Доказательство. Оба утверждения немедленно следуют из формулы Стокса и пункта (5) предложения 1.3. □

Замечание 1.8. Первое утверждение теоремы Коши поддается разнообразным формальным усилениям. Например, достаточно считать, что f голоморфна на $\operatorname{int} D$ и непрерывна на D; можно также считать, что граница области D не обязательно гладкая, но кусочно-гладкая или даже всего лишь «спрямляемая». Мы не будем вдаваться в подробности, которые можно найти в любом достаточно полном учебнике комплексного анализа; в тех случаях, когда нам это будет нужно, читатель без труда сможет внести соответствующие уточнения самостоятельно.

Замечание 1.9. Для случая функций нескольких переменных доказанные нами результаты видоизменяются следующим образом. Принадлежащая классу C^1 функция $f\colon U \to \mathbb{C}$, где U — открытое подмножество в $\mathbb{C}^n$, голоморфна тогда и только тогда, когда $\partial f/\partial \bar{z}_j = 0$ для $j = 1, \ldots, n$. Поскольку, как легко видеть, для любой гладкой функции f выполнено тождество

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\, \overline{d} z_j,$$

равносильное условие состоит в том, что форма $f\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$ замкнута.

Очевидно также, что для голоморфных отображений справедливы теоремы об обратной и неявной функции (в формулировках слова «гладкое отображение» надо, естественно, заменить на «голоморфное отображение»).

Лекция 2. Вокруг формулы Коши

Все предшествующее было более или менее тривиально; теперь мы подошли к первому содержательному результату.

Теорема 2.1 (формула Коши). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область с гладкой границей и f — функция, голоморфная в окрестности D.*

Тогда для всякого $a \in \operatorname{int} D$ *выполнено равенство*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a}. \tag{2.1}$$

Замечание 2.2. Условия на поведение функции на границе области можно ослабить так же, как в теореме Коши (см. замечание 1.8).

Доказательство. Пусть положительное число ε столь мало, что диск $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant \varepsilon\}$ содержится во внутренности области D. Применяя теорему Коши к области с границей $D \setminus \operatorname{int}(D_\varepsilon)$ и функции $z \mapsto f(z)/(z-a)$, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)\,dz}{z-a},$$

так что достаточно доказать равенство

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)\,dz}{z-a}. \tag{2.2}$$

Положим $c = f(a)$ и запишем функцию f в виде $f(z) = c + g(z)$, где g голоморфна и $g(a) = 0$. Тогда правая часть (2.2) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{c\,dz}{z-a} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{g(z)\,dz}{z-a}; \tag{2.3}$$

Покажем, что первое слагаемое в этой формуле равно c, а второе — нулю, из чего теорема, очевидно, будет следовать. Для вычисления первого из интегралов параметризуем границу диска D_ε по формуле $z = a + \varepsilon \cdot e^{2\pi i t}$, где $t \in [0;1]$ (очевидно, при такой параметризации ориентация будет положительна); тогда $dz = 2\pi i \varepsilon e^{2\pi i t}\,dt$, и имеем

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{c\,dz}{z-a} = \int_0^1 2\pi i c\,dt = 2\pi i c,$$

так что утверждение относительно первого слагаемого доказано. Второй из интегралов в (2.3) оценивается с помощью предложения 1.5:

$$\left| \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{g(z)\,dz}{z-a} \right| \leqslant \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon = 2\pi M(\varepsilon), \tag{2.4}$$

где $M(\varepsilon) = \sup_{|z-a|=\varepsilon} |g(z)|$. По теореме Коши интеграл в левой части (2.4) не зависит от ε; с другой стороны, поскольку $g(a) = 0$, имеем $\lim_{\varepsilon \to 0} M(\varepsilon) = 0$, так что этот интеграл равен нулю, что и завершает доказательство. □

Рассуждение со сдвигом контура интегрирования, примененное в доказательстве формулы Коши, весьма типично для комплексного анализа.

