причем ряд в правой части также равномерно сходится на всяком компактном подмножестве $K \subset U$. $\square$

Определение 2.22. Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество, называется *аналитической*, если у всякой точки $(a_1, \ldots, a_n) \in U$ существует такая окрестность $V \subset U$, что на множестве V имеет место равенство

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n \geqslant 0} c_{i_1, \ldots, i_n} (z_1 - a_1)^{i_1} \ldots (z_n - a_n)^{i_n},$$

где ряд абсолютно сходится.

Предложение 2.23 (аналог теоремы 2.10). *Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество, голоморфна тогда и только тогда, когда она аналитична.* $\square$

Наконец, как мы уже отмечали, для голоморфных функций нескольких переменных выполняется «принцип аналитического продолжения» (см. замечание 2.13).

Лекция 3. Локальные свойства голоморфных функций

Определение 3.1. *Нулем* голоморфной функции называется точка, в которой эта функция обращается в нуль.

Предложение-определение 3.2. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Предположим, что $f(a) = 0$, где $a \in U$, но при этом f не является тождественным нулем ни в какой окрестности точки a. Пусть k — целое положительное число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, *но* $f^{(k)}(a) \neq 0$.

(1′) *В разложении функции f в степенной ряд $f = \sum c_i (z-a)^i$ имеем $c_0 = \ldots = c_{k-1} = 0$, но $c_k \neq 0$.*

(2) *Существует такая голоморфная на U функция g, что $g(a) \neq 0$ и на U выполнено тождество $f(z) = (z-a)^k g(z)$.*

(3) *В некоторой окрестности $U' \ni a$ определена такая голоморфная функция h, что $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$, и $f(z) = h(z)^k$ всюду на U'.*

Число k, удовлетворяющее этим условиям, всегда существует и называется кратностью *нуля a функции f. Если $f(a) \neq 0$, то говорят, что кратность нуля функции f в точке a равна нулю.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (1'): следует из формулы $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ (см. замечание 2.11).

Существование числа k, удовлетворяющего условию (1'): следует из замечания 2.12.

(1') $\Rightarrow$ (2): степенной ряд для f в окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \ldots = (z-a)^k(c_k + c_{k+1}(z-a) + \ldots),$$

причем ряд в скобках, очевидно, абсолютно сходится в некоторой окрестности $U' \ni a$. Определим функцию g на U' формулой $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k+n}(z-a)^n$, а на $U \setminus \{a\}$ — формулой $g(z) = f(z)/(z-a)^k$; ясно, что на $U' \setminus \{a\}$ эти определения согласуются и что $g(a) = c_k \neq 0$, так что искомая голоморфная функция построена.

(2) $\Rightarrow$ (3): поскольку $g(a) \neq 0$, существует окрестность $U' \ni a$, в которой функция g не обращается в нуль; уменьшая, если нужно, U', можно считать, что $g(U')$ содержится в односвязном открытом подмножестве в $U'' \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда, как мы видели в лекции 1, на U'' существует голоморфная функция $z \mapsto \sqrt[k]{z}$ («ветвь корня k-й степени»), обратная к возведению в степень k; значит, можно взять композицию этой функции с функцией g (ограниченной на U') и получить определенную на U' голоморфную функцию $z \mapsto \sqrt[k]{g(z)}$. Положим теперь $h(z) = (z-a)\sqrt[k]{g(z)}$ для $z \in U'$. Тождество $(h(z))^k = f(z)$ очевидно, а неравенство $h'(z) \neq 0$ следует из формулы для производной произведения и того факта, что производная функции $z \mapsto \sqrt[k]{g(z)}$ отлична от нуля в точке a, поскольку не равны нулю как производная функции g в точке a, так и производная корня k-й степени в точке $g(a)$.

