# Лекция 7. Разветвленные накрытия

В связи с конструкцией римановой поверхности алгебраической функции уместно описать топологическое строение произвольного голоморфного отображения компактных римановых поверхностей.

**Предложение 7.1.** *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— непостоянное голоморфное отображение компактных связных римановых поверхностей. Тогда:*

(1) $f(X) = Y$.

(2) *Слои отображения* $f$ *конечны.*

(3) *Число точек ветвления* $f$ *на* $X$ *конечно; если* $S \subset Y$ *— множество, состоящее из образов всех точек ветвления на* $X$*, то индуцированное отображение* $X \setminus f^{-1}(S) \to Y \setminus S$ *является накрытием.*

(4) *Пусть* $n$ *— степень накрытия, о котором шла речь в предыдущем пункте, и пусть* $y \in Y$ *и* $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. *Если обозначить индекс ветвления* $f$ *в точке* $x_j$ *через* $e_j$*, то имеем* $\sum_{j=1}^{k} e_j = n$.

*Доказательство.* (1) $f(X)$ замкнуто в $Y$, так как $X$ компактно, и открыто в $Y$ по принципу сохранения области. Так как $Y$ связно, $f(X) = Y$.

(2) Если множество $f^{-1}(y)$, где $y \in Y$, имеет предельную точку $x_0$, то по принципу аналитического продолжения $f$ является константой в окрестности точки $x_0$, а значит, и всюду — противоречие. Стало быть, множество $f^{-1}(y)$ дискретно в $X$, а значит и конечно ввиду компактности $X$.

(3) В локальных координатах точка ветвления — это нуль производной. По принципу аналитического продолжения множество нулей производной может иметь предельную точку только в том случае, если производная на непустом открытом подмножестве равна нулю, т. е. отображение $f$ на открытом подмножестве (а значит, и всюду на $X$) является константой, что противоречит

условию. Значит, множество точек ветвления дискретно в $X$; так как $X$ компактно, это множество конечно.

Теперь воспользуемся следующим общетопологическим фактом, доказательство которого откладывается до конца лекции:

**Предложение 7.2.** *Пусть $f\colon M \to N$ — сюръективное непрерывное отображение многообразий*[2]*, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) *для всякой точки $x \in M$ существует такая окрестность $U \ni x$, что ограничение $f$ на $U$ гомеоморфно отображает $U$ на $f(U)$ (иными словами, $f$ является локальным гомеоморфизмом);*

(ii) *Для всякого компактного подмножества $K \subset N$ множество $f^{-1}(K) \subset M$ также компактно (иными словами, отображение $f$ является собственным).*

*Тогда $f$ является накрытием с конечными слоями.*

Если положить в этом предложении $M = X \setminus f^{-1}(S)$ и $N = Y \setminus S$, то условие (i) будет выполняться ввиду теоремы о неявной функции и того обстоятельства, что $X \setminus f^{-1}(S)$ по построению не содержит точек ветвления отображения $f$, а условие (ii) немедленно следует из компактности $X$ и $Y$, так что утверждение (3) доказано.

(4) Ясно, что точки $x_j$ можно окружить непересекающимися окрестностями $U_j \ni x_j$, обладающими тем свойством, что ограничение $f$ на $U_j$ записывается в подходящих локальных координатах как возведение в степень $e_j$ и ограничение $f$ на $U_j \setminus \{x_j\}$ является $e_j$-листным накрытием на свой образ. Так как для всех $y'$, достаточно близких к $y$, имеем $f^{-1}(y') \subset \bigcup_j U_j$, равенство $\sum e_j = n$ следует из того, что точки $y'$, достаточно близкие к $y$ и отличные от нее, имеют $n$ прообразов. $\square$

**Определение 7.3.** Число $n$, введенное в пункте (3) выше (число прообразов общей точки), называется *степенью* отображения $f$ и обозначается $\deg f$. (Более того, это число и является степенью отображения $f$ в топологическом смысле.)

[2] Или, если угодно, хаусдорфовых локально линейно связных пространств.

**Замечание 7.4.** Образы в $Y$ точек ветвления отображения $f$ часто также называют точками ветвления; если точка $y \in Y$ является точкой ветвления отображения $f\colon X \to Y$, то говорят еще, что отображение $f$ *разветвлено над* $y$ (особенно принято такое словоупотребление в алгебраической геометрии). В другой терминологии эти образы называются критическими значениями отображения $f$ (а точки ветвления тогда называют критическими точками).

Отображения, структура которых описана в предложении 7.1, часто называют «разветвленными накрытиями»; их не надо путать с «настоящими» накрытиями в топологическом смысле.

