Предложение 4.17. *Группа автоморфизмов комплексной плоскости $\mathbb{C}$ состоит из преобразований вида*

$$z \mapsto az + b, \tag{4.3}$$

где $a, b \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$.

Доказательство. Пусть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — автоморфизм; тогда f — целая функция. Покажем, что функция $g(z) = f(1/z)$ не может иметь в нуле существенную особенность. В самом деле, пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant 1\}$; так как f — автоморфизм и тем самым гомеоморфизм, множество $f(D) \subset \mathbb{C}$ замкнуто и отлично от всего $\mathbb{C}$. Заметим теперь, что предельные точки последовательностей $\{g(z_n)\}$, где $z_n \to 0$, принадлежат множеству $f(D)$; стало быть, не всякое комплексное число может быть такой предельной точкой, и наше утверждение следует из пункта (3) теоремы 3.8.

Теперь следствие 4.4 показывает, что f — многочлен; поскольку f — изоморфизм, его производная не обращается в нуль. Так как производная многочлена — многочлен и так как всякий многочлен, не имеющий в $\mathbb{C}$ корней, обязан быть константой, получаем, что f' — константа, так что f имеет вид (4.3). $\square$

Лекция 5. Римановы поверхности

Важную роль в действительном анализе играет понятие гладкого многообразия; занимаясь комплексным анализом, естественно рассматривать комплексные многообразия, определение которых получается из определения гладких многообразий, если заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$ и гладкие отображения на голоморфные. В этом курсе мы будем заниматься только *одномерными* комплексными многообразиями (синоним: римановы поверхности).

Определение 5.1. *Римановой поверхностью* называется хаусдорфово топологическое пространство X со счетной базой, наделенное следующей дополнительной структурой.

(1) X представлено в виде объединения открытых подмножеств U_α, называемых *координатными окрестностями.*

(2) Для каждой координатной окрестности U_α задан гомеоморфизм $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$, где $V_\alpha \subset \mathbb{C}$ открытое подмножество (эти гомеоморфизмы называются *локальными картами*).

(3) Пусть U_α и U_β — две координатные окрестности с непустым пересечением. Тогда отображение

$$\varphi_{\alpha\beta}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

заданное формулой $x \mapsto \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x))$, является конформным изоморфизмом открытых подмножеств в $\mathbb{C}$.

Голоморфные отображения римановых поверхностей определяются совершенно так же, как гладкие отображения гладких многообразий; читателям предлагается самостоятельно расписать в деталях следующее определение.

Определение 5.2. Пусть X и Y — римановы поверхности; отображение $f\colon X \to Y$ называется *голоморфным*, если его запись в любых локальных координатах голоморфна. Римановы поверхности X и Y называются *изоморфными*, если между ними существуют взаимно обратные голоморфные отображения.

Всякую риманову поверхность можно рассматривать как гладкое двумерное многообразие (говорят еще «вещественно двумерное», чтобы было ясно, какая размерность имеется в виду); поскольку якобиан голоморфной функции f одного переменного в точке z равен, как легко проверить, $|f'(z)|^2$, при таком отождествлении получится, что якобианы замен координат положительны, так что всякая риманова поверхность, рассматриваемая как двумерное гладкое многообразие, является ориентированной. В частности, всякая *компактная* риманова поверхность диффеоморфна (как гладкое многообразие) сфере с ручками. Число ручек называется *родом* компактной римановой поверхности.

Разумеется, всякое открытое подмножество в $\mathbb{C}$ является римановой поверхностью. Приведем менее тривиальные примеры.

