ГЛАВА IV

ПОНЯТИЕ О ТЕНЗОРАХ

§ 23. Сопряженное (двойственное) пространство

1. Определение сопряженного пространства. Пусть R — линейное пространство. Одновременно с R часто рассматривают другое, тесно связанное с ним пространство, так называемое сопряженное пространство. Для того чтобы сформулировать определение сопряженного пространства, вернемся к понятию линейной функции, введенному нами в п. 1 § 4.

Линейной функцией мы назвали функцию $f(x)$, $x \in R$ удовлетворяющую условиям:

1° $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

2° $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в n-мерном пространстве R. Если

$$x = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \ldots + \xi^n e_n$$

— вектор из R, то линейная функция в R может быть записана в виде (см. § 4)

$$\begin{aligned} f(x) = f(\xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \ldots + \xi^n e_n) = \\ = a_1 \xi^1 + a_2 \xi^2 + \ldots + a_n \xi^n, \end{aligned} \qquad (1)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$, определяющие линейную функцию, вычисляются по формулам

$$a_1 = f(e_1),\ a_2 = f(e_2),\ \ldots,\ a_n = f(e_n). \qquad (2)$$

Как это ясно из формулы (1), *при заданном базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *всяким* n *числам* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *отвечает линейная функция, притом только одна.*

Пусть f и g — линейные функции. Их суммой называется функция h, ставящая в соответствие каждому вектору x число $f(x) + g(x)$. Произведением линейной функции f на число α называется функция, ставящая в соответствие каждому вектору x число $\alpha f(x)$.

Очевидно, что сумма линейных функций и произведение линейной функции на число есть снова линейная функция. При этом, если линейная функция f задается числами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а g — числами $b_1, b_2, \ldots, b_n$, то $f + g$ задается числами $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $\ldots$, $a_n + b_n$, а αf — числами $\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n$.

Таким образом, множество заданных в R линейных функций образует линейное пространство.

О п р е д е л е н и е 1. *Пусть* R *есть* n*-мерное пространство. Пространством* R'*, сопряженным к* R*, мы назовем линейное пространство, векторами которого являются линейные функции, заданные в* R*. Сумма в* R' *определяется как сумма линейных функций, а произведение вектора из* R' *на число — как произведение линейной функции на число.*

Так как при заданном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в пространстве R каждая линейная функция однозначно задается системой n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, причем сумме функций отвечает сумма чисел, произведению функции на α произведение чисел a_i на α, то ясно, что R' изоморфно пространству, в котором вектор определен как совокупность n чисел.

Значит, *пространство* R'*, сопряженное к* n*-мерному пространству* R*, также* n*-мерно.*

Если пространства R и R' рассматривают одновременно, то векторы из R называются *контравариантными,* а векторы из R' *ковариантными.* В дальнейшем символы $x, y, \ldots$ будут означать элементы из R, т. е. контравариантные векторы, а $f, g, \ldots$ — элементы из R', т. е. ковариантные векторы.

2. Биортогональные (взаимные) базисы. В дальнейшем мы будем значение линейной функции f в точке x обозначить через (f, x). Таким образом, каждой паре $f \in R'$ и $x \in R$ отнесено число (f, x), причем

1° $(f, x_1 + x_2) = (f, x_1) + (f, x_2)$,
2° $(f, \lambda x) = \lambda(f, x)$,
3° $(\lambda f, x) = \lambda(f, x)$,
4° $(f_1 + f_2, x) = (f_1, x) + (f_2, x)$.

Первое и второе из этих соотношений — это записанные в новых обозначениях равенства

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \text{и} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

являющиеся определением линейной функции, а третье и четвертое — определения произведения линейной функции на число и суммы линейных функций. Соотношения 1°–4° напоминают по внешнему виду аксиомы 2° и 3° скалярного произведения (§ 2). Надо лишь подчеркнуть, что в то время, как скалярное произведение есть число, отнесенное паре векторов одного и того же (евклидова) пространства, (f, x) есть число, отнесенное паре векторов, один из которых принадлежит аффинному пространству R, а другой — аффинному пространству R'.

Векторы $x \in R$ и $f \in R'$ мы назовем *ортогональными,* если

$$(f, x) = 0.$$

Таким образом, хотя в аффинном пространстве R (в отличие от евклидова) нет понятия ортогональности двух векторов $x, y \in R$, можно говорить об ортогональности векторов из R к векторам из R'.

Определение 2. *Пусть* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — *базис в* R, *а* $f^1, f^2, \ldots, f^n$ — *базис в* R'. *Мы назовем эти базисы биортогональными* (*взаимными*), *если*

$$(f^i, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3)$$

Введем символ δ^i_k, положив

$$\delta^i_k = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда

$$(f^i, e_k) = \delta^i_k.$$

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в R, то (f, e_k) являются числами a_k, определяющими линейную функцию $f \in R'$ [см. формулу (2)], так как (f, e_k) есть другая форма записи выражения $f(e_k)$.

Из этого замечания следует утверждение:

если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — *произвольный базис в* R, *то в* R' *существует, и притом только один, базис* $f^1, f^2, \ldots, f^n$ *такой, что базисы* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *и* $f^1, f^2, \ldots, f^n$ *биортогональны* (*взаимны*).

Действительно, из равенства (3) имеем

$$(f^1, e_1) = 1, \quad (f^1, e_2) = 0, \quad \ldots, \quad (f^1, e_n) = 0.$$

Таким образом, здесь заданы числа $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, ..., $a_n = 0$. Так как по всяким числам a_i можно построить единственную линейную функцию, то f^1 определено, и при этом однозначно. Аналогично определяется f^2 равенствами

$$(f^2, e_1) = 0, \quad (f^2, e_2) = 1, \quad \ldots, \quad (f^2, e_n) = 0$$

и т. д. Построенные векторы $f^1, f^2, \ldots, f^n$ из R' (линейные функции) линейно независимы, так как отвечающие каждому из них системы чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независимы между собой. Мы построили, таким образом, базис, биортогональный базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и доказали его единственность.

В дальнейшем мы будем пользоваться принятыми в тензорном исчислении обозначениями, а именно, если в некотором выражении один и тот же индекс стоит один раз вверху, а другой раз внизу, то это означает, что по этому индексу производится суммирование (от 1 до n). Сам знак суммирования $\sum$ мы при этом будем опускать.

Например, $\xi^i\eta_i$ означает $\xi^1\eta_1 + \xi^2\eta_2 + \ldots + \xi^n\eta_n$.

Имея в R и R' биортогональные базисы, легко вычислять координаты любого вектора. Пусть e_i и f^k — биортогональные базисы. Найдем координаты ξ^i вектора $x \in R$ в базисе e_i. Мы имеем

$$x = \xi^i e_i.$$

Отсюда

$$(f^k, x) = (f^k, \xi^i e_i) = \xi^i (f^k, e_i) = \xi^i \delta_i^k = \xi^k.$$

Следовательно, *координаты* ξ^k *вектора* x *в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *вычисляются по формулам*

$$\xi^k = (f^k, x),$$

где f^k *— базис, взаимный с базисом* e_i.

Аналогично получаем, что *координаты* η_i *вектора* f *в базисе* f^k *вычисляются по формулам*

$$\eta_i = (f, e_i).$$

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $f^1, f^2, \ldots, f^n$ — два взаимных (биортогональных) базиса. Выразим величину (f, x) через координаты векторов f и x в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $f^1, f^2, \ldots, f^n$ соответственно. Пусть

$$x = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \ldots + \xi^n e_n \quad \text{и} \quad f = \eta_1 f^1 + \eta_2 f^2 + \ldots + \eta_n f^n;$$

тогда

$$(f,x) = (\eta_1 f^1 + \eta_2 f^2 + \ldots + \eta_n f^n,\ \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \ldots + \xi^n e_n) = \\ = (f^i, e_k)\eta_i \xi^k = \delta^i_k \eta_i \xi^k = \eta_i \xi^i.$$

Итак, *если* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — *базис в* R, $f^1, f^2, \ldots, f^n$ — *взаимный с ним базис в* R', *то*

$$(f,x) = \eta_1 \xi^1 + \eta_2 \xi^2 + \ldots + \eta_n \xi^n, \tag{4}$$

где $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ — *координаты вектора* $x \in R$ *в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$, *а* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — *координаты вектора* $f \in R'$ *в базисе* $f^1, f^2, \ldots, f^n$.

Замечание. Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $f^1, f^2, \ldots, f^n$ — произвольные базисы в R и R' соответственно, то

$$(f,x) = a^i_k \eta_i \xi^k,$$

где $a^i_k = (f^i, e_k)$.

Мы видим, что во взаимных базисах значение (f,x) записывается особенно просто.

Итак, мы построили соответствие, относящее каждому линейному пространству R другое пространство, а именно сопряженное пространство R'. Мы можем теперь установить соответствие между линейными преобразованиями пространств.

Пусть R_1, R_2 — два линейных пространства и R'_1, R'_2 — пространства, им сопряженные. Каждому линейному преобразованию A пространства R_1 в R_2 мы поставим в соответствие линейное преобразование A' пространства R'_2 в R'_1, которое определим следующим образом.

Пусть $f_2 \in R'_2$, $x_1 \in R_1$. Рассмотрим (f_2, Ax_1); при фиксированном f_2 это линейная функция от x_1, т. е. может быть записана в виде $(f_2, Ax_1) = (f_1, x_1)$, где $f_1 \in R'_1$. Положим по определению $f_1 = A'f_2$. Получаемое преобразование A' называется *сопряженным* к A. Итак, если A — линейное преобразование пространства R_1 в R_2, то сопряженное ему преобразование есть линейное преобразование A' пространства R'_2 в R'_1, задаваемое тождеством

$$(A'f_2, x_1) = (f_2, Ax_1).$$

Установим одно важное свойство операции перехода к сопряженному преобразованию. Пусть A — линейное преобразование пространства R_1 в R_2, B — линейное преобразование пространства R_2 в R_3. Обозначим через BA композицию этих преобразований, т.е. линейное преобразование пространства R_1 в R_3 (по определению $BAx = B(Ax)$ для любого $x \in R_1$).

Покажем, что
$$(BA)' = A'B'.$$
В самом деле, согласно определению имеем:
$$((BA)'f, x) = (f, BAx) \quad \text{для любых} \quad x \in R_1 \quad \text{и} \quad f \in R_3'.$$
С другой стороны, $(A'B'f, x) = (B'f, Ax) = (f, BAx)$. Сопоставляя эти равенства, мы видим, что $(BA)' = A'B'$.

Упражнение. Доказать, что линейное преобразование, сопряженное к A', есть A.

3. Взаимозаменяемость R и R'. В предыдущем изложении R и R' играли различную роль. Мы покажем, что они совершенно равноправны, т.е. что все теоремы останутся справедливыми, если мы поменяем R и R' ролями.

