим образом:

$$c = \frac{(x,y)}{(x,x)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Приближенное решение системы $(13')$ может быть истолковано геометрически как проведение через начало координат прямой, проходящей «возможно более близко» от совокупности точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Число c представляет тогда угловой коэффициент такой прямой.

Пример 2. Приближение функций тригонометрическими многочленами. Пусть $f(t)$ — некоторая непрерывная функция, заданная на интервале $(0, 2\pi)$. Часто бывает нужно подобрать тригонометрический многочлен $P(t)$ данного порядка, возможно меньше отличающийся от $f(t)$. В качестве меры отклонения $P(t)$ от $f(t)$ мы возьмем квадратичное уклонение, которое задается формулой

$$\int\limits_0^{2\pi} [f(t) - P(t)]^2 \, dt. \tag{16}$$

Итак, точная постановка рассматриваемой задачи такова: *среди всех тригонометрических многочленов порядка n*

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt \tag{17}$$

найти тот, квадратичное уклонение которого от заданной функции $f(t)$ минимально.

Введем в рассмотрение пространство R непрерывных функций на отрезке $(0, 2\pi)$. Скалярное произведение в этом пространстве зададим, как обычно, интегралом

$$(f, g) = \int\limits_0^{2\pi} f(t) g(t) \, dt.$$

Длина вектора выражается тогда формулой

$$|f| = \sqrt{\int_0^{2\pi} [f(t)]^2 \, dt},$$

и следовательно, квадратичное уклонение (16) есть в нашем пространстве просто квадрат расстояния от $f(t)$ до $P(t)$. Тригонометрические многочлены вида (17) образуют в R подпространство R_1 размерности $2n+1$. Нам нужно найти элемент из R_1, находящийся на минимальном расстоянии от $f(t)$. Эта задача снова решается опусканием перпендикуляра из точки $f(t)$ на подпространство R_1.

Так как функции

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1 = \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\ e_2 = \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ e_{2n-1} = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\ e_{2n} = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$$

образуют ортогональный и нормированный базис в этом подпространстве (см. пример 2 предыдущего пункта), то решением этой задачи служит линейная комбинация базисных векторов

$$P(t) = \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k, \tag{18}$$

где

$$c_k = (f, e_k),$$

т. е., вспоминая определение скалярного произведения, имеем:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt; \quad c_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt;$$

$$c_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Подставляя c_k и e_k $(k = 1, \ldots, n)$ в формулу (18), мы приходим, таким образом, к следующему результату: *для того чтобы определить тригонометрический многочлен*

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

квадратичное уклонение которого от заданной функции $f(t)$ *минимально, надо определить коэффициенты* a_k, b_k *по формулам*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt,\ a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt,\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt.$$

Так определенные числа a_k, b_k называются *коэффициентами Фурье* функции $f(t)$.

3. Изоморфизм евклидовых пространств. Мы рассмотрели ряд примеров n-мерных евклидовых пространств. Эти пространства отличались одно от другого во всяком случае способом задания векторов (так, в примере 2 § 2 вектор есть совокупность n чисел, в примере 5 § 2 — многочлен и т. д.).

Возникает вопрос: какие из этих пространств действительно различны и для каких различие является лишь чисто внешним, т. е. различны лишь способы задания этих пространств?

Для того чтобы вопрос был точно поставлен, нужно определить, какие два евклидовых пространства мы будем считать лишь несущественно различающимися (изоморфными).

О п р е д е л е н и е 3. *Два евклидовых пространства R и R_1 называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow x'$ ($x \in R$, $x' \in R'$) так, что*:

1° *Если $x \leftrightarrow x'$ и $y \leftrightarrow y'$, то $x + y \leftrightarrow x' + y'$, т. е. если вектору $x \in R$ соответствует вектор $x' \in R'$, а вектору $y \in R$ соответствует вектор $y' \in R'$, то сумме $x + y$ соответствует сумма $x' + y'$.*

2° *Если $x \leftrightarrow x'$, то $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$.*

3° *Если $x \leftrightarrow x'$ и $y \leftrightarrow y'$, то $(x, y) = (x', y')$, т. е. скалярные произведения соответствующих пар векторов равны между собой.*

Таким образом, евклидовы пространства R_1 и R_2 изоморфны, если они изоморфны как линейные пространства и этот изоморфизм таков, что он сохраняет скалярное произведение соответствующих векторов.

Если в каком-нибудь n-мерном евклидовом пространстве R доказана теорема, сформулированная в терминах сложения, умножения на числа и скалярного произведения векторов, то эта же теорема верна и в любом изоморфном ему пространстве. В самом деле, если как в формулировке, так и в доказательстве такой теоремы заменить векторы из R соответствующими им векторами из R', то в силу свойств 1°, 2°, 3° определения изоморфизма все рассуждения останутся справедливыми, т. е. соответствующая теорема верна и в R'.

Вернемся к вопросу, поставленному ранее. Оказывается, что имеет место следующая

Теорема 2. *Все евклидовы пространства данной размерности изоморфны между собой.*

Доказательство. Докажем, что все n-мерные евклидовы пространства изоморфны специально выбранному «стандартному» n-мерному пространству. Тем самым будет доказано, что все n-мерные евклидовы пространства изоморфны между собой.

В качестве такого стандартного n-мерного пространства R' мы возьмем рассмотренное в § 2 (пример 2) пространство, в котором вектор определяется как совокупность действительных чисел $x' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, а скалярное произведение векторов $x' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $y' = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ задается формулой

$$(x', y') = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n.$$

Пусть нам дано какое-либо n-мерное евклидово пространство R; выберем в нем нормированный ортогональный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (мы доказали ранее, что во всяком евклидовом пространстве такой базис существует). Поставим в соответствие вектору

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$

совокупность n чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, т. е. вектор

$$x' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

из R'.

Покажем, что установленное соответствие есть изоморфизм.

Это соответствие взаимно однозначно. Нужно проверить, что выполнены условия 1°–3° определения изоморфизма.

Свойства 1° и 2° очевидны.

Проверим свойство 3°, т. е. равенство скалярных произведений соответствующих друг другу пар векторов. Пользуясь выведенной выше (стр. 49) формулой для скалярного произведения в ортогональном нормированном базисе, имеем:

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n.$$

С другой стороны, по определению скалярного произведения в пространстве R' (пример 2 § 2) имеем:

$$(x', y') = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n.$$

Таким образом,

$$(x, y) = (x', y'),$$

т. е. равенство скалярных произведений доказано.

Теорема полностью доказана.

Упражнение. Доказать эту теорему методом, аналогичным доказательству в п. 4 § 1.

Из теоремы об изоморфизме можно вывести интересное следствие: любое геометрическое утверждение о двух или трех векторах достаточно проверить в известном из элементарной геометрии трехмерном пространстве *). В самом деле, линейная комбинация этих векторов образует подпространство нашего пространства не более трех измерений. В силу теоремы о изоморфизме это подпространство изоморфно обычному трехмерному пространству (либо его подпространству)

*) Геометрической теоремой мы будем называть утверждение о векторах, которое может быть сформулировано в терминах сложения векторов, умножения их на числа и скалярного произведения.

и, следовательно, наше утверждение достаточно проверить в последнем пространстве.

В частности, справедливость неравенства Коши–Буняковского (являющегося утверждением о паре векторов) следует из того, что оно верно в элементарной геометрии (см. пример 1, стр. 42). Мы получаем, таким образом, новое доказательство неравенства Коши–Буняковского.

Еще один пример. В § 2 мы доказали неравенство (7)

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

В элементарной геометрии это неравенство означает, что длина диагонали параллелограмма не превосходит суммы длин двух смежных сторон, и доказывается в любом учебнике элементарной геометрии. Следовательно, в силу сказанного ранее, это неравенство справедливо в любом евклидовом пространстве. Теорема о изоморфизме дает нам, таким образом, возможность получить, например, неравенство

$$\sqrt{\int_a^b (f(t)+g(t))^2\,dt} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt},$$

являющееся неравенством (7) § 2 в пространстве функций (пример 4 § 2) как непосредственное следствие только что сформулированной теоремы из элементарной геометрии.

§ 4. Билинейные и квадратичные формы

В этом параграфе мы будем опять заниматься аффинным пространством, а именно, будем изучать простейшие числовые функции от векторов в аффинном пространстве.

1. Линейная функция. Простейшей функцией в аффинном пространстве является линейная функция.

Определение 1. *Говорят, что в аффинном пространстве задана линейная функция (линейная форма), если каждому вектору x поставлено в соответствие число $f(x)$, так что при этом выполнены условия:*

1° $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

2° $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Выберем в n-мерном пространстве произвольный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Так как каждый вектор x можно представить в виде

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$

то в силу свойств линейной функции имеем:

$$\begin{aligned} f(x) = f(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n) = \\ = \xi_1 f(e_1) + \xi_2 f(e_2) + \ldots + \xi_n f(e_n). \end{aligned}$$

Итак: в *n-мерном пространстве с заданным базисом линейная функция может быть представлена в виде*

$$f(x) = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots + a_n \xi_n, \tag{1}$$

где $a_i = f(e_i)$ — постоянные, зависящие лишь от выбора базиса, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора в этом базисе.

Таким образом, данное выше определение линейной функции совпадает, по существу, с принятым в алгебре определением линейной функции (линейной формы); надо лишь иметь в виду, что в нашем случае коэффициенты зависят от выбора базиса.

Выясним, как меняются коэффициенты линейной функции при замене одного базиса другим.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиса в R. Пусть, далее, векторы e'_i выражаются через базис e_1,

$e_2, \ldots, e_n$ формулами

$$\begin{aligned}
e'_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \ldots + \alpha_{n1}e_n,\\
e'_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{n2}e_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e'_n &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n.
\end{aligned}$$

Пусть в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейная функция выражается формулой

$$f(x) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n,$$

а в базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — формулой

$$f(x) = a'_1\xi'_1 + a'_2\xi'_2 + \ldots + a'_n\xi'_n.$$

Так как $a_i = f(e_i)$, а $a'_k = f(e'_k)$, то

$$\begin{aligned}
a'_k &= f(\alpha_{1k}e_1 + \alpha_{2k}e_2 + \ldots + \alpha_{nk}e_n) =\\
&= \alpha_{1k}f(e_1) + \alpha_{2k}f(e_2) + \ldots + \alpha_{nk}f(e_n) =\\
&= \alpha_{1k}a_1 + \alpha_{2k}a_2 + \ldots + \alpha_{nk}a_n.
\end{aligned}$$

Мы видим, следовательно, что *коэффициенты линейной формы преобразуются при переходе к другому базису так же, как векторы базиса* (или, как иногда говорят, *когредиентно* векторам базиса).