Пример 5.3 (сфера Римана). *Сферой Римана* (ср. с. 122) называется множество $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое следующим образом снабжено структурой римановой поверхности. Представим $\overline{\mathbb{C}}$ в виде объединения двух следующих подмножеств: $U_0 = \mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $U_1 = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$. Зададим локальные карты $\varphi_0\colon U_0 \to \mathbb{C}$ и $\varphi_1\colon U_1 \to \mathbb{C}$ так:

$$\varphi_0(z) = z; \qquad \varphi_1(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{если } z \neq \infty; \\ 0, & \text{если } z = \infty. \end{cases}$$

Наконец, введем на $\overline{\mathbb{C}}$ топологию, объявив подмножество $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ открытым, если открыты в $\mathbb{C}$ образы $\varphi_0(V \cap U_0)$ и $\varphi_1(V \cap U_1)$. Легко видеть, что в этой топологии $\overline{\mathbb{C}}$ гомеорморфно сфере; поскольку отображение замены координат φ_{01} имеет вид $z \mapsto 1/z$, выполнены все условия определения 5.1, и $\overline{\mathbb{C}}$ является римановой поверхностью; она называется *сферой Римана*.

Сфера Римана — компактная риманова поверхность рода нуль; обратно, всякая компактная риманова поверхность рода нуль изоморфна сфере Римана, но доказать это не так просто.

Чтобы освоиться со сферой Римана, дадим одно важное определение и докажем два простых предложения.

Определение 5.4. Пусть X — риманова поверхность (открытое подмножество в $\mathbb{C}$ — тоже риманова поверхность!). *Мероморфной функцией* на X называется голоморфная функция на $X \setminus S$, где $S \subset X$ — некоторое подмножество без предельных точек (случай пустого S не исключается), имеющая полюс во всякой точке $x \in S$.

Очевидно, что отношение двух голоморфных функций является мероморфной функцией; всякая голоморфная функция мероморфна (в этом случае $S=\varnothing$); сумма, произведение и частное двух мероморфных функций также мероморфны, так что мероморфные функции на данной римановой поверхности образуют поле.

Предложение 5.5. *Имеется естественное взаимно однозначное соответствие между множеством мероморфных функций на римановой поверхности X и множеством голоморфных отображений из X в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доказательство. Пусть f — мероморфная функция на X и S — множество ее полюсов. Доопределим f на всем X, положив

$f(x) = \infty$ при $x \in S$; получится отображение $\overline{f} \colon X \to \overline{\mathbb{C}}$. Чтобы проверить, что оно голоморфно, достаточно рассмотреть только точки из S (образы остальных точек попадают в координатное подмножество $U_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, так что с ними вопросов не возникает). Если, однако, $x \in S$, то композиция $\overline{f}$ с локальной картой $\varphi_1 \colon U_1 \to \mathbb{C}$ имеет вид $z \mapsto 1/f(z)$, и ясно, что если функция f имеет полюс, то функция $1/f$ продолжается до голоморфной функции в окрестности полюса, так что $\overline{f}$ голоморфна и в точках из S. Построение мероморфной функции по отображению из X в $\overline{\mathbb{C}}$ проведите самостоятельно. □

Замечание 5.6. Отношение двух голоморфных функций *нескольких* переменных продолжаться до голоморфного отображения в $\overline{\mathbb{C}}$ не обязано: контрпример дается уже функцией $f(z, w) = z/w$ на $\mathbb{C}^2$.

Предложение 5.7. *Мероморфные функции на сфере Римана суть не что иное, как рациональные функции от z (мы подразумеваем, что $\mathbb{C}$ стандартным образом вложено в $\overline{\mathbb{C}}$).*

Доказательство. Проверьте самостоятельно, что всякая рациональная функция имеет в бесконечности особенность не хуже полюса и тем самым мероморфна на $\overline{\mathbb{C}}$. Обратно, пусть f — мероморфная функция на $\overline{\mathbb{C}}$. Так как сфера компактна, количество полюсов этой функции конечно. Ограничим функцию f на $\mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$; получится мероморфная функция с конечным числом полюсов. Так как ее особенность в бесконечности не хуже полюса, имеем $|f(1/z)| = O(1/|z|^N)$ при $z \to 0$, то есть $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \to \infty$. Вычтем из f сумму ее главных частей во всех полюсах, лежащих в $\mathbb{C}$ то, что останется, будет целой функцией с полиномиальным ростом на бесконечности, то есть многочленом (см. предложение 4.2); стало быть, f — рациональная функция. □

