ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 9. Линейные преобразования и операции над ними

1. Основные определения. В предыдущей главе мы изучали функции в n-мерном линейном пространстве, принимающие численные значения (линейные функции, квадратичные и т. д.). Но в ряде случаев возникает потребность рассматривать функции другого вида, а именно, функции, которые точкам пространства ставят в соответствие снова точки того же пространства (а не числа). Простейшими среди функций такого рода являются линейные преобразования.

Определение 1. *Пусть каждому вектору x n-мерного пространства поставлен в соответствие вектор y этого же пространства. Функцию $y = A(x)$ мы назовем преобразованием пространства R.*

Преобразование A называется линейным, если выполнены следующие условия:

1° $$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2),$$
2° $$A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Там, где это не сможет привести к недоразумениям, вместо $A(x)$ мы будем писать Ax.

Примеры. 1. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство R и в нем преобразование, состоящее в повороте R вокруг какой-либо оси, проходящей через нуль. Каждому вектору x ставится в соответствие вектор Ax, полученный из него данным поворотом. Условия 1° и 2° проверяются без труда. Проверим, например, условие 1°. $A(x_1 + x_2)$ означает, что векторы x_1 и x_2 сначала складываются, а затем полученный вектор поворачивается. $Ax_1 + Ax_2$ означает, что векторы x_1 и x_2 сперва поворачиваются, а затем складываются. Ясно, что в обоих случаях результат один и тот же.

2. Пусть R' — некоторая плоскость в трехмерном пространстве R, проходящая через нуль. Поставим в соответствие каждому вектору x его проекцию $x' = Ax$ на эту плоскость. Условия 1° и 2° опять легко проверяются. Например, 1° означает, что проекция суммы равна сумме проекций.

3. Рассмотрим аффинное n-мерное пространство, в котором вектор определен как совокупность n чисел.

Пусть $\|a_{ik}\|$ — некоторая матрица. Поставим в соответствие каждому вектору

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

вектор

$$y = Ax = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n),$$

где η_i вычисляются по формулам

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k.$$

Условия 1° и 2°, определяющие линейное преобразование, проверяются без труда.

4. Рассмотрим n-мерное пространство, элементами которого являются многочлены степени $\leqslant n - 1$.

Положим

$$AP(t) = P'(t),$$

где $P'(t)$ — производная многочлена $P(t)$.

Это преобразование — линейное. Действительно,

1° $$(P_1(t) + P_2(t))' = P_1'(t) + P_2'(t),$$
2° $$(\lambda P(t))' = \lambda P'(t).$$

5. Рассмотрим пространство, в котором векторами являются непрерывные функции $f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Положим

$$Af(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Преобразование A — линейное. Действительно,

$$1^\circ\quad A(f_1 + f_2) = \int_0^t [f_1(\tau) + f_2(\tau)]\, d\tau = \int_0^t f_1(\tau)\, d\tau + \int_0^t f_2(\tau)\, d\tau = Af_1 + Af_2,$$

$$2^\circ\quad A(\lambda f) = \int_0^t \lambda f(\tau)\, d\tau = \lambda \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \lambda Af.$$

6. Рассмотрим то же пространство, что и в примере 5. Пусть $k(t, s)$ — непрерывная функция, заданная в квадрате $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Положим

$$\varphi(t) \equiv Af(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s)\, ds.$$

Проверьте сами, что это преобразование линейно.

Среди линейных преобразований особую роль играют следующие простые преобразования:

единичное преобразование E, ставящее в соответствие каждому вектору этот же самый вектор, т. е.

$$Ex = x;$$

нулевое преобразование O, ставящее в соответствие каждому вектору x нулевой вектор:

$$Ox = 0.$$

2. Связь между матрицами и линейными преобразованиями. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — некоторый базис в n-мерном пространстве R и A — линейное преобразование в R.

Для любых n векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ существует одно и только одно линейное преобразование A, такое что

$$Ae_1 = g_1, \quad Ae_2 = g_2, \quad \ldots, \quad Ae_n = g_n.$$

Докажем это. Покажем сначала, что преобразование A однозначно определяется векторами $Ae_1, Ae_2, \ldots \ldots, Ae_n$. Действительно, пусть

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n \tag{1}$$

— произвольный вектор из R. Тогда

$$\begin{aligned} Ax = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n) = \\ = \xi_1 Ae_1 + \xi_2 Ae_2 + \ldots + \xi_n Ae_n \end{aligned} \tag{2}$$

и, следовательно, Ax однозначно определяется по Ae_1, $Ae_2, \ldots, Ae_n$.

Теперь покажем, что для всяких векторов g_1, $g_2, \ldots, g_n$ существует линейное преобразование A, такое, что $Ae_i = g_i$. Для этого поставим в соответствие векторам e_i векторы g_i; произвольному же вектору $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$ поставим в соответствие вектор $\xi_1 g_1 + \ldots + \xi_n g_n$. Так как вектор x выражается через e_1 однозначно, то ему ставится в соответствие вполне определенный вектор Ax. Легко проверить, что так определенное преобразование A линейно.

Обозначим координаты вектора g_k в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ через $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$, т. е. положим

$$g_k = Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i. \tag{3}$$

Совокупность чисел a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ образует матрицу

$$\boldsymbol{A} = \|a_{ik}\|,$$

которую мы назовем *матрицей линейного преобразования A в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Итак, мы доказали, что при *заданном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ каждому линейному преобразованию A однозначно соответствует матрица* $\|a_{ik}\|$, и, обратно, *каждой матрице $\|a_{ik}\|$ однозначно отвечает линейное преобразование, определяемое формулами* (3), (1), (2).

Мы видим, таким образом, что линейные преобразования можно описывать с помощью матриц и матрицы являются тем аналитическим аппаратом, с помощью которого изучаются линейные преобразования в конечномерных пространствах.

Заметим, что при изменении базиса матрица, соответствующая данному линейному преобразованию, вообще говоря, изменится.

Примеры. 1. Пусть R — трехмерное пространство, A — линейное преобразование, состоящее в проектировании каждого вектора на плоскость XY. Примем за базис единичные векторы e_1, e_2, e_3, направленные по осям координат. Тогда

$$Ae_1 = e_1, \quad Ae_2 = e_2, \quad Ae_3 = 0,$$

т. е. матрица преобразования A в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение. Найти матрицу того же преобразования в базисе e'_1, e'_2, e'_3, где

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

2. Пусть E — единичное преобразование и $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots e_n$ — базис в R. Тогда

$$Ae_i = e_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. матрица единичного преобразования в любом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко также видеть, что матрица нулевого преобразования в любом базисе состоит сплошь из нулей.

3. Пусть R — пространство многочленов степени $\leqslant n-1$. Преобразование A — дифференцирование, т. е.

$$AP(t) = P'(t).$$

Выберем в R базис следующим образом:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = t, \quad e_3 = \frac{t^2}{2!}, \quad \ldots, \quad e_n = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Тогда

$$Ae_1 = 1' = 0,\ Ae_2 = t' = 1,\ Ae_3 = \left(\frac{t^2}{2}\right)' = t = e_2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ Ae_n = \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)' = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} = e_{n-1}.$$

Таким образом, матрица преобразования A в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть A — линейное преобразование, $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис в R и $\|a_{ik}\|$ — матрица преобразования A в этом базисе. Пусть

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \tag{4}$$

$$Ax = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_e. \tag{4$'$}$$

Найдем выражение координат $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ вектора Ax через координаты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ вектора x. Имеем:

$$\begin{aligned} Ax = A(\xi_1 e_1 &+ \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n) = \\ &= \xi_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + \\ &+ \xi_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n) + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \xi_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n) = \\ &= (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n)e_1 + \\ &+ (a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n)e_2 + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ (a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n)e_n. \end{aligned}$$

Следовательно, сравнивая с $(4')$, получаем:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n, \\ \eta_2 &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_n &= a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n, \end{aligned}$$

или короче:

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k. \tag{5}$$

Таким образом: *если линейное преобразование A имеет в данном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрицу $\|a_{ik}\|$, то базисные векторы преобразуются с помощью столбцов этой матрицы* [*формула* (3)], *а координаты произвольного вектора — с помощью ее строк* [*формула* (5)].

3. Сложение и умножение линейных преобразований. Линейные преобразования можно складывать и умножать.

Определение 2. *Произведением линейных преобразований A и B называется преобразование C, состоящее в последовательном выполнении сначала преобразования B, а затем преобразования A.*

Другими словами: $C = AB$ означает, что для любого x $Cx = A(Bx)$.

Произведение линейных преобразований есть линейное преобразование, т.е. удовлетворяет условиям 1° и 2° определения 1. Действительно,

$$C(x_1 + x_2) = A[B(x_1 + x_2)] = A(Bx_1 + Bx_2) = \\ = ABx_1 + ABx_2 = Cx_1 + Cx_2.$$

Первое равенство написано на основании определения произведения, второе на основании свойства 1° для B, третье в силу того же свойства для A и, наконец, четвертое опять-таки в силу определения произведения.

Аналогично показывается, что $C(\lambda x) = \lambda Cx$.

Если E — единичное преобразование, а A — произвольное, то легко проверить, что

$$AE = EA = A.$$

Как обычно, определяем степени преобразования A:

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \quad \ldots \quad \text{и т. д.}$$

Как и для чисел, полагаем, по определению, $A^0 = E$. Очевидно, что

$$A^{m+n} = A^m \cdot A^n.$$

Пример. R — пространство многочленов $P(t)$ степени не выше $n-1$. Определим в нем преобразование D формулой

$$DP(t) = P'(t),$$

где $P'(t)$ — производная многочлена $P(t)$. Тогда для любого $P(t)$

$$D^2P(t) = D(DP(t)) = (P'(t))' = P''(t).$$

Это равенство определяет преобразование D^2. Аналогично можно определить преобразование $D^3P(t) = P'''(t), \ldots$ Заметим, что в данном случае $D^n = 0$. Действительно, так как векторами пространства являются многочлены степени $\leqslant n-1$, то

$$D^nP(t) = P^{(n)}(t) = 0.$$

Упражнение. Выберем в пространстве многочленов степени не выше, чем $n-1$, базис, указанный в примере 3 п. 2 этого параграфа. Найти в этом базисе матрицы преобразований $D, D^2, D^3, \ldots$

Мы знаем, что при заданном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ каждому линейному преобразованию отвечает матрица. Пусть преобразованию A отвечает матрица $\|a_{ik}\|$, преобразованию B — матрица $\|b_{ik}\|$; найдем матрицу $\|c_{ik}\|$, отвечающую преобразованию $C = AB$. В силу определения матрицы преобразования C мы имеем:

$$Ce_k = \sum_i c_{ik}e_i. \tag{6}$$

Далее,

$$ABe_k = A\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk}e_j\right) = \sum_j b_{jk}Ae_j = \sum_{j,i} b_{jk}a_{ij}e_i. \tag{7}$$

Сравнивая коэффициенты при e_i в равенствах (6) и (7), получаем:

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}. \tag{8}$$

Мы видим, что элемент c_{ik} матрицы $\boldsymbol{C}$ есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы $\boldsymbol{A}$ на соответствующие элементы k-го столбца матрицы $\boldsymbol{B}$. Так определенная матрица называется произведением матрицы $\boldsymbol{A}$ на матрицу $\boldsymbol{B}$. Итак, если преобразованию A отвечает матрица $\|a_{ik}\|$, а преобразованию B — матрица $\|b_{ik}\|$, то произведению этих преобразований отвечает матрица $\|c_{ik}\|$, являющаяся произведением матриц $\|a_{ik}\|$ и $\|b_{ik}\|$. Произведение матриц вычисляется по формуле (8).

Определение 3. *Суммой линейных преобразований A и B называется такое преобразование C, которое каждому вектору x ставит в соответствие вектор $Ax + Bx$*; иначе говоря, $C = A + B$ означает, что $Cx = Ax + Bx$ для любого x.

Пусть преобразование C есть сумма преобразований A и B. Тогда, зная матрицы преобразований A и B, легко найти матрицу преобразования C. Действительно, пусть $\|a_{ik}\|$, соответственно $\|b_{ik}\|$, суть матрицы преобразования A, соответственно B, т. е.

$$Ae_k = \sum_i a_{ik} e_i, \quad Be_k = \sum_i b_{ik} e_i,$$

и $\|c_{ik}\|$ — матрица преобразования C, т. е.

$$Ce_k = \sum_i c_{ik} e_i.$$

Так как $C = A + B$, то

$$Ce_k = Ae_k + Be_k = \sum_i (a_{ik} + b_{ik}) e_i$$

и, следовательно,

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Матрица $\|a_{ik} + b_{ik}\|$ называется суммой матриц $\|a_{ik}\|$ и $\|b_{ik}\|$. Итак: *матрица суммы линейных преобразований равна сумме матриц, соответствующих отдельным слагаемым.*

Операции сложения и умножения линейных преобразований удовлетворяют обычным для сложения и умножения условиям, а именно:

1° $$A + B = B + A;$$

2° $$(A + B) + C = A + (B + C);$$

3° $$A(BC) = (AB)C;$$

4° $$\begin{cases} (A + B)C = AC + BC, \\ C(A + B) = CA + CB. \end{cases}$$

Заметим, что умножение линейных преобразований, вообще говоря, некоммутативно. Действительно, возьмем линейное преобразование A с матрицей $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и линейное преобразование B с матрицей $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. Так как

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

а

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix},$$

то

$$AB \neq BA.$$

Мы могли бы без большого труда доказать равенства 1°–4° непосредственно. Но в этом нет необходимости.

В самом деле, между линейными преобразованиями и матрицами установлено взаимно однозначное соответствие, причем сумме соответствует сумма, а произведению — произведение. Для матриц формулы 1°–4° доказываются в курсе алгебры; в силу установленного соответствия они автоматически переносятся на линейные преобразования.

Определим еще произведение линейного преобразования A на число λ; под преобразованием λA мы будем понимать преобразование, которое каждому вектору x ставит в соответствие вектор $\lambda(Ax)$. Ясно, что если линейному преобразованию A отвечает матрица $\|a_{ik}\|$, то преобразованию λA отвечает матрица $\|\lambda a_{ik}\|$.

Упражнение. Проверить, что множество всех линейных преобразований пространства R с введенными здесь операциями сложения и умножения на число образуют линейное пространство. Какова его размерность?

Умея находить сумму и произведение линейных преобразований, можно теперь найти любой многочлен от преобразования A. Пусть $P(t) = a_0t^m + a_1t^{m-1} + \ldots$ $\ldots + a_m$ — произвольный многочлен. Тогда под $P(A)$ мы понимаем линейное преобразование, определенное формулой

$$P(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \ldots + a_mE.$$

Пример. Рассмотрим пространство R, элементами которого являются функции, определенные на интервале (a, b) и имеющие производные всех порядков. В этом пространстве рассмотрим линейное преобразование D, которое каждой функции ставит в соответствие ее производную, т. е.

$$Df(t) = f'(t).$$

Пусть теперь нам задан многочлен $P(t) = a_0t^m + a_1t^{m-1} + \ldots + a_m$. Тогда $P(D)$ есть линейное преобразование, которое переводит функцию $f(t)$ в

$$P(D)f(t) = a_0f^{(m)}(t) + a_1f^{(m-1)}(t) + \ldots + a_mf(t).$$

В соответствии с введенными выше определениями сложения и умножения матриц многочлен от матрицы $\boldsymbol{A}$ мы задаем формулой

$$P(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{A}^m + a_1\boldsymbol{A}^{m-1} + \ldots + a_m\boldsymbol{E}.$$

П р и м е р. Предположим, что $\boldsymbol{A}$ — так называемая диагональная матрица, т. е. матрица, у которой на всех местах, кроме главной диагонали, стоят нули. Найдем $p(\boldsymbol{A})$. Мы имеем

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix};$$

тогда

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{A}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^m \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что если $P(t) = a_0t^m + \ldots + a_{m-1}t + a_m$, то

$$P(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

У п р а ж н е н и е. Пусть матрица $\boldsymbol{A}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти $P(\boldsymbol{A})$.