$(3) \Rightarrow (1')$: ввиду уже доказанной эквивалентности $(1) \Leftrightarrow (1')$ разложение функции h в окрестности точки a имеет вид

$$b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots,$$

где $b_1 \neq 0$. Возводя это разложение в степень k (что законно ввиду абсолютной сходимости) и приводя подобные, получим разложение для функции f, начинающееся с $b_1^k(z-a)^k$, с ненулевым коэффициентом при $(z-a)^k$. □

Следствие 3.3. *Пусть $a \in U$ — нуль функции f, голоморфной в $U \subset \mathbb{C}$. Тогда либо f тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки a, либо в некоторой окрестности точки a у функции f нет других нулей, кроме a.* □

Теперь мы можем вывести обещанный на прошлой лекции «усиленный принцип аналитического продолжения»:

Предложение 3.4. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое подмножество и $f, g \colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфные функции. Если f и g совпадают на множестве, имеющем предельную точку в U, то $f(z) = g(z)$ для всех $z \in U$.*

Доказательство. Голоморфная функция $h = f - g$ имеет, очевидно, неизолированный нуль в U. Чтобы доказать, что h есть тождественный нуль, нам достаточно, ввиду связности U, убедиться в том, что множество неизолированных нулей функции h открыто и замкнуто в U. Замкнутость этого множества очевидна (множество предельных точек *любого* подмножества метрического пространства будет замкнуто), а открытость вытекает из предложения 3.3: если a — неизолированный нуль функции h, то эта функция есть тождественный нуль на некоторой окрестности точки a, и любая точка этой окрестности также будет неизолированным нулем. □

Для функций более чем одного переменного это предложение неверно, как показывают очевидные примеры.

Теперь изучим следующую ситуацию. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $a \in U$ и f — функция, голоморфная на множестве $U \setminus \{a\}$. Спрашивается, как ведет себя $f(z)$ при $z \to a$? (Традиционное название для этого вопроса — «исследование изолированных особенностей голоморфных функций».) Поскольку вопрос локален, можно считать, что U — открытый диск, а точка a — его центр. Нам опять помогут степеннные ряды, но на сей раз они будут включать и отрицательные степени.

Предложение 3.5. *Пусть $r < R$ — неотрицательные числа (мы не исключаем случаев $r = 0$ или $R = +\infty$); положим $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$. Если $f \colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, то всюду на U имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3.1}$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компактном множестве $K \subset U$, а его коэффициенты вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-a)^{-n-1}\,dz, \tag{3.2}$$

где γ — любая положительно (то есть против часовой стрелки) ориентированная окружность с центром в a, лежащая в U.

Доказательство. Выберем числа r' и R' таким образом, чтобы $r < r' < R' < R$, и обозначим через γ и Γ окружности с центрами в a радиусов r' и R' соответственно (положительно ориентированнные), и пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : r' \leqslant |z| \leqslant R'\} \subset U$. Для всякого $z \in \operatorname{int} D$ имеем, ввиду формулы Коши,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z - \zeta}}_{I_2} \tag{3.3}$$

(мы сменили знак во втором интеграле, так как индуцированные ориентации внешней и внутренней окружностей противоположны). Первый из двух интегралов в (3.3) мы преобразуем точно так же, как в доказательстве теоремы 2.10, когда мы разлагали функцию, голоморфную в диске, в ряд Тейлора; не повторяя этих выкладок, запишем ответ:

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где значения коэффициентов c_n задаются формулой (3.2) (ввиду теоремы Коши интегралы по Γ и γ совпадают!) и ряд абсолютно и равномерно сходится на любом компакте, содержащемся в открытом диске с центром a и радиусом R. Преобразования, необходимые для разложения в ряд слагаемого I_2, аналогичны:

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z-a}} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (z-a)^n (\zeta - a)^{-n-1},$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, содержащемся в дополнении к замкнутому диску с центром a и радиусом r'. Умножая на $f(\zeta)\, d\zeta$ (что не нарушит равномерности) и почленно интегрируя по γ, получаем, что

$$I_2 = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n,$$

где сходимость абсолютна и равномерна на указанных выше множествах и коэффициенты c_n задаются формулой (3.2). Складывая I_1 и I_2, получаем все, что нужно (равномерная сходимость на компактах в U следует из произвольности выбора r' и R' и независимости интегралов по γ от радиуса окружности γ). $\square$

Определение 3.6. Ряд (3.1) называется *рядом Лорана* функции f; совокупность членов ряда Лорана с отрицательными степенями $z-a$ называется его *главной частью* (а совокупность всех остальных членов называется *правильной частью* ряда Лорана).