Из формулы Коши вытекает, что голоморфные функции обладают очень хорошими свойствами. Вот первое из них:

Предложение 2.3. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область с гладкой границей и f — функция, голоморфная в окрестности D. Тогда f имеет во внутренности D производные любого порядка; эти производные также голоморфны и задаются формулами*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Формула (2.5) получается из формулы Коши (2.1) формальным n-кратным дифференцированием по a под знаком интеграла; следовательно, все будет доказано, как только мы убедимся, что такое дифференцирование законно, или, что то же самое, что можно дифференцировать по a под знаком интеграла в формуле (2.5) при любом $n \geqslant 0$. Обозначим $\Phi(z, a) = f(z)/(z-a)^{n+1}$; нам достаточно проверить, что «разностное отношение» $(\Phi(z, a+h) - \Phi(z, a))/h$ сходится равномерно по $z \in \partial D$ при $h \to 0$, а это, в свою очередь, немедленно следует из следующей леммы:

Лемма 2.4. *Отношение*

$$\left(\frac{1}{(z-a-h)^{n+1}} - \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\right)\Big/ h \tag{2.6}$$

стремится к $(n+1)/(z-a)^{n+2}$ при $h \to 0$ равномерно по $z \in \partial D$.

Доказательство леммы. Приводя к общему знаменателю и раскрывая скобки в числителе, получаем, что (2.6) равно

$$\frac{n+1}{(z-a)(z-a-h)^{n+1}} + \frac{h\psi(z,h)}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)^{n+1}}, \tag{2.7}$$

где $|\psi(z,h)| \leqslant C\max(|h|, \sup_{z\in\partial D}|z-a|)^n$ (константа C зависит только от n). Значит, второе слагаемое в (2.7) равномерно стремится к нулю (так как знаменатель отграничен от нуля при $z \in \partial D$), а первое слагаемое, очевидно, равномерно стремится к $(n+1)/(z-a)^{n+2}$. □

Следствие 2.5. *Если f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, то ее производная также голоморфна.*

Следствие 2.6 (из доказательства). *Если $D \subset \mathbb{C}$ — область с гладкой границей и $f\colon \partial D \to \mathbb{C}$ — произвольная непрерывная функция, то функция $\varphi\colon \operatorname{int} D \to \mathbb{C}$, заданная формулой*

$$\varphi(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

(«интеграл типа Коши»), голоморфна в $\operatorname{int} D$, *причем ее n-я производная задается формулой*

$$\varphi^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Доказательство. В рассуждении из доказательства предложения 2.3 ничего, кроме непрерывности f на ∂D, не использовалось. □

Замечание 2.7. При произвольном выборе f граничные значения функции φ отнюдь не обязаны совпадать с f.

Следующее свойство голоморфных функций резко контрастирует (в лучшую сторону) с тем, что имеет место для дифференцируемых функций действительного переменного.

Предложение 2.8. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, и пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — ряд из голоморфных на U функций, равномерно сходящийся на всяком компактном подмножестве $K \subset U$. Тогда сумма этого ряда (обозначим ее $f(z)$) — голоморфная функция на U, и имеет место равенство $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$, причем ряд в правой части также равномерно сходится на всяком компактном подмножестве $K \subset U$.*

Доказательство. Так как утверждения о голоморфности функции f и о равенстве $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$ имеют локальный характер, достаточно их проверить для z, лежащих во внутренности некоторого замкнутого диска $D \subset U$. Из равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ на D и формулы Коши, примененной ко всем f_n, следует, что

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_n \int_{\partial D} \frac{f_n(z)\,dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\left(\sum_n f_n(z)\right)dz}{z-a} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

при $a \in \operatorname{int} D$. Теперь из следствия 2.6 следует, что f голоморфна в $\operatorname{int} D$, и что для всех $a \in \operatorname{int} D$ выполнено равенство

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\left(\sum_n f_n(z)\right)dz}{(z-a)^2} = \frac{1}{2\pi i} \sum_n \int_{\partial D} \frac{f_n(z)\,dz}{(z-a)^2} = \sum_n f_n'(a) \tag{2.8}$$