Можно определить не только многочлен от матрицы, но и вообще функцию от матрицы, например $e^{\boldsymbol{A}}$, $\sin\boldsymbol{A}$, и т. д.

Совокупность матриц n-го порядка образует, как мы уже упоминали в § 1 (стр. 9, пример 5), линейное пространство, если определить сумму и произведение матриц на число, как обычно. Это пространство имеет

n^2 измерений (каждая матрица задается системой n^2 чисел); поэтому всякие n^2+1 матриц линейно зависимы. Рассмотрим последовательность степеней некоторой матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^2,\ \ldots,\ \boldsymbol{A}^{n^2}.$$

Так как их n^2+1, то они линейно зависимы, т. е. существуют числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$ такие, что

$$a_0\boldsymbol{E} + a_1\boldsymbol{A} + a_2\boldsymbol{A}^2 + \ldots + a_{n^2}\boldsymbol{A}^{n^2} = 0.$$

Мы получили следующий интересный вывод: для каждой матрицы порядка n существует многочлен степени n^2 такой, что $P(\boldsymbol{A}) = 0$. Указанный здесь очень простой вывод существования многочлена $P(t)$, для которого $P(\boldsymbol{A}) = 0$, обладает двумя недостатками. Во-первых, не указан способ вычисления такого многочлена и, во-вторых, степень такого многочлена завышена. В действительности мы несколько позже покажем, что для каждой матрицы $\boldsymbol{A}$ существует многочлен степени n, очень просто связанный с матрицей и обращающийся в нуль при подстановке в него этой матрицы.

4. Обратное преобразование. Ядро и образ преобразования.

Определение 4. *Преобразование B называется обратным к A, если $AB = BA = E$, где E — единичное преобразование.*

В силу определения E это означает, что для любого x $B(Ax) = x$, т. е. если A переводит x в вектор Ax, то обратное преобразование B переводит вектор Ax обратно в вектор x. Преобразование, обратное преобразованию A, обозначается A^{-1}.

Не для всякого преобразования существует обратное. Например, преобразование, состоящее в проектировании трехмерного пространства на плоскость XY (см. пример 1 п. 1), очевидно, не имеет обратного.

С понятием обратного преобразования связано понятие обратной матрицы. Как известно, для каждой матрицы $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющей условию $\mathrm{Det}(\boldsymbol{A}) \neq 0$, можно определить матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$, удовлетворяющую условию

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}. \tag{9}$$

Эта матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$ называется обратной к матрице $\boldsymbol{A}$. Ее можно найти, решая систему линейных уравнений, эквивалентную матричному равенству (9). Элементы ее k-го столбца окажутся равными минорам k-й строки матрицы $\boldsymbol{A}$, деленным на ее определитель. Легко проверить, что так составленная матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$ удовлетворяет условиям (9).

Так как при заданном базисе между матрицами и линейными преобразованиями имеется взаимно однозначное соответствие, сохраняющее операцию умножения, то, *для того чтобы преобразование A имело обратное, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в каком-нибудь базисе имела определитель, отличный от нуля, т. е. имела бы ранг n.* Преобразование, имеющее обратное, называют *невырожденным.*

С произвольным линейным преобразованием A связаны два важных подпространства — *ядро* и *образ* этого преобразования.

Определение 5. *Совокупность M векторов вида Ax, где x пробегает все R, называется образом пространства R при преобразовании A.*

Другими словами, образ пространства — это множество тех векторов y, для которых уравнение $Ax = y$ имеет хотя бы одно решение. Ясно, что у обратимого преобразования образ есть все пространство.

Покажем, что *M есть подпространство пространства R.* Действительно, пусть $y_1 \in M$ и $y_2 \in M$.

Это значит, что существуют x_1 и x_2 такие, что $y_1 = Ax_1$ и $y_2 = Ax_2$. Но тогда $y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 =$

$= A(x_1 + x_2)$ и, значит, $y_1 + y_2 \in M$. Аналогично, если $y = Ax$, то $\lambda y = \lambda Ax = A\lambda x$, т. е. $\lambda y \in M$.

Следовательно, M является подпространством. Размерность этого подпространства называется рангом преобразования A.

Пример. Рассмотрим преобразование A, состоящее в проектировании трехмерного пространства R в плоскость XY (пример 1, п. 2). Очевидно, что образ этого преобразования есть плоскость XY.

Упражнение. Написать матрицу произвольного преобразования A в базисе, первые k векторов которого являются базисом в образе пространства при этом преобразовании.

Другим важным подпространством является ядро преобразования A, состоящее из всех векторов, переходящих при этом преобразовании в нуль.

Определение 6. *Совокупность N векторов x таких, что $Ax = 0$, называется ядром преобразования A.*

Ясно, что ядро также есть подпространство пространства R. Действительно, если $Ax_1 = 0$ и $Ax_2 = 0$, то $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0$. Точно так же, если $Ax = 0$, то $A\lambda x = \lambda Ax = 0$, т. е. N есть подпространство.

Очевидно, что если A — невырожденное преобразование, то его ядро состоит из нуля (т. е. система однородных уравнений с отличным от нуля определителем имеет только нулевое решение).

Упражнение. Написать матрицу преобразования A в базисе, первые k векторов которого есть базис ядра.

Пример. Пусть R — пространство многочленов степени $\leqslant n-1$ и преобразование A — дифференцирование, т. е.

$$AP(t) = P'(t).$$

Ядро этого преобразования состоит из многочленов $P(t)$, для которых $P'(t) = 0$, т. е. из констант. Таким образом, ядро N здесь одномерно.

Образ A состоит из многочленов вида $P'(t)$, где $P(t)$ имеет степень $\leqslant n-1$, т. е. M состоит из всех многочленов степени $\leqslant n-2$. Размерность M равна $n-1$.

Рассмотрим теперь преобразование A^2, которое задается формулой

$$A^2P(t) = P''(t).$$

Для преобразования A^2 ядро N состоит из всех многочленов не выше первой степени, а образ из всех многочленов степени $\leqslant n-3$ (проверьте!), т. е. N двумерно, а M имеет размерность $n-2$.

Аналогично у преобразования A^3 ядро трехмерно, а образ имеет размерность $n-3$ и т. д.

Наконец, преобразование A^n в этом случае есть нулевое преобразование. Его ядро $N = R$, а образ состоит только из нуля.

На этом примере видно, что при возведении преобразования в степень его ядро расширяется, а образ, наоборот, уменьшается. При этом размерность ядра как бы характеризует степень вырожденности преобразования. Чем больше ядро, тем меньше образ и тем «более вырожденным» является преобразование. Крайними случаями являются нулевое преобразование, ядром которого является все R, а образ равен нулю, и, с другой стороны, обратимое преобразование, образом которого является все пространство, а ядро равно нулю.

При этом сумма размерностей ядра и образа всегда остается равной размерности всего пространства.

Имеет место общая теорема.

Теорема. *Пусть A — произвольное линейное преобразование n-мерного пространства R. Сумма* *размерностей ядра и образа преобразования A равна размерности всего пространства.*

Доказательство. Предположим, что ядро N преобразования A имеет размерность k. Выберем в N базис из векторов $e_1, \ldots, e_k$ и дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ во всем пространстве R.

Рассмотрим векторы $Ae_{k+1}, \ldots, Ae_n$. Множество линейных комбинаций этих векторов образует подпространство, которое совпадает с M — образом преобразования A.

Действительно, пусть y — произвольный вектор из M. Тогда, по определению, существует вектор x такой, что $y = Ax$. Так как $e_1, \ldots, e_n$ — базис в R, то $x = \gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_n e_n$. Но так как $Ae_1 = \ldots = Ae_k = 0$ ($e_1, \ldots, e_k$ — базис в ядре), то $y = Ax = \gamma_{k+1} Ae_{k+1} + \ldots \ldots + \gamma_n Ae_n$.

Покажем, что $n-k$ векторов $Ae_{k+1}, \ldots, Ae_n$ линейно независимы.

Действительно, пусть существуют числа α_j, не равные одновременно нулю и такие, что $\alpha_1 Ae_{k+1} + \ldots \ldots + \alpha_{n-k} Ae_n = 0$. Рассмотрим вектор $x = \alpha_1 e_{k+1} + \ldots \ldots + \alpha_{n-k} e_n$. Тогда $Ax = A(\alpha_1 e_{k+1} + \ldots + \alpha_{n-k} e_n) = \alpha_1 Ae_{k+1} + \ldots + \alpha_{n-k} Ae_n = 0$, т. е. x принадлежит ядру. Мы пришли к противоречию, поскольку, с одной стороны, x как элемент ядра представим как линейная комбинация первых k базисных векторов, а, с другой стороны, $x = \alpha_1 e_{k+1} + \ldots + \alpha_{n-k} e_n$ был задан как линейная комбинация $e_{k+1}, \ldots, e_n$. Это противоречит единственности представления вектора x через векторы базиса. Следовательно, векторы $Ae_{k+1}, \ldots, Ae_n$ линейно независимы.

Мы показали, что существует $n-k$ линейно независимых векторов таких, что любой вектор образа есть их линейная комбинация, т. е. размерность образа равна $n-k$, что и требовалось доказать.

5. Связь между матрицами линейного преобразования в различных базисах. Одно и то же линейное преобразование может в различных базисах иметь различные матрицы (см., например, упражнение к примеру 1 п. 3 этого параграфа). Выясним, как изменяется матрица линейного преобразования A при переходе от одного базиса к другому.

Пусть в R даны два базиса: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Матрицу перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \ldots, f_n$ обозначим через $\boldsymbol{C}$, т. е. положим

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n, \\ f_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Введем вспомогательное линейное преобразование C, положив

$$Ce_i = f_i.$$

Его матрица в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ согласно формулам (2) и (3) п. 3 будет $\boldsymbol{C}$.

Обозначим матрицу линейного преобразования A в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ через $\boldsymbol{A} = \|a_{ik}\|$, а в базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$ через $\boldsymbol{B} = \|b_{ik}\|$. Иначе говоря,

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}e_i, \tag{10$'$}$$

$$Af_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}f_i. \tag{10$''$}$$

Наша цель — выразить матрицу $\boldsymbol{B}$ через матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$. Заменим для этого в правой и левой частях формулы ($10''$) f_k через Ce_k и f_i через Ce_i. Мы будем иметь:

$$ACe_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} Ce_i.$$

Применим к обеим частям этого равенства преобразование C^{-1} (оно существует, так как векторы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно независимы). Мы получим:

$$C^{-1}ACe_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} e_i.$$

Мы видим, что интересующая нас матрица $\|b_{ik}\|$ есть также матрица преобразования $C^{-1}AC$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. При перемножении преобразований их матрицы в данном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ перемножаются. Поэтому

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}. \tag{11}$$

Матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, связанные соотношением (11), называются *подробными*.

Итак, *матрица* $\boldsymbol{B}$ *преобразования* A *в базисе* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *получается из матрицы* $\boldsymbol{A}$ *преобразования* A *в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *по формуле* (11), *где* $\boldsymbol{C}$ — *матрица перехода от базиса* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *к базису* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (*формула* (10)).

6. Линейное преобразование пространства R_1 в пространство R_2. Определяя линейное преобразование A, мы фактически нигде не пользовались тем, что векторы x и Ax принадлежат одному и тому же пространству. Поэтому, повторяя дословно определение 1 п. 1, можно определить также линейное преобразование пространства R_1 в другое пространство R_2.

Все сказанное в этом параграфе без каких-либо существенных изменений переносится на такие преобразования. Остановимся на операциях сложения и умножения линейных преобразований.

Пусть A и B — линейные преобразования пространства R_1 в пространство R_2. Тогда, как и в п. 3, можно определить их сумму $A + B$: $C = A + B$ означает, что $Cx = Ax + Bx$ для любого $x \in R_1$.

Произведение AB в этом случае смысла уже не имеет. Однако мы можем определить произведение AB в том случае, когда B — линейное преобразование пространства R_1 в R_2, а A — линейное преобразование пространства R_2 в R_3. В этом случае AB есть, по определению, линейное преобразование пространства R_1 в R_3, состоящее в последовательном выполнении сначала преобразования B, отображающего R_1 в R_2, а затем преобразования A, отображающего R_2 в R_3.

Введенные операции сложения и умножения линейных преобразований удовлетворяют ассоциативному и дистрибутивному законам.

З а д а ч а. Установить, как изменяется матрица линейного преобразования R_1 в R_2 при замене базисов в R_1 и R_2.

§ 10. Инвариантные подпространства, собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

1. Инвариантные подпространства. Пусть R_1 — подпространство пространства R и A — линейное преобразование в R. Вообще говоря, для произвольного $x \in R_1$, $Ax \notin R_1$ *). Например, если R — евклидова плоскость, R_1 — произвольная прямая и A — поворот на угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$, то очевидно, что для любого $x \neq 0$ и принадлежащего R_1, $Ax \notin R_1$. Однако может случиться,

*) Запись $Ax \notin R_1$ означает, что вектор Ax не принадлежит подпространству R_1.

что некоторые подпространства переходят сами в себя при линейном преобразовании A. Введем следующие определения.

Определение 1. *Пусть A — линейное преобразование пространства R. Линейное подпространство R_1 называется инвариантным относительно A, если для каждого вектора x из R_1 вектор Ax также принадлежит R_1.*

При изучении линейного преобразования A в инвариантном подпространстве R_1 можно, таким образом, рассматривать это преобразование только в R_1.

Тривиальными инвариантными подпространствами являются подпространство, состоящее лишь из нуля, и все пространство.

Примеры. 1. Пусть R — трехмерное пространство и A — поворот вокруг некоторой оси, проходящей через нуль. Инвариантными подпространствами при этом являются: а) ось вращения (одномерное инвариантное подпространство), б) плоскость, проходящая через начало координат и ортогональная к этой оси (двумерное инвариантное подпространство).

2. R — плоскость. Преобразование A заключается в растяжении плоскости в λ_1 раз вдоль оси X и в λ_2 раз вдоль оси Y. Иначе говоря, если вектор z равен $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, то $Az = \lambda_1\xi_1 e_1 + \lambda_2\xi_2 e_2$, где e_1, e_2 — единичные векторы на осях. Координатные оси X и Y являются в этом случае одномерными инвариантными подпространствами. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то A является преобразованием подобия с коэффициентом подобия λ. В этом случае каждая прямая, проходящая через начало координат, является инвариантным подпространством.

Упражнение. Показать, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то в примере 2 нет никаких других одномерных инвариантных подпространств, кроме указанных выше.

3. R — совокупность многочленов степени не выше $n-1$. Линейное преобразование A — дифференцирование, т. е.

$$AP(t) = P'(t).$$

Совокупность многочленов, степень которых меньше или равна k, где $k \leqslant n-1$, образует инвариантное подпространство. Действительно, дифференцируя многочлен степени $\leqslant k$, мы получим многочлен, степень которого снова не превосходит k.

Упражнение. Доказать, что в примере 3 никаких инвариантных подпространств, кроме указанных, нет.

4. R — произвольное n-мерное пространство. Линейное преобразование A задается в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрицей вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В этом случае подпространство R_1, порожденное векторами $e_1, e_2, \ldots, e_k$, инвариантно. Доказательство этого мы предоставляем читателю. Если, кроме того,

$$a_{i,k+1} = \ldots = a_{in} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

то подпространство, порожденное векторами e_{k+1}, $e_{k+2}, \ldots, e_n$, также будет инвариантным.

5. R — произвольное n-мерное пространство, A — произвольное линейное преобразование в этом пространстве.

Тогда *образ M и ядро N преобразования A являются инвариантными подпространствами.* Действительно, пусть $y \in M$. Тогда $Ay \in M$ в силу определения M.