Мы определили R' как совокупность линейных функций в R. Чтобы установить равноправность R и R', докажем, что всякая линейная функция $\varphi(f)$ в R' может быть записана в виде (f, x_0), где x_0 — фиксированный вектор из R.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — некоторый базис в R и f^1, $f^2, \ldots, f^n$ — взаимный с ним базис в R'. Линейная функция $\varphi(f)$ может быть записана в виде
$$\varphi(f) = a^1\eta_1 + a^2\eta_2 + \ldots + a^n\eta_n,$$
где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — координаты вектора f в базисе f^1, $f^2, \ldots, f^n$. Рассмотрим вектор x_0, имеющий в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $a^1, a^2, \ldots, a^n$. Тогда, как мы видели в п. 2,
$$(f, x_0) = a^1\eta_1 + a^2\eta_2 + \ldots + a^n\eta_n$$
и, следовательно,
$$\varphi(f) \equiv (f, x_0). \tag{5}$$

Эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между линейными функциями φ, заданными в R', и векторами $x_0 \in R$.

Мы можем поэтому во всем изложении считать R пространством линейных функций над R', задавая эти линейные функции формулой (5). Этим установлено полное равноправие между R и R'.

Заметим, что при одновременном изучении пространства и сопряженного пространства мы употребляем лишь обычные для векторов операции сложения и умножения на число в каждом пространстве и операцию (f, x), связывающую элементы обоих пространств. Можно поэтому дать другое определение пары сопряженных пространств R и R', при котором их равноправие непосредственно видно. Это определение состоит в следующем: мы рассматриваем пару n-мерных пространств R и R' и каждой паре векторов $x \in R$, $f \in R'$ относим число (f, x), требуя при этом, чтобы выполнялись условия 1°–4° предыдущего пункта и условие

5° *Из* $(f, x) = 0$ *для любого* x *следует* $f = 0$ *и из* $(f, x) = 0$ *для любого* f *следует* $x = 0$.

Коротко говоря, пара сопряженных пространств R и R' — это пара n-мерных пространств с введенной дополнительно операцией (f, x), удовлетворяющей перечисленным условиям.

З а м е ч а н и е. В п. 2 мы доказали, что для каждого базиса в R существует и притом единственный взаимный с ним базис в R'. Из равноправия между R и R' следует, что для всякого базиса в R' существует и притом единственный взаимный с ним базис в R.

4. Преобразования координат в R и R'. Если мы рассматриваем координаты векторов $x \in R$ в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то координаты векторов $f \in R'$ мы будем, как правило, рассматривать в базисе $f^1, f^2, \ldots, f^n$, взаимном к базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Перейдем в R от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к новому базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, и пусть

$$e'_i = c_i^k e_k \tag{6}$$

— формулы этого перехода.

Обозначая через $f^1, f^2, \ldots, f^n$ базис, взаимный с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а через $f'^1, f'^2, \ldots, f'^n$ — базис, взаимный с базисом $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, найдем матрицу $\|b_i^k\|$ перехода от базиса f^i к базису f'^i.

Найдем сначала обратную ей матрицу $\|u_i^k\|$ перехода от $f'^1, f'^2, \ldots, f'^n$ к $f^1, f^2, \ldots, f^n$:

$$f^k = u_i^k f'^i. \tag{6'}$$

Для этого вычислим двумя способами выражение (f^k, e'_i):

$$(f^k, e'_i) = (f^k, c_i^\alpha e_\alpha) = c_i^\alpha (f^k, e_\alpha) = c_i^k,$$
$$(f^k, e'_i) = (u_i^k f'^i, e'_i) = u_i^k.$$

Отсюда имеем $c_i^k = u_i^k$, т.е. матрица $\|u_i^k\|$ является транспонированной *) к матрице перехода (6). Следовательно, *матрица перехода*

$$f'^k = b_i^k f^i \tag{7}$$

от $f^1, f^2, \ldots, f^n$ *к* $f'^1, f'^2, \ldots, f'^n$ *равна матрице, транспонированной к матрице, обратной матрице* $\|c_i^k\|$ *перехода от* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *к* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.

Выясним теперь, как преобразуются координаты векторов в R и в R'. Пусть ξ^i — координаты вектора $x \in R$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и ξ'^i — его координаты в новом базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.

Тогда

$$(f^i, x) = (f^i,\ \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \ldots + \xi^n e_n) = \xi^i$$

и

$$(f'^i, x) = (f'^i,\ \xi'^1 e'_1 + \xi'^2 e'_2 + \ldots + \xi'^n e'_n) = \xi'^i.$$

---

*) Мы говорим, что матрица $\|u_i^k\|$ является транспонированной к матрице перехода (6), так как суммирование в (6′) производится по другому индексу.

Поэтому

$$\xi'^i = (f'^i, x) = (b^i_k f^k, x) = b^i_k (f^k, x) = b^i_k \xi^k.$$

Итак,

$$\xi'^i = b^i_k \xi^k, \tag{8}$$

т. е координаты векторов в R преобразуются по тем же формулам, что и векторы взаимного базиса в R'. Аналогично, координаты векторов в R' преобразуются по тем же формулам, что и векторы взаимного базиса в R, т. е.

$$\eta'_i = c^k_i \eta_k. \tag{9}$$

Мы можем таким образом, сформулировать следующее правило: *при переходе от старой системы координат к новой объекты, имеющие нижний индекс, преобразуются матрицей $\|c^k_i\|$, объекты, имеющие верхний индекс, преобразуются матрицей $\|b^k_i\|$, обратной к $\|c^k_i\|$.*

Тот факт, что матрица $\|b^k_i\|$ является обратной к матрице $\|c^k_i\|$, выражается соотношениями

$$c^\alpha_i b^j_\alpha = \delta^j_i, \quad b^\alpha_i c^j_\alpha = \delta^j_i.$$

5. Пространство, сопряженное к евклидову. Ограничимся для простоты евклидовым пространством над полем действительных чисел.

Лемма. *Пусть R есть n-мерное евклидово пространство. Тогда каждую линейную функцию в нем можно записать в виде*

$$f(x) = (x, y),$$

где y — фиксированный вектор, однозначно определяемый линейной функцией f. Обратно, каждый вектор y определяет линейную функцию $f(x) = (x, y)$.

Доказательство. Выберем в R некоторый ортогональный нормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Линейная функция $f(x)$ в этом базисе может быть записана в виде

$$f(x) = a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n.$$

Введем вектор y с координатами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Так как базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортогональный, то

$$(x, y) = a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n.$$

Мы доказали, таким образом, существование такого вектора y, что для любого x имеет место равенство

$$f(x) = (x, y).$$

Докажем теперь, что такой вектор определяется однозначно. Пусть

$$f(x) = (x, y_1) \quad \text{и} \quad f(x) = (x, y_2).$$

Тогда

$$(x, y_1) = (x, y_2),$$

т. е.

$$(x, y_1 - y_2) = 0$$

для любого x. Следовательно, $y_1 - y_2 = 0$. Однозначность доказана.

Таким образом, в случае евклидова пространства мы можем каждый элемент f из R' заменить соответствующим элементом y из R и при этом вместо (f, x) писать (y, x). *Так как при одновременном изучении пространства и сопряженного пространства мы употребляем лишь обычные для векторов операции и операцию (f, x), связывающую элементы $f \in R'$ и $x \in R$, то мы можем в случае евклидова пространства заменить f на y, R' на R и (f, x) на (y, x)*, т. е. отождествить евклидово пространство с сопряженным к нему пространством R' *). Это выражают иногда и так: в евклидовом

*) Если R — аффинное n-мерное пространство, то R' также n-мерно и, следовательно, R и R' изоморфны. Но если бы мы ото-

пространстве можно заменить ковариантные векторы контравариантными.

При таком отождествлении пространства R и сопряженного к нему пространства R' понятие ортогональности векторов $x \in R$ и $f \in R'$, введенное в пункте 2, переходит в обычное для евклидова пространства понятие ортогональности двух векторов из R.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — произвольный базис в R, а f^1, $f^2, \ldots, f^n$ — взаимный с ним (биортогональный) базис в R'. Так как в случае евклидова пространства R и R' отождествлены, то мы можем считать векторы биортогонального к e_i базиса f^k также векторами из R.

Выясним, как нам найти в этом случае по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базис $f^1, f^2, \ldots, f^n$. Выразим сначала e_i через f^k:

$$e_i = g_{ik} f^k.$$

Нам нужно найти коэффициенты g_{ik}. Для этого умножим скалярно обе части равенства на e_α:

$$(e_i, e_\alpha) = g_{ik}(f^k, e_\alpha).$$

Так как, в силу взаимности (биортогональности) базисов f^k и e_α,

$$(f^k, e_\alpha) = \delta^k_\alpha,$$

то

$$(e_i, e_\alpha) = g_{ik}\delta^k_\alpha = g_{i\alpha}.$$

Итак, если базис f^k биортогонален к базису e_i, то

$$e_i = g_{ik} f^k, \tag{10}$$

где матрица g_{ik} вычисляется по формуле

$$g_{ik} = (e_i, e_k).$$

ждествили R и R', нам пришлось бы вместо (f, x) писать (y, x), где $y, x \in R$, т. е. мы тем самым ввели бы в R скалярное произведение.

Отсюда, разрешив соотношение (10) относительно f^i, имеем:

$$f^i = g^{ik} e_k, \tag{11}$$

где g^{ik} — матрица, обратная к g_{ik}, т.е.

$$g^{i\alpha} g_{\alpha k} = \delta^i_k.$$

Упражнение. Показать, что

$$g^{ik} = (f^i, f^k).$$

§ 24. Тензоры

1. Полилинейные функции. В первой главе мы изучили линейные и билинейные функции в n-мерном аффинном пространстве. Их естественным обобщением являются полилинейные функции, зависящие от произвольного числа векторов. При этом мы будем рассматривать функции, зависящие как от векторов из R, так и от векторов из R'.

Определение 1. *Полилинейной функцией*

$$l(x, y, \ldots; f, g, \ldots),$$

зависящей от p векторов $x, y, \ldots \in R$ и q векторов $f, g, \ldots \in R'$ (R' — пространство, сопряженное к R), *называется функция, линейная относительно каждого из аргументов, когда остальные аргументы фиксированы.*

Например, если зафиксированы все векторы, кроме первого, то

$$l(x' + x'', y, \ldots; f, g, \ldots) = \\ = l(x', y, \ldots; f, g, \ldots) + l(x'', y, \ldots; f, g, \ldots),$$
$$l(\lambda x, y, \ldots; f, g, \ldots) = \lambda l(x, y, \ldots; f, g, \ldots).$$

Аналогично

$$l(x, y, \ldots; f' + f'', g, \ldots) = \\ = l(x, y, \ldots; f', g, \ldots) + l(x, y, \ldots; f'', g, \ldots),$$
$$l(x, y, \ldots; \mu f, g, \ldots) = \mu l(x, y, \ldots; f, g, \ldots).$$

То же самое и для других аргументов.

Полилинейную функцию, зависящую от p векторов из R (контравариантных векторов) и q векторов из R' (ковариантных векторов) мы будем называть *полилинейной функцией типа* (p, q). Рассмотрим некоторые полилинейные функции.

Простейшие полилинейные функции — это функции типа $(1, 0)$ и типа $(0, 1)$.

Полилинейная функция типа $(1, 0)$ — это линейная функция от одного вектора в пространстве R, т. е. вектор пространства R' (ковариантный вектор).

