скольку K_2 компактно, мы можем (выбрав подходящую подпоследовательность) считать, что $\lim z_n = z \in K_2$. Теперь заметим, что

$$\lim |g_{\theta_n,a_n}(z_n)| = \lim \left|\frac{z_n - a_n}{1 - \overline{a_n} z}\right| = \left|\frac{z - a}{1 - \overline{a} z}\right| = \left|\frac{z - a}{1 - z/a}\right| = |-a| = 1$$

(так как $|a| = 1$, имеем $\overline{a} = 1/a$). Однако же $g_{\theta_n,a_n}(z_n) \in K_1$ и тем самым числа $|g_{\theta_n,a_n}(z_n)|$ отграничены от единицы — противоречие. $\square$

Теперь мы можем наконец завершить доказательство предложения 9.16. Из того, что $\Gamma(2)/\{\pm I\}$ разрывно и свободно действует на H, с помощью стандартных и хорошо известных рассуждений выводится, что естественное отображение $H \to H/(\Gamma(2)/\{\pm I\})$ является накрытием, а также что на $H/(\Gamma(2)/\{\pm I\})$ (или, что то же самое, $H/\Gamma(2)$) можно ввести структуру римановой поверхности, относительно которой это отображение будет голоморфно (подобно тому, как мы в лекции 5 ввели структуру римановой поверхности на эллиптической кривой). При этом отображение k^2 индуцирует, ввиду следствия 9.15, голоморфное и взаимно однозначное отображение $\widetilde{k^2}\colon H/\Gamma(2) \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$; значит, это отображение неразветвлено и тем самым является изоморфизмом, что и утверждалось.

Лекция 10. Теорема Римана об отображении

Вся эта лекция будет посвящена доказательству следующей теоремы, называемой теоремой Римана об отображении:

Теорема 10.1. *Всякое односвязное открытое множество $U \subset \mathbb{C}$, отличное от самого $\mathbb{C}$, изоморфно диску $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Для удобства введем следующее классическое

Определение 10.2. Голоморфная функция $f\colon W \to \mathbb{C}$ на открытом множестве $W \subset \mathbb{C}$ называется *однолистной*, если отображение f взаимно однозначно.

Ясно, что однолистное отображение неразветвлено и, следовательно, является изоморфизмом на свой образ.

Начнем со следующей редукции.

Лемма 10.3. *В условиях теоремы U изоморфно открытому подмножеству в Δ.*

Первое доказательство. Из того, что $U \neq \mathbb{C}$ и U односвязно, следует, что разность $\mathbb{C} \setminus U$ содержит не менее двух точек, т. е. $U \subset \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, где $a \neq b$. Ввиду следствия 9.17 универсальное накрытие над $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ изоморфно Δ. Если $\pi\colon \Delta \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ — универсальное накрытие, то ввиду односвязности U любая из компонент множества $\pi^{-1}(U) \subset \Delta$ изоморфна U. $\square$

Второе доказательство. Так как $U \neq \mathbb{C}$, можно, не ограничивая общности, считать, что $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Отображение $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, заданное формулой $z \mapsto z^2$, является двулистным накрытием; так как $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ односвязно, множество $f^{-1}(U)$ состоит из двух (непересекающихся) компонент U_1 и U_2, изоморфных U. Пусть $c \in U_2$; тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ диск с радиусом ε и центром c содержится в U_2 и, следовательно, не пересекается с U_1. Следовательно, функция $g(w) = \varepsilon/(w - c)$ задает изоморфизм U_1 на открытое подмножество в Δ (так как $|g(w)| < 1$ для всех $w \in U_1$), и это подмножество изоморфно U. $\square$

Ввиду доказанной леммы можно считать, что $U \subset \Delta$, что мы и будем далее предполагать. Зафиксируем до конца доказательства некоторую точку $a \in U$.