Точно так же, если $x \in N$, то $Ax = 0 \in N$.

Этот простой факт будет использован в дальнейшем при приведении произвольного преобразования к простейшему виду.

Пусть дано пространство R и линейное преобразование A в этом пространстве. Предположим, что R разложимо в прямую сумму двух инвариантных подпространств R_1 размерности k и R_2 размерности $n-k$ (см. стр. 27). Тогда в базисе $e_1, \ldots, e_n$, первые k векторов которого лежат в R_1, а последние $(n-k)$ — в R_2, матрица преобразования A состоит из двух клеток размерностей k и $n-k$, стоящих на диагонали, а на остальных местах стоят нули, т. е.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & \ldots & a_{2k} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

2. Собственные векторы и собственные значения. Особую роль в дальнейшем будут играть одномерные инвариантные подпространства.

Пусть R_1 — одномерное подпространство, порожденное вектором $x \neq 0$ (т. е. совокупность векторов вида αx). Ясно, что для того чтобы R_1 было инвариантным, необходимо и достаточно, чтобы вектор Ax лежал в R_1, т. е. был кратен вектору x:

$$Ax = \lambda x.$$

Определение 2. *Вектор $x \neq 0$, удовлетворяющий соотношению $Ax = \lambda x$, называется собственным вектором, а соответствующее число λ —*

собственным значением (характеристическим числом) линейного преобразования A.

Итак, если x — собственный вектор, то векторы αx образуют одномерное инвариантное подпространство.

Обратно, все отличные от нуля векторы одномерного инвариантного подпространства являются собственными.

Теорема 1. *В комплексном пространстве* *) R *всякое линейное преобразование A имеет хотя бы один собственный вектор.*

Доказательство. Выберем в R какой-либо базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Линейному преобразованию A в этом базисе соответствует некоторая матрица $\|a_{ik}\|$.

Пусть

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$$

— произвольный вектор из R. Тогда координаты $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ вектора Ax выражаются следующими формулами (см. п. 2 § 9):

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n, \\
\eta_2 &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_n &= a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n.
\end{aligned}$$

Условие того, что вектор собственный, т. е. равенство

$$Ax = \lambda x,$$

---

*) Доказательство теоремы пригодно для пространства над любым алгебраическим замкнутым полем, так как используется лишь существование решения у уравнения (2).

записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n &= \lambda\xi_1, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n &= \lambda\xi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n &= \lambda\xi_n \end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n &= 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-\lambda)\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\xi_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Для доказательства теоремы нужно доказать, таким образом, что существуют число λ и числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, не все равные нулю, удовлетворяющие системе (1).

Условием существования ненулевого решения однородной системы (1) является равенство нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Мы получили уравнение степени n относительно λ. Это уравнение имеет хотя бы один (вообще говоря, комплексный) корень λ_0.

Подставив в систему (1) вместо λ корень λ_0, мы получим однородную систему линейных уравнений, определитель которой равен нулю, и имеющую, следовательно, ненулевое решение $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}$. Тогда вектор

$$x^{(0)} = \xi_1^{(0)} e_1 + \xi_2^{(0)} e_2 + \ldots + \xi_n^{(0)} e_n$$

будет собственным вектором, а λ_0 — собственным значением, так как

$$Ax^{(0)} = \lambda_0 x^{(0)}.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Так как доказательство теоремы остается в силе, если преобразование A рассматривать не во всем пространстве, а в любом его инвариантном подпространстве, то *в любом инвариантном подпространстве существует хотя бы один собственный вектор преобразования* A.

Многочлен, стоящий в левой части уравнения (2), называется *характеристическим многочленом* матрицы преобразования A, а само уравнение (2) *характеристическим* или *вековым уравнением* этой матрицы. В процессе доказательства теоремы мы показали, что корни характеристического многочлена суть собственные значения преобразования A и, обратно, собственные значения преобразования A суть корни характеристического многочлена.

Так как собственные значения преобразования определены независимо от выбора базиса, то, следовательно, и корни характеристического многочлена также не зависят от выбора базиса. Мы покажем далее несколько больше *), а именно, что *сам характеристический многочлен не зависит от выбора базиса*, и поэтому мы в дальнейшем будем называть его *характеристическим многочленом преобразования* A (а не характеристическим многочленом матрицы преобразования A).

3. Среди линейных преобразований в известном смысле простейшими являются те, которые имеют n линейно независимых собственных векторов.

Пусть A — такое преобразование, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — его линейно независимые собственные векторы, т. е.

$$Ae_i = \lambda_i e_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

*) Из того, что корни характеристического многочлена одни и те же для разных базисов, еще не следует, что сам многочлен не зависит от выбора базиса; априори возможно, что в разных базисах кратности этих корней различны.

Примем $e_1, e_2, \ldots, e_n$ за базис в R. Равенства

$$\begin{aligned} &Ae_1 = \lambda_1 e_1, \\ &Ae_2 = \lambda_2 e_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &Ae_n = \lambda_n e_n \end{aligned}$$

означают, что матрица преобразования A в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(является *диагональной матрицей*). Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Если линейное преобразование A имеет n линейно независимых собственных векторов, то, выбрав их за базис, мы приведем матрицу преобразования A к диагональной форме. Обратно, если в некотором базисе матрица преобразования диагональна, то все векторы этого базиса являются собственными векторами.*

Замечание. Отметим один важный случай, когда линейное преобразование заведомо имеет n линейно независимых собственных векторов. Предварительно заметим следующее:

Если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — собственные векторы преобразования A и соответствующие им собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, попарно различны, то $e_1, e_2, \ldots, e_k$ линейно независимы.

Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть наше утверждение верно для $k-1$ векторов; докажем его для k векторов. Предположим противное, т. е. предположим, что

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k = 0, \tag{3}$$

причем хотя бы один из коэффициентов α_i, например α_1, отличен от нуля.

Применим к обеим частям равенства (3) преобразование A. Получим

$$A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k) = 0,$$

т. е.

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \alpha_2 \lambda_2 e_2 + \ldots + \alpha_k \lambda_k e_k = 0.$$

Вычитая из последнего равенства равенство (3), умноженное на λ_k, мы получим выражение

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)e_2 + \ldots \\ \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e_{k-1} = 0,$$

где первый коэффициент по-прежнему отличен от нуля (так как по условию $\lambda_i \neq \lambda_k$ при $i \neq k$). Мы пришли к противоречию, так как по индуктивному предположению векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ линейно независимы. Отсюда непосредственно следует, что:

Если характеристический многочлен преобразования A имеет n различных корней, то матрица преобразования A может быть приведена к диагональной форме.

Действительно, каждому корню λ_k характеристического уравнения отвечает хотя бы один собственный вектор. Так как соответствующие этим векторам собственные значения (корни характеристического уравнения) все различны, то, согласно доказанному выше, мы имеем n линейно независимых собственных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Если векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ принять за базис, то матрица преобразования A будет диагональной.

Если характеристический многочлен имеет кратные корни, то число линейно независимых собственных векторов может быть меньше, чем n. Например, преобразование A в пространстве многочленов степени не выше $n-1$, ставящее в соответствие каждому многочлену его производную, имеет лишь одно собственное значение $\lambda = 0$ и один (с точностью до пропорциональности) собственный вектор $P(t) = \text{const}$. В самом деле, для любого многочлена $P(t)$ степени $k > 0$ многочлен $P'(t)$ имеет степень $k-1$, и потому равенство $P'(t) = \lambda P(t)$ возможно лишь, если $\lambda = 0$ и $P(t) = \text{const}$. Следовательно, для этого преобразования не существует базиса, в котором ему соответствовала бы диагональная матрица.

В главе III будет доказано, что если λ есть m-кратный корень характеристического уравнения, то ему отвечает не более чем m линейно независимых собственных векторов.

Ниже (в §§ 12 и 13) мы укажем некоторые классы линейных преобразований, приводимых к диагональной форме. Вопросу о том, к какому простейшему виду может быть приведено произвольное линейное преобразование, будет посвящена глава III.

4. Характеристический многочлен. В п. 2 мы уже определили характеристический многочлен преобразования A как определитель матрицы $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{A}$ — матрица преобразования A, а $\boldsymbol{E}$ — единичная матрица. Докажем, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. Действительно, при переходе к другому базису матрица $\boldsymbol{A}$ преобразования A принимает вид $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, где $\boldsymbol{C}$ есть матрица перехода к новому базису. Таким образом, в новом базисе характеристический многочлен есть определитель матрицы $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} - \lambda\boldsymbol{E}$. Но

$$|\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{C}|,$$

и так как определитель произведения равен произведению определителей, то

$$|\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} - \lambda\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{C}^{-1}||\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}||\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}|,$$

и утверждение доказано. Таким образом, мы в дальнейшем можем говорить о характеристическом многочлене преобразования A (а не о характеристическом многочлене матрицы преобразования A).

Упражнения. 1. Найти характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $(-1)^n(\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \ldots - a_n)$.

Выразим характеристический многочлен явно через элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ преобразования A. Вычислим сначала более общий определитель (который позже в § 12 нам тоже встретится): $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{B}|$, где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — две заданные матрицы. Нам нужно, следовательно, вычислить следующий многочлен относительно λ:

$$Q(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \ldots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \ldots & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Так как в этом определителе каждый столбец есть сумма двух столбцов, то определитель может быть разложен на сумму определителей. Свободный член в $Q(\lambda)$ есть

$$q_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Ясно, что *коэффициент при* $(-\lambda)^k$ *в* $Q(\lambda)$ *равен сумме определителей, каждый из которых получается заменой в* (4) *каких-либо* k *столбцов матрицы* $\|a_{ik}\|$ *соответствующими столбцами матрицы* $\|b_{ik}\|$.

Перейдем теперь к вычислению $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$. Для вычисления коэффициента при $(-\lambda)^k$ мы должны взять сумму определителей, каждый из которых получается заменой k столбцов матрицы $\|a_{ik}\|$ k столбцами единичной матрицы. Но каждый такой определитель есть главный минор $(n-k)$-го порядка матрицы $\|a_{ik}\|$. Таким образом, окончательно, *характеристический многочлен* $P(\lambda)$ *матрицы* $\boldsymbol{A}$ *имеет вид*

$$P(\lambda)=(-1)^n(\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}-\ldots\pm p_n),$$

где p_1 *есть сумма диагональных элементов,* p_2 — *сумма главных миноров второго порядка и т. д.; наконец* p_n *есть определитель матрицы* $\boldsymbol{A}$.

Числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$, построенные по матрице $\boldsymbol{A}$ преобразования A, зависят лишь от самого преобразования, поскольку этим свойством, как мы показали, обладает характеристический многочлен. Среди коэффициентов p_i наибольшую роль играют p_n — определитель матрицы $\boldsymbol{A}$ и p_1 — сумма диагональных элементов матрицы $\boldsymbol{A}$. *Сумма диагональных элементов матрицы называется следом матрицы* $\boldsymbol{A}$. След матрицы $\boldsymbol{A}$ обозначается $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ (от английского слова trace — след). Ясно, что след матрицы равен сумме всех корней характеристического многочлена (собственных значений), причем каждый корень считается с той кратностью, с которой он входит в характеристический многочлен.

Упражнения. 1. Показать, что если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — матрицы n-го порядка, то

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}.$$

2. Показать, что если $\boldsymbol{C}$ — невырожденная матрицы n-го порядка, то для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ n-го порядка имеем:

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}.$$

Вычисление собственных векторов линейного преобразования требует знания собственных значений и, следовательно, решения уравнения n-й степени — характеристического уравнения. В одном важном частном случае корни характеристического многочлена можно найти непосредственно.

Если матрица преобразования A треугольная, т. е. имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

то собственными значениями будут числа, стоящие на диагонали, т. е. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

В самом деле, характеристический многочлен данной матрицы вычисляется непосредственно и есть

$$P(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda),$$

и следовательно, его корни — $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Упражнение. Найти собственные векторы, отвечающие собственным значениям a_{11}, a_{22}, a_{33} треугольной матрицы (5).

В заключение этого пункта укажем одно интересное свойство характеристического многочлена. Как мы уже указывали в п. 3 предыдущего параграфа, существует такой многочлен $P(t)$, что если в него подставить вместо t матрицу $\boldsymbol{A}$, то он обратится в нуль. Мы покажем сейчас, что одним из таких многочленов является характеристический многочлен. Докажем предварительно лемму:

Лемма. *Пусть многочлен*

$$P(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_m$$

и матрица $\boldsymbol{A}$ связаны соотношением

$$P(\lambda)\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{C}(\lambda), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{C}(\lambda)$ — многочлен от λ, коэффициенты которого являются матрицами, т. е.

$$\boldsymbol{C}(\lambda) = \boldsymbol{C}_0\lambda^{m-1} + \boldsymbol{C}_1\lambda^{m-2} + \dots + \boldsymbol{C}_{m-1}, \quad \boldsymbol{C}_i \text{ — матрицы.}$$

Тогда $P(\boldsymbol{A}) = 0$.

Заметим, что эта лемма является обобщением на многочлены с матричными коэффициентами теоремы Безу.

Доказательство. Мы имеем:

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{C}(\lambda)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{m-1}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{m-2}-\boldsymbol{C}_{m-1})\lambda+ \\ +(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{m-3}-\boldsymbol{C}_{m-2})\lambda^2+\ldots-\boldsymbol{C}_0\lambda^m. \quad (7)$$

Сравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях λ в обеих частях равенства (6), мы получаем последовательность равенств:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{m-1} &&= a_m\boldsymbol{E},\\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{m-2}-\boldsymbol{C}_{m-1} &&= a_{m-1}\boldsymbol{E},\\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{m-3}-\boldsymbol{C}_{m-2} &&= a_{m-2}\boldsymbol{E},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&\\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0-\boldsymbol{C}_1 &&= a_1\boldsymbol{E},\\ &\quad\;\; -\boldsymbol{C}_0 &&= a_0\boldsymbol{E}. \end{aligned} \quad (8)$$

Умножим теперь слева первое равенство на $\boldsymbol{E}$, второе на $\boldsymbol{A}$, третье на $\boldsymbol{A}^2$, ..., последнее на $\boldsymbol{A}^m$ и сложим их. Мы получим справа $P(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{E}+a_{m-1}\boldsymbol{A}+\ldots+a_0\boldsymbol{A}^m$, а слева 0. Таким образом, $P(\boldsymbol{A})=0$ и лемма доказана *).

Теорема 3. *Если $P(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$, то $P(\boldsymbol{A})=0$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу, обратную матрице $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$. Мы имеем $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{E}$. Как известно, обратная матрица может быть записана в виде

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{P(\lambda)}\boldsymbol{C}(\lambda),$$

где $\boldsymbol{C}(\lambda)$ — матрица из миноров $(n-1)$-го порядка матрицы $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$, а $P(\lambda)$ — определитель матрицы $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$, т. е. характеристический многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$. Отсюда

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{C}(\lambda)=P(\lambda)\boldsymbol{E}.$$

*) В алгебре теорема Безу доказывается тем, что в равенство (6) подставляется $\boldsymbol{A}$ вместо λ. Здесь, конечно, мы не вправе этого сделать непосредственно, так как λ есть число, а $\boldsymbol{A}$ — матрица. Однако, по существу, мы сделали то же самое. Действительно, k-е из равенств (8) получилось сравнением в (6) коэффициентов при λ^k. Умножая его на $\boldsymbol{A}^k$ и складывая затем все равенства, мы, по существу, подставляем $\boldsymbol{A}$ вместо λ.

Так как элементами матрицы $\boldsymbol{C}(\lambda)$ являются миноры матрицы $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$, т. е. многочлены степени не выше $n-1$ относительно λ, то согласно доказанной лемме

$$P(\boldsymbol{A})=0,$$

и теорема доказана.

Заметим, что если у характеристического многочлена матрицы $\boldsymbol{A}$ нет кратных корней, то не существует многочлена степени ниже n, обращающегося в нуль при подстановке в него матрицы $\boldsymbol{A}$ (см. следующее упражнение).