Кстати, изучать голоморфные функции на компактных римановых поверхностях бессмысленно:

Предложение 5.8. *Всякая голоморфная функция на компактной связной римановой поверхности является константой.*

Доказательство. Пусть функция f голоморфна на компактной римановой поверхности X, и пусть в точке $x \in X$ функция $x \mapsto |f(x)|$ достигает наибольшего значения. Тогда по принципу максимума модуля (предложение 4.13) f является константой в окрестности точки x, а следовательно, по принципу аналитического продолжения (который, как легко видеть, верен для произвольных римановых поверхностей), и на всей X. □

Пример 5.9 (эллиптические кривые). Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — решетка (аддитивная подгруппа, порожденная двумя линейно независимыми над $\mathbb{R}$ комплексными числами). Положим $X = \mathbb{C}/L$ и введем на X фактортопологию. Естественное отображение $p\colon \mathbb{C} \to X$ является накрытием; в качестве координатных окрестностей возьмем столь малые открытые подмножества $U_\alpha \subset X$, что накрытие распадается над ними в прямое произведение, а в качестве локальной карты на U_α возьмем какое-нибудь сечение накрытия над U_α. Отображения замены координат будут просто сдвигами на элементы L, так что они, конечно, голоморфны; стало быть, X является римановой поверхностью (гомеоморфной двумерному тору). Такие римановы поверхности называются *эллиптическими кривыми* (различным решеткам, вообще говоря, соответствуют неизоморфные римановы поверхности!).

Эллиптические кривые имеют род один. Можно показать, что и обратно, всякая риманова поверхность рода 1 изоморфна некоторой эллиптической кривой.

Пример 5.10 (аналитическое продолжение). *Ростком голоморфной функции в точке* $a \in \mathbb{C}$ будем называть класс эквивалентности пар (U, f), где $U \ni a$ — окрестность и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, относительно следующего отношения эквивалентности: $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$, если существует такая окрестность $V \ni a$, что $V \subset U_1 \cap U_2$ и ограничения функций f_1 и f_2 на V совпадают; множество всех ростков голоморфных функций в точке a обозначается $\mathcal{O}_a$. (Легко видеть, что $\mathcal{O}_a$ находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством степенных рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, имеющих положительный радиус сходимости.) Если f — функция, голоморфная на открытом множестве $U \ni a$, то элемент в $\mathcal{O}_a$, являющийся классом эквивалентности пары (U, f), называется *ростком функции f в точке a* и обозначается f_a. Обозначим через $\mathcal{O}$ множество всевозможных пар (a, ξ), где $a \in \mathbb{C}$ и $\xi \in \mathcal{O}_a$ ($\mathcal{O}$ — «множество всех ростков во всех точках») и введем на $\mathcal{O}$ топологию следующим образом. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и f — голоморфная функция на U. Обозначим через $W(U, f)$ подмножество в $\mathcal{O}$, состояшее из пар (a, f_a) для всех $a \in U$; семейство подмножеств $W(U, f) \subset \mathcal{O}$ для всевозможных пар (U, f), где U открыто в $\mathbb{C}$, а f голоморфна в U, объявим базой открытых множеств на $\mathcal{O}$. Определим также отображение $\pi\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}$, ставящее в соответствие паре $(a, \xi) \in \mathcal{O}$ точку $a \in \mathbb{C}$. Тогда легко проверяются следующие свойства:

1) *Отображение π является локальным гомеоморфизмом*: для всякой точки $\xi \in \mathcal{O}$ существует такая окрестность $W \ni \xi$, что ограничение π на W является гомеоморфизмом W на его образ в $\mathbb{C}$.