(мы опять воспользовались равномерной сходимостью на D). Стало быть, единственное, что нам остается доказать, — это что ряд $\sum_n f_n'(z)$ сходится равномерно на любом компактном подмножестве $K \subset U$; так как K содержится в конечном объединении замкнутых дисков произвольно малого радиуса, можно считать, что и само K является замкнутым диском. Вложим K в концентрический замкнутый диск большего радиуса $D \subset U$ и применим формулу (2.8) к диску D; так как при $a \in K$ знаменатели $(z-a)^2$ в формуле (2.8) будут отграничены от нуля, равномерная по a сходимость ряда из (2.8) на K очевидна. □

Из следствия 2.5 уже вытекает, что всякая голоморфная функция принадлежит классу C^{∞}; оказывается, что на самом деле верно гораздо более сильное утверждение. Чтобы его сформулировать, введем

Определение 2.9. Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, называется *аналитической*, если для любой точки $a \in U$ существует такой открытый диск $\Delta \subset U$ с центром в a, что для всех $z \in \Delta$ выполнено равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{2.9}$$

где ряд (2.9) абсолютно сходится на Δ (и не зависит, разумеется, от выбора $z \in \Delta$).

Поскольку, как хорошо известно (и легко проверяется), из абсолютной сходимости степенного ряда (2.9) на Δ вытекает его равномерная сходимость на компактных подмножествах в Δ, предложение 2.8 показывает, что всякая аналитическая функция голоморфна, причем ее производную можно находить с помощью почленного дифференцирования ряда (2.9). Замечательно, что верно и обратное утверждение:

Теорема 2.10. *Всякая голоморфная функция аналитична.*

Доказательство. Пусть функция f голоморфна на $U \subset \mathbb{C}$, и пусть $a \in U$. Рассмотрим замкнутый диск D с центром в a, содержащийся в U, и пусть Δ — концентрический открытый диск меньшего радиуса. В силу формулы Коши имеем, для всех $z \in \Delta$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{2.10}$$

Для всех $z \in \Delta$ и $\zeta \in \partial D$ дробь $1/(\zeta - z)$ можно разложить в сумму геометрической прогрессии

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}, \tag{2.11}$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно по z и ζ, и эта равномерность не нарушится после умножения на $f(\zeta)$. Подставляя (2.11) в (2.10), получаем, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

при $z \in \Delta$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \tag{2.12}$$

причем сходимость абсолютна. Доказательство закончено. $\square$

Замечание 2.11. Дифференцируя ряд (2.9) почленно n раз (что законно ввиду предложения 2.8) и полагая $z = a$, находим, что

$c_n = f^{(n)}(a)/n!$ (обычная формула для коэффициентов ряда Тейлора); стало быть, формула (2.12) согласуется с предложением 2.3.

Следствие 2.12. *Если $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция и $a \in U$, то коэффициенты c_n в ее разложении* (2.9) *определены однозначно; в частности, они равны нулю тогда и только тогда, когда f тождественно равна нулю на Δ.*

Доказательство. Это немедленно следует из формул для c_n, приведенных в замечании 2.11, или из формулы (2.12) и теоремы Коши. □

Замечание 2.13. Из следствия 2.12 легко вывести «принцип аналитического продолжения»: если открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ связно и голоморфные функции $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ совпадают на непустом открытом множестве $U' \subset U$, то они совпадают и на всем U. В такой форме это утверждение верно и для голоморфных функций нескольких переменных; с другой стороны, для функций одного переменного верно более сильное утверждение о единственности, о котором пойдет речь на следующей лекции.

Замечание 2.14. Определение 2.9 имеет смысл и для функций действительного переменного (а также, при надлежащем понимании абсолютной сходимости степенного ряда, для функций на открытом подмножестве любого «полного поля»). Однако над $\mathbb{R}$ теорема 2.10 абсолютно неверна: известный пример с e^{-1/x^2} показывает, что функции класса C^∞ не обязаны быть аналитическими.