Подобно ряду Тейлора, ряд Лорана однозначно определяется по функции:

Предложение 3.7. *Если в условиях предложения* 3.5 *имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3.4}$$

где ряд равномерно сходится на компактах в U, то коэффициенты c_n вычисляются по формулам (3.2).

Доказательство. Легко видеть, что $\int_\gamma (z-a)^n\,dz$ равен $2\pi i$ при $n=-1$ и нулю при $n\neq -1$. Умножая разложение (3.4) на $(z-a)^{-n-1}$ и почленно интегрируя по γ (что возможно ввиду равномерной сходимости), получаем, в силу предыдущего замечания, что $2\pi i c_n = \int_\gamma f(z)(z-a)^{-n-1}\,dz$, что и требовалось. $\square$

Теперь, вооружившись рядами Лорана, мы можем исследовать поведение голоморфной функции в окрестности изолированной особой точки; оказывается, что оно далеко не произвольно:

Теорема 3.8. *Пусть $a\in\mathbb{C}$, $r>0$ и $\Delta=\{z\in\mathbb{C}: |z-a|<r\}$, и пусть f — функция, голоморфная в $\Delta^*=\Delta\setminus\{a\}$. Тогда имеет место одна и только одна из следующих возможностей:*

(1) *Функция f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a; в этом случае f продолжается до функции, голоморфной во всем Δ, и ее ряд Лорана не содержит членов с $z-a$ в отрицательных степенях.*

(2) *Функция f не является ограниченной ни в какой проколотой окрестности точки a, но при этом для некоторого $N>0$ выполнено соотношение $|f(z)|=O(|z-a|^{-N})$ при $z\to a$; в этом случае существуют такие целое число $k>0$ и голоморфная во всем Δ функция g, что $f(z)=g(z)/(z-a)^k$ всюду на Δ^* и $g(a)\neq 0$; при этом $\lim_{z\to a}|f(z)|=+\infty$, а ряд Лорана функции f имеет вид $\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^n$, и $c_{-k}\neq 0$.*

(3) *$\lim_{z\to a}|f(z)|$ не существует (в том числе не равен $+\infty$); в этом случае для всякого $b\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ существует такая последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$, что $\lim_{n\to\infty} z_n=a$ и $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=b$ (если $b=\infty$, то имеется в виду, что $\lim_{n\to\infty}|f(z_n)|=+\infty$); при этом ряд Лорана функции f содержит ненулевые члены с $(z-a)^{-n}$ для сколь угодно больших $n\in\mathbb{N}$.*

Определение 3.9. Если в условиях теоремы 3.8 имеет место случай (1), говорят, что функция f имеет в точке *a устранимую особенность*; если имеет место случай (2), говорят, что f имеет в точке *a полюс порядка k* (или *кратности k*); если имеет место случай (3), говорят, что f имеет в точке *a существенную особенность.*

Доказательство теоремы 3.8. Пусть f ограничена в проколотой окрестности точки a; уменьшив, если нужно, радиус диска Δ, можно считать, что существует такое число $M > 0$, что $|f(z)| \leqslant M$ на всем Δ^*. Пусть n — целое положительное число; вычислим коэффициент c_{-n} ряда Лорана функции f по формуле (3.2), беря в качестве γ окружность с центром a и радиусом $\varepsilon > 0$, и оценим этот коэффициент с помощью предложения 1.5:

$$|c_{-n}| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z)^{n-1}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{M\varepsilon^{n-1}}{2\pi}\cdot 2\pi\varepsilon = M\varepsilon^n.$$

Устремляя ε к нулю, получаем, что $c_{-n} = 0$; значит, ряд Лорана для функции f имеет вид $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ и тем самым определяет функцию, голоморфную во всем Δ, являющуюся искомым продолжением функции f. Итак, мы доказали, что из ограниченности f в проколотой окрестности точки a вытекает, что выполнена альтернатива (1).