Пример 1. В пространстве, векторами которого являются непрерывные функции $\varphi(t)$, заданные на отрезке $[a, b]$, рассмотрим функцию $f(\varphi)$, заданную формулой

$$f(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

Эта функция линейна, так как выполняются условия 1° и 2°.

Действительно, первое из них означает, что интеграл суммы равен сумме интегралов, а второе означает, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

П р и м е р 2. В том же пространстве рассмотрим функцию $f(\varphi)$, определенную следующим образом. Выберем на отрезке $[a,b]$ некоторое значение $t=t_0$ и положим

$$f(\varphi)=\varphi(t_0).$$

Проверьте, что эта функция $f(\varphi)$ также линейна.

2. Билинейные формы. Существенную роль в дальнейшем будут играть билинейные и квадратичные функции (формы).

О п р е д е л е н и е 2. *Мы говорим, что $A(x;y)$ есть билинейная функция (билинейная форма) от векторов x и y, если:*

1° *при фиксированном y $A(x;y)$ есть линейная функция от x,*

2° *при фиксированном x $A(x;y)$ есть линейная функция от y.*

Иными словами, в силу определения линейной функции условия 1° и 2° означают соответственно

$$1^\circ \qquad \begin{aligned} A(x_1+x_2;y)&=A(x_1;y)+A(x_2;y),\\ A(\lambda x;y)&=\lambda A(x;y).\end{aligned}$$

$$2^\circ \qquad \begin{aligned} A(x;y_1+y_2)&=A(x;y_1)+A(x;y_2),\\ A(x;\mu y)&=\mu A(x;y).\end{aligned}$$

П р и м е р ы. 1. Рассмотрим n-мерное пространство, в котором вектор есть совокупность n чисел. Положим

$$\begin{aligned} A(x;y)=a_{11}\xi_1\eta_1&+a_{12}\xi_1\eta_2+\ldots+a_{1n}\xi_1\eta_n+\\ &+a_{21}\xi_2\eta_1+a_{22}\xi_2\eta_2+\ldots+a_{2n}\xi_2\eta_n+\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+a_{n1}\xi_n\eta_1+a_{n2}\xi_n\eta_2+\ldots+a_{nn}\xi_n\eta_n, \end{aligned} \qquad (2)$$

где x есть вектор $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, а y — вектор $(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$. Формула (2) определяет билинейную функцию. В самом деле, если зафиксировать y, т. е. считать $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ постоянными, то $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k$ зависит от ξ_i линейно, т. е. есть линейная функция от $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, а при постоянных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ форма $A(x; y)$ — линейная функция от y.

2. В пространстве, в котором векторами являются непрерывные функции $f(t)$, рассмотрим следующий пример билинейной функции. Пусть $K(s, t)$ — некоторая непрерывная функция переменных s и t. Положим

$$A(f; g) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(s,t) f(s) g(t)\, ds\, dt.$$

$A(f; g)$ есть билинейная функция векторов f и g.

Действительно, условия 1° и 2° проверяются так же, как и в примере 1 предыдущего пункта.

Если $K(s, t) \equiv 1$, то

$$A(f; g) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b f(s) g(t)\, ds\, dt = \int\limits_a^b f(s)\, ds \int\limits_a^b g(t)\, dt,$$

т. е. $A(f, g)$ есть произведение линейных функций $\int\limits_a^b f(s)\, ds$ и $\int\limits_a^b g(t)\, dt$.

Упражнение. Показать, что если $f(x)$ и $g(y)$ — линейные функции, то их произведение $f(x) \cdot g(y)$ есть билинейная функция.

Определение 3. *Билинейная функция* (форма) *называется симметрической, если для любых векторов x и y имеет место равенство*

$$A(x; y) = A(y; x).$$

В приведенном выше примере 1 определенная формулой (2) билинейная форма $A(x; y)$ симметрична тогда и только тогда, когда $a_{ik} = a_{ki}$ для любых i и k.

Скалярное произведение (x, y) в евклидовом пространстве является примером симметрической билинейной формы.

В самом деле, аксиомы 1°, 2°, 3° скалярного произведения (§ 2) как раз и означают, что скалярное произведение есть симметрическая билинейная форма.

3. Матрица билинейной формы. Мы определили билинейную форму аксиоматически. Выберем теперь в n-мерном пространстве какой-либо базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и выразим билинейную форму $A(x; y)$ через координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ векторов x и y в этом базисе. Мы имеем:

$$A(x; y) = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n;\ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n).$$

В силу свойств 1° и 2° билинейной формы

$$\begin{aligned} A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n;\ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n) = \\ = \xi_1\eta_1 A(e_1; e_1) + \xi_1\eta_2 A(e_1; e_2) + \ldots + \xi_1\eta_n A(e_1; e_n) + \\ + \xi_2\eta_1 A(e_2; e_1) + \xi_2\eta_2 A(e_2; e_2) + \ldots + \xi_2\eta_n A(e_2; e_n) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \xi_n\eta_1 A(e_n; e_1) + \xi_n\eta_2 A(e_n; e_2) + \ldots + \xi_n\eta_n A(e_n; e_n), \end{aligned}$$

или, короче

$$A(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} A(e_i; e_k)\xi_i\eta_k.$$

Обозначим постоянные $A(e_i; e_k)$ через a_{ik}. Тогда имеем:

при заданном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ всякая билинейная форма в n-мерном пространстве может быть записана в виде

$$A(x; y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k, \tag{3}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора x, а $\eta_1, \eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_n$ — координаты вектора y в данном базисе.

Числа a_{ik} зависят от выбора базиса и вычисляются по формулам

$$a_{ik} = A(e_i; e_k). \tag{4}$$

Матрица $\boldsymbol{A} = \|a_{ik}\|$ называется *матрицей билинейной формы $A(x; y)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*

Таким образом, в каждом базисе билинейная форма $A(x; y)$ определяется своей матрицей $\boldsymbol{A} = \|a_{ik}\|$.

Пример. Пусть R — трехмерное пространство, векторами которого являются тройки чисел (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Зададим в R билинейную форму $A(x; y)$ формулой

$$A(x; y) = \xi_1\eta_1 + 2\xi_2\eta_2 + 3\xi_3\eta_3.$$

Возьмем в R в качестве базиса три вектора

$$e_1 = (1, 1, 1); \quad e_2 = (1, 1, -1); \quad e_3 = (1, -1, -1).$$

Найдем матрицу $\boldsymbol{A}$ билинейной формы $A(x; y)$ в этом базисе. В силу (4) получим:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 = 6,\\
&a_{12} = a_{21} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot(-1) = 0,\\
&a_{22} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 6,\\
&a_{13} = a_{31} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot 1\cdot(-1) = -4,\\
&a_{23} = a_{32} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 2,\\
&a_{33} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 6,
\end{aligned}$$

т. е.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4\\ 0 & 6 & 2\\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если обозначить через (ξ_1', ξ_2', ξ_3') и $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$ координаты векторов x и y в базисе e_1, e_2, e_3, то

$$A(x; y) = 6\xi_1'\eta_1' - 4\xi_1'\eta_3' + 6\xi_2'\eta_2' + 2\xi_2'\eta_3' - 4\xi_3'\eta_1' + 2\xi_3'\eta_2' + 6\xi_3'\eta_3'.$$

4. Преобразование матрицы билинейной формы при изменении базиса. Пусть даны в n-мерном пространстве два базиса: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Пусть векторы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ выражаются через векторы базиса

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ формулами

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n,\\ f_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом, $c_{1k}, c_{2k}, \ldots, c_{nk}$ — координаты вектора f_k в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Матрицу

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

назовем матрицей перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Пусть $\boldsymbol{A} = \|a_{ik}\|$ есть матрица билинейной формы $A(x;y)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а $\boldsymbol{B} = \|b_{ik}\|$ — матрица той же билинейной формы в базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Наша задача состоит в том, чтобы по матрице $\|a_{ik}\|$ найти матрицу $\|b_{ik}\|$.

По определению [формула (4)] $b_{pq} = A(f_p; f_q)$, т. е. b_{pq} — значение билинейной формы $A(x;y)$ при $x = f_p$, $y = f_q$; для того чтобы найти его, воспользуемся формулой (3), подставив в нее вместо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ координаты векторов f_p и f_q в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, т. е. числа $c_{1p}, c_{2p}, \ldots, c_{np}$ и $c_{1q}, c_{2q}, \ldots, c_{nq}$. Получим:

$$b_{pq} = A(f_p; f_q) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}c_{ip}c_{kq}. \tag{6}$$

Это есть искомая формула.

Запишем ее в матричной форме. Для этого положим $c'_{pi} = c_{ip}$; таким образом, c'_{pi} являются элементами матрицы $\boldsymbol{C}'$, транспонированной к матрице $\boldsymbol{C}$. Тогда

$$b_{pq} = \sum_{i,k=1}^{n} c'_{pi} a_{ik} c_{kq}.$$

В матричной форме это означает *):

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}. \tag{7}$$

Итак: *если* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *суть матрицы билинейной формы* $A(x;y)$ *соответственно в базисах* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *и* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, *то* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, *где* $\boldsymbol{C}$ — *матрица перехода от базиса* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *к базису* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, *а* $\boldsymbol{C}'$ — *матрица, транспонированная к матрице* $\boldsymbol{C}$.

5. Квадратичные формы.