Из доказанного нами предложения легко выводится следующий важный результат:

**Предложение 7.5 (формула Римана–Гурвица).** *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— непостоянное голоморфное отображение компактных римановых поверхностей. Предположим, что* $\deg f = n$, *род поверхностей* $X$ *и* $Y$ *равен* $g(X)$ *и* $g(Y)$ *соответственно, и что* $f$ *разветвлено в* $m$ *точках (на* $X$*) и имеет в них индексы ветвления* $e_1, \ldots, e_m$. *Тогда*

$$2g(X) - 2 = n(2g(Y) - 2) + \sum_{j=1}^{m}(e_j - 1).$$

*Доказательство.* Триангулируем поверхность $Y$ таким образом, чтобы образы всех точек ветвления были среди вершин. Обозначим число вершин, ребер и граней этой триангуляции через $V$, $E$ и $F$ соответственно; тогда эйлерова характеристика поверхности $Y$ будет равна $V - E + F = 2 - 2g(Y)$. Беря прообразы симплексов на $X$, мы получим триангуляцию поверхности $X$, в которой число ребер будет равно $E' = nE$, число граней будет равно $F' = nF$ (ввиду нашего выбора триангуляции, отображение $f$ будет накрытием над каждым открытым симплексом положительной размерности, а эти симплексы односвязны). С другой стороны, число вершин будет равно $nV - \sum_{j=1}^{m}(e_j - 1)$: если в прообразе какой-то вершины содержатся точки ветвления с индексами $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$, то число прообразов у этой вершины будет на $(e_{i_1}-1)+\ldots+(e_{i_r}-1)$ меньше, чем $n$ (формально ввиду предложения 7.1 (4), неформально потому, что в точке ветвления индекса $e$ «сходится $e$ листов»), а при нашем выборе триангуляции каждая точка ветвления содержится в прообразе какой-нибудь вершины.

Теперь подсчитаем эйлерову характеристику поверхности $X$: она равна

$$2-2g(X)=V'-E'+F'=nV-nE+nF-\sum_{j=1}^{m}(e_j-1)=$$
$$=n(2-2g(Y))-\sum_{j=1}^{m}(e_j-1);$$

остается умножить это равенство на $(-1)$. $\square$

**Следствие 7.6.** *Если $f\colon X\to Y$ — непостоянное голоморфное отображение компактных римановых поверхностей, то род $X$ больше или равен роду $Y$.* $\square$

### Приложение: доказательство предложения 7.2

Можно опустить это доказательство при первом чтении; в любом случае рекомендуется понять, почему в предложении 7.2 условие (ii) нельзя заменить на условие «все слои отображения $f$ конечны».

Пусть $y\in N$; ввиду условия (i) множество $f^{-1}(y)\subset Y$ дискретно в $Y$, а ввиду условия (ii) это множество компактно. Следовательно, оно конечно; положим $f^{-1}(y)=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Ввиду условия (i), у каждой из точек $x_j$ существует окрестность $U_j$, которую $f$ гомеоморфно отображает на $f(U_j)$; уменьшая при необходимости окрестности $U_j$, можно добиться того, что они будут связными и попарно непересекающимися. Положим теперь $U=\bigcap_j f(U_j)\ni y$ и уменьшим при необходимости множество $U$, заменив его на (линейно) связную окрестность точки $y$ (это уменьшенное множество будет по-прежнему обозначаться через $U$). Положим $V_j=U_j\cap f^{-1}(U)$; ясно, что каждое из открытых множеств $V_j$ отображается с помощью $f$ гомеоморфно на $U$.

Если мы теперь покажем, что

$$f^{-1}(U) \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_j, \tag{7.1}$$

то предложение будет доказано.

Чтобы установить это включение, начнем с того, что покажем, что в нашей ситуации верна «лемма о накрывающих путях»:

**Лемма 7.7.** *Пусть $p \in M$ и $I\colon [0;1] \to N$ — такое непрерывное отображение, что $I(0) = f(p)$. Тогда существует и единственно такое непрерывное отображение $\widetilde{I}\colon [0;1] \to M$, что $\widetilde{I}(0) = p$ и $f \circ \widetilde{I} = I$.*

*Доказательство леммы.* Обозначим через $A \subset [0;1]$ множество точек $a \in [0;1]$, для которых существует и единственно такое непрерывное отображение $\widetilde{I}\colon [0;a] \to M$, что $\widetilde{I}(0) = z$ и $f(\widetilde{I}(t)) = I(t)$ для всех $t \in [0;a]$. Нам достаточно убедиться, что $A = [0;1]$.