В качестве еще одного (отчасти неожиданного) следствия из наших рассмотрений можно получить следующее обращение теоремы Коши:

Предложение 2.15 (теорема Морера). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, обладающая тем свойством, что интеграл от $f\,dz$ по границе любого треугольника, содержащегося в U, равен нулю. Тогда функция f голоморфна в U.*

Доказательство. Легко показать (и еще проще поверить), что для всякой гладкой 2-цепи σ в открытом подмножестве $U \subset \mathbb{C}$ интеграл от $f\,dz$ по $\partial\sigma$ можно с любой точностью аппроксимировать суммой интегралов по границам треугольников. Следовательно, из условия вытекает, что $\int_{\partial\sigma} f\,dz = 0$ для всякой гладкой 2-цепи σ в U.

Далее, поскольку проблема локальна, можно, не ограничивая общности, считать, что множество U выпукло (скажем, является открытым диском). Зафиксируем точку $z_0 \in U$ и положим $F(z) = \int_\gamma f(z)\,dz$, где γ — такая гладкая 1-цепь, что $\partial\gamma = z - z_0$; в силу предыдущего замечания и того факта, что выпуклые множества односвязны (и вообще стягиваемы), это определение корректно. Мы покажем, что функция F голоморфна в U и что $F'(z) = f(z)$: ввиду следствия 2.5 предложение будет отсюда следовать.

Пусть, стало быть, $z \in U$, и пусть $f(z) = c$; для достаточно малых по модулю $h \in \mathbb{C}$ имеем

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma'} f(\zeta)\,d\zeta = hf(z) + \int_{\gamma'} (f(\zeta) - c)\,d\zeta,$$

где γ' — отрезок, соединяющий z и $z+h$. По предложению 1.5 имеем

$$\left|\int_{\gamma'} (f(\zeta) - c)\,d\zeta\right| \leqslant |h| \cdot M(h),$$

где $M(h) = \sup_{\zeta\in\gamma'} |f(\zeta) - c|$. Ввиду непрерывности функции f имеем $M(h) \to 0$ при $h \to 0$, так что

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z),$$

что и завершает доказательство. □

Замечание 2.16. Если предположить дополнительно, что функция f гладка (хотя бы класса C^1), то теорема Мореры станет тривиальной (условие равносильно тому, что форма $f\,dz$ замкнута, и можно применить пункт (5) предложения 1.3). Смысл ее в том, что она применима к ситуациям, когда гладкость функции a priori не очевидна.

Приложение: случай функций нескольких переменных

Многие из доказанных нами утверждений остаются в силе и для голоморфных функций нескольких переменных; в этом приложении мы сформулируем соответствующие результаты и объясним, как они доказываются.

Начнем с определения.

Определение 2.17. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — точка из $\mathbb{C}^n$ и $r = (r_1, \ldots, r_n)$ — последовательность из n положительных действительных чисел. Тогда *полидиском* с центром a и радиусом r называется множество

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n; r_1, \ldots, r_n) = \\ = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z - a_j| < r_j \quad \text{для всех } j \in [1; n]\}$$

(мы будем также писать просто $\Delta(a; r)$). Замыкание полидиска $\Delta(a; r)$ обозначается $\overline{\Delta}(a; r)$. Наконец, мы будем называть *остовом* полидиска и обозначать через $T(a_1, \ldots, a_n; r_1, \ldots, r_n)$ (или просто $T(a; r)$) множество

$$T(a; r) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z - a_j| = r_j \quad \text{для всех } j \in [1; n]\}.$$

(Обратите внимание, что множество $T(a; r)$ гомеоморфно n-мерному тору и при $n > 1$ *не является* границей полидиска $\Delta(a; r)$.)

Теперь мы можем сформулировать многомерный аналог формулы Коши:

Теорема 2.18. *Пусть $\Delta(a; r) \subset \mathbb{C}^n$ — полидиск и f — функция, голоморфная в окрестности $\overline{\Delta}(a; r)$. Тогда для всякой точки $(z_1, \ldots, z_n) \in \Delta(a; r)$ имеет место равенство*

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T(a;r)} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdot \ldots \cdot (\zeta_n - z_n)}. \tag{2.13}$$

(Строго говоря, коль скоро в формуле (2.13) участвует интеграл дифференциальной формы по многообразию, необходимо указать ориентацию этого многообразия; это делается так: если $\theta_j = \arg(\zeta_j - a_j)$, то у тора $T(a; r)$ выбирается ориентация, относительно которой форма $d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n$ будет положительна.)