Определение 4. *Пусть* $A(x;y)$ — *симметрическая билинейная форма. Функция* $A(x;x)$, *которая получается из* $A(x;y)$, *если положить* $y = x$, *называется квадратичной формой.*

---

*) Произведение двух матриц определяется, как известно, так: элемент произведения матриц, стоящий на пересечении i-й строки и k-го столбца, равен сумме произведений элементов i-й строки первой матрицы на соответствующие элементы k-го столбца второй матрицы. Удобнее это правило записывать в виде формулы

$$c_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha k},$$

где $a_{i\alpha}$ — элементы первой матрицы, а $b_{\alpha k}$ — элементы второй матрицы. Отсюда, применяя это правило дважды, можно получить, что произведение трех матриц вычисляется так: если $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, то

$$d_{ik} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta k}.$$

Если $\boldsymbol{A}'$ — матрица, транспонированная к матрице $\boldsymbol{A}$, то элементы матрицы $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ имеют вид $\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha i} b_{\alpha\beta} c_{\beta k}$.

$A(x;y)$ называется билинейной формой, *полярной* к квадратичной форме $A(x;x)$.

Требование симметричности формы $A(x;y)$ в определении квадратичной формы оправдывается следующим предложением, которое без этого было бы неверно.

Полярная форма $A(x;y)$ *однозначно определяется своей квадратичной формой* $A(x;x)$.

Доказательство. Из определения билинейной формы легко следует, что

$$A(x+y;x+y) = A(x;x) + A(x;y) + A(y;x) + A(y;y).$$

Отсюда в силу симметрии (т. е. равенства $A(x;y) = A(y;x)$) получаем:

$$A(x;y) = \frac{1}{2}[A(x+y;x+y) - A(x;x) - A(y;y)].$$

В правой части этого равенства стоят значения квадратичной формы; следовательно, мы доказали, что билинейная форма $A(x;y)$ определяется своей квадратичной формой [*]).

Выше мы уже доказали, что всякая симметрическая билинейная форма $A(x;y)$ записывается через коорди-

---

[*]) Функция $A(x;x)$, полученная из произвольной (не обязательно симметрической) билинейной формы $A(x;y)$, может быть получена и из симметрической билинейной формой. Действительно, пусть $A(x;y)$ — произвольная билинейная форма; тогда

$$A_1(x;y) = \frac{1}{2}[A(x;y) + A(y;x)]$$

есть снова билинейная форма и притом, как можно видеть, симметрическая. Но

$$A_1(x;x) = \frac{1}{2}[A(x;x) + A(x;x)] = A(x;x),$$

т. е. $A_1(x;y)$ приводит нас (при $y = x$) к той же квадратичной форме, что и $A(x;y)$.

наты векторов x и y в виде

$$A(x;y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k,$$

где $a_{ik} = a_{ki}$. Поэтому:

всякая квадратичная форма $A(x;x)$ при заданном базисе выражается формулой

$$A(x;x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k,$$

где $a_{ik} = a_{ki}$. Введем еще одно важное

О п р е д е л е н и е 5. *Квадратичная форма $A(x;x)$ называется положительно определенной, если для любого вектора $x \neq 0$*

$$A(x;x) > 0.$$

П р и м е р. $A(x;x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$ является, очевидно, положительно определенной квадратичной формой.

Пусть $A(x;x)$ — положительно определенная квадратичная форма и $A(x;y)$ — ее полярная форма. В силу сформулированных выше определений это означает:

1° $A(x;y) = A(y;x)$.

2° $A(x_1 + x_2;y) = A(x_1;y) + A(x_2;y)$.

3° $A(\lambda x;y) = \lambda A(x;y)$.

4° $A(x;x) \geqslant 0$ и $A(x;x) > 0$ при $x \neq 0$.

Мы видим, что эти условия совпадают с аксиомами скалярного произведения, сформулированными в § 2. Следовательно,

скалярное произведение есть билинейная форма, соответствующая положительно определенной квадратичной форме, и любая такая форма может быть принята за скалярное произведение.

Поэтому мы можем определить евклидово пространство следующим образом.

Евклидовым пространством называется аффинное пространство, в котором выбрана какая-нибудь фиксированная положительно определенная квадратичная форма $A(x;x)$. Значение $A(x;y)$ соответствующей *) *ей билинейной формы считается при этом скалярным произведением* **) *векторов x и y.*

§ 5. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов

Мы знаем уже, что выражение квадратичной формы $A(x;x)$ через координаты вектора x зависит от выбора базиса. В этом параграфе будет показано, как привести квадратичную форму к сумме квадратов, т. е. выбрать такой базис (систему координат), в котором квадратичная форма имеет простой вид

$$A(x;x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2. \tag{1}$$

Пусть в некотором базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$ имеем равенство

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\eta_i\eta_k, \tag{2}$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — координаты вектора x в этом базисе. Будем постепенно преобразовывать базис так, чтобы в формуле (2) пропадали произведения координат с различными индексами. Так как каждому преобразованию базиса отвечает определенное преобразование координат (см. § 1, п. 6) и обратно, то мы можем писать формулы преобразования координат.

Для приведения формы $A(x;x)$ к сумме квадратов нам нужно будет, чтобы хоть один из коэффициентов

---

*) Мы уже доказали, что билинейная форма $A(x;y)$ однозначно определяется своей квадратичной формой $A(x;x)$.

**) Выше оно обозначалось (x,y), а не $A(x;y)$.

a_{kk} (коэффициент при η_k^2) был отличен от нуля. Этого всегда можно добиться. Действительно, предположим, что форма $A(x;x)$, не равная тождественно нулю, не содержит ни одного квадрата переменного; тогда она содержит хотя бы одно произведение, например, $2a_{12}\eta_1\eta_2$. Заменим координаты η_1 и η_2 по формулам

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \eta_1' + \eta_2',\\ \eta_2 &= \eta_1' - \eta_2',\end{aligned}$$

не изменяя остальных переменных. При этом преобразовании член $2a_{12}\eta_1\eta_2$ перейдет в $2a_{12}(\eta_1'^2 - \eta_2'^2)$, и так как, по предположению, $a_{11} = a_{22} = 0$, то он ни с чем не может сократиться, т. е. коэффициент при $\eta_1'^2$ отличен от нуля.

Будем теперь считать, что уже в формуле (2) коэффициент $a_{11} \neq 0$ *). Выделим в нашей квадратичной форме члены, содержащие η_1:

$$a_{11}\eta_1^2 + 2a_{12}\eta_1\eta_2 + \ldots + 2a_{1n}\eta_1\eta_n.$$

Дополним эту сумму до полного квадрата, т. е. запишем ее в виде

$$a_{11}\eta_1^2 + 2a_{12}\eta_1\eta_2 + \ldots + 2a_{1n}\eta_1\eta_n = \\ = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\eta_1 + \ldots + a_{1n}\eta_n)^2 - B, \quad (3)$$

где через B мы обозначили члены, содержащие лишь квадраты и попарные произведения членов $a_{12}\eta_2, \ldots$ $\ldots, a_{1n}\eta_n$. После подстановки выражения (3) в (2) рассматриваемая квадратичная форма примет вид

$$A(x;x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\eta_1 + \ldots + a_{1n}\eta_n)^2 + \ldots,$$

---

*) Если $a_{11} = 0$, но отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-нибудь другой координаты, то к рассматриваемому случаю можно прийти, иначе занумеровав векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$, что также является некоторым преобразованием этого базиса.

где невыписанные члены содержат только переменные $\eta_2, \ldots, \eta_n$.

Положим

$$\begin{aligned}
\eta_1^* &= a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n,\\
\eta_2^* &= \qquad\qquad\quad \eta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_n^* &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta_n.
\end{aligned}$$

Тогда квадратичная форма примет вид

$$A(x;x) = \frac{1}{a_{11}}\eta_1^{*2} + \sum_{i,k=2}^{n} a_{ik}^*\eta_i^*\eta_k^*.$$

Выражение $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}^*\eta_i^*\eta_k^*$ вполне аналогично правой части формулы (2) с той только разницей, что оно не содержит первой координаты. Предположим, что коэффициент $a_{22}^* \neq 0$ (этого, как мы видели, всегда можно добиться простыми вспомогательными преобразованиями). Тогда можно произвести новое, аналогичное первому, преобразование переменных по формулам

$$\begin{aligned}
\eta_1^{**} &= \eta_1^*,\\
\eta_2^{**} &= \qquad a_{22}^*\eta_2^* + a_{23}^*\eta_3^* + \ldots + a_{2n}^*\eta_n^*,\\
\eta_3^{**} &= \qquad\qquad\quad \eta_3^*,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_n^{**} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta_n^*.
\end{aligned}$$

В новых переменных форма примет вид

$$A(x;x) = \frac{1}{a_{11}}\eta_1^{**2} + \frac{1}{a_{22}^*}\eta_2^{**2} + \sum_{i,k=3}^{n} a_{ik}^{**}\eta_i^{**}\eta_k^{**}.$$

Продолжая этот процесс, мы после конечного числа шагов придем к переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, в которых форма $A(x;x)$ будет иметь вид

$$A(x;x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_m\xi_m^2,$$

причем $m \leqslant n$.

Мы предоставляем читателю выписать преобразование базиса, отвечающее каждому из произведенных преобразований координат (см. п. 6 § 1), и убедиться, что наши преобразования действительно переводят базис снова в базис, т. е. что полученные из базиса в результате преобразования векторы снова линейно независимы.