Из самого́ определения ясно, что множество $A \subset [0;1]$ является интервалом вида $[0;c)$ или $[0;c]$. Мы покажем, во-первых, что $A$ замкнуто, и во-вторых, что $c = 1$.

Для доказательства замкнутости $A$ предположим, рассуждая от противного, что $A = [0;c)$ для некоторого $c \leqslant 1$. Тогда существует и единственно непрерывное отображение $\widetilde{I}\colon [0;c) \to M$, для которого $\widetilde{I}(0) = p$ и $f(\widetilde{I}(t)) = I(t)$ для всех $t \in [0;c)$. Положим

$$\widetilde{\Gamma} = \{(t,z) \in [0;1] \times M : \widetilde{I}(t) = z,\ 0 \leqslant t < c\}$$

(график отображения $\widetilde{I}$). Из условия (ii) немедленно следует, что множество

$$L = \{(t,z) \in [0;c] \times M : I(t) = f(z)\}$$

является компактным; с другой стороны, множество $\widetilde{\Gamma}$ содержится в $L$ и компактным не является (так как оно гомеоморфно интервалу $[0;c)$). Значит, в $L$ существуют точки, принадлежащие замыканию множества $\widetilde{\Gamma}$, но не самому́ $\widetilde{\Gamma}$. Легко видеть, что всякая такая точка обязана иметь вид $(c,z)$, причем, поскольку $f(z) = I(c)$ и прообраз точки $I(c)$ при отображении $f$ дискретен, легко проверить, что разность между замыканием $\widetilde{\Gamma}$ и самим $\widetilde{\Gamma}$ может содержать не более одной точки такого вида (а тем самым — ровно одну). Если эта единственная точка имеет вид $(c, z)$, то, очевидно, можно продолжить отображение $\widetilde{I}$ на замкнутый интервал $[0; c]$, положив $\widetilde{I}(c) = z$, причем из предыдущего обсуждения явствует, что это продолжение единственно. Мы привели к противоречию предположение о том, что правая граница интервала $A$ ему не принадлежит. Стало быть, этот интервал замкнут.

Теперь покажем, что $c = 1$. Предположим (рассуждая, опять-таки, от противного), что $c < 1$. Если $a \in A$ и отображение $\widetilde{I}\colon [0; c] \to M$ — такое же, как выше, то рассмотрим окрестность $W \ni \widetilde{I}(c)$, которую отображение $f$ гомеоморфно отображает на $f(W)$ (условие (i)); если $\varepsilon > 0$ столь мало, что $I([c; c+\varepsilon]) \subset f(W)$, то, очевидно, отображение $\widetilde{I}$ можно продолжить на $[0; c+\varepsilon]$, положив $\widetilde{I}(t) = f^{-1}(I(t))$ при $t \in [c; c+\varepsilon]$, где $f^{-1}\colon f(W) \to W$ — обратное к ограничению $f$ на $W$. Значит, неравенство $c < 1$ невозможно и лемма доказана. $\square$

Для доказательства включения (7.1) рассмотрим теперь произвольную точку $z \in f^{-1}(U)$ и положим $z_1 = f(z) \in U$. Соединим точку $z_1$ с точкой $y$ с помощью непрерывной кривой $I\colon [0; 1] \to U$, для которой $I(0) = z_1$, $I(1) = y$; ввиду только что доказанной леммы существует такое непрерывное отображение $\widetilde{I}\colon [0; 1] \to M$, что $\widetilde{I}(0) = z$ и $f \circ \widetilde{I} = I$. Так как $f(\widetilde{I}(1)) = y$, имеем $\widetilde{I}(1) = x_j$ для некоторого $j$. Обозначим через $\varphi\colon U \to V_j$ гомеоморфизм, обратный к ограничению отображения $f$ на $V_j$. Теперь рассмотрим отображения $J\colon [0; 1] \to N$ и $\widetilde{J}\colon [0; 1] \to M$, действующие по правилам $J(t) = I(1-t)$ и $\widetilde{J}(t) = \widetilde{I}(1-t)$ (попросту говоря, это пути $I$ и $\widetilde{I}$, проходимые в обратном направлении); рассмотрим также отображение $J' = \varphi \circ J$. Полагая в лемме 7.7 $I = J$ и $p = x_j$, получаем (из единственности, которая гарантируется этой леммой), что $\widetilde{J} = J'$ и, в частности,

$$z = \widetilde{J}(1) = J'(1) = \varphi(J(1)) = \varphi(z_1) \in V_j.$$

Поскольку точка $z \in f^{-1}(U)$ выбиралась произвольно, включение (7.1) доказано, а с ним и предложение 7.2.