Упражнение. Пусть $\boldsymbol{A}$ — диагональная матрица вида

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

где все числа λ_i различны. Найти многочлен $P(t)$ возможно более низкой степени, для которого $P(\boldsymbol{A})=0$. (См. пример в § 9, п. 3.)

§ 11. Линейное преобразование, сопряженное к данному

1. Связь между линейными преобразованиями и билинейными формами в евклидовом пространстве. Мы рассматривали ранее в аффинном пространстве отдельно линейные преобразования и отдельно билинейные формы. В случае евклидова пространства между билинейными формами и линейными преобразованиями существует тесная связь *).

Всякому линейному преобразованию A отвечает в евклидовом пространстве билинейная форма $A(x;y)$,

*) Так как в данном базисе как линейные преобразования, так и билинейные формы задаются матрицами, то можно было бы попытаться в аффинном пространстве поставить друг другу в соответствие линейное преобразование и билинейную форму, задаваемые одной и той же матрицей. Однако это соответствие было бы случайным. Действительно, если в одном базисе матрицы билинейной формы и линейного преобразования совпадают, то в другом базисе они будут уже, вообще говоря, различны, так как

задаваемая формулой

$$A(x;y) \equiv (Ax, y).$$

Действительно, функция $A(x;y) \equiv (Ax, y)$ удовлетворяет условиям, определяющим билинейную форму. Имеем:

$$1^\circ \quad (A(x_1+x_2), y) = (Ax_1+Ax_2, y) = (Ax_1, y)+(Ax_2, y),$$
$$(A\lambda x, y) = (\lambda Ax, y) = \lambda(Ax, y).$$

$$2^\circ \quad (x, A(y_1+y_2)) = (x, Ay_1+Ay_2) = (x, Ay_1)+(x, Ay_2),$$
$$(x, A\mu y) = (x, \mu Ay) = \overline{\mu}(x, Ay).$$

Покажем, что преобразование A определяется соответствующей билинейной формой $A(x;y)$ однозначно.

Пусть

$$A(x;y) = (Ax, y)$$

и

$$A(x;y) = (Bx, y).$$

Тогда

$$(Ax, y) \equiv (Bx, y),$$

т. е.

$$(Ax - Bx, y) = 0$$

при переходе к другому базису матрица $\boldsymbol{A}$ билинейной формы переходит в $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{C}'$ — матрица, транспонированная к матрице $\boldsymbol{C}$) (см. § 4), а матрица линейного преобразования — в $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ (см. § 9).

Внимательный читатель сможет заметить, что устанавливаемое ниже соответствие между билинейными формами и линейными преобразованиями в евклидовом пространстве состоит в том, что сопоставляются друг другу линейные преобразования и билинейные формы, матрицы которых в нормированном ортогональном базисе получаются одна из другой транспонированием; это соответствие, как следует из дальнейшего, уже не зависит от выбора базиса.

для любого вектора y; но это значит, что $Ax - Bx = 0$. Таким образом, $Ax = Bx$ для любого x, т.е. $A = B$. Однозначность доказана.

Имеет место и обратное.

Пусть R — комплексное евклидово пространство и пусть $A(x; y)$ — билинейная форма в нем. Выберем в R какой-либо ортогональный нормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Если

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n \quad \text{и} \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n,$$

то $A(x; y)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} A(x; y) = a_{11}\xi_1\overline{\eta}_1 + a_{12}\xi_1\overline{\eta}_2 + \ldots + a_{1n}\xi_1\overline{\eta}_n &+ \\ + a_{21}\xi_2\overline{\eta}_1 + a_{22}\xi_2\overline{\eta}_2 + \ldots + a_{2n}\xi_2\overline{\eta}_n &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + a_{n1}\xi_n\overline{\eta}_1 + a_{n2}\xi_n\overline{\eta}_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n\overline{\eta}_n&. \end{aligned} \tag{1}$$

Постараемся представить это выражение в виде некоторого скалярного произведения. Для этого перепишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} A(x; y) = (a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{n1}\xi_n)\overline{\eta}_1 &+ \\ + (a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{n2}\xi_n)\overline{\eta}_2 &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + (a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n)\overline{\eta}_n&. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение вектор z с координатами

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{n1}\xi_n, \\ \zeta_2 &= a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{n2}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_n &= a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n. \end{aligned}$$

Вектор z получается из вектора x линейным преобразованием с матрицей, транспонированной к матрице $\|a_{ik}\|$ билинейной формы $A(x; y)$. Это преобразование мы обозначим буквой A, т.е. положим $z = Ax$. Мы получаем, следовательно, что

$$A(x; y) = \zeta_1\overline{\eta}_1 + \zeta_2\overline{\eta}_2 + \ldots + \zeta_n\overline{\eta}_n = (z, y) = (Ax, y).$$

Итак, *всякой билинейной форме $A(x; y)$ в евклидовом пространстве отвечает такое линейное преобразование A, что*

$$A(x; y) \equiv (Ax, y).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Формула*

$$A(x; y) = (Ax, y) \tag{2}$$

устанавливает в евклидовом пространстве взаимно однозначное соответствие между билинейными формами и линейными преобразованиями.

Из однозначности соответствия, устанавливаемого формулой (2), следует, что оно не зависит от выбора базиса.

Связь между билинейными формами и линейными преобразованиями можно установить и другим способом. А именно, каждую билинейную форму можно представить также в виде

$$A(x; y) = (x, A^*y).$$

Для этого в формуле (1)

$$\begin{aligned} A(x; y) = a_{11}\xi_1\overline{\eta}_1 + a_{12}\xi_1\overline{\eta}_2 + \ldots + a_{1n}\xi_1\overline{\eta}_n &+ \\ + a_{21}\xi_2\overline{\eta}_1 + a_{22}\xi_2\overline{\eta}_2 + \ldots + a_{2n}\xi_2\overline{\eta}_n &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + a_{n1}\xi_n\overline{\eta}_1 + a_{n2}\xi_n\overline{\eta}_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n\overline{\eta}_n & \end{aligned}$$

мы будем выносить за скобки координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вектора x. Повторяя снова прежние рассуждения, мы получаем:

$$\begin{aligned}A(x;y) &= \xi_1(a_{11}\overline{\eta}_1 + a_{12}\overline{\eta}_2 + \ldots + a_{1n}\overline{\eta}_n) + \\ &+ \xi_2(a_{21}\overline{\eta}_1 + a_{22}\overline{\eta}_2 + \ldots + a_{2n}\overline{\eta}_n) + \\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \xi_n(a_{n1}\overline{\eta}_1 + a_{n2}\overline{\eta}_2 + \ldots + a_{nn}\overline{\eta}_n) = \\ &= \xi_1\overline{(\overline{a}_{11}\eta_1 + \overline{a}_{12}\eta_2 + \ldots + \overline{a}_{1n}\eta_n)} + \\ &+ \xi_2\overline{(\overline{a}_{21}\eta_1 + \overline{a}_{22}\eta_2 + \ldots + \overline{a}_{2n}\eta_n)} + \\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \xi_n\overline{(\overline{a}_{n1}\eta_1 + \overline{a}_{n2}\eta_2 + \ldots + \overline{a}_{nn}\eta_n)} = (x, A^*y).\end{aligned}$$

При этом матрица преобразования A^* получается из матрицы преобразования A в любом *ортогональном* базисе переходом к транспонированной и заменой ее элементов комплексно сопряженными.

Заметим, что в неортогональном базисе связь между матрицами преобразований A и A^* более сложна.

2. Операция перехода от преобразования A к сопряженному (операция *).

Определение 1. *Пусть A — линейное преобразование комплексного евклидова пространства. Преобразование A^*, определенное условием*

$$(Ax, y) = (x, A^*y),$$

называется сопряженным к A.

Теорема 2. *В евклидовом пространстве каждому линейному преобразованию отвечает сопряженное преобразование и притом только одно.*

Доказательство. Линейному преобразованию A однозначно соответствует согласно теореме 1 этого параграфа билинейная форма $A(x;y) = (Ax, y)$. Эту билинейную форму согласно сказанному в конце п. 1 можно представить, и притом однозначно, в виде

(x, A^*y). Окончательно мы имеем:

$$(Ax, y) = A(x; y) = (x, A^*y).$$

Матрица сопряженного преобразования A^* *получается из матрицы преобразования* A *в ортогональном базисе переходом к транспонированной и комплексно сопряженной матрице,* как это доказано в п. 1 этого параграфа.

Переход от A к A^* можно выразить в виде правила: если в выражении (Ax, y) мы желаем A перебросить на второе место, то к нему нужно приписать *.

Операция перехода от преобразования A к сопряженному преобразованию A^* («операция *») связана с определенными выше (§ 9) операциями сложения и умножения линейных преобразований следующими соотношениями:

1° $(AB)^* = B^*A^*$.
2° $(A^*)^* = A$.
3° $(A + B)^* = A^* + B^*$.
4° $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.
5° $E^* = E$.

Докажем, например, два первых из этих свойств.

1° $$(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y).$$

Но, с другой стороны, по определению $(AB)^*$ имеем:

$$(ABx, y) = (x, (AB)^*y).$$

Сравнивая правые части этих двух равенств и вспомнив, что линейное преобразование однозначно определяется соответствующей билинейной формой, получаем:

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

2° По определению A^* имеем:

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Обозначим временно A^* через C. Тогда

$$(Ax, y) = (x, Cy),$$

откуда

$$(y, Ax) = (Cy, x).$$

Заменив y через x, а x через y и поменяв местами правую и левую части этого равенства, получим:

$$(Cx, y) = (x, Ay).$$

Но это равенство и означает, что $C^* = A$, и так как $C = A^*$, то

$$(A^*)^* = A.$$

Упражнения. 1. Доказать таким же способом свойства 3°–5°.

2. Доказать свойства 1°–5°, пользуясь тем, что матрица преобразования A^* получается из матрицы преобразования A в ортогональном базисе транспонированием и заменой всех элементов комплексно сопряженными.

3. Самосопряженные, унитарные и нормальные линейные преобразования. Операция * в известной мере аналогична операции перехода от данного комплексного числа α к сопряженному $\overline{\alpha}$. Эта аналогия не случайна. Действительно, для матриц первого порядка над комплексным полем, т. е. для комплексных чисел, операция * как раз и состоит в замене данного числа комплексно сопряженным.

Среди всех комплексных чисел действительные числа характеризуются тем свойством, что $\overline{\alpha} = \alpha$. Для линейных преобразований аналогичное понятие является весьма существенным.

Определение 2. *Линейное преобразование A называется самосопряженным (или эрмитовым), если $A^* = A$.*

Покажем, что *для того, чтобы линейное преобразование A было самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы билинейная форма (Ax, y) была эрмитовой.*

В самом деле, эрмитовость формы (Ax, y) означает, что

$$(Ax, y) = \overline{(Ay, x)}. \tag{а}$$

Самосопряженность преобразования A означает, что

$$(Ax, y) = (x, Ay). \tag{б}$$

Легко видеть, что равенства (а) и (б) эквивалентны.

Всякое комплексное число ζ представимо в виде $\zeta = \alpha + i\beta$, где α и β — действительные числа. Аналогично:

Всякое линейное преобразование A может быть записано в виде

$$A = A_1 + iA_2 \qquad (3),$$

где A_1 и A_2 — самосопряженные преобразования.

Действительно,

$$A = \frac{A + A^*}{2} + i\frac{A - A^*}{2i}.$$

Введем обозначения

$$\frac{A + A^*}{2} = A_1, \quad \frac{A - A^*}{2i} = A_2.$$

Тогда

$$A_1^* = \left(\frac{A + A^*}{2}\right)^* = \frac{1}{2}(A + A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* + A^{**}) = \\ = \frac{1}{2}(A^* + A) = A_1$$

и

$$A_2^* = \left(\frac{A - A^*}{2i}\right)^* = -\frac{1}{2i}(A - A^*)^* = -\frac{1}{2i}(A^* - A^{**}) = \\ = -\frac{1}{2i}(A^* - A) = A_2,$$

т. е. A_1 и A_2 — самосопряженные преобразования.

Таким образом, самосопряженные преобразования играют среди всех линейных преобразований роль, аналогичную роли действительных чисел среди комплексных.

Упражнения. 1. Доказать единственность представления преобразования A в виде (3).

2. Доказать, что линейная комбинация с действительными коэффициентами самосопряженных преобразований есть снова самосопряженное преобразование.

3. Доказать, что если A — произвольное линейное преобразование, то преобразования AA^* и A^*A — самосопряженные.

Примечание. В отличие от комплексных чисел, AA^*, вообще говоря, не равно A^*A.

Произведение двух самосопряженных линейных преобразований не есть, вообще говоря, самосопряженное преобразование. Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть A и B — самосопряженные линейные преобразования. Для того чтобы преобразование AB было также самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы $AB = BA$, т. е. чтобы преобразования A и B были перестановочны.*

Доказательство. Нам дано, что

$$A^* = A \quad \text{и} \quad B^* = B.$$

Мы ищем необходимое и достаточное условие того, чтобы выполнялось равенство

$$(AB)^* = AB. \tag{4}$$

Но

$$(AB)^* = B^*A^* = BA.$$

Следовательно, равенство (4) имеет место тогда и только тогда, когда

$$AB = BA.$$

Теорема доказана.

Упражнение. Доказать, что если A и B — самосопряженные преобразования, то самосопряженными будут и преобразования $AB + BA$ и $i(AB - BA)$.

Аналогом комплексных чисел, равных по модулю единице, т. е. таких, что $z\overline{z} = 1$, являются унитарные преобразования.

Определение 3. *Линейное преобразование U называется унитарным, если $UU^* = U^*U = E$* *). *Другими словами, для унитарного преобразования $U^* = U^{-1}$.*

В § 13 мы познакомимся с весьма простой геометрической интерпретацией унитарных преобразований.

Упражнения. 1. Доказать, что произведение двух унитарных преобразований есть снова унитарное преобразование.

2. Показать, что если U — унитарное преобразование, а A — самосопряженное преобразование, то $U^{-1}AU$ — также самосопряженное.

Ниже (в § 15) мы докажем, что всякое линейное преобразование можно представить как произведение самосопряженного на унитарное. Эту теорему можно рассматривать как обобщение записи комплексного числа в тригонометрической форме.

Введем еще одно определение.

---

*) В n-мерном пространстве условия $U^*U = E$ и $UU^* = E$ эквивалентны. В бесконечномерном пространстве это — два различных условия.

Определение 4. *Линейное преобразование A называется нормальным, если $AA^* = A^*A$.*

Для комплексных чисел нет надобности в аналогичном понятии, так как умножение комплексных чисел коммутативно и, значит, $\overline{\alpha}\alpha$ всегда равно $\alpha\overline{\alpha}$.

Нетрудно убедиться, что как самосопряженные, так и унитарные преобразования являются частными случаями нормальных преобразований.

Более детальному изучению отдельных классов линейных преобразований в евклидовом пространстве будут посвящены дальнейшие параграфы этой главы. При этом мы получим для различных типов преобразований весьма простую геометрическую характеристику.

§ 12. Самосопряженные (эрмитовы) преобразования. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов

1. Самосопряженные преобразования. В этом параграфе мы более подробно изучим класс самосопряженных преобразований n-мерного евклидова пространства. Эти преобразования часто встречаются в различных приложениях. (Существенную роль самосопряженные преобразования, правда в бесконечномерном пространстве, играют в квантовой механике).