Полагая в случае $m < n$, что $\lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Т е о р е м а. *Пусть в n-мерном пространстве задана произвольная квадратичная форма $A(x;x)$. Тогда в R существует базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, в котором эта квадратичная форма имеет вид*

$$A(x;x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2,$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Приведем пример приведения квадратичной формы к сумме квадратов по описанному методу. Пусть в трехмерном пространстве с некоторым базисом f_1, f_2, f_3 задана квадратичная форма

$$A(x;x) = 2\eta_1\eta_2 + 4\eta_1\eta_3 - \eta_2^2 - 8\eta_3^2.$$

Положим

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2', \\ \eta_2 &= \eta_1', \\ \eta_3 &= \eta_3'. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$A(x;x) = -{\eta_1'}^2 + 2\eta_1'\eta_2' + 4\eta_2'\eta_3' - 8{\eta_3'}^2.$$

Дальше, полагая

$$\begin{aligned} \eta_1^* &= -\eta_1' + \eta_2', \\ \eta_2^* &= \qquad\quad \eta_2', \\ \eta_3^* &= \qquad\qquad\quad \eta_3', \end{aligned}$$

мы получим новое выражение для квадратичной формы:

$$A(x;x) = -\eta_1^{*2} + \eta_2^{*2} + 4\eta_2^*\eta_3^* - 8\eta_3^{*2}.$$

Преобразование

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \eta_1^*, \\
\xi_2 &= \quad \eta_2^* + 2\eta_3^*, \\
\xi_3 &= \qquad\quad \eta_3^*
\end{aligned}$$

выделит из нашей квадратичной формы еще один полный квадрат, после чего форма примет канонический вид:

$$A(x;x) = -\xi_1^2 + \xi_2^2 - 12\xi_3^2.$$

Имея формулы, выражающие $\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*$ через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, затем $\eta_1^{**}, \ldots, \eta_n^{**}$ через $\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*$ и т. д., мы можем получить выражение координат $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ через первоначальные координаты $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2 + \ldots + c_{1n}\eta_n, \\
\xi_2 &= c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2 + \ldots + c_{2n}\eta_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_n &= c_{n1}\eta_1 + c_{n2}\eta_2 + \ldots + c_{nn}\eta_n.
\end{aligned}$$

Так, в приведенном выше примере эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \eta_1 - \eta_2, \\
\xi_2 &= \eta_1 \qquad + 2\eta_3, \\
\xi_3 &= \qquad\qquad\quad \eta_3.
\end{aligned}$$

Вспоминая (§ 1, п. 6), что матрица, дающая преобразование координат, является обратной и транспонированной к матрице преобразования базиса, мы можем выразить векторы нового базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ через векторы старого базиса $f_1, f_2, \ldots, f_n$:

$$\begin{aligned}
e_1 &= d_{11}f_1 + d_{12}f_2 + \ldots + d_{1n}f_n, \\
e_2 &= d_{21}f_1 + d_{22}f_2 + \ldots + d_{2n}f_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e_n &= d_{n1}f_1 + d_{n2}f_2 + \ldots + d_{nn}f_n.
\end{aligned}$$

Если в процессе приведения нам ни разу не приходилось производить преобразования, меняющего сразу две координаты (такое преобразование, как мы помним, приходится совершать, когда в преобразуемой форме отсутствуют квадраты координат, либо если приходилось менять нумерацию), то формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2 + \ldots + c_{1n}\eta_n,\\
\xi_2 &= \qquad\quad\; c_{22}\eta_2 + \ldots + c_{2n}\eta_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; c_{nn}\eta_n,
\end{aligned}$$

т. е. матрица преобразования является так называемой треугольной матрицей. Легко проверить, что матрица преобразования базиса будет в этом случае также треугольной матрицей вида

$$\begin{aligned}
e_1 &= d_{11}f_1,\\
e_2 &= d_{21}f_1 + d_{22}f_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_n &= d_{n1}f_1 + d_{n2}f_2 + \ldots + d_{nn}f_n.
\end{aligned}$$

Здесь $d_{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение элемента $c_{\alpha\beta}$ матрицы $\|c_{ik}\|$, деленное на определитель этой матрицы.

§ 6. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов треугольным преобразованием

1. В этом параграфе мы укажем еще один способ построения базиса, в котором квадратичная форма приводится к сумме квадратов. В отличие от предыдущего параграфа мы дадим формулы, выражающие искомый базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ непосредственно через исходный базис (а не в несколько шагов, как в § 5).

При этом, однако, мы должны будем на форму $A(x;y)$ и исходный базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$ наложить следующее ограничение: пусть $\|a_{ik}\|$ — матрица билинейной формы $A(x;y)$ в базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Мы предположим, что следующие миноры матрицы $\|a_{ik}\|$ все отличны от нуля *):

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0; \quad \ldots;$$
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

В каждом базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$ квадратичная форма $A(x;x)$ имеет вид

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k, \quad \text{где} \quad a_{ik} = A(f_i, f_k).$$

Наша цель — определить векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ так, чтобы

$$A(e_i; e_k) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Процесс, с помощью которого это будет сделано, совпадает с процессом ортогонализации, описанным в п. 1 § 3, если заменить в этом процессе скалярное произведение векторов произвольной билинейной формой $A(x;y)$, удовлетворяющей условиям (1).

---

*) Можно показать, что это требование равносильно тому, что при приведении квадратичной формы к сумме квадратов по методу, описанному в § 5, $a_{11} \neq 0$, $a_{22}^* \neq 0$ и т. д.

Будем искать векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в виде

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = \alpha_{11} f_1, \\ e_2 = \alpha_{21} f_1 + \alpha_{22} f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n = \alpha_{n1} f_1 + \alpha_{n2} f_2 + \ldots + \alpha_{nn} f_n. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Коэффициенты α_{ik} можно было бы найти из условий (2), подставив в эти условия вместо $e_1, e_2, \ldots, e_n$ их выражения из (3). Однако это неудобно для вычислений, так как пришлось бы решать уравнения второй степени относительно α_{ik}. Поступим поэтому несколько иначе.

Если

$$A(e_k; f_i) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

то и

$$A(e_k; e_i) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Действительно, подставляя вместо e_i выражение

$$\alpha_{i1} f_1 + \alpha_{i2} f_2 + \ldots + \alpha_{ii} f_i,$$

получаем:

$$A(e_k; e_i) = A(e_k;\ \alpha_{i1} f_1 + \alpha_{i2} f_2 + \ldots + \alpha_{ii} f_i) = \\ = \alpha_{i1} A(e_k; f_1) + \alpha_{i2} A(e_k; f_2) + \ldots + \alpha_{ii} A(e_k; f_i).$$

Таким образом, если $A(e_k; f_i) = 0$ для любого k и для любого $i < k$, то и $A(e_k; e_i) = 0$ для $i < k$, и следовательно, в силу симметрии билинейной формы и для $i > k$, т. е. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — требуемый базис. Наша задача сведена, таким образом, к следующей:

определить коэффициенты $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kk}$ так, чтобы вектор

$$e_k = \alpha_{k1} f_1 + \alpha_{k2} f_2 + \ldots + \alpha_{kk} f_k$$

удовлетворял условиям

$$A(e_k; f_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{4}$$

Этими условиями вектор e_k определяется с точностью до постоянного множителя. Зафиксируем этот множитель с помощью требования

$$A(e_k; f_k) = 1. \tag{5}$$

Мы увидим сейчас, что условиями (4) и (5) вектор e_k определен уже однозначно.

Подставив в (4) и (5) выражение для e_k, мы получим следующую систему уравнений первой степени относительно α_{ki}:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{k1}A(f_1; f_1) + \alpha_{k2}A(f_1; f_2) + \ldots + \alpha_{kk}A(f_1; f_k) = 0,\\
&\alpha_{k1}A(f_2; f_1) + \alpha_{k2}A(f_2; f_2) + \ldots + \alpha_{kk}A(f_2; f_k) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{k1}A(f_{k-1}; f_1) + \alpha_{k2}A(f_{k-1}; f_2) + \ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots + \alpha_{kk}A(f_{k-1}; f_k) = 0,\\
&\alpha_{k1}A(f_k; f_1) + \alpha_{k2}A(f_k; f_2) + \ldots + \alpha_{kk}A(f_k; f_k) = 1.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Определитель этой системы уравнений равен

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A(f_1; f_1) & A(f_1; f_2) & \ldots & A(f_1; f_k) \\ A(f_2; f_1) & A(f_2; f_2) & \ldots & A(f_2; f_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A(f_k; f_1) & A(f_k; f_2) & \ldots & A(f_k; f_k) \end{vmatrix} \tag{7}$$

и по условию (1) отличен от нуля. Поэтому решение системы (6) существует и единственно. Таким образом, задача нахождения вектора e_k нами решена для любого k.

Найдем теперь коэффициенты b_{ik} квадратичной формы $A(x; x)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Как нам уже известно,

$$b_{ik} = A(e_i; e_k).$$

По построению этого базиса, $A(e_i; e_k) = 0$ при $i \neq k$, т. е. $b_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

Вычислим $b_{kk} = A(e_k; e_k)$:

$$A(e_k; e_k) = A(e_k;\ \alpha_{k1}f_1 + \alpha_{k2}f_2 + \ldots + \alpha_{kk}f_k) = \\ = \alpha_{k1}A(e_k; f_1) + \alpha_{k2}A(e_k; f_2) + \ldots + \alpha_{kk}A(e_k; f_k)\ ^{*})$$

и в силу условий (4) и (5)

$$A(e_k; e_k) = \alpha_{kk}.$$

Число α_{kk} можно найти из системы (6); согласно правилу Крамера

$$\alpha_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k},$$

где Δ_{k-1} — определитель, аналогичный (7) порядка $k-1$, и где положено $\Delta_0 = 1$.

Таким образом,

$$b_{kk} = A(e_k; e_k) = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Итак, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть в базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$ квадратичная форма имеет вид*

$$A(x; x) = \sum a_{ik}\eta_i\eta_k, \quad \text{где} \quad a_{ik} = A(f_i; f_k).$$

Пусть, далее, определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличны от нуля. Тогда существует базис $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_n$, в котором $A(x; x)$ записывается в виде суммы

*) Выкладка сильно усложнилась бы, если бы мы заменили e_k его выражением через f_i и на первом, и на втором месте.

квадратов следующим образом:

$$A(x;x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2,$$

где ξ_k — *координаты вектора* x *в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Этот способ приведения квадратичной формы к сумме квадратов обычно называется *методом Якоби.*

Замечание. В процессе доказательства теоремы мы пришли к некоторому вполне определенному базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Это, конечно, не означает, что базис, в котором квадратичная форма приводится к сумме квадратов, вообще единствен. Действительно, если взять другой исходный базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (даже просто, если занумеровать его векторы в другом порядке), то описанный выше процесс приведет нас, вообще говоря, к другому базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (не говоря уже о том, что базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ не обязательно искать в виде (3)).