Аналогично, как это было показано в п. 3 предыдущего параграфа, полилинейная функция типа $(0, 1)$ задает вектор из R (контравариантный вектор).

Полилинейные функции, зависящие от двух векторов (билинейные функции), бывают трех типов:

α) функции, зависящие от двух векторов из пространства R, — это введенные в § 4 билинейные функции в пространстве R;

β) функции, зависящие от двух векторов в пространстве R', — это билинейные функции в R';

γ) функции, зависящие от одного вектора из R и одного вектора из R'.

Функции третьего типа тесно связаны с линейными преобразованиями. Действительно, пусть

$$y = Ax$$

— линейное преобразование в R. Построим билинейную функцию

$$(f, Ax),$$

линейно зависящую от векторов $x \in R$ и $f \in R'$.

Мы можем, таким образом, каждому линейному преобразованию в R однозначно сопоставить билинейную функцию типа γ.

Как и в § 11 главы II, можно доказать и обратное, т. е. что каждой билинейной функции типа γ отвечает линейное преобразование в R.

2. Выражения для полилинейной функции в данной системе координат. Переход от одной системы координат к другой. Выясним, как выражается полилинейная функция через координаты тех векторов, от которых она зависит. Для того чтобы не писать слишком длинных формул, проведем рассмотрение на случае полилинейной функции $l(x, y; f)$, зависящей от двух векторов из R и одного вектора из R' [функция типа $(2, 1)$].

Выберем в R некоторый базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а в R' — взаимный с ним базис $f^1, f^2, \ldots, f^n$. Пусть

$$x = \xi^i e_i, \quad y = \eta^j e_j, \quad f = \zeta_k f^k.$$

Тогда

$$l(x, y; f) = l(\xi^i e_i, \eta^j e_j; \zeta_k f^k) = \xi^i \eta^j \zeta_k l(e_i, e_j; f^k).$$

Итак: при заданных в R и соответственно в R' базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $f^1, f^2, \ldots, f^n$ полилинейная функция $l(x, y; f)$ записывается в виде

$$l(x, y; f) = a_{ij}^k \xi^i \eta^j \zeta_k,$$

где ξ^i, соответственно η^j, соответственно ζ_k — координаты вектора x, соответственно y, соответственно f. Числа a_{ij}^k, определяющие функцию $l(x, y; f)$, задаются формулой

$$a_{ij}^{k} = l(e_i, e_j; f^k)$$

и зависят, таким образом, от выбора базисов в R и R'.

Аналогичная формула имеем место для полилинейной функции общего вида:

$$l(x, y, \ldots; f, g, \ldots) = a_{ij\ldots}^{rs\ldots} \xi^i \eta^j \ldots \lambda_r \mu_s \ldots, \qquad (1)$$

где числа $a_{ij\ldots}^{rs\ldots}$, определяющие полилинейную функцию, вычисляются по формулам

$$a_{ij\ldots}^{rs\ldots} = l(e_i, e_j, \ldots; f^r, f^s, \ldots). \qquad (2)$$

Выясним теперь, как изменяется система чисел, определяющая полилинейную форму, при изменении базиса.

Пусть в R задан базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и в R' — взаимный с ним базис $f^1, f^2, \ldots, f^n$. Перейдем к новому базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в R и взаимному с ним базису f'^1, $f'^2, \ldots, f'^n$ в R'.

Пусть переход от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису e'_1, $e'_2, \ldots, e'_n$ задается формулами

$$e'_\alpha = c_\alpha^\beta e_\beta. \qquad (3)$$

Тогда переход от базиса $f^1, f^2, \ldots, f^n$ к базису f'^1, $f'^2, \ldots, f'^n$ задается формулами

$$f'^\beta = b_\alpha^\beta f^\alpha, \qquad (4)$$

где $\|b_\alpha^\beta\|$ — матрица, транспонированная к матрице, обратной к $\|c_\alpha^\beta\|$.

Формула (3) показывает, что числа c_α^β при фиксированном α являются координатами вектора e'_α в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Аналогично числа b_α^β при фиксированном β являются координатами вектора f'^β в базисе $f^1, f^2, \ldots, f^n$.

Найдем систему чисел $a'^{rs\dots}_{ij\dots}$, определяющих нашу полилинейную функцию в базисах $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ и $f'^1, f'^2, \dots, f'^n$. Мы знаем, что

$$a'^{rs\dots}_{ij\dots} = l(e'_i, e'_j, \dots; f'^r, f'^s, \dots).$$

Поэтому, чтобы найти $a'^{rs\dots}_{ij\dots}$, мы должны в формулу (1) вместо $\xi^i, \eta^j, \dots; \lambda_r, \mu_s, \dots$ подставить координаты векторов $e'_i, e'_j, \dots; f'^r, f'^s, \dots$, т.е. числа $c_i^\alpha, c_j^\beta, \dots; b_\sigma^r, b_\tau^s, \dots$ Мы получаем таким образом:

$$a'^{rs\dots}_{ij\dots} = c_i^\alpha c_j^\beta \dots b_\sigma^r b_\tau^s \dots a^{\sigma\tau\dots}_{\alpha\beta\dots}.$$

Итак, *система чисел* $a^{rs\dots}_{ij\dots}$, *определяющих полилинейную функцию* $l(x, y, \dots;\ f, g, \dots)$ *во взаимных базисах* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *и* $f^1, f^2, \dots, f^n$, *при переходе к новым взаимным базисам* $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ *и* $f'^1, f'^2, \dots, f'^n$ *преобразуется по формулам*

$$a'^{rs\dots}_{ij\dots} = c_i^\alpha c_j^\beta \dots b_\sigma^r b_\tau^s \dots a^{\sigma\tau\dots}_{\alpha\beta\dots}, \tag{5}$$

где $\|c_i^j\|$ — *матрица, определяющая преобразование базиса* $e_1, e_2, \dots, e_n$, *а* $\|b_i^j\|$ — *матрица, определяющая преобразование взаимного с ним базиса* $f^1, f^2, \dots, f^n$.

Это можно выразить следующей фразой: *на нижние индексы системы чисел* $a^{rs\dots}_{ij\dots}$ *действует матрица* $\|c_i^j\|$, *на верхние индексы — матрица* $\|b_i^j\|$ (ср. § 23, п. 4, где рассмотрены формулы для преобразования координат ковариантного и контравариантного векторов).

3. Определение тензора. Объекты, с которыми мы встречались на протяжении этой книги (векторы, линейные функции, линейные преобразования, билинейные функции и т. д.), определялись в каждом базисе своей системой чисел. Например, вектор определялся в каждом базисе системой n чисел — своими координатами. Линейная функция определяется в каждом базисе также системой n чисел — своими коэффициентами.

Линейное преобразование определяется в каждом базисе системой n^2 чисел — матрицей линейного преобразования. Билинейная функция определяется в каждом базисе системой n^2 чисел — матрицей этой билинейной формы. При переходе от одной системы координат (базиса) к другой система чисел, определяющая данный объект, преобразуется определенным образом, причем закон преобразования различен для различных объектов. Например, как вектор из R, так и линейная функция в R задаются системой n чисел, однако при переходе к другому базису они преобразуются по-разному. Для полной характеристики встречающейся величины мы должны задать не только значения соответствующих чисел в какой-либо системе координат, но и закон преобразования соответствующей совокупности чисел при переходе к другой системе координат.

В пунктах 1 и 2 этого параграфа мы ввели понятие полилинейной функции, которая определяется в каждом данном базисе системой n^k чисел (2), преобразующихся при переходе к другому базису по формулам (5). В связи с ним вводится следующее определение, играющее важную роль во многих разделах физики, геометрии и алгебры.

Определение 2. *Если каждой системе координат в n-мерном аффинном пространстве отнесена система n^{p+q} чисел $a_{ij\ldots}^{rs\ldots}$* (число нижних индексов обозначено через p, верхних — через q), *причем при переходе от одной системы координат к другой эти числа преобразуются по формуле*

$$a'^{rs\ldots}_{ij\ldots} = c_i^\alpha c_j^\beta \ldots b_\sigma^r b_\tau^s \ldots a_{\alpha\beta\ldots}^{\sigma\tau\ldots}, \tag{6}$$

где $\|c_i^j\|$ — матрица, задающая переход от одного базиса в R к другому, а $\|b_i^j\|$ — матрица, транспонированная к матрице, обратной к $\|c_i^j\|$, то мы говорим, *что нам задан тензор. Этот тензор называется p раз ковариантным и q раз контравариантным. Число $p+q$ называется рангом (валентностью) тензора. Сами числа $a_{ij\ldots}^{rs\ldots}$ называются компонентами тензора.*

Так как система чисел, определяющих полилинейную функцию от p векторов из R и q векторов из R', при изменении базиса преобразуется как раз по формуле (6), то каждой такой полилинейной функции однозначно соответствует тензор ранга $p+q$, p раз ковариантный и q раз контравариантный. Обратно, каждому тензору однозначно отвечает полилинейная функция. В дальнейшем свойства тензоров и операции над ними мы будем изучать на «модели» полилинейных функций, хотя, конечно, полилинейные функции являются лишь одной из возможных реализаций тензоров.

Приведем некоторые примеры тензоров.

1. Скаляр. Если каждой системе координат отнесено одно и то же фиксированное число a, то его формально можно также считать тензором, а именно — тензором нулевого ранга. Тензор нулевого ранга называется скаляром.

2. Контравариантный вектор. Вектору из R в каждом базисе соответствует совокупность n его координат, которые при переходе к другому базису преобразуются по формулам

$$\eta'^i = b_j^i \eta^j$$

и, следовательно, представляют собой контравариантный тензор ранга 1.

3. Линейная функция (ковариантный вектор). Числа a_i, определяющие линейную функцию, преобразуются по формулам

$$a'_i = c_i^j a_j$$

и, следовательно, образуют ковариантный тензор ранга 1.

4. Билинейная функция. Пусть $A(x; y)$ — билинейная форма в пространстве R. Отнесем каждому базису матрицу данной билинейной формы в этом базисе. Мы получим при этом тензор ранга два, дважды ковариантный.

Аналогично, билинейная форма от векторов $x \in R$, $f \in R'$ определяет тензор ранга два, один раз ковариантный и один раз контравариантный, а билинейная форма от векторов $f, g \in R'$ определяет тензор, дважды контравариантный.

5. Линейные преобразования. Пусть A — линейное преобразование в пространстве R. Отнесем каждому базису матрицу $\|a_i^k\|$ преобразования A в этом базисе, т. е. положим

$$Ae_i = a_i^k e_k.$$

Покажем, что $\|a_i^k\|$ есть тензор ранга два, один раз ковариантный и один раз контравариантный. Действительно, пусть переход к новому базису задается формулой

$$e'_i = c_i^\alpha e_\alpha$$

и, следовательно, обратный переход — формулой

$$e_i = b_i^\alpha e'_\alpha, \quad \text{где} \quad b_i^\alpha c_\alpha^k = \delta_i^k.$$

Тогда

$$Ae'_i = Ac_i^\alpha e_\alpha = c_i^\alpha Ae_\alpha = c_i^\alpha a_\alpha^\beta e_\beta = c_i^\alpha a_\alpha^\beta b_\beta^k e'_k.$$

Таким образом, матрица $\|a'^k_i\|$ преобразования A в базисе e'_i имеет вид

$$a'^k_i = a_\alpha^\beta c_i^\alpha b_\beta^k,$$

что и доказывает, что матрица линейного преобразования A есть тензор второго ранга, один раз ковариантный и один раз контравариантный.