2) *Пространство $\mathcal{O}$ хаусдорфово.* (Отделимость двух элементов (a_1, ξ_1) и (a_2, ξ_2), для которых $a_1 \neq a_2$, очевидна, отделимость двух разных ростков в одной и той же точке a следует из того, что две голоморфные функции на связном открытом множестве, совпадающие на непустом открытом подмножестве, обязаны совпадать всюду; если бы мы провели аналогичную конструкцию с гладкими или непрерывными функциями вместо голоморфных, отделимости бы уже не было.)

Объявим теперь множества $W(U, f)$ координатными окрестностями, а ограничения отображения π на эти множества — локальными картами; тогда отображения замены координат будут голоморфны (они будут просто тождественными отображениями), так что $\mathcal{O}$ удовлетворяет всем аксиомам римановой поверхности, за тем исключением, что это топологическое пространство не имеет счетной базы (ростки в нуле функций $f(z) = \lambda z$ при разных λ лежат в разных компонентах связности пространства $\mathcal{O}$); тем не менее нетрудно показать (мы этого делать не будем), что каждая компонента связности пространства $\mathcal{O}$ счетной базой уже обладает и тем самым является самой настоящей римановой поверхностью.

Отображение π, будучи локальным гомеоморфизмом, обладает свойствами, близкими к свойствам накрытий. Приведем два примера.

Пусть $p\colon [0;1] \to \mathbb{C}$ — непрерывная кривая, и пусть существует ее «подъем в $\mathcal{O}$» (т. е. такое непрерывное отображение $\tilde{p}\colon [0;1] \to \mathcal{O}$, что $\pi \circ \tilde{p} = p$). В этом случае говорят, что росток $\tilde{p}(1) \in \mathcal{O}_{p(1)}$ получен из ростка $\tilde{p}(0) \in \mathcal{O}_{p(0)}$ «аналитическим продолжением вдоль пути p». Если такой подъем существует, то при заданном $\tilde{p}(0)$ он единствен (и, в частности, росток $\tilde{p}(1)$ однозначно определен ростком $\tilde{p}(0)$ и путем p).

Другой пример в том же духе. Пусть $\{p_u\}_{u\in[0;1]}$ — непрерывное семейство путей, соединяющих точки a и b в комплексной плоскости, и пусть $\xi \in \mathcal{O}_a$. Если росток ξ допускает аналитическое продолжение вдоль каждого из путей p_u, то его продолжения в точку b (т.е. ростки $\tilde{p}_u(1) \in \mathcal{O}_b$) будут одинаковы для всех u.

Эти утверждения легко доказать, имитируя доказательства теорем о накрывающих путях и о накрывающей гомотопии для накрытий (прямо сослаться на эти теоремы все же нельзя: не только отображение $\pi\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ не является накрытием, но и его ограничение на связную компоненту пространства $\mathcal{O}$ не обязано являться накрытием на свой образ).

По-ученому пространство $\mathcal{O}$ называется «пучок ростков голоморфных функций на $\mathbb{C}$».

Накрытия римановых поверхностей

Предложение 5.11. *Пусть X — риманова поверхность, Y — топологическое пространство (хаусдорфово и со счетной базой) и $p\colon Y \to X$ — накрытие. Тогда на Y имеется, и притом единственная, структура римановой поверхности, относительно которой отображение p голоморфно.*

Доказательство. Покроем X столь мелкими координатными окрестностями U_α, что накрытие p распадается над каждой из U_α в прямое произведение; объявим координатными окрестностями на Y связные компоненты прообразов всевозможных U_α; если $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{C}$ — локальная карта на $U_\alpha \subset X$, то локальной картой на любой связной компоненте $p^{-1}(U_\alpha)$ объявим композицию $\varphi_\alpha \circ p$. Ясно, что отображения замены координат при этом будут в точности теми же, как у локальных карт на X, то есть голоморфными, так что Y становится римановой поверхностью, а отображение p — голоморфным. Поскольку произвола в нашем выборе по существу не было (для любой структуры римановой поверхности на Y, относительно которой отображение p голоморфно, отображения $\varphi_\alpha \circ p$ обязаны быть голоморфными), структура римановой поверхности на Y нашими данными определяется единственным образом. $\square$