Доказательство. Для упрощения обозначений будем считать, что $a_1 = \ldots = a_n = 0$ (общности это, очевидно, не ограничивает). Правая часть (2.13) равна, очевидно,

$$r_1 \cdot \ldots \cdot r_n \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{f(r_1 e^{2\pi i\theta_1}, \ldots, r_n e^{2\pi i\theta_n})}{(r_1 e^{2\pi i\theta_1} - z_1) \cdot \ldots \cdot (r_n e^{2\pi i\theta_n} - z_n)}\, d\theta_1 \ldots d\theta_n;$$

вычисляя интеграл как повторный и применяя n раз «обычную» формулу Коши (2.1) к (голоморфным, очевидно) функциям вида

$$z \mapsto f(z_1, \ldots, z_{k-1}, z, r_{k+1} e^{2\pi i\theta_{k+1}}, \ldots, r_n e^{2\pi i\theta_n}),$$

получаем, что выражение равно $f(z_1, \ldots, z_n)$, что и требовалось. $\square$

Теперь из формулы Коши можно вывести следствия, аналогичные тем, что мы получили в этой лекции для функций одного переменного; доказательства также совершенно аналогичны (единственное отличие — более громоздкая запись).

Предложение 2.19 (аналог следствия 2.5). *Если f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$, то все ее частные производные также голоморфны.* $\square$

Предложение 2.20 (аналог следствия 2.6). *Если $f\colon T(a;r) \to \mathbb{C}$ — произвольная непрерывная функция, то функция $\varphi\colon \Delta(a;r) \to \mathbb{C}$, заданная формулой*

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T(a;r)} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdot \ldots \cdot (\zeta_n - z_n)},$$

будет голоморфна в $\Delta(a,r)$.

Предложение 2.21 (аналог предложения 2.8). *Пусть $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество, и пусть $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ — ряд из голоморфных на U функций, равномерно сходящийся на всяком компактном подмножестве $K \subset U$. Тогда сумма этого ряда (обозначим ее $f(z)$) — голоморфная функция на U, и для всякого j имеет место равенство*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial f_k(z)}{\partial z_j},$$

причем ряд в правой части также равномерно сходится на всяком компактном подмножестве $K \subset U$. □

Определение 2.22. Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество, называется *аналитической*, если у всякой точки $(a_1, \ldots, a_n) \in U$ существует такая окрестность $V \subset U$, что на множестве V имеет место равенство

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n \geqslant 0} c_{i_1,\ldots,i_n}(z_1 - a_1)^{i_1} \ldots (z_n - a_n)^{i_n},$$

где ряд абсолютно сходится.

Предложение 2.23 (аналог теоремы 2.10). *Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество, голоморфна тогда и только тогда, когда она аналитична.* □

Наконец, как мы уже отмечали, для голоморфных функций нескольких переменных выполняется «принцип аналитического продолжения» (см. замечание 2.13).

Лекция 3. Локальные свойства голоморфных функций

Определение 3.1. *Нулем* голоморфной функции называется точка, в которой эта функция обращается в нуль.

Предложение-определение 3.2. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Предположим, что $f(a) = 0$, где $a \in U$, но при этом f не является тождественным нулем ни в какой окрестности точки a. Пусть k — целое положительное число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, *но* $f^{(k)}(a) \neq 0$.

(1′) *В разложении функции f в степенной ряд $f = \sum c_i(z-a)^i$ имеем $c_0 = \ldots = c_{k-1} = 0$, но $c_k \neq 0$.*

(2) *Существует такая голоморфная на U функция g, что $g(a) \neq 0$ и на U выполнено тождество $f(z) = (z-a)^k g(z)$.*