В частности, единичному преобразованию E в каждом базисе соответствует единичная матрица, т. е. система чисел

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Таким образом, δ_i^k представляет собой простейший тензор ранга два, один раз ковариантный и один раз контравариантный. Тензор δ_i^k интересен тем, что его компоненты в любой системе координат одни и те же.

Упражнение. Показать непосредственно, что если в каждой системе координат задать систему чисел

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k, \end{cases}$$

то это будет тензор.

Докажем теперь два простых предложения о тензорах.

Пусть имеются два тензора одинакового типа. Тогда для равенства тензоров достаточно, чтобы их компоненты в каком-нибудь базисе были соответственно равны. Другими словами, из того, что компоненты этих двух тензоров равны в какой-либо системе координат, следует, что их компоненты соответственно равны в произвольной системе координат. Это предложение очевидно; действительно, так как оба тензора одинакового типа (т. е. имеют одно и то же число ковариантных и контравариантных индексов), то они преобразуются по одним и тем же формулам, и так как их компоненты в одной системе координат по предположению равны, то они равны и в любой другой системе координат. Заметим, что предположение, что оба тензора одинакового типа, является совершенно обязательным. Например, как билинейная форма, так и линейное преобразование определяются в данной системе координат матрицей. Однако из совпадения матриц линейного преобразования и билинейной формы в одной какой-либо системе координат не следует их совпадение в другой.

При заданных p и q мы можем построить тензор типа (p, q), компоненты которого в каком-нибудь одном базисе равны n^{p+q} наперед заданным числам. Докажем это.

Пусть в некотором базисе нам задана система чисел $a_{ij\ldots}^{rs\ldots}$. Этими числами задается полилинейная функция $l(x, y, \ldots; f, \ldots)$ по формуле (1) п. 2 этого параграфа, где ξ^i, соотв. η^j и т. д., — координаты векторов x, соотв. y и т. д. в базисе e_i. Так как с полилинейной функцией однозначно связан тензор, то мы получили тем самым тензор, удовлетворяющий поставленным условиям.

4. Тензоры в евклидовом пространстве. Если R есть n-мерное евклидово пространство, то, как мы видели в п. 5 § 23, можно установить изоморфное соответствие между R и R' так, что если $y \in R$ соответствует элементу $f \in R'$, то

$$(f, x) = (y, x)$$

для любого $x \in R$.

Если мы теперь в полилинейной функции, зависящей от p векторов $x, y, \ldots$ из R и q векторов $f, g, \ldots$ из R' заменим векторы из R' им соответствующими векторами $u, v, \ldots$ из R ,то мы получим полилинейную функцию $l(x, y, \ldots; u, v, \ldots)$, зависящую от $p + q$ векторов из R.

Найдем коэффициенты функции $l(x, y, \ldots; u, v, \ldots)$ по коэффициентам функции $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$.

Пусть $a_{ij\ldots}^{rs\ldots}$ — коэффициенты полилинейной функции $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$, т.е.

$$a_{ij\ldots}^{rs\ldots} = l(e_i, e_j, \ldots; f^r, f^s, \ldots),$$

и пусть $b_{ij\ldots rs\ldots}$ — коэффициенты полилинейной функции $l(x, y, \ldots; u, v, \ldots)$, т. е.

$$b_{ij\ldots rs\ldots} = l(e_i, e_j, \ldots; e_r, e_s, \ldots).$$

Мы доказали в п. 5 § 23, что в евклидовом пространстве векторы e_k базиса, биортогонального f^i, выражаются через векторы базиса f^i по формулам

$$e_r = g_{r\alpha} f^\alpha,$$

где

$$g_{ik} = (e_i, e_k).$$

Подставляя вместо $e_r, \ldots$ их выражения, получаем

$$\begin{aligned} b_{ij\ldots rs\ldots} &= l(e_i, e_j, \ldots; e_r, e_s, \ldots) = \\ &= l(e_i, e_j, \ldots; g_{\alpha r} f^\alpha, g_{\beta s} f^\beta, \ldots) = \\ &= g_{\alpha r} g_{\beta s} \ldots l(e_i, e_j, \ldots; f^\alpha, f^\beta, \ldots) = \\ &= g_{\alpha r} g_{\beta s} \ldots a_{ij\ldots}^{\alpha\beta\ldots}. \end{aligned}$$

Ввиду установленного соответствия между полилинейными функциями и тензорами мы можем сформулировать полученный результат для тензоров:

Если $a_{ij\ldots}^{rs\ldots}$ — тензор, построенный в евклидовом пространстве, p раз ковариантный и q раз контравариантный, то по нему можно построить новый тензор $b_{ij\ldots rs\ldots}$, являющийся $p + q$ раз ковариантным. Эта операция называется операцией опускания индексов. Она определяется формулой

$$b_{ij\ldots rs\ldots} = g_{\alpha r} g_{\beta s} \ldots a_{ij\ldots}^{\alpha\beta\ldots}.$$

g_{ik} является дважды ковариантным тензором. Действительно, $g_{ik} = (e_i, e_k)$ представляют собой в данной системе координат коэффициенты некоторой билинейной формы, а именно скалярного произведения. Ввиду его связи со скалярным произведением (метрикой) пространства *тензор* g_{ik} *называется метрическим тензором.*

Совершенно аналогично операции опускания индексов можно ввести операцию поднимания индексов с помощью формулы

$$b^{ij\ldots rs\ldots} = g^{\alpha i} g^{\beta j} \ldots a^{rs\ldots}_{\alpha\beta\ldots},$$

где g^{ik} имеет смысл, указанный в § 23, п. 5.

Упражнение. Показать, что g^{ik} — дважды ковариантный тензор.

5. Операции над тензорами. Ввиду установленной связи между тензорами и полилинейными функциями мы будем определять операции над полилинейными функциями. Запись полученных результатов в произвольном базисе даст нам соответствующую операцию над тензорами.

Сложение тензоров. Пусть

$$l'(x, y, \ldots; f, g, \ldots), \quad l''(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$$

— две полилинейные функции от одного и того же числа векторов из R и одного и того же числа векторов из R'. Определим их сумму $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ формулой

$$l(x, y, \ldots; f, g, \ldots) = \\ = l'(x, y, \ldots; f, g, \ldots) + l''(x, y, \ldots; f, g, \ldots).$$

Ясно, что эта сумма есть снова полилинейная функция от того же числа векторов из R и из R'. Сложение тензоров определяется поэтому формулой:

$$a^{rs\ldots}_{ij\ldots} = a'^{rs\ldots}_{ij\ldots} + a''^{rs\ldots}_{ij\ldots}.$$

Умножение тензоров. Пусть

$$l'(x, y, \ldots; f, g, \ldots) \quad \text{и} \quad l''(z, \ldots; h, \ldots)$$

— две полилинейные функции, из которых первая зависит от p' векторов из R и q' векторов из R', а вторая —

от p'' векторов из R и q'' векторов из R'. Определим функцию $l(x, y, \ldots, z, \ldots; f, g, \ldots, h, \ldots)$ формулой

$$l(x, y, \ldots, z, \ldots; f, g, \ldots, h, \ldots) = \\ = l'(x, y, \ldots; f, g, \ldots) l''(z, \ldots; h, \ldots).$$

Функция l называется произведением полилинейных функций l' и l''. Покажем, что l есть полилинейная функция, зависящая от $p' + p''$ векторов из R и $q' + q''$ векторов из R'. Действительно, при проверке того, что

$$l(x, y, \ldots, z, \ldots; f, g, \ldots, h, \ldots)$$

есть полилинейная функция, мы фиксируем, по очереди, все векторы, кроме одного; при этом ясно, что l есть линейная функция от вектора, оставшегося незафиксированным.

Выразим компоненты тензора, отвечающего произведению полилинейных функций l' и l'', через компоненты тензоров, отвечающих самим этим полилинейным функциям. Так как

$$a'^{rs\ldots}_{ij\ldots} = l'(e_i, e_j, \ldots; f^r, f^s, \ldots),$$

и

$$a''^{rs\ldots}_{ij\ldots} = l''(e_i, e_j, \ldots; f^r, f^s, \ldots),$$

то

$$a^{rstu\ldots}_{ijkl\ldots} = a^{rs\ldots}_{ij\ldots} a^{tu\ldots}_{kl\ldots}$$

Эта формула определяет, таким образом, произведение двух тензоров.

Свертка тензора. Пусть $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ — полилинейная функция, зависящая от p векторов $x, y, \ldots$ из R ($p \geqslant 1$) и q векторов $f, g, \ldots$ из R' ($q \geqslant 1$). Мы построим по ней полилинейную функцию, зависящую от $p - 1$ векторов из R и $q - 1$ векторов из R'. Выберем для этого какой-либо базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$

в R и взаимный с ним базис $f^1, f^2, \ldots, f^n$ в R'. Будем теперь вместо x и f подставлять соответственно $e_1, f^1; e_2, f^2; \ldots; e_n, f^n$ и рассмотрим сумму *)

$$l'(y, \ldots; g, \ldots) = l(e_\alpha, y, \ldots; f^\alpha, g, \ldots). \qquad (7)$$

Ясно, что каждое слагаемое, а значит и вся сумма, есть полилинейная функция от $y, \ldots$ и $g, \ldots$ Покажем, что, хотя каждое слагаемое зависит от выбора базиса, построенная нами сумма от выбора базиса уже не зависит.

Перейдем для этого к другому базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ и соответственно к взаимному с ним базису $f'^1, f'^2, \ldots$ $\ldots, f'^n$. Так как мы не меняем при этом векторов $y, \ldots$ и $g, \ldots$, то мы можем их фиксировать и доказывать наше утверждение для билинейной формы $A(x; f)$. Итак, нам нужно доказать, что если $A(x; f)$ — билинейная форма, то

$$A(e_\alpha; f^\alpha) = A(e'_\alpha; f'^\alpha).$$

Если переход от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots$ $\ldots, e'_n$ задается формулой

$$e'_k = c_i^k e_k,$$

то переход от базиса $f^1, f^2, \ldots, f^n$ к базису $f'^1, f'^2, \ldots$ $\ldots, f'^n$ задается формулой

$$f^k = c_i^k f'^i.$$

Поэтому

$$A(e'_\alpha; f'^\alpha) = A(c_\alpha^k e_k; f'^\alpha) = c_\alpha^k A(e_k; f'^\alpha) =$$
$$= A(e_k; c_\alpha^k f'^\alpha) = A(e_k; f^k),$$

---

*) Напоминаем, что если в некотором выражении один и тот же индекс (в данном случае α) встречается вверху и внизу, то по нему производится суммирование.

т. е. $A(e_\alpha; f^\alpha)$ действительно не зависит от системы координат.