Лемма 1. *Собственные значения самосопряженного преобразования вещественны.*

Доказательство. Пусть x — собственный вектор самосопряженного преобразования A и λ — соответствующее собственное значение, т. е.

$$Ax = \lambda x; \quad x \neq 0.$$

Так как $A^* = A$, то

$$(Ax, x) = (x, Ax),$$

т. е.

$$(\lambda x, x) = (x, \lambda x).$$

Выносся λ за скобки, получим:

$$\lambda(x, x) = \overline{\lambda}(x, x),$$

и так как $(x, x) \neq 0$, то $\lambda = \overline{\lambda}$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть A — самосопряженное линейное преобразование в n-мерном пространстве R и e — его собственный вектор. Совокупность R_1 векторов x, ортогональных к e, есть $(n-1)$-мерное подпространство, инвариантное относительно преобразования A.*

Доказательство. Совокупность R_1 векторов x, ортогональных к e, образует $(n-1)$-мерное подпространство.

Покажем, что R_1 инвариантно относительно A. Пусть $x \in R_1$. Это значит, что $(x, e) = 0$. Тогда и $(Ax, e) = 0$, т. е. $Ax \in R_1$. Действительно,

$$(Ax, e) = (x, A^*e) = (x, Ae) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) = 0.$$

Мы доказали, что преобразование A не выводит векторы, принадлежащие R_1, из R_1, т. е. доказали, что подпространство R_1 инвариантно относительно A.

Теорема 1. *Пусть A — самосопряженное преобразование в n-мерном евклидовом пространстве R. Тогда существует n попарно ортогональных собственных векторов преобразования A. Соответствующие им собственные значения вещественны.*

Доказательство. Согласно теореме 1 § 10 в R существует хотя бы один собственный вектор e_1 преобразования A. В силу леммы 2 совокупность векторов, ортогональных к e_1, образует $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство R_1. Будем далее рассматривать наше преобразование A лишь в R_1. В R_1 существует собственный вектор e_2 (см. замечание к теореме 1

§ 10). Совокупность векторов из R_1, ортогональных к e_2, образует $(n-2)$-мерное инвариантное подпространство R_2. В нем существует собственный вектор e_3 и т. д.

Мы получаем, таким образом, n попарно ортогональных собственных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Согласно лемме 1 соответствующие им собственные значения вещественны. Теорема доказана.

Так как произведение собственного вектора на любое отличное от нуля число есть снова собственный вектор, то векторы e_i можно выбрать так, чтобы их длины равнялись единице.

Т е о р е м а 2. *Пусть A — самосопряженное преобразование в n-мерном пространстве. Тогда существует ортогональный базис, в котором матрица преобразования диагональна и вещественна. Верно также и обратное.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в качестве базиса построенные в теореме 1 попарно ортогональные собственные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Тогда

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \lambda_1 e_1, \\ Ae_2 &= \lambda_2 e_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ Ae_n &= \lambda_n e_n, \end{aligned}$$

т. е. в этом базисе матрица преобразования A имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где все λ_i вещественны.

Обратно, пусть матрица преобразования A в ортогональном базисе имеет вид (1). В ортогональном нормированном базисе матрица сопряженного преобразования A^* получается из матрицы преобразования A транспонированием и заменой каждого элемента комплексно сопряженным (см. § 11). Проделав эти операции над матрицей вида (1) (где все λ_i вещественны), мы получим ту же самую матрицу. Следовательно, преобразованиям A и A^* соответствует одна и та же матрица, т. е. $A = A^*$. Теорема полностью доказана.

Отметим еще следующее свойство собственных векторов самосопряженного преобразования: *собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.*

Действительно, пусть

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Ae_2 = \lambda_2 e_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Имеем:

$$(Ae_1, e_2) = (e_1, A^* e_2) = (e_1, Ae_2),$$

т. е.

$$\lambda_1(e_1, e_2) = \lambda_2(e_1, e_2)$$

или

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(e_1, e_2) = 0.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$(e_1, e_2) = 0.$$

З а м е ч а н и е. Из доказанной теоремы следует, что наглядно-геометрический смысл произвольного самосопряженного преобразования таков; в пространстве выделяется n попарно ортогональных направлений (собственных направлений). Каждому из этих направлений ставится в соответствие действительное число (собственное значение). По каждому из этих направлений производится растяжение (сжатие) пространства в $|\lambda_i|$ раз и, кроме того, зеркальное отражение в плоскости, ортогональной к данному направлению, если соответствующее λ_i отрицательно.

Параллельно с понятием самосопряженного преобразования вводится понятие эрмитовой матрицы.

Матрица $\|a_{ik}\|$ называется *эрмитовой*, если $a_{ik} = \overline{a}_{ki}$.

Ясно, что для того чтобы преобразование A было самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в каком-нибудь ортогональном базисе была эрмитовой.

Упражнение. Возвести матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

в 28-ю степень. Указание. Привести эту матрицу к диагональной форме, затем возвести ее в указанную степень и, наконец, вернуться к прежнему базису.

2. Приведение к главным осям. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов. Применим полученные в п. 1 результаты к квадратичным формам.

Мы знаем, что всякой эрмитовой билинейной форме соответствует самосопряженное линейное преобразование. Из теоремы 2 этого параграфа вытекает важная

Теорема 3. *Пусть R — евклидово n-мерное пространство и пусть $A(x;y)$ — эрмитова билинейная форма в R. Тогда в R существует ортогональный нормированный базис, в котором соответствующая $A(x;y)$ квадратичная форма записывается в виде суммы квадратов:*

$$A(x;x) = \sum \lambda_i |\xi_i|^2,$$

где λ_i вещественны, а ξ_i — координаты вектора x *).

*) В § 8 мы доказали, что в *аффинном* пространстве можно всякую квадратичную (или, что то же самое, всякую эрмитову билинейную) форму привести к сумме квадратов. Здесь мы для *евклидова* пространства доказываем *более сильное* утверждение, именно существование *нормированного ортогонального базиса,* в котором данная эрмитова форма приводится к сумме квадратов.

Доказательство. Если $A(x;y)$ — эрмитова билинейная форма, т. е.

$$A(x;y) = \overline{A(y;x)},$$

то (см. § 11) существует такое самосопряженное линейное преобразование A, что

$$A(x;y) \equiv (Ax, y).$$

Выберем в R в качестве векторов ортогонального нормированного базиса систему попарно ортогональных собственных векторов самосопряженного преобразования A (это возможно в силу теоремы 1). Тогда

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \ Ae_2 = \lambda_2 e_2, \ \ldots, \ Ae_n = \lambda_n e_n.$$

Пусть

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n.$$

Так как

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k, \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} &A(x;y) \equiv (Ax, y) = \\ &= (\xi_1 Ae_1 + \xi_2 Ae_2 + \ldots + \xi_n Ae_n, \ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n) = \\ &= (\lambda_1 \xi_1 e_1 + \lambda_2 \xi_2 e_2 + \ldots + \lambda_n \xi_n e_n, \ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n) = \\ &\qquad = \lambda_1 \xi_1 \overline{\eta}_1 + \lambda_2 \xi_2 \overline{\eta}_2 + \ldots + \lambda_n \xi_n \overline{\eta}_n. \end{aligned}$$

В частности,

$$A(x;x) = (Ax, x) = \lambda_1 |\xi_1|^2 + \lambda_2 |\xi_2|^2 + \ldots + \lambda_n |\xi_n|^2.$$

Теорема доказана.

Нахождение в евклидовом пространстве ортогонального нормированного базиса, в котором данная квадратичная форма приводится к сумме квадратов, называется приведением этой формы к главным осям.

Т е о р е м а 4. *Пусть R — аффинное n-мерное пространство и $A(x;x)$ и $B(x;x)$ — две эрмитовы квадратичные формы, причем форма $B(x;x)$ — положительно определенная. Тогда существует базис, в котором обе эти формы записываются в виде суммы квадратов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в R скалярное произведение, положив $(x,y) \equiv B(x;y)$, где $B(x;y)$ — отвечающая $B(x;x)$ билинейная форма. Это является законным, так как аксиомы скалярного произведения означают, что (x,y) есть эрмитова билинейная форма, соответствующая положительно определенной квадратичной форме (§ 8). Пространство R станет, таким образом, евклидовым. Согласно теореме 3 в R существует ортогональный *) нормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, в котором форма $A(x;x)$ приводится к сумме квадратов, т. е. к виду

$$A(x;x) = \lambda_1|\xi_1|^2 + \lambda_2|\xi_2|^2 + \ldots + \lambda_n|\xi_n|^2. \qquad (2)$$

В нормированном ортогональном базисе скалярное произведение имеет вид

$$(x,x) = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \ldots + |\xi_n|^2,$$

т. е.

$$B(x;x) = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \ldots + |\xi_n|^2. \qquad (3)$$

Мы нашли, таким образом, базис, в котором обе квадратичные формы $A(x;x)$ и $B(x;x)$ *одновременно* приводятся к сумме квадратов, что и требовалось.

В теореме 4 показано, что в R существует базис, в котором эрмитовы квадратичные формы A и B имеют вид (2) и (3). Покажем, как найти числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

---

*) Относительно введенного нами скалярного произведения $(x,y) = B(x;y)$.

В каноническом виде матрицы квадратичных форм A и B имеют вид

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Det}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{B}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda). \tag{4}$$

При переходе к другому базису матрицы эрмитовых квадратичных форм A и B переходят в $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. Поэтому, если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — произвольный базис, то в этом базисе

$$\operatorname{Det}(\boldsymbol{A}_1 - \lambda \boldsymbol{B}_1) = \operatorname{Det} \boldsymbol{C}^* \cdot \operatorname{Det}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{B}) \cdot \operatorname{Det} \boldsymbol{C},$$

т. е. отличается лишь постоянным множителем от выражения (4). Отсюда следует, что *числа* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *являются корнями следующего уравнения*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \dots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \dots & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

где $\|a_{ik}\|$ и $\|b_{ik}\|$ — матрицы форм $A(x;x)$ и $B(x;x)$ в каком-нибудь базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Замечание. Требование положительной определенности одной из форм является существенным, о чем свидетельствует следующий пример: две квадратичные формы

$$A(x;x) = |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2, \quad B(x;x) = \xi_1\overline{\xi}_2 + \xi_2\overline{\xi}_1,$$

из которых ни одна не является положительно определенной, не могут быть одновременно приведены к сумме квадратов. В самом деле, первой форме соответствует матрица

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а второй — матрица

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}$, где λ — вещественный параметр. Ее детерминант равен $-(\lambda^2+1)$. Так как он не имеет вещественных корней, то, согласно сказанному выше, обе формы не могут быть приведены одновременно к сумме квадратов.

§ 13. Унитарные преобразования

Мы определили в § 11 унитарные преобразования равенством

$$UU^* = U^*U = E. \tag{1}$$

Это определение имеет простой геометрический смысл. А именно:

Всякое унитарное преобразование U в евклидовом n-мерном пространстве R сохраняет скалярное произведение, т. е.

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

для всех $x, y \in R$. Обратно, всякое линейное преобразование U, сохраняющее скалярное произведение, унитарно [*т. е. удовлетворяет условию* (1)].

В самом деле, если дано, что $U^*U = E$, то

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y).$$

Обратно, если для любых векторов x и y

$$(Ux, Uy) = (x, y),$$

то

$$(U^*Ux, y) = (x, y),$$

т. е.

$$(U^*Ux, y) = (Ex, y).$$

Так как из равенства билинейных форм следует равенство соответствующих преобразований, то $U^*U = E$, т. е. U унитарно.

В частности, при $x = y$ имеем:

$$(Ux, Ux) = (x, x),$$

т. е. *унитарное преобразование U не меняет длин векторов.*

Упражнение. Доказать, что если линейное преобразование сохраняет длины всех векторов, то оно унитарно.

Запишем условия унитарности линейного преобразования в матричной форме. Для этого выберем какой-либо ортогональный нормированный базис $e_1, e_2, \ldots \ldots, e_n$. Пусть в этом базисе преобразованию U соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тогда сопряженному преобразованию U^* соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \ldots & \overline{a}_{n1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \ldots & \overline{a}_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{a}_{1n} & \overline{a}_{2n} & \ldots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Условие унитарности $UU^* = E$ означает, что произведение матриц (2) и (3) есть единичная матрица. Если перемножить их и приравнять элементы произведения соответственным элементам единичной матрицы, то получим:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\overline{a}_{i\alpha} = 1, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\overline{a}_{k\alpha} = 0 \quad (i \neq k). \tag{4}$$

Итак, *в ортогональном нормированном базисе условие $UU^* = E$ означает, что сумма произведений элементов какой-либо строки матрицы преобразования U на* *элементы, сопряженные к элементам другой строки, равна нулю, а сумма квадратов модулей элементов любой строки равна единице.*

Так как $U^*U = E$ также есть условие унитарности, то мы имеем также:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i}\overline{a}_{\alpha i} = 1; \quad \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i}\overline{a}_{\alpha k} = 0 \quad (i \neq k). \tag{5}$$

Это условие аналогично предыдущему, но вместо строк в нем участвуют столбцы матрицы.

Условие (5) имеет простой геометрический смысл. Действительно, скалярное произведение векторов

$$Ue_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \ldots + a_{ni}e_n$$

и

$$Ue_k = a_{1k}e_1 + a_{2k}e_2 + \ldots + a_{nk}e_n$$

равно $\sum a_{\alpha i}\overline{a}_{\alpha k}$ (так как $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — это ортогональный нормированный базис); поэтому

$$(Ue_i, Ue_k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases} \tag{6}$$

Следовательно, *для того чтобы линейное преобразование было унитарным, необходимо и достаточно, чтобы оно переводило какой-либо ортогональный нормированный базис* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *снова в ортогональный и нормированный базис* $Ue_1, Ue_2, \ldots, Ue_n$.

Матрица $\|a_{ik}\|$, элементы которой удовлетворяют условиям (4), либо, что то же самое, условиям (5), называется *унитарной матрицей.* Унитарные матрицы являются, как мы видели, матрицами унитарных преобразований в *ортогональном нормированном* базисе. Так как переход от одного ортогонального нормированного к другому задается унитарным преобразованием, то матрица перехода от одного ортогонального нормированного базиса к другому такому же является унитарной.

Посмотрим, к какому простейшему виду можно привести матрицу унитарного преобразования при соответствующем выборе базиса.

Лемма 1. *Собственные значения унитарного преобразования по модулю равны* 1.

Доказательство. Пусть x — собственный вектор унитарного преобразования U и λ — соответствующее собственное значение, т.е.

$$Ux = \lambda x, \quad x \neq 0.$$

Тогда

$$(x, x) = (Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x, x),$$

т.е. $\lambda\overline{\lambda} = 1$, значит $|\lambda| = 1$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть U — унитарное линейное преобразование в n-мерном пространстве R и e — его собственный вектор, т.е.*

$$Ue = \lambda e, \quad e \neq 0.$$

Тогда $(n-1)$-мерное подпространство R_1, состоящее из векторов x, ортогональных к e, инвариантно относительно U.

Доказательство. Пусть $x \in R_1$, т.е. $(x, e) = 0$. Покажем, что $Ux \in R_1$, т.е. что $(Ux, e) = 0$. В самом деле,

$$(Ux, Ue) = (U^*Ux, e) = (x, e) = 0.$$

А так как $Ue = \lambda e$, то $\overline{\lambda}(Ux, e) = 0$. Но в силу леммы 1 $\lambda \neq 0$, поэтому $(Ux, e) = 0$, т.е. $Ux \in R_1$. Следовательно, подпространство R_1 инвариантно относительно U.

Теорема 1. *Пусть U — унитарное преобразование в n-мерном евклидовом пространстве. Тогда* *существует n попарно ортогональных собственных векторов преобразования U. Соответствующие им собственные значения по модулю равны единице.*

Доказательство. В силу теоремы 1 § 10 преобразование U, как и всякое линейное преобразование, имеет в R хотя бы один собственный вектор. Обозначим его e_1. Согласно лемме 2, $(n-1)$-мерное подпространство R_1, состоящее из всех векторов пространства R, ортогональных к e_1, инвариантно относительно U. Следовательно, в R_1 имеется хотя бы один собственный вектор e_2 преобразования U. Через R_2 обозначим инвариантное подпространство, состоящее из всех векторов, принадлежащих R_1 и ортогональных к e_2. В R_2 содержится некоторый собственный вектор e_3 преобразования U и т. д.; продолжая этот процесс, мы построим n попарно ортогональных собственных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ преобразования U. Согласно лемме 1 собственные значения, соответствующие собственным векторам $e_1, e_2, \ldots, e_n$, по модулю равны 1.