Оказывается, что при отображениях накрытий римановых поверхностей всякое непрерывное отображение автоматически является голоморфным. Точнее говоря, имеет место следующее

Предложение 5.12. *Пусть X — риманова поверхность, и пусть $p_1\colon Y_1 \to X$, $p_2\colon Y_2 \to X$ — голоморфные отображения римановых поверхностей, являющиеся накрытиями. Если $f\colon Y_1 \to Y_2$ — такое непрерывное отображение, что $p_2 \circ f = p_1$, то отображение f голоморфно.*

Доказательство. Пусть $y_1 \in Y_1$ — произвольная точка; покажем, что отображение f голоморфно в окрестности y_1. Положим $y_2 = f(y_1)$ и $x = p_1(y_1) = p_2(y_2)$. Пусть U — содержащее точку x открытое подмножество в X, над которым оба накрытия p_1 и p_2 распадаются, и обозначим через U_i' $(i = 1, 2)$ ту связную компоненту $p_1^{-1}(U)$, которая содержит точку y_i. Имеем $f(U_1') = U_2'$, и надо доказать, что ограничение f на U_1' голоморфно; однако же это ограничение совпадает с композицией $s \circ p_1$, где $s\colon U \to Y_2$ — сечение накрытия p_2 над U, образ которого совпадает с U_2'. Поскольку p_1 и s голоморфны, их композиция тоже голоморфна. $\square$

Следствие 5.13. *Если два накрытия над римановой поверхностью изоморфны в топологическом смысле, то они изоморфны и как римановы поверхности.* $\square$

Мы применим это следствие к доказательству уж совсем конкретного результата.

Предложение 5.14. *Пусть* $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ *— проколотый диск и* k *— целое положительное число. Тогда всякая (связная) риманова поверхность, являющаяся накрытием степени* k *над* Δ^**, изоморфна* Δ^**, и при этом изоморфизме накрытие переходит в отображение* $p\colon \Delta^* \to \Delta^*$*, задающееся формулой* $z \mapsto z^k$.

Доказательство. Поскольку фундаментальная группа Δ^* равна $\mathbb{Z}$, она имеет ровно одну подгруппу индекса k, так что все накрытия степени k над Δ^* топологически изоморфны; ввиду следствия 5.13 они изоморфны и аналитически, так что все они изоморфны накрытию, задаваемому функцией p из условия. $\square$

Лекция 6. Риманова поверхность алгебраической функции

Эта лекция будет посвящена разбору одного-единственного, но очень важного, примера: конструкции «римановой поверхности алгебраической функции».

Пусть $F(z, w)$ — неприводимый многочлен от двух переменных с комплексными коэффициентами. В старину говорили, что уравнение $F(z, w) = 0$ задает w как многозначную алгебраическую функцию от z; в наши дни рассматривают множество $C = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : F(z, w) = 0\}$ и называют его «плоской аффинной алгебраической кривой». Так или иначе, с уравнением $F(z, w) = 0$ можно связать компактную риманову поверхность; расскажем, как это делается.

Представим многочлен F в виде

$$F(z, w) = P_n(z)w^n + P_{n-1}(z)w^{n-1} + \ldots + P_0(z), \qquad (6.1)$$

где P_j — многочлены от z. Обозначим через $p\colon (z, w) \to z$ и $q\colon (z, w) \to w$ проекции кривой C на оси координат. Для «общей» точки $z \in \mathbb{C}$ множество $p^{-1}(z)$ содержит n элементов, так как F является многочленом от w степени n. Выясним, у каких z прообразов меньше, чем n (больше, чем n, их быть не может: так как степень многочлена F по w равна n, это означало бы, что в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ все многочлены P_i обращаются в