Найдем по коэффициентам формы $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ коэффициенты формы (7). Так как

$$a'^{s\ldots}_{j\ldots} = l'(e_j, \ldots; f^s, \ldots)$$

и

$$l'(e_j, \ldots; f^s, \ldots) = l(e_\alpha, e_j, \ldots; f^\alpha, f^s, \ldots),$$

то

$$a'^{s\ldots}_{j\ldots} = a^{\alpha s\ldots}_{\alpha j\ldots}. \tag{8}$$

Тензор $a'^{s\ldots}_{j\ldots}$, полученный из $a^{rs\ldots}_{ij\ldots}$ по формуле (8), *называется сверткой тензора $a^{rs\ldots}_{ij\ldots}$.*

Ясно, что свертку мы можем провести не обязательно по первому верхнему и первому нижнему индексам. Обязательно лишь, чтобы суммирование производилось по одному ковариантному и одному контравариантному индексу. Если бы мы суммировали, например, по двум нижним индексам, то полученная система чисел не образовывала бы тензора (так как при переходе от одной системы координат к другой эти числа не преобразовывались бы по предписанному тензору закону преобразования).

Заметим, что в случае свертки тензора ранга два мы получаем тензор нулевого ранга (скаляр), т. е. число, не зависящее от системы координат.

Рассмотренная нами в п. 4 операция опускания индексов есть не что иное, как свертка произведения данного тензора и метрического тензора g_{ik} (взятого сомножителем соответствующее число раз). Аналогично, поднимание индексов есть свертка произведения данного тензора и тензора g^{ik}.

Приведем еще пример. Пусть a^k_{ij} — тензор ранга три, а b^m_l — тензор ранга два. Их произведение есть тензор $c^{km}_{ijl} = a^k_{ij} b^m_l$ ранга пять. Если теперь свернуть этот тензор, например, по индексам i и m, то мы получим тензор ранга три. Если мы полученный тензор еще раз свернем, например, по индексам j и k, то мы получим тензор ранга один (вектор).

Пусть a_i^j и b_k^l — два тензора ранга два. Умножением и свертыванием можно построить по ним новый тензор ранга два:

$$c_i^l = a_i^\alpha b_\alpha^l.$$

Если тензоры a_i^j и b_k^l трактовать как матрицы линейных преобразований, то полученный тензор есть матрица произведения этих преобразований.

Мы можем также построить по данному тензору ранга два a_i^j ряд инвариантов (т. е. чисел, не зависящих от системы координат, — скаляров), а именно:

$$a_\alpha^\alpha,\ a_\alpha^\beta a_\beta^\alpha,\ \ldots$$

Введенные нами операции над тензорами дают нам возможность по данным тензорам строить ряд новых, инвариантно связанных с ними, тензоров.

Приведем некоторые примеры.

Операцией умножения мы можем из векторов построить тензоры сколь угодно высокого ранга. Пусть, например, ξ^i — координаты контравариантного, а η_j — координаты ковариантного вектора. Тогда $\xi^i\eta_j$ есть тензор ранга два. Аналогично, взяв большее число векторов, можно получить тензоры более высокого ранга. Заметим, что не всякий тензор можно получить умножением векторов. Можно, однако, доказать, что всякий тензор может быть получен из векторов (тензоров ранга один) операциями сложения и умножения.

Целым рациональным инвариантом от данной системы тензоров называется многочлен от компонент тензора, который не меняется при замене компонент тензоров в какой-нибудь системе координат их компонентами в другой системе координат.

Имеет место следующая теорема, которую мы не будем доказывать:

Если задана некоторая система тензоров, то всякий целый рациональный инвариант, построенный по данным тензорам, можно получить из них операциями перемножения тензоров, сложения и умножения на числа и полного свертывания (т. е. свертывания по всем индексам).

6. Симметрические и знакопеременные (антисимметрические) тензоры.

Определение 3. *Тензор называется симметрическим по данным индексам, если при любой перестановке этих индексов компоненты тензора не меняются* *). *Например, симметричность тензора по первым двум индексам означает, что имеет место равенство*

$$a_{ik\ldots}^{st\ldots} = a_{ki\ldots}^{st\ldots}.$$

Если $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ — соответствующая тензору $a_{ik\ldots}^{st\ldots}$ полилинейная форма

$$l(x, y, \ldots; f, g, \ldots) = a_{ik\ldots}^{st\ldots}\xi^i\eta^k \ldots \lambda_s\mu_t \ldots, \tag{9}$$

то симметричность тензора по некоторой группе индексов, как это непосредственно видно из формулы (9), эквивалентна симметричности полилинейной формы по соответствующей группе векторов. Так как для симметричности полилинейной формы по некоторой группе векторов достаточно, чтобы $a_{ik\ldots}^{st\ldots}$ были симметричны по соответствующим индексам лишь в одной какой-нибудь системе координат, то отсюда следует, что *если компоненты тензора симметричны в одной системе координат, то такая же симметрия будет иметь место и в любой другой системе координат.*

---

*) Само собой разумеется, что речь идет лишь об индексах одной и той же группы (верхних или нижней).

О п р е д е л е н и е 4. *Знакопеременным (антисимметрическим) называется тензор, который меняет знак при перемене любых двух индексов местами.*

При этом предполагается, конечно, что у этого тензора все индексы одинакового характера, т. е. либо все ковариантные, либо все контравариантные.

Из определения знакопеременного тензора непосредственно следует, что при любой перестановке индексов компоненты тензора не меняются, если перестановка четная, и меняют знак, если перестановка нечетная. Знакопеременным тензорам соответствуют знакопеременные полилинейные функции.

Полилинейная функция $l(x, y, \ldots)$, зависящая от p векторов $x, y, \ldots$ из R, называется знакопеременной, если при перестановке любой пары из векторов $x, y, \ldots$ знак функции меняется.

Для проверки знакопеременности полилинейной функции достаточно проверить знакопеременность компонент соответствующего ей тензора в какой-либо одной системе координат, как это непосредственно следует из формулы (9). С другой стороны, из знакопеременности полилинейной функции следует знакопеременность соответствующего ей тензора (в любой системе координат). Следовательно, если компоненты тензора знакопеременны в какой-либо одной системе координат, то это же имеет место и в любой другой системе координат, и, значит, тензор является знакопеременным (антисимметрическим).

Выясним число независимых компонент антисимметрического тензора. Пусть, например, a_{ik} есть знакопеременный тензор ранга 2. Тогда $a_{ik} = -a_{ki}$ и, следовательно, число различных компонент равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Аналогично, для знакопеременного тензора a_{ijk} число различных компонент равно $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$, так как компоненты с одинаковыми индексами равны нулю, а компоненты, отличающиеся лишь порядком индексов, определяются одна через другую.

Аналогично, число независимых компонент знакопеременного тензора с k индексами ($k \leqslant n$) равно C_n^k. (Отличных от нуля знакопеременных тензоров с числом индексов больше, чем n, не существует, так как у знакопеременного тензора компоненты хотя бы с двумя одинаковыми индексами равны нулю, а если число индексов превышает n, то у каждой компоненты совпадают, по крайней мере, два индекса.)

Рассмотрим более подробно знакопеременный тензор с n индексами. Так как все группы по n различных индексов, принимающих значение от 1 до n, отличаются лишь порядком, то у такого тензора есть лишь одна независимая компонента и он имеет, таким образом, следующий вид.

Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — некоторая перестановка чисел 1, 2, ... , n. Положим $a_{12\ldots n} = a$. Тогда

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \pm a, \tag{10}$$

где «+» отвечает четной подстановке, а «−» — нечетной.

Упражнение. Показать, что при переходе к другой системе координат число $a_{12\ldots n} = a$ умножится на определитель матрицы перехода.

Напишем полилинейную функцию, соответствующую знакопеременному тензору с n индексами. В силу формулы (10) она имеет вид:

$$l(x, y, \ldots, z) = a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \xi^{i_1} \eta^{i_2} \ldots \zeta^{i_n} = a \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \ldots & \zeta_n \end{vmatrix}.$$

Мы доказали, таким образом, что определитель из координат векторов есть, с точностью до множителя, единственная знакопеременная полилинейная функция от n векторов в n-мерном линейном пространстве.

О п е р а ц и я с и м м е т р и р о в а н и я. Мы можем по всякому тензору построить новый тензор, симметрический по некоторой наперед заданной группе индексов. Эта операция называется симметрированием и состоит в следующем.

Пусть задан некоторый тензор, например, $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$; симметрирование его, например, по первым k индексам, состоит в построении тензора

$$a_{(i_1 i_2 \ldots i_k) i_{k+1} \ldots} = \frac{1}{k!} \sum a_{j_1 j_2 \ldots j_k i_{k+1} \ldots},$$

где сумма распространяется по всем перестановкам $j_1, j_2, \ldots, j_k$ индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Например,

$$a_{(i_1, i_2)} = \frac{1}{2}(a_{i_1 i_2} + a_{i_2 i_1}).$$

Операция симметрирования тензора по группе из k индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ обозначается следующим образом:

$$a_{j_1 j_2 \ldots j_l (i_1 i_2 \ldots i_k) \ldots}.$$

О п е р а ц и я а л ь т е р н и р о в а н и я вводится аналогично операции симметрирования и дает возможность по данному тензору построить тензор, знакопеременный по данной группе индексов. Она определяется следующим образом:

$$a_{[i_1 i_2 \ldots i_k] i_{k+1} \ldots} = \frac{1}{k!} \sum \pm a_{j_1 j_2 \ldots j_k i_{k+1} \ldots},$$

где сумма распространяется по всем перестановкам $j_1, j_2, \ldots, j_k$ индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$, а знак определяется честностью или нечетностью этой перестановки. Например,

$$a_{[i_1, i_2]} = \frac{1}{2}(a_{i_1 i_2} - a_{i_2 i_1}).$$

Операция альтернирования обозначается скобками [ ]; в них заключаются те индексы, по которым тензор альтернируется.

По всяким k векторам $\xi^{i_1}, \eta^{i_2}, \ldots, \zeta^{i_k}$ можно построить антисимметрический тензор

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_k} = \xi^{[i_1} \eta^{i_2} \ldots \zeta^{i_k]}, \tag{11}$$

где через $\xi^{[i_1} \eta^{i_2} \ldots \zeta^{i_k]}$ обозначен тензор, полученный альтернированием тензора $\xi^{i_1} \eta^{i_2} \ldots \zeta^{i_k}$. Как нетрудно усмотреть из написанной формулы, компонентами этого тензора являются миноры k-го порядка следующей матрицы из n столбцов:

$$\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \ldots & \xi^n \\ \eta^1 & \eta^2 & \ldots & \eta^n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \ldots & \zeta^n \end{pmatrix}.$$

Построенный тензор (11) обладает тем свойством, что если к какому-либо из векторов $\xi^{i_1}, \eta^{i_2}, \ldots$ добавить линейную комбинацию остальных, то тензор $a^{i_1 \ldots i_k}$ от этого не изменится.