Теорема 2. *Для каждого унитарного преобразования U в n-мерном пространстве R существует нормированный ортогональный базис, в котором матрица преобразования U диагональна, т. е. имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{7}$$

причем $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — числа, по модулю равные единице.

Доказательство. Пусть U — унитарное преобразование. Тогда n попарно ортогональных нормированных собственных векторов, построенных в предыдущей теореме, образуют искомый базис. Действительно,

$$\begin{aligned} Ue_1 &= \lambda_1 e_1, \\ Ue_2 &= \lambda_2 e_2, \\ &\dots\dots\dots \\ Ue_n &= \lambda_n e_n \end{aligned}$$

и, следовательно, матрица преобразования U в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ имеет вид (7). Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ по модулю равны 1 в силу леммы 1. Теорема доказана.

Упражнения. 1. Доказать, что верно и обратное, т. е. если в некотором ортогональном базисе матрица преобразования U имеет вид (7), то U унитарно.

2. Доказать, что если A — самосопряженное преобразование, то преобразование $(A-iE)^{-1}(A+iE)$ существует и является унитарным.

3. Пусть U — унитарное преобразование. Доказать, что если преобразование $U-E$ обратимо, то преобразование

$$A = i(U-E)^{-1}(U+E)$$

самосопряженное.

Так как матрица перехода от одного ортогонального нормированного базиса к другому задается унитарной матрицей, то полученный в этом параграфе результат мы можем в матричных терминах сформулировать следующим образом:

Пусть $\boldsymbol{U}$ — заданная унитарная матрица. Тогда существует такая унитарная матрица $\boldsymbol{V}$, что $\boldsymbol{U}$ представима в виде

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V},$$

где $\boldsymbol{D}$ — диагональная матрица, у которой по диагонали стоят числа, по модулю равные 1.

Аналогично, основной результат в п. 1 § 12 в матричных терминах формулируется так:

Пусть $\boldsymbol{A}$ — заданная эрмитова матрица. Тогда $\boldsymbol{A}$ может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V},$$

где $\boldsymbol{V}$ — унитарная матрица, а $\boldsymbol{D}$ — диагональная матрица, у которой по диагонали стоят вещественные числа.

§ 14. Перестановочные линейные преобразования. Нормальные преобразования

1. Перестановочные преобразования. Мы видели (§ 12), что для всякого самосопряженного линейного преобразования есть свой ортогональный нормированный базис, в котором его матрица диагональна. Может оказаться что для нескольких самосопряженных преобразований существует один общий базис, в котором матрицы всех этих преобразований диагональны. Мы выясним здесь, при каких условиях это возможно. Разберем в первую очередь случай двух преобразований.

Лемма 1. *Пусть A и B — два перестановочных линейных преобразования, т. е.*

$$AB = BA.$$

Тогда совокупность всех собственных векторов преобразования A, отвечающих данному собственному значению λ, образует (вместе с нулевым вектором) подпространство R_λ, инвариантное относительно преобразования B.

Доказательство. Нам нужно показать, что если

$$x \in R_\lambda, \quad \text{т. е.} \quad Ax = \lambda x,$$

то и

$$Bx \in R_\lambda, \quad \text{т. е.} \quad ABx = \lambda Bx.$$

Но так как $AB = BA$, то

$$ABx = BAx = B\lambda x = \lambda Bx,$$

и лемма доказана.

Лемма 2. *Любые два перестановочных преобразования имеют общий собственный вектор.*

Доказательство. Пусть $AB = BA$ и R_λ — подпространство, состоящее из всех таких векторов x, что $Ax = \lambda x$, где λ — собственное значение преобразования A. Согласно лемме 1, R_λ инвариантно относительно B. Поэтому в нем существует вектор x_0, собственный для B. Этот вектор является собственным и для A, так как все векторы из R_λ являются собственными для A.

Замечание. Если $AB = BA$, то, вообще говоря, не всякий вектор, собственный для A, является собственным и для B. Например, если A есть единичное преобразование E, то для него любой вектор x является собственным. Однако x вовсе не будет собственным вектором для любого перестановочного с E преобразования, так как с E перестановочны все линейные преобразования.

Теорема 1. *Пусть A и B — два самосопряженных линейных преобразования в комплексном n-мерном пространстве R. Для того чтобы в R существовал ортогональный базис, в котором преобразования A и B одновременно приводятся к диагональной форме, необходимо и достаточно, чтобы они были перестановочны* (т. е. $AB = BA$).

Доказательство. Достаточность. Пусть $AB = BA$. Тогда, в силу леммы 2, существует вектор e_1, собственный и для A, и для B, т. е. такой, что

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Be_1 = \mu_1 e_1.$$

$(n-1)$-мерное подпространство R_1, ортогональное к e_1, инвариантно как для A, так и для B (см. лемму 2 § 12). Будем рассматривать преобразования A и B лишь в R_1. Согласно лемме 2 в R_1 существует вектор e_2, собственный и для A, и для B:

$$Ae_2 = \lambda_2 e_2, \quad Be_2 = \mu_2 e_2.$$

Совокупность векторов из R_1, ортогональных к e_2, образует $(n-2)$-мерное пространство, инвариантное как относительно A, так и относительно B, и т. д. Продолжая этот процесс, мы получим n попарно ортогональных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, собственных как для A, так и для B:

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad Be_i = \mu_i e_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Примем векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ за базис в R. Тогда оба преобразования A и B запишутся в диагональной форме. Достаточность условия $AB = BA$ доказана.

Необходимость. Пусть в некотором ортогональном базисе матрицы преобразований A и B диагональны. Любые диагональные матрицы, как это легко проверить, перестановочны между собой. Но если матрицы преобразований в некотором базисе перестановочны, то перестановочны и сами преобразования.

Упражнение. Пусть U_1 и U_2 — перестановочные унитарные преобразования. Доказать, что существует базис, в котором они одновременно записываются в диагональной форме.

Замечание. Теорема 1 переносится на любое множество попарно перестановочных самосопряженных преобразований. Доказательство повторяется дословно, только вместо леммы 2 используется следующая

Лемма $2'$. *У любого множества попарно перестановочный линейных преобразований есть общий собственный вектор.*

Доказательство будем вести по индукции. В одномерном пространстве $(n = 1)$ лемма очевидна. Предположим, что для пространств размерности $< n$ лемма доказана и докажем ее для n-мерного пространства.

Если каждый вектор из R является собственным для каждого из рассматриваемых преобразований *) $A, B, C, \ldots$, то все доказано. Предположим поэтому, что хотя бы один вектор не является собственным для какого-либо из наших преобразований, например для A.

---

*) Это означает, что каждое из преобразований $A, B, C, \ldots$ кратно единичному преобразованию.

Обозначим через R_1 совокупность всех собственных векторов преобразования A, отвечающих какому-нибудь собственному значению λ. Согласно лемме 1, R_1 инвариантно относительно $B, C, \ldots$ (и, само собой разумеется, инвариантно относительно A). При этом R_1 есть подпространство, отличное от нулевого и от всего R и имеющее, следовательно, размерность $\leqslant n-1$. Так как по предположению для пространств размерности, меньшей чем n, теорема доказана, то в R_1 преобразования $A, B, C, \ldots$ имеют общий собственный вектор, и лемма доказана.

2. Нормальные преобразования. В §§ 12 и 13 мы ознакомились с двумя классами линейных преобразований, приводимых в некотором нормированном ортогональном базисе к диагональной форме. Сейчас мы выясним, каков общий вид всех таких преобразований.

Теорема 2. *Для того чтобы существовал ортогональный базис, в котором линейное преобразование A приводится к диагональной форме, необходимо и достаточно, чтобы*

$$AA^* = A^*A.$$

(*Такие преобразования мы назвали в* § 11 *нормальными.*)

Доказательство. Необходимость. Пусть в некотором ортогональном нормированном базисе матрица преобразования A диагональна, т. е. имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Так как базис ортогональный и нормированный, то матрица преобразования A^* имеет вид

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \overline{\lambda}_n \end{pmatrix}.$$

Матрицы преобразований A и A^* диагональны и, значит, перестановочны между собой. Следовательно, перестановочны и сами преобразования A и A^*.

Достаточность. Пусть A и A^* перестановочны. Тогда, согласно лемме 2 этого параграфа, у A и A^* существует общий собственный вектор e_1, т.е.

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad A^* e_1 = \mu_1 e_1 \text{ *)}.$$

$(n-1)$-мерное подпространство R_1, состоящее из векторов, ортогональных к e_1, инвариантно как относительно A, так и относительно A^*. Действительно, пусть $x \in R_1$, т.е. $(x, e_1) = 0$. Тогда

$$(Ax, e_1) = (x, A^* e_1) = (x, \mu_1 e_1) = \overline{\mu}_1 (x, e_1) = 0,$$

т.е. $x \in R_1$. Инвариантность R_1 относительно A доказана. Аналогично доказывается инвариантность R_1 относительно A^*.

Применяя к R_1 ту же лемму 2, получим, что в R_1 существует вектор e_2, собственный одновременно и для A, и для A^*. Через R_2 обозначим $(n-2)$-мерное подпространство, состоящее из векторов подпространства R_1, ортогональных к e_2, и т.д. Продолжая таким образом, мы построим n попарно ортогональных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, каждый из которых является собственным как для A, так и для A^*. Векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют ортогональный базис, в котором как A, так и A^* приводятся к диагональной форме.

Другое доказательство достаточности. Положим

$$A_1 = \frac{A + A^*}{2}, \quad A_2 = \frac{A - A^*}{2i}.$$

Преобразования A_1 и A_2 — самосопряженные. Если A и A^* перестановочны, то A_1 и A_2 также перестановоч-

*) Упражнение: доказать, что $\mu_1 = \overline{\lambda}_1$.

ны. В силу теоремы 1 настоящего параграфа преобразования A_1 и A_2 могут быть одновременно приведены к диагональной форме. Но тогда и $A = A_1 + iA_2$ также записывается в диагональной форме.

Если A — самосопряженное преобразование, то

$$AA^* = A^*A = A^2,$$

т. е. A нормально. Нормальным является также всякое унитарное преобразование, так как в этом случае $UU^* = U^*U = E$. Поэтому теорема 2 этого параграфа содержит как частный случай результаты § 12 (п. 1) и § 13.

Упражнения. 1. Доказать, что любое множество попарно перестановочных нормальных преобразований приводится одновременно к диагональной форме.

2. Доказать, что всякое нормальное преобразование A может быть записано в виде

$$A = HU = UH,$$

где H — самосопряженное преобразование, а U — унитарное, причем H и U перестановочны.

Указание. Выбрать базис, в котором A и A^* приводятся к диагональной форме.

3. Доказать, что если $A = HU$, где H и U перестановочны, H — эрмитово, U — унитарно, то A — нормальное преобразование.

§ 15. Разложение линейного преобразования в произведение унитарного и эрмитова

Всякое комплексное число можно разложить в произведение положительного числа и числа, по модулю равного единице (так называемая тригонометрическая форма комплексного числа). Мы хотим получить для линейных преобразований аналог такого разложения.

Аналогом чисел, по модулю равных единице, являются унитарные линейные преобразования. Аналогом положительных действительных чисел являются так называемые положительно определенные линейные преобразования.

Определение 1. *Линейное преобразование H называется положительно определенным, если H самосопряженно и $(Hx, x) \geqslant 0$ для любого x.*

Теорема 1. *Всякое невырожденное линейное преобразование A может быть представлено в виде*

$$A = HU \quad (\text{либо } A = U_1 H_1),$$

где H (соотв. H_1) — невырожденное положительно определенное, а U (соотв. U_1) — унитарное преобразование.

Само доказательство мы проведем несколько позже: сейчас мы выясним, как по A найти соответствующие H и U, если указанное в теореме 1 разложение возможно; это подскажет нам путь для доказательства теоремы.

Пусть $A = HU$, где H — положительно определенное невырожденное преобразование, а U — унитарное преобразование. H легко выразить через A; в самом деле,

$$A^* = U^* H^* = U^{-1} H,$$

откуда

$$AA^* = H^2.$$

Следовательно, для того чтобы найти H, нужно «извлечь квадратный корень» из AA^*. Зная A и H, легко получить и U, полагая $U = H^{-1} A$.

Доказательству теоремы 1 предпошлем три леммы.

Лемма 1. *Каково бы ни было линейное преобразование A, преобразование AA^* — положительно определенное. Если A не вырождено, то AA^* также не вырождено.*

Доказательство. Преобразование AA^* положительно определенное. Действительно:

$$(AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) \geqslant 0$$

для любого x. Кроме того,

$$(AA^*)^* = A^{**}A^* = AA^*,$$

т. е. AA^* — самосопряженное преобразование.

Если преобразование A не вырождено, то детерминант матрицы $\|a_{ik}\|$ преобразования A в любом ортогональном базисе не равен нулю. Детерминант матрицы $\|\overline{a}_{ik}\|$ преобразования A^* в том же базисе является комплексно сопряженным к детерминанту матрицы $\|a_{ik}\|$ и, следовательно, также не равен нулю. Поэтому в данном случае детерминант матрицы, соответствующий преобразованию AA^*, не равен нулю, а это означает, что преобразование AA^* — невырожденное.

Лемма 2. *Если B — положительно определенное преобразование, то его собственные значения неотрицательны. Обратно, если все собственные значения самосопряженного преобразования B неотрицательны, то B — положительно определенное преобразование.*

Доказательство. Пусть B положительно определено и $Be = \lambda e$. Тогда

$$(Be, e) = \lambda(e, e)$$

и так как $(Be, e) \geqslant 0$ и $(e, e) > 0$, то $\lambda \geqslant 0$.

Обратно, пусть все собственные значения самосопряженного преобразования B неотрицательны, e_1, $e_2, \ldots, e_n$ — нормированный ортогональный базис, состоящий из собственных векторов преобразования B. Пусть

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$$

— произвольный вектор из R. Тогда

$$\begin{aligned}(Bx, x) &= \\ &= (\xi_1 Be_1 + \xi_2 Be_2 + \ldots + \xi_n Be_n,\ \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n) = \\ &= (\xi_1 \lambda_1 e_1 + \xi_2 \lambda_2 e_2 + \ldots + \xi_n \lambda_n e_n,\ \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n) = \\ &= \lambda_1 |\xi_1|^2 + \lambda_2 |\xi_2|^2 + \ldots + \lambda_n |\xi_n|^2 \qquad (1)\end{aligned}$$

и так как все λ_i неотрицательны, то $(Bx, x) \geqslant 0$.

З а м е ч а н и е. Из равенства (1) непосредственно видно, что если все λ_i положительны, то преобразование B не вырождено и обратно.

Л е м м а 3. *Если B — положительно определенное преобразование, то существует такое положительно определенное преобразование H, что $H^2 = B$ (мы запишем это так: $H = \sqrt{B} = B^{\frac{1}{2}}$). При этом, если B не вырождено, то и H не вырождено.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в R ортогональный базис, в котором B записывается в диагональной форме:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения B. Согласно лемме 2 все $\lambda_i \geqslant 0$. Положим

$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

где числа $\sqrt{\lambda_i}$ выбираются неотрицательными. В силу той же леммы 2 преобразование H положительно определено. При этом, если B не вырождено, то (см. замечание к лемме 2) $\lambda_i > 0$, значит, и $\sqrt{\lambda_i} > 0$ и, следовательно, H не вырождено.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Пусть A — любое невырожденное линейное преобразование. Положим

$$H = \sqrt{AA^*}.$$

В силу доказанных лемм 1 и 3, H есть невырожденное положительно определенное преобразование. Положим, далее,

$$U = H^{-1}A. \tag{2}$$

Преобразование U унитарно. В самом деле,

$$UU^* = H^{-1}A(H^{-1}A)^* = H^{-1}AA^*H^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = E.$$

Из (2) следует,что $A = HU$. Теорема доказана.