Пример. Рассмотрим квадратичную форму

$$2\xi_1^2 + 3\xi_1\xi_2 + 4\xi_1\xi_3 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

в трехмерном пространстве с базисом

$$f_1 = (1,0,0), \quad f_2 = (0,1,0), \quad f_3 = (0,0,1).$$

Соответствующая ей билинейная форма имеет вид

$$A(x;y) = 2\xi_1\eta_1 + \frac{3}{2}\xi_1\eta_2 + 2\xi_1\eta_3 + \frac{3}{2}\xi_2\eta_1 + \xi_2\eta_2 + 2\xi_3\eta_1 + \xi_3\eta_3.$$

Вычислив определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3, получим, что они равны соответственно 2, $-\frac{1}{4}$ и $-4\frac{1}{4}$, т. е. ни один из них не нуль. Условия теоремы, таким образом, выполнены. Положим

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11}f_1 &&= (\alpha_{11}, 0, 0),\\ e_2 &= \alpha_{21}f_1 + \alpha_{22}f_2 &&= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, 0),\\ e_3 &= \alpha_{31}f_1 + \alpha_{32}f_2 + \alpha_{33}f_3 &&= (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}). \end{aligned}$$

Коэффициент α_{11} находим из условия

$$A(e_1; f_1) = 1,$$

т. е. $2\alpha_{11} = 1$, или $\alpha_{11} = \frac{1}{2}$ и, значит,

$$e_1 = \frac{1}{2} f_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right).$$

Для α_{21} и α_{22} имеем уравнения

$$A(e_2; f_1) = 0 \quad \text{и} \quad A(e_2; f_2) = 1,$$

или

$$2\alpha_{21} + \frac{3}{2}\alpha_{22} = 0; \quad \frac{3}{2}\alpha_{21} + \alpha_{22} = 1,$$

откуда

$$\alpha_{21} = 6, \quad \alpha_{22} = -8,$$

т. е. $e_2 = 6f_1 - 8f_2 = (6, -8, 0)$.

Наконец, для $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$ имеем систему уравнений

$$A(e_3; f_1) = 0, \quad A(e_3; f_2) = 0, \quad A(e_3; f_3) = 1,$$

т. е.

$$\begin{aligned} 2\alpha_{31} + \frac{3}{2}\alpha_{32} + 2\alpha_{33} &= 0, \\ \frac{3}{2}\alpha_{31} + \alpha_{32} \qquad\qquad &= 0, \\ 2\alpha_{31} \qquad\qquad + \alpha_{33} &= 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_{31} = \frac{8}{17}; \quad \alpha_{32} = -\frac{12}{17}; \quad \alpha_{33} = \frac{1}{17},$$

т. е.

$$e_3 = \frac{8}{17} f_1 - \frac{12}{17} f_2 + \frac{1}{17} f_3 = \left(\frac{8}{17}, -\frac{12}{17}, \frac{1}{17}\right).$$

Квадратичная форма в базисе e_1, e_2, e_3 имеет вид

$$A(x; x) = \frac{1}{\Delta_1}\zeta_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\zeta_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\zeta_3^2 = \frac{1}{2}\zeta_1^2 - 8\zeta_2^2 + \frac{1}{17}\zeta_3^2,$$

где $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ — координаты вектора x в базисе e_1, e_2, e_3.

2. Выше при доказательстве теоремы 1 мы не только построили базис, в котором данная квадратичная форма записывается как сумма квадратов координат, но и получили вполне определенные выражения для коэффициентов при этих квадратах, а именно:

$$\frac{1}{\Delta_1}, \ \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \ \ldots, \ \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n},$$

так что квадратичная форма имеет вид

$$\frac{1}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2. \tag{8}$$

Это дает нам возможность найти число положительных и отрицательных коэффициентов при квадратах. Именно, если Δ_{i-1} и Δ_i имеют одинаковые знаки, то коэффициент при ξ_i^2 положителен, если же их знаки различны, то этот коэффициент отрицателен, т. е. число отрицательных коэффициентов при квадратах равно числу перемен знака в ряду

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n.$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Число отрицательных коэффициентов при квадратах координат в каноническом виде* (8) *квадратичной формы равно числу перемен знака в последовательности определителей*

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \; ^{*}).$$

Пусть, в частности, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\ldots$, $\Delta_n > 0$. Тогда существует базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, в котором квадратичная форма имеет вид

$$A(x;x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2,$$

причем все $\lambda_i > 0$. Следовательно, $A(x;x) \geqslant 0$ для всякого x, и притом равенство

$$A(x;x) = \sum \lambda_i\xi_i^2 = 0$$

возможно, лишь если

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0.$$

Иначе говоря:

Если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\ldots$, $\Delta_n > 0$, то квадратичная форма $A(x;x)$ — положительно определенная.

---

*) Мы показали, как найти число положительных и отрицательных квадратов при определенном способе приведения квадратичной формы к сумме квадратов. В следующем параграфе будет показано, что это число — одно и то же при всех способах приведения формы к сумме квадратов.

Обратно, пусть $A(x;x)$ — положительно определенная квадратичная форма. Покажем, что в этом случае

$$\Delta_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

для этого покажем раньше, что $\Delta_k \neq 0$. Предположим противное, т. е. что

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A(f_1;f_1) & A(f_1;f_2) & \ldots & A(f_1;f_k) \\ A(f_2;f_1) & A(f_2;f_2) & \ldots & A(f_2;f_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A(f_k;f_1) & A(f_k;f_2) & \ldots & A(f_k;f_k) \end{vmatrix} = 0;$$

тогда одна из строк этого определителя есть линейная комбинация остальных, т. е.

$$\mu_1 A(f_1;f_i) + \mu_2 A(f_2;f_i) + \ldots + \mu_k A(f_k;f_i) = 0,$$

$i = 1, 2, \ldots, k$, где не все μ_j равны нулю. Но тогда

$$A(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_k f_k;\ f_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

а следовательно,

$$A(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_k f_k;\ \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_k f_k) = 0,$$

в то время как

$$\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_k f_k \neq 0,$$

что противоречит определению положительно определенной квадратичной формы.

Следовательно, согласно теореме 1, $A(x;x)$ можно привести к виду

$$A(x;x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^2,$$

где

$$\lambda_k = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Так как для положительно определенной квадратичной формы все $\lambda_k > 0$, то и все $\Delta_k > 0$. (Напомним, что $\Delta_0 = 1$.)

Итак, нами доказана

Теорема 3. *Пусть* $A(x;y)$ — *симметрическая билинейная форма и* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — *базис в* n-*мерном пространстве* R. *Для того чтобы квадратичная форма* $A(x;x)$ *была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n > 0.$$

Эта теорема называется *условием Сильвестра* положительной определенности квадратичной формы.

Мы могли бы взять вместо $f_1, f_2, \ldots, f_n$ какой-либо другой базис и написать условия положительной определенности формы $A(x;x)$ через векторы этого нового базиса. В частности, если мы в качестве нового базиса возьмем те же самые векторы $f_1, f_2, \ldots, f_n$, но только в другом порядке, то новыми минорами $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ будут различные главные миноры *) матрицы $\|a_{ik}\|$. Отсюда вытекает интересное

Следствие. *Если все главные миноры* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *матрицы* $\|a_{ik}\|$ *квадратичной формы* $A(x;x)$ *в данном базисе положительны, то вообще все главные миноры этой матрицы положительны.*

В самом деле, если все миноры Δ_k матрицы $\|a_{ik}\|$ положительны, то форма $A(x;x)$ положительно определенная. Пусть Δ — какой-либо главный минор матрицы $\|a_{ik}\|$ и пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — номера входящих в него строк и столбцов этой матрицы (так как минор — главный, то эти номера для строк и столбцов одни и те же). Переставив в исходном базисе векторы с номерами $p_1, p_2, \ldots, p_k$ на первое, второе и т. д., k-е место и записав в этом новом базисе условия положительной определенности формы, получим $\Delta > 0$.

3. Определители Грама. Результаты этого параграфа мы изложим сейчас для случая, когда в качестве квадратичной формы выбрано скалярное произведение в евклидовом пространстве, т. е.

$$A(x;x) \equiv (x,x).$$

*) Главными минорами называются те, при составлении которых выделяются столбцы с теми же номерами, что и строки.

Мы знаем, что скалярное произведение вектора с собой есть положительно определенная квадратичная форма, и обратно, каждая симметрическая билинейная форма, которой соответствует положительно определенная квадратичная форма, может быть принята за скалярное произведение. Поэтому всякая теорема о положительно определенных квадратичных формах является одновременно некоторой теоремой о векторах в евклидовом пространстве.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — векторы в евклидовом пространстве.

Определитель

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots & (e_1, e_k) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_2, e_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_k, e_1) & (e_k, e_2) & \ldots & (e_k, e_k) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Грама* этой системы векторов.

Т е о р е м а 4. *Определитель Грама любой системы векторов всегда больше или равен нулю. Он равен нулю тогда и только тогда, когда векторы* $e_1, e_2, \ldots, e_k$ *линейно зависимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ линейно независимы. Рассмотрим билинейную форму

$$A(x; y) \equiv (x, y),$$

где (x, y) — скалярное произведение векторов x и y. Тогда определитель Грама есть определитель Δ_k, рассмотренный в этом параграфе [см. формулу (7)]. Так как $A(x; x)$ — положительно определенная квадратичная форма, то, в силу теоремы 3, $\Delta_k > 0$.

Докажем, что в случае линейно зависимых векторов определитель Грама равен нулю. Действительно, если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ линейно зависимы, то хоть один из них, например e_k, есть линейная комбинация остальных:

$$e_k = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1}.$$

Поэтому последняя строка в определителе Грама есть линейная комбинация остальных. Значит, он равен нулю. Теорема полностью доказана.

В качестве примера рассмотрим определитель Грама двух векторов x и y:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix}.$$

Утверждение, что $\Delta_2 \geqslant 0$, превращается в этом случае в неравенство Коши–Буняковского.