Рассмотрим k-мерное подпространство n-мерного пространства R. Поставим вопрос о том, чтобы охарактеризовать это k-мерное подпространство системой чисел, т. е. ввести координаты подпространства.

k-мерное подпространство порождается k линейно независимыми векторами $\xi^{i_1}, \eta^{i_2}, \ldots, \zeta^{i_k}$. При этом разные системы из k векторов могут породить одно и то же подпространство. Однако нетрудно показать, и мы предоставляем это читателю, что если две системы векторов порождают одно и то же подпространство, то построенные по каждой из них тензоры

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_k} = \xi^{[i_1} \eta^{i_2} \ldots \zeta^{i_k]}$$

совпадают с точностью до множителя.

Таким образом, тензор $a^{i_1 i_2 \ldots i_k}$, построенный по векторам $\xi^{i_1}, \eta^{i_2}, \ldots, \zeta^{i_k}$, порождающим некоторое подпространство, определяет это подпространство.

§ 25. Тензорное произведение

1. Тензорное произведение $\boldsymbol{R} \otimes \boldsymbol{R}$. В первой главе мы изучали билинейные функции в аффинном пространстве R. Здесь мы покажем, что билинейные функции можно трактовать и как линейные функции в некотором новом пространстве. Это пространство, играющее очень важную роль, называется тензорным произведением R и R (по-другому, тензорым квадратом R) и обозначается $R \otimes R$ или $\overset{2}{\bigotimes} R$. Дадим его определение.

Рассмотрим всевозможные упорядоченные пары x, y элементов из R. Каждую такую пару будем называть *тензорным произведением* x и y и обозначать $x \otimes y$. Образуем формальные конечные суммы таких пар:

$$X = x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k. \tag{1}$$

При этом формальные суммы, отличающиеся только порядком слагаемых, мы не будем различать между собой. Запись (1) означает, таким образом, только то, что нам задано множество k пар $x_1, y_1; \ldots; x_k, y_k$.

Введем для выражений вида (1) операции сложения и умножения на число. Сумму двух таких выражений определим как результат формального дописывания к первому выражению второго:

$$(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k) + (x_{k+1} \otimes y_{k+1} + \ldots + x_{k+l} \otimes y_{k+l}) = \\ = x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_{k+l} \otimes y_{k+l}. \tag{2}$$

Произведение на число λ определим так:

$$\lambda(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k) = (\lambda x_1) \otimes y_1 + \ldots + (\lambda x_k) \otimes y_k. \tag{3}$$

Элемент $0 \otimes 0$ будем называть *нулем* тензорного произведения и обозначать коротко через 0.

Мы должны еще объяснить, какие выражения вида (1) считаются равными. Будем предполагать, что

1) $(x_1 + x_2) \otimes y - x_1 \otimes y - x_2 \otimes y = 0$ *);

2) $x \otimes (y_1 + y_2) - x \otimes y_1 - x \otimes y_2 = 0$;

3) $(\lambda x) \otimes y - x \otimes (\lambda y) = 0$.

Кроме того, *приравняем нулю любое выражение, получающееся из выражений* 1), 2), *и* 3) *сложением и умножением на число.*

Теперь *два выражения* X *и* X' *вида* (1) *будем считать равными, если их можно превратить в одинаковые, прибавляя к* X *и* X' *выражения, равные нулю, т. е. если существуют такие выражения* $Z = 0$ *и* $Z' = 0$, *что* $X + Z$ *совпадает с* $X' + Z'$. Очевидно, что введенное отношение равенства рефлексивно (т. е. $X = X$) и симметрично (т. е. из $X = Y$ следует $Y = X$); легко проверить, что оно обладает также и свойством транзитивности (т. е. из $X = Y$ и $Y = Z$ следует $X = Z$).

В результате мы получаем пространство, элементы которого — классы равных между собой выражений вида (1), а сложение и умножение на число определены по формулам (2) и (3).

Заметим, что операции сложения и умножения на число мы ввели до того, как было бы определено отношение равенства двух выражений (1). Поэтому нам нужно было убедиться в корректности определений этих операций; именно нужно показать, что сумма выражений (1) и произведение на число не меняются при замене этих выражений на равные. Эта простая проверка предоставляется читателю.

Нетрудно убедиться, что построенное пространство является линейным пространством. Покажем, напри-

*) Более подробно, это означает, что $(x_1 + x_2) \otimes y + (-x_1) \otimes y + (-x_2) \otimes y = 0$.

мер, что для каждого X существует элемент, ему противоположный. Это достаточно проверить для элементов вида $X = x \otimes y$. Из условия 3) при $\lambda = 1$ получаем $x \otimes y + (-x) \otimes y = 0$, т. е. $Y = (-x) \otimes y$ является элементом, противоположным X.

Построенное линейное пространство называется *тензорным произведением* R на R и обозначается через $R \otimes R$.

Итак, *мы определили тензорное произведение* $R \otimes R$ *как линейное пространство, элементами которого являются формальные выражения вида* $x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k$, *где* x_i, y_i *— элементы из* R. *Точнее, элементами пространства* $R \otimes R$ *являются классы равных между собой выражений вида* $x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k$ (условие равенства дано выше). *Сложение в* $R \otimes R$ *и умножение на число определяются по формулам* (2) *и* (3).

Отметим, что из условий 1)–3) следует:

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y;$$
$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2;$$
$$\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y).$$

Поэтому в тензорном произведении можно раскрывать скобки по обычному правилу:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) \otimes (\mu_1 y_1 + \ldots + \mu_n y_n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (x_i \otimes y_j).$$

2. Связь между билинейными формами в пространстве R и линейными функциями в $R \otimes R$. Покажем теперь, как по билинейной форме на R можно построить линейную функцию на тензорном произведении $R \otimes R$. Пусть задана билинейная форма $f(x, y)$ на R. Сопоставим ей линейную функцию $F(X)$ на $R \otimes R$. Для элементов $X = x \otimes y$ положим

$$F(x \otimes y) = f(x, y);$$

для произвольного $X = x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k$ полагаем

$$F(X) = f(x_1, y_1) + \ldots + f(x_k, y_k).$$

Чтобы определение $F(X)$ было корректным, нужно, чтобы на равных выражениях функция F принимала одинаковые значения. Убедимся, что это так. Для этого достаточно показать, что $F(X) = 0$ на выражениях вида 1), 2), 3) (стр. 294). Проверим, например, что

$$F((x_1 + x_2) \otimes y - x_1 \otimes y - x_2 \otimes y) = 0.$$

В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} &F((x_1 + x_2) \otimes y - x_1 \otimes y - x_2 \otimes y) = \\ &\qquad = f(x_1 + x_2, y) + f(-x_1, y) + f(-x_2, y) = \\ &\qquad\qquad = f(x_1, y) + f(x_2, y) - f(x_1, y) - f(x_2, y) = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что построенная по $f(x, y)$ функция $F(X)$ на $R \otimes R$ линейна, т.е. $F(X + Y) = F(X) + F(Y)$ и $F(\lambda X) = \lambda F(X)$. Обратно, если $F(X)$ — линейная функция на $R \otimes R$, то ей соответствует билинейная форма на R:

$$f(x, y) = F(x \otimes y).$$

Итак, мы установили естественное взаимно однозначное соответствие между билинейными формами на R и линейными функциями на $R \otimes R$.

Заметим, что это соответствие линейно; именно, если билинейным формам f_1, f_2 отвечают линейные функции F_1 и F_2, то их линейной комбинации $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ отвечает функция $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$. Таким образом, построенное соответствие является изоморфизмом между пространством $B(R)$ билинейных форм на R и пространством $(R \otimes R)'$ линейных функций на $R \otimes R$.

3. Размерность тензорного произведения $R\otimes R$. Докажем, что $R \otimes R$ — *конечномерное пространство размерности n^2, где n — размерность R.*

Зададим базис $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве R. Пусть x, y — произвольные векторы из R; разложим их по векторам базиса:

$$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \ldots + \eta_n e_n.$$

Тогда

$$x \otimes y = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j (e_i \otimes e_j).$$

Таким образом, $x \otimes y$, а значит, и любой другой вектор из $R \otimes R$ является линейной комбинацией n^2 векторов $e_i \otimes e_j$.

Убедимся, что векторы $e_i \otimes e_j$ линейно независимы. Для этого воспользуемся следующей простой леммой, доказательство которой предоставляется читателю.

Лемма 1. *Пусть L — линейное пространство и X_α $(\alpha = 1, \ldots, N)$ — векторы из L. Если для каждого $\alpha = 1, \ldots, N$ существует линейная функция $F_\alpha(X)$ на L такая, что $F_\alpha(X_\alpha) = 1$ и $F_\alpha(X_\beta) = 0$ при $\beta \neq \alpha$, то векторы X_α линейно независимы.*

Зададим для каждого $i = 1, \ldots, n$ линейную функцию $f_i(x)$ на R такую, что $f_i(e_i) = 1$ и $f_i(e_j) = 0$ при $j \neq i$. Так как векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис в R, то такая функция существует и единственна. Положим

$$f_{ij}(x, y) = f_i(x) f_j(y), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Функция $f_{ij}(x, y)$ является билинейной формой на R; значит, согласно п. 2 ей соответствует линейная функция $F_{ij}(X)$ на $R \otimes R$ такая, что

$$F_{ij}(x \otimes y) = f_i(x) f_j(y).$$

Убедимся, что эта линейная функция $F_{ij}(X)$ равна 1 на $e_i \otimes e_j$ и равна 0 на остальных векторах $e_{i'} \otimes e_{j'}$. В самом деле, $F_{ij}(e_{i'} \otimes e_{j'}) = f_i(e_{i'}) f_j(e_{j'})$, и наше утверждение сразу следует из определения функций $f_i(x)$ и $f_j(x)$.

В силу леммы этим доказано, что векторы $e_i \otimes e_j$ линейно независимы. Так как, с другой стороны, по ним раскладывается любой вектор в $R \otimes R$, то векторы $e_i \otimes e_j$ образуют базис в $R \otimes R$. Таким образом, размерность $R \otimes R$ равна числу векторов $e_i \otimes e_j$, т. е. равна n^2.

4. Тензорное произведение $R_1 \otimes \ldots \otimes R_m$. Определяя тензорное произведение $R \otimes R$, мы фактически нигде не пользовались тем, что векторы x и y в произведении $x \otimes y$ берутся из одного и того же пространства. Поэтому, повторяя дословно определения п. 1, можно определить также тензорное произведение $R_1 \otimes R_2$ двух различных пространств R_1 и R_2.

Если $e_1, \ldots, e_m$ — базис в R_1, а $f_1, \ldots, f_n$ — базис в R_2, то базисом в $R_1 \otimes R_2$ служат mn векторов $e_i \otimes f_j$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$.

Отметим, что пространства $R_1 \otimes R_2$ и $R_2 \otimes R_1$ различны по определению.

Аналогично определяется тензорное произведение любого числа линейных пространств. Так, например, элементами тензорного произведения $R_1 \otimes R_2 \otimes R_3$ являются формальные суммы

$$x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 + \ldots + x_k \otimes y_k \otimes z_k, \tag{4}$$

где x_i — элементы из R_1, y_i — элементы из R_2 и z_i — элементы из R_3. Операции сложения и умножения на число определяются так же, как и в случае двух сомножителей. Читателю предлагается установить, какие выражения вида (4) при этом следует считать равными.