Операцию извлечения квадратного корня, примененную в этом параграфе, можно использовать для доказательства следующего предложения:

Пусть A и B — два самосопряженных преобразования, причем A — невырожденное положительно определенное преобразование. Тогда собственные значения преобразования AB вещественны.

Доказательство. Мы знаем, что характеристические многочлены (а значит, и собственные значения) преобразований

$$X = AB \quad \text{и} \quad C^{-1}XC$$

совпадают. Положим $C = A^{\frac{1}{2}}$. Тогда

$$C^{-1}XC = A^{-\frac{1}{2}}ABA^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}.$$

Легко видеть, что полученное преобразование является самосопряженным:

$$\left(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\right)^* = \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^*B^*\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^* = A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}.$$

Утверждение доказано.

Упражнение. Доказать, что если A и B — положительно определенные преобразования, из которых одно не вырождено, то преобразование AB имеет неотрицательные собственные значения.

§ 16. Линейные преобразования в вещественном евклидовом пространстве

В этом параграфе мы будем заниматься линейными преобразованиями в вещественном пространстве. Из материала данной главы для этого достаточно знать содержание §§ 9–11.

1. Все определения § 10, а именно определения инвариантного подпространства, собственного вектора, собственного значения, были введены для линейного пространства над произвольным полем и поэтому имеют смысл также и для вещественного линейного пространства.

Существенную роль во всей теории играла доказанная в § 10 теорема о том, что в комплексном пространстве всякое линейное преобразование имеет собственный вектор (одномерное инвариантное подпространство). В случае вещественного пространства эта теорема неверна. Например, поворот плоскости вокруг начала координат на угол, отличный от $k\pi$, представляет собой линейное преобразование, не имеющее ни одного одномерного инвариантного подпространства. Однако имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *У всякого линейного преобразования A в вещественном линейном пространстве R существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Выберем в R базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Преобразованию A отвечает в этом базисе матрица $\|a_{ik}\|$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = \lambda\xi_1, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = \lambda\xi_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n = \lambda\xi_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

и будем искать для нее ненулевое решение $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0$. Такое решение существует тогда и только тогда, когда определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

равен нулю. Приравняв его нулю, мы получим уравнение n-й степени относительно λ с вещественными коэффициентами. Пусть λ_0 есть корень этого уравнения. Возможны два случая:

a) λ_0 есть вещественный корень этого уравнения. Тогда можно найти вещественные не все равные нулю числа $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0$, являющиеся решением системы (1). Считая их координатами некоторого вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, мы можем систему (1) переписать в виде

$$Ax = \lambda_0 x,$$

т. е. x порождает одномерное инвариантное подпространство.

b) $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, т. е. λ_0 комплексно. Пусть

$$\xi_1 + i\eta_1,\ \xi_2 + i\eta_2,\ \ldots,\ \xi_n + i\eta_n$$

есть решение системы (1); подставляя эти числа вместо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в (1) и отделяя вещественную часть от мнимой, мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n &= \alpha\xi_1 - \beta\eta_1, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n &= \alpha\xi_2 - \beta\eta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n &= \alpha\xi_n - \beta\eta_n \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и соответственно

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n = \alpha\eta_1 + \beta\xi_1, \\ a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \ldots + a_{2n}\eta_n = \alpha\eta_2 + \beta\xi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \ldots + a_{nn}\eta_n = \alpha\eta_n + \beta\xi_n. \end{array}\right\} \qquad (2')$$

Будем теперь $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (соотв. $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$) считать координатами некоторого вектора x (соотв. y) в R; тогда соотношения (2) и (2′) можно записать следующим образом:

$$Ax = \alpha x - \beta y; \quad Ay = \alpha y + \beta x. \qquad (3)$$

Равенства (3) означают, что двумерное подпространство, порожденное векторами x и y, инвариантно относительно A.

В дальнейшем мы будем пользоваться тем, что в двумерном инвариантном подпространстве, отвечающем корню $\lambda = \alpha + i\beta$, преобразование имеет вид (3).

Упражнение. Доказать, что в вещественном пространстве нечетного числа измерений (в частности в трехмерном) у каждого линейного преобразования есть одномерное инвариантное подпространство.

2. Самосопряженные преобразования.

Определение 1. *Линейное преобразование A в вещественном евклидовом пространстве R называется самосопряженным, если для любых векторов x и y*

$$(Ax, y) = (x, Ay). \qquad (4)$$

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортогональный нормированный базис в R и

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n.$$

Пусть, далее, ζ_i — координаты вектора $z = Ax$, т. е.

$$\zeta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k,$$

где $\|a_{ik}\|$ — матрица преобразования A в базисе e_1, $e_2, \ldots, e_n$. Следовательно,

$$(Ax, y) = (z, y) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i\eta_i = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_k\eta_i.$$

Аналогично,

$$(x, Ay) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k. \tag{5}$$

Таким образом, условие (4) означает, что

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Итак, *для того чтобы преобразование было самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы в ортогональном нормированном базисе его матрица была симметрична.*

Всякая симметрическая билинейная форма $A(x; y)$ в произвольном базисе имеет вид

$$A(x; y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k, \tag{6}$$

где $a_{ik} = a_{ki}$. Сравнивая (5) и (6), получаем следующий результат, который мы используем для доказательства теоремы 3 этого параграфа:

Для всякой симметрической билинейной формы $A(x; y)$ существует такое самосопряженное преобразование A, что

$$A(x; y) = (Ax, y).$$

Покажем, что для каждого самосопряженного преобразования существует ортогональный базис, в котором матрица этого преобразования диагональна.

Доказательство будет основано на содержании п. 1. Другое доказательство, не зависящее от п. 1 (и, следовательно, теоремы существования корня алгебраического уравнения), см. в § 17.

Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 1. *У всякого самосопряженного преобразования существует одномерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Согласно теореме 1 этого параграфа каждому корню λ характеристического уравнения отвечает одномерное инвариантное подпространство, если λ вещественно, и двумерное — если λ комплексно. Поэтому, для доказательства леммы достаточно показать, что все λ вещественны.

Предположим, что λ комплексно. При доказательстве теоремы 1 мы для такого $\lambda = \alpha + i\beta$ построили два таких вектора x и y, что

$$\begin{aligned} Ax &= \alpha x - \beta y, \\ Ay &= \beta x + \alpha y. \end{aligned}$$

Но тогда

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \alpha(x, y) - \beta(y, y), \\ (x, Ay) &= \beta(x, x) + \alpha(x, y). \end{aligned}$$

Так как $(Ax, y) = (x, Ay)$ то, вычитая из второго равенства первое, имеем:

$$0 = \beta[(x, x) + (y, y)]$$

и так как $(x, x) + (y, y) \neq 0$, то $\beta = 0$, т. е. λ вещественно.

Лемма 2. *Пусть A — самосопряженное преобразование, а e — его собственный вектор. Тогда совокупность R' векторов, ортогональных e, образует $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Ясно, что совокупность R' векторов $x \in R$, ортогональных вектору e, есть $(n-1)$-мерное подпространство. Покажем, что R' инвариантно относительно преобразования A.

Пусть $x \in R'$, т.е. $(x, e) = 0$. Тогда

$$(Ax, e) = (x, Ae) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) = 0,$$

т.е. и $Ax \in R'$.

Теорема 2. *Существует ортогональный нормированный базис, в котором матрица самосопряженного преобразования A диагональна.*

Доказательство. Согласно лемме 1 преобразование A имеет хотя бы один собственный вектор e_1.

Обозначим через R' подпространство, состоящее из векторов, ортогональных e_1. Так как R' инвариантно, то в нем, согласно той же лемме 1, также существует собственный вектор; обозначим его e_2. Продолжая это построение, мы получим n собственных векторов, из которых каждый следующий по построению ортогонален к предыдущим, т.е. получим n попарно ортогональных собственных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Выберем их за базис в R. Так как

$$Ae_i = \lambda_i e_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то матрица преобразования A в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

т.е. является диагональной матрицей.

3. Приведение квадратичной формы в ортогональном базисе к сумме квадратов. (Приведение к главным осям.) Пусть в n-мерном евклидовом пространстве задана симметрическая билинейная форма $A(x; y)$. Как было показано выше, каждой симметрической билинейной форме $A(x;y)$ соответствует такое линейное самосопряженное преобразование A, что $A(x;y)=(Ax,y)$.

Согласно теореме 2 этого параграфа, существует ортогональный нормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, состоящий из собственных векторов преобразования A (т. е. такой, что $Ae_i=\lambda_i e_i$). В этом базисе мы имеем:

$$\begin{aligned}A(x;y) &= (Ax,y) = \\ &= (A(\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\ldots+\xi_n e_n),\ \eta_1 e_1+\eta_2 e_2+\ldots+\eta_n e_n) = \\ &= (\lambda_1\xi_1 e_1+\lambda_2\xi_2 e_2+\ldots+\lambda_n\xi_n e_n,\ \eta_1 e_1+\eta_2 e_2+\ldots+\eta_n e_n) = \\ &= \lambda_1\xi_1\eta_1+\lambda_2\xi_2\eta_2+\ldots+\lambda_n\xi_n\eta_n.\end{aligned}$$

Полагая $y=x$, получаем следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть $A(x;x)$ — квадратичная форма в n-мерном евклидовом пространстве. Тогда существует ортогональный нормированный базис, в котором эта квадратичная форма имеет вид:*

$$A(x;x)=\sum \lambda_i \xi_i^2.$$

Так как $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями A, то они могут быть найдены из характеристического уравнения матрицы $\|a_{ik}\|$.

Для случая трехмерного пространства доказанная здесь теорема рассматривается в аналитической геометрии. Действительно, в этом случае уравнение

$$A(x;x)=1$$

есть уравнение центральной поверхности второго порядка. Ортогональный нормированный базис, о котором идет речь в теореме 3, есть в этом случае система координат, в которой поверхность имеет канонический вид, а векторы e_1, e_2, e_3 являются направлениями главных осей поверхности второго порядка.

4. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов.

Теорема 4. *Пусть в n-мерном пространстве R заданы две квадратичные формы $A(x;x)$ и $B(x;x)$, причем форма $B(x;x)$ положительно определенная. Тогда* *в R существует базис, в котором обе эти квадратичные формы записываются в виде суммы квадратов.*

Доказательство. Пусть $B(x;y)$ — билинейная форма, соответствующая квадратичной форме $B(x;x)$. Определим в R скалярное произведение формулой

$$(x,y) = B(x;y).$$

Согласно предыдущей теореме в R существует нормированный ортогональный *) базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, в котором форма приводится к сумме квадратов, т. е.

$$A(x;x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2. \tag{7}$$

Скалярный квадрат в нормированном ортогональном базисе имеет вид:

$$(x,x) = B(x;x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2. \tag{8}$$

Итак, в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ обе квадратичные формы записываются в виде суммы квадратов. Теорема доказана.

5. Ортогональные преобразования.

Определение 2. *Линейное преобразование A вещественного n-мерного евклидова пространства называется ортогональным преобразованием, если оно сохраняет скалярное произведение векторов, т. е.*

$$(Ax, Ay) = (x, y) \tag{9}$$

для всех $x, y \in R$.

Полагая в равенстве (9) $x = y$, получаем

$$|Ax|^2 = |x|^2, \tag{10}$$

---

*) В смысле определенного нами в R скалярного произведения.

т. е. *ортогональное преобразование сохраняет длины векторов.*

Упражнение. Доказать, что условие (10) является достаточным условием ортогональности линейного преобразования.

Так как

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}$$

и так как и числитель, и знаменатель в этом выражении не меняются при ортогональном преобразовании, то ортогональное преобразование сохраняет углы между векторами.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортогональный нормированный базис. Так как преобразование A сохраняет углы между векторами и их длины, то векторы $Ae_1, Ae_2, \ldots$ $\ldots, Ae_n$ также образуют ортогональный нормированный базис, т. е.

$$(Ae_i, Ae_k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases} \tag{11}$$

Пусть теперь $\|a_{ik}\|$ — матрица преобразования в ортогональном нормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Так как столбцы этой матрицы являются координатами векторов Ae_i, то условие (11) записывается следующим образом:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i} a_{\alpha k} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases} \tag{12}$$

Упражнение. Показать, что условия (11), а следовательно, и условия (12), являются достаточными условиями ортогональности преобразования.

Условия (12) можно записать в матричной форме. Действительно, $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i} a_{\alpha k}$ суть элементы произведения матрицы на ее транспонированную. Поэтому условия

(12) означают, что *произведение матрицы на ее транспонированную есть единичная матрица.* Так как определитель произведения матриц равен произведению их определителей, то мы получаем также, что квадрат определителя матрицы ортогонального преобразования равен единице, т. е. что *определитель матрицы ортогонального преобразования равен* ± 1.

Ортогональные преобразования, определитель которых равен $+1$, называются *собственными,* а те, определитель которых равен -1, называются *несобственными.*

Докажем следующее существенное свойство ортогональных преобразований.

Лемма 3. *Если* R_1 — *подпространство пространства* R, *инвариантное относительно ортогонального линейного преобразования* A, *то его ортогональное дополнение* R_2, *т. е. совокупность всех векторов, ортогональных к каждому* $x \in R_1$ (см. упражнение на стр. 52), *также есть инвариантное подпространство.*

Доказательство. Пусть $y \in R_2$, т. е. $(x, y) = 0$ для всякого $x \in R_1$.

Покажем, что при этом $(x, Ay) = 0$ для всякого $x \in R_1$. Так как преобразование A ортогонально, то оно невырождено и его образ на любом инвариантном подпространстве совпадает с этим подпространством. Поэтому всякое $x \in R_1$ представимо в виде

$$x = Az, \quad \text{где} \quad z \in R_1.$$

Отсюда $(x, Ay) = (Az, Ay) = (z, y) = 0$, т. е. $Ay \in R_2$. Лемма доказана.

Упражнение. Доказать, что произведение двух собственных или двух несобственных ортогональных преобразований есть собственное ортогональное преобразование, а произведение собственного на несобственное есть несобственное ортогональное преобразование.

Замечание. Разделение ортогональных преобразований на собственные и несобственные связано с тем, что ортогональное преобразование, которое можно получить непрерывным переходом от единичного преобразования, обязательно собственно. Действительно, пусть A_t — ортогональное преобразование, непрерывно зависящее от параметра t (это значит, что элементы матрицы этого преобразования в каком-либо базисе непрерывно зависят от t), причем $A_0 = E$. Тогда определитель этого преобразования есть также непрерывная функция от t. Так как непрерывная функция, принимающая лишь значения ± 1, должна быть постоянной, а при $t = 0$ определитель преобразования A_t равен 1, то и при $t \neq 0$ определитель преобразования A_t равен 1. Используя теорему 5 этого параграфа, можно показать и обратное, а именно, что всякое собственное ортогональное преобразование может быть получено непрерывным изменением из единичного.

Изучим ортогональные преобразования в одномерном и двумерном пространствах. Ниже мы увидим, что изучение ортогональных преобразований в пространстве любого числа измерений сводится к этим простейшим случаям.

Пусть e — вектор, порождающий одномерное пространство, в котором задано ортогональное преобразование A. Тогда $Ae = \lambda e$ и так как в силу ортогональности $(Ae, Ae) = (e, e)$, то $\lambda^2(e, e) = (e, e)$, т. е. $\lambda = \pm 1$.

Таким образом, в одномерном пространстве есть лишь два ортогональных преобразования: преобразование $Ax \equiv x$ и преобразование $Ax \equiv -x$; первое из них собственное, а второе — несобственное.