П р и м е р ы. 1. В евклидовом трехмерном пространстве (или на плоскости) определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix}$$

имеет следующий геометрический смысл: Δ_2 равно квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах x и y. В самом деле, по определению скалярного произведения

$$(x,y) = (y,x) = |x||y|\cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами x и y. Поэтому

$$\Delta_2 = |x|^2|y|^2 - |x|^2|y|^2\cos^2\varphi = |x|^2|y|^2(1-\cos^2\varphi) = |x|^2|y|^2\sin^2\varphi,$$

т. е. Δ_2 равно квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах x и y.

2. В трехмерном пространстве объем параллелепипеда, построенного на векторах x, y, z, как показывается в аналитической геометрии, равен абсолютной величине определителя

$$v = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

где x_i, y_i, z_i — координаты векторов x, y, z в ортогональном базисе. Вычислим квадрат этого определителя, умножая строки на строки. Мы получим:

$$v^2=\begin{vmatrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 & x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3 \\ y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3 & y_1^2+y_2^2+y_3^2 & y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3 \\ z_1x_1+z_2x_2+z_3x_3 & z_1y_1+z_2y_2+z_3y_3 & z_1^2+z_2^2+z_3^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) & (x,z) \\ (y,x) & (y,y) & (y,z) \\ (z,x) & (z,y) & (z,z) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, определитель Грама векторов x, y, z равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Аналогично можно показать, что определитель Грама k векторов $x, y, \ldots, w$ в k-мерном пространстве *) равен квадрату определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_k \end{vmatrix}, \tag{9}$$

где x_i, соответственно y_i и т. д. — координаты вектора x, соответственно y и т. д. в каком-нибудь ортогональном базисе.

По аналогии с трехмерным пространством модуль определителя (9) называют объемом k-мерного параллелепипеда, определяемого векторами $x, y, \ldots, w$.

3. В пространстве функций (пример 4 § 2) определитель Грама пишется так:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2(t)\,dt & \int_a^b f_1(t)f_2(t)\,dt & \ldots & \int_a^b f_1(t)f_k(t)\,dt \\ \int_a^b f_2(t)f_1(t)\,dt & \int_a^b f_2^2(t)\,dt & \ldots & \int_a^b f_2(t)f_k(t)\,dt \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_a^b f_k(t)f_1(t)\,dt & \int_a^b f_k(t)f_2(t)\,dt & \ldots & \int_a^b f_k^2(t)\,dt \end{vmatrix},$$

*) Для нас, конечно, несущественно, что размерность пространства равна k. В действительности пространство R может иметь произвольное (даже бесконечное) число измерений, поскольку наши рассуждения могут быть отнесены к подпространству, порожденному векторами $x, y, \ldots, w$.

и доказанная нами теорема означает:

Определитель Грама системы функций $\geqslant 0$. *Для линейной зависимости системы функций необходимо и достаточно, чтобы их определитель Грама был равен нулю.*

§ 7. Закон инерции

1. Закон инерции. Приводя квадратичную форму $A(x;x)$ к сумме квадратов, можно по-разному выбирать тот базис, в котором эта форма приводится к сумме квадратов, т. е. к виду

$$A(x;x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2. \tag{1}$$

Все те λ_i, которые отличны от нуля, можно, заменяя векторы базиса им пропорциональными, сделать равными ± 1. Таким образом, канонический вид формы $A(x;x)$ в некотором соответствующим образом подобранном базисе вполне можно характеризовать количеством коэффициентов, равных соответственно нулю, $+1$ и -1. Так как мы можем по-разному выбирать тот базис, в котором квадратичная форма записывается в виде суммы квадратов, то возникает вопрос, зависит ли количество коэффициентов, равных нулю, $+1$ и -1, от выбора базиса или же эти числа зависят лишь от квадратичной формы $A(x;x)$ (являются ее инвариантами).

Например, если квадратичная форма $A(x;x)$ в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ имеет матрицу

$$\|a_{ik}\|,$$

где $a_{ik} = A(e_i; e_k)$ и все определители

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличны от нуля, то, как мы показали в п. 2 предыдущего параграфа, все λ_i в формуле (1) отличны от нуля и при приведении $A(x;x)$ к сумме квадратов по описанному там способу число отрицательных коэффициентов равно числу перемен знака в ряду определителей $1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Но мы могли взять другой исходный базис $e'_1, e'_2, \ldots \ldots, e'_n$ (например, хотя бы взять те же самые векторы, но в другом порядке); при этом получается другая матрица $\|a'_{ik}\|$ и другие определители

$$\Delta'_1,\ \Delta'_2,\ \ldots,\ \Delta'_n,$$

и заранее совершенно неясно, почему число перемен знака в обоих случаях должно быть одно и то же.

В этом параграфе будет доказана следующая теорема, называемая *законом инерции квадратичной формы*:

Т е о р е м а 1. *Если квадратичная форма приведена двумя различными способами (т. е. в двух различных базисах) к сумме квадратов, то число положительных коэффициентов, так же как и число отрицательных, в обоих случаях одно и то же.*

Так как общее число коэффициентов λ_i в каноническом виде квадратичной формы равно n, то отсюда непосредственно следует, *что число коэффициентов λ_i, равных нулю, также есть инвариант квадратичной формы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ квадратичная форма $A(x;x)$ имеет вид *)

$$A(x;x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \ldots - \xi_{p+q}^2; \qquad (2)$$

*) Коэффициенты λ_i в формуле (1) можно, как мы знаем, сделать равными ± 1 или 0. Те члены, для которых $\lambda_i = 0$, мы в формулах (2) и (3) опускаем.

при этом $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора x, т. е.

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_p e_p + \xi_{p+1} e_{p+1} + \ldots \\ \ldots + \xi_{p+q} e_{p+q} + \ldots + \xi_n e_n.$$

Пусть в базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$ эта же квадратичная форма имеет вид

$$A(x; x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \cdots + \eta_{p'}^2 - \eta_{p'+1}^2 - \ldots - \eta_{p'+q'}^2, \quad (3)$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — координаты вектора в базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Нам нужно доказать, что $p = p'$ и $q = q'$. Предположим, что это не так, например, пусть $p > p'$.

Рассмотрим подпространство R', состоящее из линейных комбинаций векторов $e_1, e_2, \ldots, e_p$. Оно имеет p измерений. Подпространство R'', состоящее из линейных комбинаций векторов $f_{p'+1}, f_{p'+2}, \ldots, f_n$, имеет $n - p'$ измерений. Так как $n - p' + p > n$ (ибо мы предположили, что $p > p'$), то существует вектор $x \neq 0$, лежащий на пересечении R' и R'', т. е. такой, что

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_p e_p$$

и

$$x = \eta_{p'+1} f_{p'+1} + \ldots + \eta_{p'+q'} f_{p'+q'} + \ldots + \eta_n f_n.$$

В базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ этот вектор имеет координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 0, \ldots, 0$, в базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$ он имеет координаты $0, 0, \ldots, 0, \eta_{p'+1}, \ldots, \eta_n$. Подставляя эти координаты в формулы (2) и (3), мы получим, с одной стороны,

$$A(x; x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_p^2 > 0 \quad (4)$$

(так как не все числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ равны нулю), а с другой стороны,

$$A(x; x) = -\eta_{p'+1}^2 - \eta_{p'+2}^2 - \ldots - \eta_{p'+q'}^2 \leqslant 0\ ^{*)}. \qquad (5)$$

Мы пришли к противоречию, следовательно, неравенство $p > p'$ невозможно. Точно так же доказывается невозможность неравенств $p < p'$, $q > q'$ и $q < q'$. Таким образом, закон инерции для квадратичных форм доказан.

2. Ранг квадратичной формы.

Определение 1. *Число отличных от нуля коэффициентов λ_i в каноническом виде квадратичной формы называется рангом квадратичной формы.*

Как уже было указано выше, из доказанного нами закона инерции непосредственно следует, что ранг квадратичной формы зависит только от самой формы, а не от способа ее приведения к каноническому виду. Посмотрим, как фактически найти ранг квадратичной формы. Для этого мы определим ранг квадратичной формы, не прибегая к ее каноническому виду. Попутно мы получим определение одного подпространства, тесно связанного с данной билинейной формой.

Определение 2. *Нулевым подпространством данной билинейной формы $A(x; y)$ мы называем совокупность R_0 векторов y, удовлетворяющих условию $A(x; y) = 0$ для любого вектора $x \in R$.*

Легко видеть, что R_0 действительно есть подпространство. В самом деле, пусть $y_1, y_2 \in R_0$, т. е. $A(x; y_1) = 0$ и $A(x; y_2) = 0$ для любого $x \in R$. Тогда $A(x; y_1 + y_2) = 0$ и $A(x; \lambda y_1) = 0$ для любых x и λ, т. е. $y = y_1 + y_2 \in R_0$ и $\lambda y_1 \in R_0$.

---

*) В формуле (5) нельзя вместо знака $\leqslant$ поставить знак $<$, так как, хотя среди чисел $\eta_{p'+1}, \ldots, \eta_n$ есть отличные от нуля, но возможно, что $\eta_{p'+1} = \eta_{p'+2} = \ldots = \eta_{p'+q'} = 0$.

Поставим вопрос: как найти подпространство R_0? Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — какой-либо базис в R. Для того чтобы вектор

$$y = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \ldots + \eta_n f_n \tag{6}$$

принадлежал нулевому подпространству, достаточно, чтобы

$$A(f_i; y) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Действительно, если эти равенства выполнены, то и для любого x имеем $A(x; y) = 0$, так как всякий вектор x есть линейная комбинация базисных векторов.

Подставляя в (7) вместо y его выражение (6), мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
A(f_1;\ \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \ldots + \eta_n f_n) &= 0,\\
A(f_2;\ \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \ldots + \eta_n f_n) &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
A(f_n;\ \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \ldots + \eta_n f_n) &= 0,
\end{aligned}$$

или, если положить $A(f_i; f_k) = a_{ik}$, к системе

$$\begin{aligned}
a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n &= 0,\\
a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \ldots + a_{2n}\eta_n &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \ldots + a_{nn}\eta_n &= 0.
\end{aligned}$$

Совокупность векторов y, координаты $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ которых являются решениями этой системы, и образует нулевое подпространство R_0. Как известно из теории линейных уравнений, размерность этого подпространства равна $n - r$, где r — ранг матрицы $\|a_{ik}\|$.