Тензорное произведение m линейных пространств $R_1, \ldots, R_m$ часто обозначают так: $\bigotimes\limits_{i=1}^{m} R_i$. В случае, когда все сомножители R_i совпадают с одним и тем же пространством R, их тензорное произведение называется m-й тензорной степенью и обозначается так: $\bigotimes\limits^{m} R$.

5. Связь между тензорами и элементами тензорных произведений. Мы покажем, что любой тензор в пространстве R можно рассматривать как элемент некоторого тензорного произведения. Сначала убедимся в этом для тензоров ранга 2, дважды ковариантных.

Согласно § 24, п. 3, тензор ранга 2, дважды ковариантный, задается билинейной формой на R. Но мы уже знаем, что между билинейными формами на R и линейными функциями на $R \otimes R$ имеется естественное взаимно однозначное линейное соответствие. Значит, в силу этого соответствия любой тензор ранга 2, дважды ковариантный, можно рассматривать как линейную функцию на $R \otimes R$, т. е. как элемент сопряженного пространства $(R \otimes R)'$.

С другой стороны, мы установим сейчас естественный изоморфизм $(R \otimes R)' \cong R' \otimes R'$. В силу этого изоморфизма любой тензор ранга 2, дважды ковариантный, можно рассматривать как элемент из тензорного произведения $R' \otimes R'$.

Построим изоморфизм $(R \otimes R)' \cong R' \otimes R'$. Пусть $F \in \in R' \otimes R'$, т. е.

$$F = f^1 \otimes g^1 + \ldots + f^l \otimes g^l,$$

где f^i, g^i — линейные функции на R. Мы должны сопоставить F элемент из $(R \otimes R)'$, т. е. линейную функцию $F(X)$ на $R \otimes R$. Определим эту функцию по формулам

$$F(x \otimes y) = f^1(x) g^1(y) + \ldots + f^l(x) g^l(x),$$
$$F(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k) = F(x_1 \otimes y_1) + \ldots + F(x_k \otimes y_k).$$

Читателю предлагается убедиться, что эти формулы действительно определяют линейную функцию на $R \otimes R$ и что построенное соответствие — изоморфизм.

Рассмотрим теперь тензоры ранга 2, дважды контравариантные. Каждый из них задается билинейной формой на R'. Но между билинейными формами на R' и линейными функциями на $R' \otimes R'$ имеется естественное взаимно однозначное линейное соответствие. Значит, тензоры ранга 2, дважды контравариантные, можно рассматривать как элементы пространства $(R' \otimes R')' \cong$ $\cong R \otimes R$.

Перейдем к общему случаю. Рассмотрим тензоры ранга $p + q$, p раз ковариантные и q раз контравариантные. Из § 23, п. 3, мы знаем, что им однозначно отвечают полилинейные функции $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ от p векторов $x, y, \ldots$ из R и q векторов $f, g, \ldots$ из R'.

Подобно тому, как это делалось в п. 2 для билинейных форм, можно установить естественное взаимно однозначное линейное соответствие между такими полилинейными функциями $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ и линейными функциями на тензорном произведении $\underbrace{R \otimes \ldots \otimes R}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{R' \otimes \ldots \otimes R'}_{q \text{ раз}}$.

Именно, если $F(X)$ — линейная функция на тензорном произведении $\underbrace{R \otimes \ldots \otimes R}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{R' \otimes \ldots \otimes R'}_{q \text{ раз}}$, то ей отвечает полилинейная функция $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ от p векторов из R и q векторов из R':

$$l(x, y, \ldots; f, g, \ldots) = F(x \otimes y \otimes \ldots \otimes f \otimes g \otimes \ldots). \tag{5}$$

Обратно, если задана полилинейная функция $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$, то существует (и притом единственная) линейная функция на тензорном произведении $\underbrace{R \otimes \ldots \otimes R}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{R' \otimes \ldots \otimes R'}_{q \text{ раз}}$, удовлетворяющая соотношению (5). (Доказать.)

Значит, тензоры ранга $p+q$, p раз ковариантные и q раз контравариантные, можно рассматривать как линейные функции на $\underbrace{R\otimes\ldots\otimes R}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{R'\otimes\ldots\otimes R'}_{q\text{ раз}}$, т. е. как элементы из сопряженного пространства

$$(\underbrace{R\otimes\ldots\otimes R}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{R'\otimes\ldots\otimes R'}_{q\text{ раз}})'\cong$$
$$\cong\underbrace{R'\otimes\ldots\otimes R'}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{R\otimes\ldots\otimes R}_{q\text{ раз}}.$$

6. Тензорное произведение линейных преобразований. Мы научились по каждой паре линейных пространств R_1, R_2 строить новое линейное пространство — их тензорное произведение $R_1\otimes R_2$. Однако этим задача не заканчивается. Можно еще по линейным преобразованиям в каждом из пространств R_1, R_2 построить линейное преобразование в их тензорном произведении.

Итак, пусть заданы линейное преобразование A пространства R_1 в R_1 и линейное преобразование B пространства R_2 в R_2 *). Мы построим по ним линейное преобразование пространства $R_1\otimes R_2$ в $R_1\otimes R_2$, которое будем называть тензорным произведением преобразований A и B и обозначать через $A\otimes B$.

Рассмотрим тензорное произведение $R_1\otimes R_2$ пространств R_1 и R_2. Напомним, что элементами $R_1\otimes R_2$ являются формальные суммы

$$x_1\otimes y_1+\ldots+x_k\otimes y_k,$$

где $x_i\in R_1$, $y_i\in R_2$, $i=1,\ldots,k$.

Тензорным произведением $A\otimes B$ линейного преобразования A пространства R_1 в R_1 и линейного преобразования B пространства R_2 в R_2 называется линейное

*) Иногда это записывают так: $A\colon R_1\longrightarrow R_1$ и $B\colon R_2\longrightarrow R_2$.

преобразование C пространства $R_1 \otimes R_2$ в $R_1 \otimes R_2$, определяемое следующим образом:

$$C(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k) = \\ = (Ax_1) \otimes (By_1) + \ldots + (Ax_k) \otimes (By_k) \;{}^{*}).$$

Более общо, если имеются два линейных пространства R_1, S_1, два других линейных пространства R_2, S_2 и линейные преобразования $A\colon R_1 \longrightarrow S_1$ и $B\colon R_2 \longrightarrow S_2$, то можно аналогично определить линейное преобразование

$$A \otimes B\colon R_1 \otimes R_2 \longrightarrow S_1 \otimes S_2.$$

Отметим, что каждому линейному преобразованию A пространства R_1 естественным образом отвечает линейное преобразование пространства $R_1 \otimes R_2$, а именно $A \otimes 1$, где 1 — единичное преобразование; аналогично каждому линейному преобразованию B пространства R_2 можно поставить в соответствие линейное преобразование $1 \otimes B$ пространства $R_1 \otimes R_2$.

Установим, как выражается матрица линейного преобразования $C = A \otimes B$ через матрицы преобразований A и B. Зададим базис $e_1, \ldots, e_m$ в пространстве R_1 и базис $f_1, \ldots, f_n$ в пространстве R_2. Тогда векторы $e_i \otimes f_j$ образуют базис в тензорном произведении $R_1 \otimes R_2$.

Пусть $\boldsymbol{A} = \|a_{ij}\|$ — матрица преобразования A в базисе $e_1, \ldots, e_m$; $\boldsymbol{B}$ — матрица преобразования B в базисе $f_1, \ldots, f_n$, т. е.

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} e_i, \quad Bf_l = \sum_{j=1}^{n} b_{jl} f_j.$$

Тогда $C = A \otimes B$ преобразует базисные векторы $e_k \otimes f_l$

---

*) Легко проверить, что определение корректно, т. е. равные выражения преобразуются в равные.

по следующей формуле:

$$C(e_k \otimes f_l) = (Ae_k) \otimes (Bf_l) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ik} b_{jl} (e_k \otimes f_l).$$

Таким образом, матрица линейного преобразования C есть матрица $\boldsymbol{C} = \|c_{ij,kl}\|$ порядка mn, строки и столбцы которой занумерованы парами индексов (i, j), $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. При этом $c_{ij,kl} = a_{ik} b_{jl}$. Такая матрица $\boldsymbol{C}$ называется *кронекеровским произведением* матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Упражнение. Выразить определитель кронекеровского произведения матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ через определители матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

7. Понятие функтора. В этой главе мы рассмотрели несколько типов операций над линейными пространствами, как, например, операции перехода к сопряженному пространству или тензорное умножение. Дадим общее определение таких операций.

Мы говорим, что задан ковариантный функтор (или более подробно, *ковариантный функтор в категории линейных пространств* *)), *если задано правило, сопоставляющее каждому линейному пространству R некоторое линейное пространство $F(R)$ и каждому линейному преобразованию $A\colon R_1 \longrightarrow R_2$ некоторое линейное преобразование $F(A)$ пространства $F(R_1)$ в $F(R_2)$* (в наших обозначениях, $F(A)\colon F(R_1) \longrightarrow F(R_2)$). *При этом предполагаются выполненными следующие условия*:

1) *если 1 — единичное преобразование в R, то $F(1)$ — единичное преобразование в пространстве $F(R)$*;

2) *если $A\colon R_1 \longrightarrow R_2$ и $B\colon R_2 \longrightarrow R_3$ — два линейных преобразования, то*

$$F(BA) = F(B)F(A).$$

Примером ковариантного функтора является тензорное умножение. Именно, пусть S — фиксированное пространство. Отнесем каждому линейному пространству R пространство $F(R) = R \otimes S$ и каждому линейному преобразованию $A\colon R_1 \longrightarrow R_2$ линейное

*) Понятие функтора можно ввести для произвольной категории. Общие определения категории и функтора см., например, в книге: С. Ленг, Алгебра, «Мир», 1968.

преобразование $F(A) = A \otimes 1$ пространства $R_1 \otimes S$ в $R_2 \otimes S$. Нетрудно проверить, что при этом свойства 1) и 2) выполняются; таким образом, F — ковариантный функтор.

Аналогично определяется контравариантный функтор. *Мы говорим, что задан контравариантный функтор F, если задано правило, сопоставляющее каждому линейному пространству R некоторое линейное пространство $F(R)$ и каждому линейному преобразованию $A\colon R_1 \longrightarrow R_2$ некоторое линейное преобразование $F(A)\colon F(R_2) \longrightarrow F(R_1)$. При этом предполагается выполненными условие* 1) *и условие*

$2'$) *если $A\colon R_1 \longrightarrow R_2$ и $B\colon R_2 \longrightarrow R_3$ — два линейных преобразования, то*

$$F(BA) = F(A)F(B).$$

Примером контравариантного функтора является операция перехода к сопряженным пространствам. Именно, отнесем каждому линейному пространству R сопряженное ему пространство $F(R) = R'$ и каждому линейному преобразованию $A\colon R_1 \longrightarrow R_2$ сопряженное преобразование $F(A) = A'$. Нетрудно проверить (см. п. 2 § 23), что при этом свойства 1) и $2'$) выполняются; таким образом, F — контравариантный функтор.