Предположим теперь, что $|f(z)| = O(|z-a|^{-N})$ при $z \to a$, и при этом f не является ограниченной ни в какой проколотой окрестности точки a; покажем, что в этом случае выполнена альтернатива (2). Не ограничивая общности, можно считать, что $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим теперь функцию $\tilde{g}(z) = (z-a)^N f(z)$; по условию она ограничена в проколотой окрестности точки a и, следовательно, в силу того, что мы уже доказали, продолжается до голоморфной функции на всем Δ (мы будем по-прежнему обозначать эту функцию через $\tilde{g}$). Если обозначить через m порядок нуля функции $\tilde{g}$ в точке a и положить $g(z) = \tilde{g}(z)/(z-a)^m$, то функция g голоморфна во всем Δ и $g(a) \neq 0$ (см. предложение 3.2), и очевидно, что $N > m$ (в противном случае функция $f(z) = g(z)/(z-a)^{N-m}$ будет ограничена в окрестности a). Полагая $k = N - m$, получаем, что $f(z) = g(z)/(z-a)^k$; поскольку $g(a) \neq 0$, отсюда следует, что $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$; утверждение про ряд Лорана функции f следует из того, что он получается из разложения функции g делением на $(z-a)^k$.

Пусть, наконец, ни (1), ни (2) не имеет места; тогда ряд Лорана содержит бесконечно много ненулевых членов с отрицательными степенями (иначе выполнялось бы равенство $f(z) = g(z)/(z-a)^k$, где g голоморфна в Δ и $g(a) \neq 0$, и выполнялось бы соотношение $|f(z)| = O(|z-a|^{-N})$), так что для завершения доказательства теоремы остается только установить, что всякое $b \in \mathbb{C}$ можно представить в виде $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$, где $z_n \to a$ (что делать в случае $b = \infty$, продумайте самостоятельно). Рассуждая от противного, предположим, что для некоторого $b \in \mathbb{C}$ это не так; тогда функция $h(z) = 1/(f(z) - b)$ голоморфна и ограничена в некотором проколотом диске Δ'^* меньшего радиуса и, стало быть, продолжается до функции, голоморфной на всем Δ'. Поскольку на Δ'^* имеем $f(z) = b + (1/h(z))$, получаем, что либо f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a (если $h(a) \neq 0$), либо $|f(z)| = O(|z-a|^{-N})$ (если $h(a) = 0$); в любом случае получается противоречие. $\square$

Отдельные утверждения теоремы 3.8 имеют свои имена. Так, утверждение о том, что голоморфная функция, ограниченная в проколотой окрестности точки, голоморфно продолжается в эту точку, называется теоремой Римана о продолжении (или об устранимой особенности); утверждение о предельных точках значений функции в окрестности существенной особенности называется в различных текстах теоремой Вейерштрасса, теоремой Казорати или теоремой Сохоцкого. Теорему В.–К.–С. можно значительно усилить: оказывается, что в любой проколотой окрестности существенной особенности голоморфная функция бесконечное число раз принимает все значения, кроме, быть может, одного («большая теорема Пикара»); мы докажем эту теорему позже, когда в нашем распоряжении будет необходимая техника.

Приложение: случай функций нескольких переменных

В этом приложении мы скажем несколько слов о том, в какой мере (и в какой форме) основные результаты лекции распространяются на случай функций нескольких переменных. Основные результаты будут скорее негативного свойства: мы объясним, почему наивная аналогия со случаем одной переменной не проходит и чего в случае многих переменных *не бывает*, но о том, каково же на самом деле локальное строение голоморфных функций нескольких переменных, мы скажем только вкратце и без доказательств.