Рассмотрим ортогональное преобразование в двумерном пространстве R. Пусть e_1, e_2 — ортогональный нормированный базис в R. Пусть далее преобразование A в этом базисе задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Разберем сначала случай собственного ортогонального преобразования, т. е. положим $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Условие ортогональности преобразования означает, что произведение матрицы (13) на ее транспонированную есть единичная матрица, т. е. что

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Так как определитель матрицы (13) равен единице, то

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что матрица преобразования в этом случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Полагая $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \sin\varphi$, получаем что *всякое собственное ортогональное преобразование в двумерном пространстве имеет в ортогональном нормированном базисе матрицу вида*

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

(поворот в плоскости на угол φ).

Пусть теперь A — несобственное преобразование, т. е. $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$. В этом случае характеристическое уравнение матрицы имеет вид $\lambda^2-(\alpha+\delta)\lambda-1$ и, следовательно, имеет вещественные корни. Значит, у преобразования A имеется собственный вектор e, $Ae = \lambda e$. Из ортогональности преобразования следует, что $Ae = \pm e$. Но ортогональное преобразование не меняет углов между векторами и их длин. Значит, ортогональный e вектор e_1 переходит после преобразования в вектор, ортогональный $Ae = \pm e$, т. е. в $\pm e_1$. Итак, в базисе e, e_1 матрица преобразования A имеет вид

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель матрицы несобственного преобразования равен -1, то возможны лишь следующие канонические виды матрицы несобственного ортогонального преобразования в двумерном пространстве

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

(Зеркальные отражения относительно одной из осей.)

Найдем теперь простейший вид матрицы ортогонального преобразования для случая пространства любого числа измерений.

Т е о р е м а 5. *Пусть A — ортогональное преобразование в n-мерном евклидовом пространстве R. В R существует ортогональный нормированный базис e_1, $e_2, \ldots, e_n$, в котором матрица преобразования A имеет вид*

$$\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& -1 &&&&&&& \\
&&&& \ddots &&&&&& \\
&&&&& -1 &&&&& \\
&&&&&& \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 &&& \\
&&&&&& \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 &&& \\
&&&&&&&& \ddots && \\
&&&&&&&&& \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\
&&&&&&&&& \sin\varphi_k & \cos\varphi_k
\end{pmatrix}.$$

Все элементы, кроме выписанных, суть нули.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1 этого параграфа в R можно выбрать либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство $R^{(1)}$. Если существует одномерное инвариантное подпространство $R^{(1)}$, то обозначим через e_1 содержащийся в нем вектор единичной длины. Если же одномерного инвариантного подпространства нет, то возьмем двумерное и обозначим через e_1, e_2 его ортогональный нормированный базис.

В случае, если $R^{(1)}$ одномерно, преобразование A имеет в нем вид: $Ax = \pm x$.

В случае, если подпространство $R^{(1)}$ двумерно, наше преобразование является в нем собственным ортогональным преобразованием (так как в противном случаев в $R^{(1)}$ существовало бы одномерное инвариантное подпространство), и, следовательно, A имеет в $R^{(1)}$ матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Совокупность $\tilde{R}$ векторов, ортогональных ко всем векторам из $R^{(1)}$, согласно доказанной выше лемме, есть снова инвариантное подпространство.

В инвариантном подпространстве $\tilde{R}$ снова находим одномерное или двумерное инвариантное подпространство, выбираем в нем базис и так далее.

Мы получим таким образом n попарно ортогональных векторов длины 1. Примем их за базис в R. Тогда матрица преобразования в этом базисе будет иметь вид

$$\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& -1 &&&&&&& \\
&&&& \ddots &&&&&& \\
&&&&& -1 &&&&& \\
&&&&&& \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 &&& \\
&&&&&& \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 &&& \\
&&&&&&&& \ddots && \\
&&&&&&&&& \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\
&&&&&&&&& \sin\varphi_k & \cos\varphi_k
\end{pmatrix},$$

где стоящие по диагонали ± 1 отвечают одномерным инвариантным подпространствам, а «клетки»

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$$

— двумерным инвариантным подпространствам. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Назовем *простым вращением* собственное ортогональное преобразование, представляющее собой поворот в некоторой двумерной плоскости и оставляющее неизменным $(n-2)$-мерное подпространство, ортогональное к этой плоскости. Таким образом, простое вращение есть преобразование, матрица которого может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\varphi & -\sin\varphi & & & \\ & & & \sin\varphi & \cos\varphi & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Простым отражением мы назовем несобственное линейное преобразование, меняющее направление всех векторов, принадлежащих некоторому одномерному подпространству, на противоположное и оставляющее неизменными векторы его $(n-1)$-мерного ортогонального дополнения. Таким образом, простое отражение есть преобразование, матрица которого в некотором базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь результатом теоремы 5, нетрудно показать, что всякое ортогональное преобразование может быть представлено как произведение некоторого числа простых вращений и простых отражений. Доказательство предоставляется читателю.

§ 17. Экстремальные свойства собственных значений

Рассмотрим самосопряженное линейное преобразование A в n-мерном евклидовом пространстве. Мы покажем, что его собственные значения можно получить, рассматривая некоторую задачу на минимум, связанную с соответствующей A квадратичной формой (Ax, x). Это, в частности, позволит доказать существование собственных векторов, не пользуясь теоремой о существовании корня уравнения n-й степени. Эти экстремальные свойства полезны также при вычислении собственных значений. Мы рассмотрим сначала вещественное пространство, а затем перенесем полученные результаты на случай комплексного пространства.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть B — самосопряженное линейное преобразование в вещественном пространстве такое, что квадратичная форма (Bx, x) неотрицательна, т. е.*

$$(Bx, x) \geqslant 0 \quad \text{для любого} \quad x.$$

Тогда, если для некоторого $x = e$

$$(Be, e) = 0,$$

то и $Be = 0$.

Доказательство. Покажем, что для любого вектора h имеем $(Be, h) = 0$. Для этого положим $x = e + th$, где t — произвольное число, а h — вектор. Тогда имеем

$$(B(e + th), e + th) = \\ = (Be, e) + t(Be, h) + t(Bh, e) + t^2(Bh, h) \geqslant 0,$$

т. е. так как $(Bh, e) = (h, Be) = (Be, h)$ и $(Be, e) = 0$, то $2t(Be, h) + t^2(Bh, h) \geqslant 0$ для любых t. Отсюда следует, что $(Be, h) = 0$.

Действительно, функция $at + bt^2$ при $a \neq 0$ меняет знак в точке $t = 0$, мы же получили, что выражение

$$2t(Be, h) + t^2(Bh, h)$$

для любых t неотрицательно, следовательно,

$$(Be, h) = 0.$$

Так как h произвольно, то $Be = 0$, что и требовалось доказать.

Пусть A — некоторое самосопряженное линейное преобразование в n-мерном вещественном евклидовом пространстве. Соответствующую A квадратичную форму (Ax, x) будем рассматривать на *единичной сфере,* т. е. на множестве векторов x, для которых

$$(x, x) = 1.$$

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть A — самосопряженное линейное преобразование. Тогда соответствующая A квадратичная форма (Ax, x) достигает на единичной сфере минимума λ_1. Вектор e_1, на котором этот минимум достигается, есть собственный вектор преобразования A, а значение минимума λ_1 — соответствующее собственное значение этого преобразования.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единичная сфера есть ограниченное замкнутое множество в n-мерном пространстве. Поэтому (Ax, x), как непрерывная на нем функция, достигает минимума в некоторой точке e_1. Обозначим этот минимум через λ_1. Тогда имеем

$$(Ax, x) \geqslant \lambda_1, \quad \text{если} \quad (x, x) = 1, \tag{1}$$

причем

$$(Ae_1, e_1) = \lambda_1, \quad \text{где} \quad (e_1, e_1) = 1.$$

Запишем неравенство (1) в виде

$$(Ax, x) \geqslant \lambda_1(x, x), \quad \text{где} \quad (x, x) = 1. \tag{2}$$

Оно справедливо для векторов длины единица. Так как при умножении x на некоторое число α как правая, так и левая части неравенства умножаются на α^2, то оно справедливо для векторов любой длины (поскольку любой вектор можно получить из вектора длины единица умножением его на некоторое число α).

Полученное неравенство можно переписать так:

$$(Ax - \lambda_1 x,\ x) \geqslant 0 \quad \text{для любых} \quad x,$$

причем для $x = e_1$ имеет место

$$(Ae_1 - \lambda_1 e_1,\ e_1) = 0.$$

Это значит, что преобразование $B = A - \lambda_1 E$ удовлетворяет условиям леммы 1. Отсюда, применяя эту лемму, получаем:

$$(A - \lambda_1 E)e_1 = 0, \quad \text{т. е.} \quad Ae_1 = \lambda_1 e_1.$$

Таким образом, e_1 является собственным вектором преобразования A, соответствующим собственному значению λ_1. Теорема доказана.

Для нахождения следующего собственного значения рассмотрим все векторы из R, ортогональные к собственному вектору e_1. Как было показано в п. 2 § 16 (лемма 2), эти векторы образуют $(n-1)$-мерное подпространство R_1, инвариантное относительно преобразования A.

Отыскивая минимум квадратичной формы (Ax, x), при условии $(x, x) = 1$, в этом подпространстве мы придем к новому собственному вектору e_2 и собственному значению λ_2.

Очевидно, что $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$, так как минимум (Ax, x) во всем пространстве не может быть больше, чем минимум той же функции в подпространстве.

Следующий собственный вектор мы получим, решая ту же задачу в $(n-2)$-мерном инвариантном подпространстве, состоящем из векторов, ортогональных и e_1 и e_2. Значение минимума (Ax, x) в этом подпространстве будет третьим собственным значением.

Продолжая этот процесс, мы исчерпаем все n собственных значений и соответствующих им собственных векторов нашего преобразования.

Иногда бывает полезно определить второй, третий и т. д. собственные векторы преобразования из задачи на максимум или минимум непосредственно, не считая при этом известными предыдущие собственные векторы.

Пусть A — самосопряженное линейное преобразование. Обозначим через

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$$

его собственные значения, расположенные в возрастающем порядке, а через $e_1, e_2, \dots, e_n$ — соответствующие им нормированные и ортогональные собственные векторы.

Покажем, что *если мы возьмем первые k собственных векторов*

$$e_1, e_2, \dots, e_k$$

и порожденное ими подпространство S, то для любого вектора x из S имеет место неравенство

$$\lambda_1(x, x) \leqslant (Ax, x) \leqslant \lambda_k(x, x).$$

Действительно, пусть

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_k e_k.$$

Так как $Ae_k = \lambda_k e_k$, $(e_k, e_k) = 1$, $(e_k, e_i) = 0$ при $i \neq k$, то

$$\begin{aligned}(Ax, x) &= (A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_k e_k),\ \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_k e_k) = \\ &= (\lambda_1 \xi_1 e_1 + \lambda_2 \xi_2 e_2 + \dots + \lambda_k \xi_k e_k,\ \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_k e_k) = \\ &= \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_k \xi_k^2.\end{aligned}$$

Кроме того, так как векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$ ортогональны и нормированы, то

$$(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2$$

и, следовательно,

$$(Ax, x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_k \xi_k^2 \geqslant \lambda_1(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2) = \lambda_1(x, x).$$

Аналогично

$$(Ax, x) \leqslant \lambda_k(x, x)$$

и, следовательно,

$$\lambda_1(x, x) \leqslant (Ax, x) \leqslant \lambda_k(x, x).$$

Пусть теперь R_k — произвольное подпространство $n - k + 1$ измерений. В § 7 (лемма п. 1) мы доказали, что если сумма размерностей двух подпространств n-мерного пространства превышает n, то существует отличный от нуля вектор, принадлежащий обоим подпространствам. Следовательно, так как $(n-k+1)+k > n$, то существует вектор x_0, принадлежащий как R_k, так и подпространству S, порожденному векторами $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Мы можем считать, что длина его равна 1, т. е. что $(x_0, x_0) = 1$. Так как всюду в S, как мы уже доказали, $(Ax, x) \leqslant \lambda_k(x, x)$, то $(Ax_0, x_0) \leqslant \lambda_k$.

Итак, мы доказали, что в R_k существует вектор x_0 длины 1 такой, что

$$(Ax_0, x_0) \leqslant \lambda_k.$$

Но тогда и подавно, минимум (Ax, x), где x пробегает все векторы длины 1 из R_k, также меньше или равен λ_k.

Таким образом, *для любого $(n - k + 1)$-мерного подпространства R_k*

$$\min(Ax, x) \leqslant \lambda_k,$$

где $(x, x) = 1$ и $x \in R_k$.

Заметим, что среди подпространств R_k размерности $n - k + 1$ есть такое, для которого $\min(Ax, x)$, $x \in R_k$, $(x, x) = 1$, в точности равен λ_k. Таким подпространством является подпространство, состоящее из векторов, ортогональных первым $k - 1$ собственным векторам $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$. Действительно, в этом параграфе мы доказали, что $\min\limits_{(x,x)=1}(Ax, x)$, распространенный по всем векторам, ортогональным первым $k - 1$ собственным векторам, равен λ_k.

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Пусть R_k — некоторое $(n - k + 1)$-мерное подпространство пространства R. Тогда минимум (Ax, x) для всех x из R_k таких, что $(x, x) = 1$, меньше или равен λ_k. Подпространство R_k можно выбрать так, чтобы этот минимум равнялся λ_k.

Это утверждение можно записать следующей формулой:

$$\max_{R_k} \min_{\substack{(x,x)=1 \\ x \in R_k}} (Ax, x) = \lambda_k. \tag{3}$$

В этой формуле min берется по указанным векторам, а max по всевозможным подпространствам R_k размерности $n - k + 1$.

Из доказанной теоремы следует:

Пусть A — самосопряженное линейное преобразование, а B — положительно определенное линейное преобразование. Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — собственные значения A, а $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant \mu_n$ — собственные значения $A+B$; тогда $\lambda_k \leqslant \mu_k$.

Действительно, всюду

$$(Ax, x) \leqslant ((A+B)x, x).$$

Следовательно, в любом $(n-k+1)$-мерном подпространстве R_k имеет место неравенство:

$$\min_{\substack{(x,x)=1\\ x\in R_k}} (Ax, x) \leqslant \min_{\substack{(x,x)=1\\ x\in R_k}} ((A+B)x, x).$$

Значит, максимум левой части по всевозможным подпространствам R_k не превосходит максимума правой части. Так как в силу формулы максимум левой части равен λ_k, а максимум правой равен μ_k, то $\lambda_k \leqslant \mu_k$, что и требовалось доказать.

Перенесем полученные результаты на случай комплексного пространства.

Для этого нам придется заменить лишь лемму 1 следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть B — самосопряженное преобразование в комплексном пространстве, и соответствующая ему эрмитова форма (Bx, x) не отрицательна, т. е.*

$$(Bx, x) \geqslant 0 \quad \text{для любых} \quad x.$$

Тогда, если для некоторого e $(Be, e) = 0$, то и $Be = 0$.

Доказательство. Пусть t — произвольное вещественное число, а h — вектор. Тогда

$$(B(e+th), e+th) \geqslant 0,$$

или, так как $(Be, e) = 0$, то

$$t[(Be, h) + (Bh, e)] + t^2(Bh, h) \geqslant 0$$

для любого t. Отсюда следует, что

$$(Be, h) + (Bh, e) = 0. \tag{4}$$

Так как h произвольно, то, заменяя h на ih, получаем $(Be, ih) + (iBh, e) = 0$, т. е.

$$-i(Be, h) + i(Bh, e) = 0. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем, что

$$(Be, h) = 0,$$

и так как h произвольно, то $Be = 0$. Лемма доказана.

Все остальные теоремы этого параграфа и их доказательства переносятся на случай комплексного пространства без всяких изменений.