Мы можем теперь сделать следующий вывод:

Ранг матрицы $\|a_{ik}\|$ билинейной формы $A(x; y)$ в некотором базисе не зависит от выбора этого базиса (хотя сама матрица $\|a_{ik}\|$, как мы знаем из § 5, зависит от выбора базиса).

В самом деле, ранг этой матрицы равен $n - r_0$, где r_0 — размерность нулевого подпространства. Нулевое же подпространство ни от какой системы координат вообще не зависит.

Свяжем ранг матрицы квадратичной формы с рангом самой квадратичной формы. Рангом квадратичной формы мы назвали число отличных от нуля квадратов в каноническом виде квадратичной формы. Но в каноническом базисе матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

и ранг этой матрицы равен r, где r — число коэффициентов, отличных от нуля, т. е. равен рангу квадратичной формы. Так как ранг матрицы квадратичной формы, как мы доказали, не зависит от системы координат, то и в любой другой системе координат ранг матрицы квадратичной формы равен рангу самой квадратичной формы *).

Итак, нами доказана следующая

Теорема 2. *Матрицы квадратичной формы в различных системах координат имеют один и тот же ранг r. Этот ранг равен числу квадратов в каноническом виде формы, коэффициенты при которых отличны от нуля.*

Таким образом, для того чтобы найти ранг квадратичной формы, нужно вычислить ранг ее матрицы в какой-нибудь одной системе координат.

---

*) Пользуясь тем известным из теории матриц фактом, что ранг матрицы не меняется при умножении ее на любую неособенную матрицу, этот результат можно получить и непосредственно из выведенной в § 4 формулы преобразования матрицы билинейной формы при изменении базиса $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

§ 8. Комплексное n-мерное пространство

Во всех предыдущих параграфах мы всюду, кроме тех случаев, когда это особо оговаривалось, имели дело с пространством над полем вещественных чисел. Ряд изложенных выше результатов справедлив для любого основного поля. Для дальнейшего особое значение, кроме пространства над полем вещественных чисел, будет иметь пространство над полем комплексных чисел. Разберем содержание предыдущих параграфов применительно к этому случаю.

1. Комплексное линейное пространство. Как указывалось в § 1, все изложенные там результаты справедливы для пространства над любым полем и, значит, в частности для пространства над полем комплексных чисел.

2. Комплексное евклидово пространство. Комплексным евклидовым пространством называется комплексное линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, т. е. каждой паре векторов x и y поставлено в соответствие комплексное число (x, y), причем выполнены следующие аксиомы:

1° $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (под $\overline{(y, x)}$ мы понимаем число, комплексно сопряженное с (y, x));

2° $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

3° $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

4° (x, x) есть вещественное неотрицательное число, равное нулю лишь при $x = 0$.

Из аксиом 1° и 2° следует, что $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$. Действительно,

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda}\,\overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y).$$

Далее, справедливо равенство $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$. В самом деле,

$$(x, y_1 + y_2) = \overline{(y_1 + y_2, x)} = \overline{(y_1, x)} + \overline{(y_2, x)} = (x, y_1) + (x, y_2).$$

Аксиома 1° отличается от соответствующей аксиомы 1° для вещественного евклидова пространства; при переходе к комплексному пространству мы не могли бы сохранить аксиомы 1°, 2°, 4° вещественного евклидова пространства без изменений. В самом деле, если бы

$$(x, y) = (y, x),$$

то

$$(x, \lambda y) = \lambda(x, y).$$

Но тогда

$$(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2(x, x);$$

следовательно, в частности

$$(ix, ix) = -(x, x),$$

т. е. числа (x, x) и (y, y), где $y = ix$, были бы разных знаков, что противоречит аксиоме 4°.

Примеры комплексных евклидовых пространств. 1. Вектором пространства R мы назовем систему n комплексных чисел. Сложение векторов и умножение их на числа определим обычным образом. Скалярное произведение векторов

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \quad \text{и} \quad y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$$

зададим формулой

$$(x, y) = \xi_1\overline{\eta}_1 + \xi_2\overline{\eta}_2 + \ldots + \xi_n\overline{\eta}_n.$$

Мы предоставляем читателю проверить, что аксиомы 1°–4° выполнены. В частности, скалярное произведение вектора с самим собой задается формулой

$$(x, x) = \xi_1\overline{\xi}_1 + \xi_2\overline{\xi}_2 + \ldots + \xi_n\overline{\xi}_n = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \ldots + |\xi_n|^2.$$

2. Векторы в пространстве R определим, как и в примере 1. Скалярное произведение задаем формулой

$$(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\overline{\eta}_k,$$

где a_{ik} — заданные комплексные числа, удовлетворяющие условиям:

α) $a_{ik} = \overline{a}_{ki}$,

β) $\sum a_{ik}\xi_i\overline{\xi}_k \geqslant 0$ для любых $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и обращается в нуль лишь при $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$.

3. Векторами пространства R мы будем считать функции от t, заданные на отрезке $[a, b]$ и принимающие комплексные значения. Скалярное произведение двух таких функций определим формулой

$$(f(t), g(t)) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Можно проверить, что все аксиомы скалярного произведения при этом выполнены.

Длиной вектора x назовем $\sqrt{(x, x)}$. Из аксиомы 4° следует, что длина вектора неотрицательна и обращается в нуль лишь для нулевого вектора. Так как скалярное произведение двух векторов, вообще говоря, комплексно, то мы не будем определять угла между векторами, а введем лишь понятие ортогональности двух векторов.

Векторы x и y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.

3. Ортогональный базис. Изоморфизм комплексных евклидовых пространств. Ортогональным базисом в n-мерном комплексном евклидовом пространстве называется совокупность n попарно ортогональных не равных нулю векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Так же, как в § 3, доказывается, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы, т. е. образуют базис.

Существование ортогонального базиса в комплексном n-мерном евклидовом пространстве доказывается процессом ортогонализации, в точности совпадающим с приведенным в § 3.

Выразим скалярное произведение двух векторов x и y через их координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ в ортогональном нормированном базисе. Мы имеем:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n \quad \text{и} \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n.$$

Тогда

$$(x, y) = (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,\ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n) = \\ = \xi_1 \overline{\eta}_1 + \xi_2 \overline{\eta}_2 + \ldots + \xi_n \overline{\eta}_n.$$

(Ср. пример 1 этого параграфа.)

Выразим координаты ξ_i вектора x в ортогональном нормированном базисе через векторы базиса и сам вектор x. Имеем:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n.$$

Умножая скалярно обе части равенства на e_i, получим:

$$(x, e_i) = \xi_1 (e_1, e_i) + \xi_2 (e_2, e_i) + \ldots + \xi_i (e_i, e_i) + \ldots + \xi_n (e_n, e_i)$$

или

$$(x, e_i) = \xi_i.$$

Так же, как и в § 3, доказывается, что все комплексные евклидовы пространства данного числа измерений n изоморфны между собой.

4. Билинейные и квадратичные формы. Все определения (линейной функции, квадратичной формы и т. д.), введенные в § 4 (за исключением понятия положительной определенности), имеют смысл для линейного пространства над любым полем, в том числе и над полем комплексных чисел. Однако в случае комплексного линейного пространства можно еще по-другому ввести эти понятия; для нас именно этот второй способ будет даже более существенным.

Линейные функции первого и второго рода. Функция, ставящая в соответствие каждому вектору комплексное число, называется *линейной функцией первого рода*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$1^\circ \qquad f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$2^\circ \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Это совпадает с определением линейной функции в § 4.

Линейной функцией второго рода называется функция, удовлетворяющая условиям

$$1^\circ \qquad f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$2^\circ \qquad f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x).$$

Так же, как и в § 4, можно доказать, что всякая линейная функция первого рода может быть записана в виде

$$f(x) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n,$$

где ξ_i — координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а a_i — постоянные, $a_i = f(e_i)$.

Всякая же линейная функция второго рода может быть записана в виде

$$f(x) = b_1\overline{\xi}_1 + b_2\overline{\xi}_2 + \ldots + b_n\overline{\xi}_n.$$

Очевидно, что если $f(x)$ — линейная функция первого рода, то $\overline{f(x)}$ — линейная функция второго рода.

Как было определено выше (п. 2, § 4), билинейной функцией называется функция двух векторов $A(x; y)$, линейная по каждому из аргументов. Наличие в комплексном пространстве двух типов линейных функций приводит к существованию целых четырех типов билинейных функций — линейных первого рода и по x и по y, первого рода по x и второго рода по y, второго рода по x и первого по y и второго рода по обоим аргументам. Но третий и четвертый типы комплексно сопряжены соответственно ко второму и первому, а билинейные функции первого типа определяются в комплексном пространстве буквально так же, как и в вещественном. Поэтому мы остановимся подробнее лишь на билинейных формах второго типа. Для краткости будем называть их просто билинейными. Итак, введем следующее определение:

О п р е д е л е н и е 1. *Будем говорить, что $A(x;y)$ есть билинейная функция (форма) от векторов x и y, если*

1° *при фиксированном y $A(x;y)$ есть линейная функция первого рода от x;*

2° *при фиксированном x $A(x;y)$ есть линейная функция второго рода от y.* Или, иначе:

$$1^\circ \qquad A(x_1+x_2;y) = A(x_1;y) + A(x_2;y), \quad A(\lambda x;y) = \lambda A(x;y),$$

$$2^\circ \qquad A(x;y_1+y_2) = A(x;y_1) + A(x;y_2), \quad A(x;\mu y) = \overline{\mu} A(x;y).$$

Примером билинейной функции является скалярное произведение в комплексном евклидовом пространстве

$$A(x;y) = (x,y),$$

рассматриваемое как функция векторов x и y. Другим примером билинейной формы в комплексном пространстве является выражение

$$A(x;y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\overline{\eta}_k,$$

рассматриваемое как функция векторов

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n \quad \text{и} \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n.$$

Легко проверить, что условия, определяющие билинейную функцию, при этом выполнены.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — некоторый базис в n-мерном комплексном пространстве. Пусть $A(x;y)$ — билинейная форма, x и y можно записать в виде

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n.$$

Тогда

$$A(x;y) = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n;\ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n) = \\ = \sum_{i,k=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_k A(e_i; e_k).$$

Матрица $\|a_{ik}\|$ из чисел

$$a_{ik} = A(e_i; e_k)$$

называется *матрицей билинейной формы* $A(x;y)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Если в билинейной форме $A(x;y)$ положить $y = x$, то получится функция $A(x;x)$, называемая *квадратичной формой* (в комплексном пространстве). Справедливо следующее утверждение:

Всякая билинейная форма однозначно определяется своей квадратичной формой *).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A(x;x)$ — квадратичная форма, а x и y — произвольные векторы. Легко проверить, что имеет место тождество **)

$$A(x;y) = \frac{1}{4}\{A(x+y;x+y) + iA(x+iy;x+iy) - \\ - A(x-y;x-y) - iA(x-iy;x-iy)\}. \quad (1)$$

Выражение, стоящее справа в формуле (1), представляет собой комбинацию значений квадратичной формы для векторов $x+y$, $x-y$, $x+iy$ и $x-iy$. Слева стоит значение билинейной формы для произвольных векторов x и y. Таким образом, билинейная форма однозначно определяется своей квадратичной формой.