Основную роль у нас будет играть следующее неожиданное на первый взгляд утверждение о продолжении голоморфных функций, не имеющее аналогов в одномерном случае:

Предложение 3.10 (теорема Хартогса). *Рассмотрим замкнутый полидиск $\overline{\Delta}(a;r)\subset\mathbb{C}^n$, где $n>1$, и пусть $0<r'_j<r_j$ для всех j. Тогда всякая функция, голоморфная в $\Delta(a;r)\setminus\overline{\Delta}(a;r')$, продолжается до функции, голоморфной в $\Delta(a;r)$.*

Доказательство. Уменьшив немного числа r_i, можно считать, что f голоморфна в окрестности замкнутого полидиска $\overline{\Delta}(a;r)$, что мы и будем далее предполагать.

Чтобы продолжить функцию f на весь полидиск $\Delta(a;r)$, воспользуемся следующим примитивным приемом: положим, руководствуясь многомерной формулой Коши (2.13),

$$g(z_1,\ldots,z_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T(a;r)}\frac{f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdot\ldots\cdot(\zeta_n-z_n)}. \qquad (3.5)$$

Из предложения 2.20 следует, что функция g голоморфна в $\Delta(a;r)$ (это, собственно говоря, верно и при $n=1$); покажем, что в условиях предложения (т. е. при $n>1$) функция g действительно является продолжением функции f, т. е. что $g(z)=f(z)$, если $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\Delta(a;r)\setminus\overline{\Delta}(a;r')$.

Чтобы в этом убедиться, выберем такой набор положительных чисел $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_n)$, что $\overline{\Delta}(z;\rho)\subset\Delta(a;r)\setminus\overline{\Delta}(a;r')$, и покажем, что

$$\int_{T(a;r)} \frac{f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdot\ldots\cdot(\zeta_n-z_n)} = \\ = \int_{T(z;\rho)} \frac{f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdot\ldots\cdot(\zeta_n-z_n)}; \quad (3.6)$$

поскольку в силу многомерной формулы Коши правая часть (3.6) равна $(2\pi i)^n f(z)$, а левая часть (3.6) равна $(2\pi i)^n g(z)$ по определению, отсюда все будет следовать.

Для доказательства же равенства (3.6) заметим, что выражение под интегралом имеет вид $\varphi(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$, где φ — голоморфная функция от $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$; следовательно, это замкнутая форма (см. замечание 1.9). Теперь наше равенство будет следовать из теоремы Стокса, как только мы покажем, что циклы, по которым мы интегрируем эту форму в левой и правой частях (3.6), гомологичны в множестве

$$V=\Delta(a;r)\setminus(\Delta(a;r')\cup\{(\zeta_1,\ldots,\zeta_n):\zeta_j\ne z_j \text{ для всех } j\}).$$

Для этого, в свою очередь, нам достаточно показать, что $T(a;r)$ можно продеформировать в $T(z;\rho)$ внутри V. Это делается следующим образом.

Для каждого целого $j\in[1;n]$ обозначим через Δ_j замкнутый диск в $\mathbb{C}$ с центром a_j и радиусом r_j; по условию, $z_j\in\Delta_j$. Теперь для каждого j рассмотрим в диске Δ_j семейство простых замкнутых кривых γ_t^j $(t\in[0;1])$, в котором γ_0^j — граница диска Δ_j, а γ_1^j — окружность с центром z_j и радиусом ρ_j. Очевидно, эти деформации можно провести таким образом, чтобы ни одна из кривых γ_t^j не проходила через z_j.

Теперь проведем деформацию $T(a;r)$ в $T(z;\rho)$ в два этапа.

Сначала продеформируем $T(a;r)$ в

$$T(a_1,\ldots,a_{n-1},z_n;r_1,\ldots,r_{n-1},\rho_n);$$

для этого рассмотрим семейство подмногообразий $T_t\subset\mathbb{C}^n$, где $t\in[0;1]$, определенных следующим образом:

$$T_t=\{(w_1,\ldots,w_{n-1},w_n):|w_j-a_j|=r_j \text{ при } 1\leqslant j\leqslant n,\ w_n\in\gamma_t^n\}.$$

Ясно, что все T_t лежат в V ($T_t \cap \overline{\Delta}(a, r') = \varnothing$ для любого t, поскольку $|w_1 - a_1| = r_1 > r'_1$, если $(w_1, \ldots, w_n) \in T_t$), $T_0 = T(a; r)$, $T_1 = T(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n; r_1, \ldots, r_{n-1}, \rho_n)$.