З а д а ч а. Пусть S — фиксированное линейное пространство. Обозначим через $\mathrm{Hom}(R, S)$ пространство всех линейных преобразований $A\colon R \longrightarrow S$. Для любого линейного пространства R положим $F(R) = \mathrm{Hom}(R, S)$. Мы определили, таким образом, операцию F на множестве линейных пространств. Требуется определить F также на множестве линейных преобразований таким образом, чтобы F стало контравариантным функтором.

8. Симметрическая и внешняя степени. Наряду с тензорным произведением $R \otimes R$ полезно также рассматривать симметрическую степень и внешнюю степень пространства R; особенно важным понятием является внешняя степень. Эти пространства строятся аналогично тензорному произведению.

Начнем с определения симметрического квадрата $S^2(R)$. Напомним, что элементами пространства $R \otimes R$ являются выражения

$$x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k, \tag{6}$$

где x_i, y_i — элементы из R. При этом предполагается, что

1) $$(x_1 + x_2) \otimes y - x_1 \otimes y - x_2 \otimes y = 0;$$
2) $$x \otimes (y_1 + y_2) - x \otimes y_1 - x \otimes y_2 = 0;$$
3) $$(\lambda x) \otimes y - x \otimes (\lambda y) = 0.$$

Элементы $x \otimes y$ и $y \otimes x$ в $R \otimes R$ являются при $y \neq x$, по определению, различными.

Однако иногда удобно ввести пространство, в котором $x \otimes y = y \otimes x$.

Для этого дополним условия 1)–3) следующим:

4) $$x \otimes y - y \otimes x = 0.$$

Приравняем также нулю и все линейные комбинации выражений 1), 2), 3) и 4). Два выражения X и X' вида (6) будем теперь считать равными, если для них существуют такие выражения $Z = 0$ и $Z' = 0$, что $X + Z$ и $X' + Z'$ совпадают.

В результате мы получим линейное пространство, элементы которого — классы равных между собой выражений вида (6), а операции сложения и умножения на число определены, как и для тензорного произведения $R \otimes R$, по формулам (2) и (3). (Читателю предлагается убедиться в корректности определений этих операций и в том, что все аксиомы линейного пространства здесь выполнены.) Это пространство называется *симметрическим квадратом пространства* R и обозначается через $S^2(R)$.

Упражнение. Доказать, что размерность $S^2(R)$ равна $\frac{n(n+1)}{2}$, где n — размерность R.

Другим важным понятием является внешний квадрат R. Чтобы это пространство построить, дополним условия 1), 2) и 3) следующим условием:

4′) $$x \otimes x = 0.$$

После этого мы определим равенство двух выражений вида (6) подобно тому, как это уже делалось для тензорного произведения $R \otimes R$ и для симметрического квадрата $S^2(R)$. Получаемое линейное пространство, элементы которого — классы равных между собой выражений вида (6), называется *внешним квадратом пространства* R и обозначается через $R \wedge R$ (по-другому, $\bigwedge^2 R$).

Л е м м а 2. *В пространстве* $R \wedge R$ *имеет место равенство*

$$x \otimes y + y \otimes x = 0. \tag{7}$$

В самом деле, имеем:

$$x \otimes y + y \otimes x = (x + y) \otimes (x + y) - x \otimes x - y \otimes y.$$

Таким образом, выражение $x \otimes y + y \otimes x$ является линейной комбинацией выражений вида 4′), и, значит, оно равно нулю.

Выражение $x \otimes y$, рассматриваемое как элемент из $R \wedge R$, называют *внешним произведением векторов* x *и* y и обозначают так: $x \wedge y$. Равенство (7) означает, что внешнее произведение векторов антисимметрично: $x \wedge y = -y \wedge x$.

Покажем, что $S^2(R)$ и $R \wedge R$ можно определить и как подпространства в $R \otimes R$; точнее, в $R \otimes R$ имеются подпространства, естественным образом изоморфные $S^2(R)$ и $R \wedge R$.

Для этого зададим в пространстве $R \otimes R$ линейное преобразование σ, определяемое по формуле

$$\sigma(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k) = y_1 \otimes x_1 + \ldots + y_k \otimes x_k.$$

Очевидно, что его квадрат есть единичное преобразование: $\sigma^2 = 1$.

Рассмотрим два подпространства в $R \otimes R$ — подпространство H_1 элементов X, для которых $\sigma X = X$ и подпространство H_2 элементов X, для которых $\sigma X = -X$. Эти подпространства имеют нулевое пересечение, так как из условий $\sigma X = X$ и $\sigma X = -X$ следует, что $X = 0$. Покажем, что их прямая сумма есть все пространство $R \otimes R$. В самом деле, представим любой элемент X из $R \otimes R$ в виде суммы $X = X_1 + X_2$, где $X_1 = \frac{1}{2}(X + \sigma X)$ и $X_2 = \frac{1}{2}(X - \sigma X)$. Очевидно, что $\sigma X_1 = X_1$, т.е. $X_1 \in H_1$, и $\sigma X_2 = -X_2$, т.е. $X_2 \in H_2$.

Покажем теперь, что при естественном отображении $R \otimes R$ на $S^2(R)$ в нуль переходят все элементы из H_2, и притом только они. В самом деле, пусть $X \in R \otimes R$ переходит при этом отображении в нуль; тогда X равно линейной комбинации выражений вида 4), т.е. выражений $x \otimes y - y \otimes x$; следовательно, $\sigma X = -X$, т.е. $X \in H_2$. Обратно, пусть $X \in H_2$, т.е. $\sigma X = -X$; тогда $X = \frac{1}{2}(X - \sigma X)$; следовательно, X равно линейной комбинации выражений вида 4) и, значит, переходит в нуль при отображении $R \otimes R$ на $S^2(R)$.

Поскольку $R \otimes R$ является прямой суммой H_1 и H_2, то этим доказано, что при отображении $R \otimes R$ на $S^2(R)$ подпространство H_1 изоморфно отображается на $S^2(R)$.

Итак, мы установили изоморфизм между $S^2(R)$ и подпространством $H_1 \subset R \otimes R$ элементов X, для которых $\sigma X = X$.

Аналогично устанавливается изоморфизм между $R \wedge R$ и подпространством $H_2 \subset R \otimes R$ элементов X, для которых $\sigma X = -X$.

Упражнение. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в R. Доказать, что элементы $e_i \wedge e_j$, где $i < j$, образуют базис в $R \wedge R$.

9. Внешняя степень $\overset{m}{\bigwedge} R$. Теперь дадим определение внешней степени $\overset{m}{\bigwedge} R$ пространства R для произвольного m. Рассмотрим m-ю тензорную степень $\overset{m}{\bigotimes} R$. Напомним, что элементами пространства $\overset{m}{\bigotimes} R$ являются формальные суммы выражений вида

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m, \tag{8}$$

где $x_i \in R$, причем некоторые из таких сумм считаются равными между собой. Приравняем дополнительно нулю все выражения вида (8), у которых совпадают хотя бы два сомножителя, а также любые их линейные комбинации. То линейное пространство, которое при этом получается, называется *внешней m-й степенью пространства* R и обозначается через $\overset{m}{\bigwedge} R$.

Выражение $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m$, рассматриваемое как элемент из $\overset{m}{\bigwedge} R$, называется *внешним произведением векторов* $x_1, \ldots, x_m$ и обозначается $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_m$. Нетрудно убедиться (подобно тому, как это уже делалось для случая двух сомножителей), что *внешнее произведение векторов антисимметрично,* т. е. оно меняет знак при перестановке любых двух сомножителей.

Среди внешних степеней пространства R имеется лишь конечное число отличных от нуля. Именно, покажем, что $\overset{m}{\bigwedge} R = 0$ при $m > n$, где n — размерность R. Для этого зададим базис $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве R. Разлагая векторы из R по элементам базиса, мы убеждаемся, что любое внешнее произведение $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$, а значит, и любой элемент из $\overset{m}{\bigwedge} R$, является линейной комбинацией выражений $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$. Но если $m > n$, то в каждом выражении $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$ совпадают хотя бы два сомножителя; значит, всегда $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m} = 0$. Итак, $\overset{m}{\bigwedge} R = 0$ при $m > n$.

Покажем также, что *пространство* $\overset{n}{\bigwedge} R$, *где* n — *размерность* R, *является одномерным пространством.* В самом деле, среди элементов $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ отличны от нуля только те, у которых индексы $i_1, \ldots, i_n$ попарно различны и, значит, являются перестановками индексов $1, \ldots, n$. Так как внешнее произведение векторов антисимметрично, то такие отличные от нуля элементы совпадают, с точностью до знака, с элементом $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Поскольку любой элемент из $\overset{n}{\bigwedge} R$ является линейной комбинацией векторов $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, то тем самым он кратен вектору $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$.

Упражнения. 1. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в R и $e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$ — любые n векторов из R. Доказать, что $e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_n = a e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, где a — определитель матрицы $\|a_{ij}\|$.

2. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в R. Доказать, что выражения $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, образуют базис в $\bigwedge^m R$. На основании этого вычислить размерность пространства $\bigwedge^m R$.

Задача. Дать (по аналогии со случаем $m = 2$) определение m-й симметрической степени $S^m(R)$ пространства R для любого m.

10. Тензорное произведение евклидовых пространств. Пусть R_1 — евклидово пространство со скалярным произведением $(x, x')_1$, R_2 — другое евклидово пространство со скалярным произведением $(y, y')_2$. Тогда в их тензорном произведении $R_1 \otimes R_2$ можно естественным образом ввести скалярное произведение.

Сначала определим его для пары векторов $x \otimes y$ и $x' \otimes y'$, полагая

$$(x \otimes y, x' \otimes y') = (x, x')_1 \cdot (y, y')_2.$$

Если теперь

$$X = x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k,$$
$$X' = x'_1 \otimes y'_1 + \ldots + x'_l \otimes y'_l$$

— произвольные векторы из $R_1 \otimes R_2$, то положим:

$$(X, X') = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (x_i \otimes y_i, x'_j \otimes y'_j). \tag{9}$$

Читателю предлагается убедиться, что выражение (9) действительно задает скалярное произведение на $R_1 \otimes R_2$. Именно, оно имеет смысл на $R_1 \otimes R_2$ (т. е. сохраняется при замене выражений X и X' на равные) и удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

Пространство $R_1 \otimes R_2$ с введенным в нем так скалярным произведением называется *тензорным произведением евклидовых пространств* R_1 и R_2.

Заметим, что если $e_1, \ldots, e_m$ — ортонормированный базис в R_1, а $f_1, \ldots, f_n$ — ортонормированный базис в R_2, то векторы $e_i \otimes f_j$ образуют ортонормированый базис в тензорном произведении $R_1 \otimes R_2$. В самом деле,

$$(e_i \otimes f_j, e_{i'} \otimes f_{j'}) = (e_i, e_{i'})_1 (f_j, f_{j'})_2.$$

Значит, это выражение равно 1 при $i = i'$, $j = j'$ и равно нулю во всех остальных случаях.