---

*) В отличие от определенных в § 4 форм в вещественном пространстве, для которых соответствующее утверждение справедливо лишь для симметрических билинейных форм.

**) Читатель должен помнить, что $A(x;\lambda y) = \overline{\lambda} A(x;y)$ и, следовательно, в частности, $A(x;iy) = -iA(x;y)$.

Определение 2. *Билинейная форма называется эрмитовой, если*

$$A(x; y) = \overline{A(y; x)}.$$

Это понятие является аналогом понятия симметрической билинейной формы в вещественном евклидовом пространстве.

Для того чтобы форма $A(x; y)$ была эрмитовой, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица $\|a_{ik}\|$ в каком-либо базисе удовлетворяла условию

$$a_{ik} = \overline{a}_{ki}.$$

Действительно, если форма $A(x; y)$ эрмитова, то

$$a_{ik} = A(e_i; e_k) = \overline{A(e_k; e_i)} = \overline{a}_{ki}.$$

Обратно, если $a_{ik} = \overline{a}_{ki}$, то

$$A(x; y) = \sum a_{ik}\xi_i\overline{\eta}_k = \overline{\sum a_{ki}\eta_k\overline{\xi}_i} = \overline{A(y; x)}.$$

Замечание. Если в каком-либо базисе матрица билинейной формы удовлетворяет условию $a_{ik} = \overline{a}_{ki}$, то это же условие выполнено для матрицы этой билинейной формы и в любом другом базисе. В самом деле, если в каком-либо базисе равенство $a_{ik} = \overline{a}_{ki}$ имеет место, то $A(x; y)$ является эрмитовой билинейной формой; но тогда и в любом другом базисе $a_{ik} = \overline{a}_{ki}$.

Если билинейная форма эрмитова, то соответствующая ей квадратичная форма тоже называется эрмитовой.

Для того чтобы билинейная форма $A(x; y)$ была эрмитовой, необходимо и достаточно, чтобы $A(x; x)$ было вещественно для любого вектора x.

Доказательство. Пусть форма $A(x; y)$ эрмитова, т. е. $A(x; y) = \overline{A(y; x)}$. Тогда, полагая $x = y$, получаем:

$$A(x; x) = \overline{A(x; x)},$$

т. е. число $A(x;x)$ равно своему сопряженному и, значит, вещественно. Обратно, пусть $A(x;x)$ вещественно для любого вектора x. Тогда $A(x+y;x+y)$, $A(x+iy;x+iy)$, $A(x-y;x-y)$, $A(x-iy;x-iy)$ вещественны, и поэтому из формулы (1) непосредственно видно, что выражения $A(x;y)$ и $A(y;x)$ являются комплексно сопряженными.

Следствие. *Квадратичная форма эрмитова в том и только в том случае, когда она принимает только вещественные значения.*

Действительно, только что было доказано, что для эрмитовости билинейной формы $A(x;y)$ необходимо и достаточно, чтобы $A(x;x)$ была вещественна для всех x.

Примером эрмитовой квадратичной формы является форма

$$A(x;x) = (x,x),$$

где (x,x) означает скалярное произведение вектора x с самим собой. Действительно, аксиомы 1°–3° скалярного произведения в комплексном евклидовом пространстве означают, что (x,y) есть эрмитова билинейная форма, и поэтому (x,x) есть эрмитова квадратичная форма.

Если, как и в § 4, назвать положительно определенной квадратичную форму, удовлетворяющую условию

$$A(x;x) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$

то комплексное евклидово пространство можно определить как комплексное линейное пространство, в котором задана положительно определенная эрмитова квадратичная форма.

Аналогично тому, как это сделано в вещественном пространстве, можно показать, что если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ суть матрицы билинейной формы $A(x;y)$ соответственно в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^* \boldsymbol{A} \boldsymbol{C},$$

где $\boldsymbol{C}$ — матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а $\boldsymbol{C}^*$ — матрица, транспонированная и комплексно-сопряженная к матрице $\boldsymbol{C}$.

5. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов.

Т е о р е м а 1. *Пусть $A(x;x)$ — эрмитова квадратичная форма в комплексном аффинном пространстве R. Тогда в R существует базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, в котором эта квадратичная форма имеет вид*

$$A(x;x) = \lambda_1 \xi_1 \overline{\xi}_1 + \lambda_2 \xi_2 \overline{\xi}_2 + \ldots + \lambda_n \xi_n \overline{\xi}_n,$$

где λ_i — вещественны.

Д о к а з а т е л ь с т в о можно получить, перенося почти дословно доказательство соответствующей теоремы в вещественном пространстве.

Однако ввиду того, что в § 5 это доказательство изложено без уяснения его геометрической стороны, мы здесь вкратце повторим это доказательство в ином, более геометрическом, изложении. Для этого мы будем один за другим выбирать векторы того базиса, в котором форма приводится к сумме квадратов.

Выберем вектор e_i так, что $A(e_1;e_1) \neq 0$; это возможно, так как в противном случае мы имели бы $A(x;x) = 0$ для любого x, а следовательно, в силу формулы (1), и $A(x;y) \equiv 0$. В $(n-1)$-мерном пространстве $R^{(1)}$, состоящем из векторов x, удовлетворяющих условию $A(e_1;x) = 0$, выберем вектор e_2 такой, что $A(e_2;e_2) \neq 0$, и т. д. Этот процесс продолжим до тех пор, пока мы не придем к подпространству $R^{(r)}$, в котором $A(x;y) \equiv 0$ ($R^{(r)}$ может оказаться состоящем лишь из нуля). Если $R^{(r)}$ отлично от нуля, то выберем в нем произвольный базис $e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_n$. Вместе с построенными векторами $e_1, e_2, \ldots, e_r$ они образуют базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ всего R.

По построению

$$A(e_i; e_k) = 0 \quad \text{для} \quad i < k,$$

а значит, в силу эрмитовости формы $A(x; y)$,

$$A(e_i; e_k) = 0 \quad \text{и для} \quad i > k,$$

т. е.

$$A(e_i; e_k) = 0 \quad \text{для} \quad i \neq k.$$

Поэтому, если

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$$

— произвольный вектор, то

$$A(x; x) = \xi_1 \overline{\xi}_1 A(e_1; e_1) + \xi_2 \overline{\xi}_2 A(e_2; e_2) + \ldots + \xi_n \overline{\xi}_n A(e_n; e_n).$$

При этом числа $A(e_i; e_i)$ вещественны, как значения эрмитовой квадратичной формы. Обозначая $A(e_i; e_i)$ через λ_i, имеем:

$$\begin{aligned} A(x; x) &= \lambda_1 \xi_1 \overline{\xi}_1 + \lambda_2 \xi_2 \overline{\xi}_2 + \ldots + \lambda_n \xi_n \overline{\xi}_n = \\ &= \lambda_1 |\xi_1|^2 + \lambda_2 |\xi_2|^2 + \ldots + \lambda_n |\xi_n|^2. \end{aligned}$$

6. Приведение эрмитовой квадратичной формы к сумме квадратов треугольным преобразованием. Пусть $A(x; x)$ — эрмитова квадратичная форма в комплексном линейном пространстве и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис. Мы будем предполагать, что определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где $a_{ik} = A(e_i; e_k)$, отличны от нуля. Тогда, так же как и в § 6, мы можем написать формулу для нахождения базисов, в которых квадратичная форма приводится к сумме квадратов. Эти формулы в точности совпадают с формулами (3) и (6) § 6. При этом сама квадратичная форма в новом базисе имеет вид

$$A(x;x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}|\xi_1|^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}|\xi_2|^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}|\xi_n|^2, \qquad (2)$$

где $\Delta_0 = 1$. Отсюда, в частности, следует, что определители $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ вещественны; действительно, если эрмитова квадратичная форма приведена к каноническому виду (2), то коэффициенты λ_i равны $A(e_i; e_i)$ и вещественны.

Упражнение. Доказать непосредственно, что если квадратичная форма $A(x;x)$ эрмитова, то определители $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_n$ вещественны.

Так же, как и в § 6, мы получаем, что *для того чтобы эрмитова квадратичная форма $A(x;x)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы построенные по ней определители $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ были положительны.*

Число отрицательных коэффициентов при квадратах в каноническом виде эрмитовой квадратичной формы равно числу перемен знака в последовательности определителей

$$1,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n.$$

7. Закон инерции. Имеет место теорема, доказательство которой ничем не отличается от доказательства соответствующей теоремы в § 7.

Теорема 2. *Если эрмитова квадратичная форма имеет в двух базисах канонический вид, то число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в обоих случаях одно и то же.*

Понятие ранга квадратичной формы, введенное нами в § 7 для случая вещественного пространства, переносится без изменений и на комплексный случай.