А теперь продеформируем $T(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n; r_1, \ldots, r_{n-1}, \rho_n)$ в $T(z; \rho)$; эта деформация реализуется таким семейством $\{T'_t\}$ ($t \in [0; 1]$):

$$T'_t = \{(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n) : w_j \in \gamma_t^j \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant n,\ |w_n - z_n| = \rho_n\}.$$

Поскольку $T'_0 = T(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n; r_1, \ldots, r_{n-1}, \rho_n)$ и $T'_1 = T(z; \rho)$, искомая деформация построена. $\square$

Из приведенного доказательства видно, почему предложение 3.10 верно только при $n > 1$: множество, по которому мы интегрируем (остов полидиска) имеет в $\mathbb{C}^n$ вещественную коразмерность n, и при $n = 1$, когда эта коразмерность равна всего лишь единице, его нельзя нужным нам образом продеформировать, не задев «концентрического» полидиска $\overline{\Delta}(a; r')$.

Из предложения 3.10 немедленно вытекает отсутствие изолированных особенностей у голоморфных функций более чем одной переменной:

Следствие 3.11. *Если $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество, $a \in U$ и f — функция, голоморфная на множестве $U \setminus \{a\}$, то при $n > 1$ эта функция продолжается до функции, голоморфной на всем U.* $\square$

Более того, в многомерном случае не бывает не только изолированных особенностей, но и изолированных нулей:

Следствие 3.12. *Голоморфная функция более чем одного переменного не может иметь изолированных нулей.*

Доказательство. Если точка a — изолированный нуль функции f, то функция $1/f$ голоморфна в проколотой окрестности точки a; ввиду следствия 3.12 заключаем, что она голоморфно (и тем самым непрерывно) продолжается в точку a — противоречие. $\square$

Аналогичными рассуждениями можно доказать и такое

Предложение 3.13. *Пусть f — не являющаяся тождественным нулем голоморфная функция в полидиске $\Delta \subset \mathbb{C}^n$, где $n > 1$, и $V(f) = \{z \in \Delta : f(z) = 0\}$. Тогда замыкание множества $V(f)$ имеет непустое пересечение с границей полидиска Δ.* □

В заключение скажем (без доказательств) несколько слов о локальном строении множества нулей голоморфной функции нескольких переменных. Итак, пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, не являющаяся тождественным нулем, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — связное открытое множество; положим $V(f) = \{z \in U : f(z) = 0\}$, и пусть $a \in V(f)$. Тогда можно показать, что существуют комплексная гиперплоскость $H \subset \mathbb{C}^n$, содержащая a, и линейная проекция $p\colon \mathbb{C}^n \to H$ (т. е. отображение вида $p\colon z \mapsto Az + b$, где A — $n \times n$-матрица с комплексными коэффициентами, $b \in \mathbb{C}^n$, обладающее тем свойством, что $p(\mathbb{C}^n) = H$ и $p(z) = z$ для всех $z \in H$), обладающие следующим свойством:

Для некоторого открытого подмножества $W \subset H$, $W \ni a$ отображение $p^{-1}(W) \cap V(f) \to W$, индуцированное проекцией, является сюръективным и имеет конечные слои (*и, более того, является «собственным»*: *прообраз всякого компакта в W при этом отображении является компактом*)[1].

Неформально говоря, множество нулей голоморфной функции локально представляется в виде разветвленного накрытия (комплексной) гиперплоскости (и имеет тем самым вещественную размерность $2n - 2$).

Читатель, знакомый с элементарной алгебраической геометрией, заметит, что сформулированное выше утверждение аналогично так называемой лемме Нётер о нормализации; на самом деле эта аналогия идет и дальше: локальные свойства множеств нулей голоморфных функций очень похожи на свойства аффинных алгебраических многообразий.

---

[1]Это утверждение является одним из вариантов так называемой «подготовительной теоремы Вейерштрасса».