Сделаем следующее

Допущение. *Во множестве голоморфных однолистных отображений из U в Δ существует отображение f, для которого число $|f'(a)|$ наибольшее.*

Покажем, что отображение $f\colon U \to \Delta$, в существование которого мы поверили, является искомым изоморфизмом.

Предложение 10.4. *Пусть $\varphi\colon \Delta \to \Delta$ — автоморфизм, переводящий $b \in \Delta$ в 0. Тогда $|\varphi'(b)| = 1/(1 - |b|^2)$.*

Доказательство. Ввиду предложения 4.15 имеем

$$\varphi(z)=e^{i\theta}\frac{z-b}{1-\bar{b}z},$$

где $\theta\in\mathbb{R}$. Теперь запишем:

$$\varphi'(z)=e^{i\theta}\frac{1-\bar{b}z+\bar{b}(z-b)}{(1-\bar{b}z)^2}=e^{i\theta}\frac{1-|b|^2}{(1-\bar{b}z)^2}.$$

Остается подставить $z=b$ и взять модуль. □

Лемма 10.5. *Если $f\colon U\to\Delta$ — однолистное отображение, для которого число $|f'(a)|$ наибольшее, то $f(a)=0$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, пусть $f(a)=b\neq\neq 0$. Если $\varphi\colon\Delta\to\Delta$ — автоморфизм, переводящий b в 0, то для отображения $g=\varphi\circ f$ имеем, ввиду предложения 10.4,

$$|g'(a)|=|f'(a)|/(1-|b|^2)>|f'(a)|,$$

и получаем противоречие. □

Лемма 10.6. *В прежних обозначениях отображение f является изоморфизмом U на Δ.*

Доказательство. Так как f однолистно, нам надо только доказать, что $f(U)=\Delta$. Рассуждая от противного, предположим, что $b\in\Delta\setminus f(U)$. Пусть автоморфизм $\varphi\colon\Delta\to\Delta$ задан формулой $z\mapsto(z-b)/(1-\bar{b}z)$; тогда $\varphi(b)=0=\varphi^{-1}(-b)$. Положим $f_1==\varphi\circ f$; так как ввиду леммы 10.5 имеем $f(a)=0$, то $f_1(a)=-b$, а поскольку $b\notin f(U)$, то $0\notin f_1(U)$. Так как U односвязно, таково же и изоморфное ему множество $f_1(U)$; поскольку это множество к тому же, как мы только что убедились, не содержит нуля, на нем определена однозначная (и, разумеется, однолистная!) ветвь квадратного корня $g\colon f_1(U)\to\mathbb{C}$; очевидно, $g(f_1(U))\subset\Delta$. Положим $f_2=g\circ f_1$. Наконец, сделаем так, чтобы a снова переходило в нуль; для этого положим $f_3=\varphi^{-1}\circ f_2=\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi\circ f$. Функция $f_3\colon U\to\Delta$ однолистна; подсчитаем $|f_3'(a)|$:

$$\begin{aligned}|f_3'(a)|&=|f'(a)|\cdot|\varphi'(0)|\cdot|g'(-b)|\cdot|\varphi'(g(b))|^{-1}=\\&=|f'(a)|\frac{1-|b|^2}{2\sqrt{|b|}(1-(\sqrt{|b|})^2)}=|f'(a)|\frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}}\end{aligned}$$

(при подсчете $|\varphi'(0)|$ мы воспользовались предложением 10.4, а при подсчете $|g'(-b)|$ — тем, что $(\sqrt{z})' = \pm 1/2\sqrt{z}$). Поскольку $(1+|b|)/2\sqrt{|b|} > 1$, получаем, что $|f_3'(a)| > |f'(a)|$ — противоречие. $\square$

Итак, нам осталось обосновать допущение. Нам понадобится важный факт, называемый принципом аргумента.

Предложение 10.7. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — связная область с (кусочно)-гладкой границей и f — непостоянная функция, голоморфная в окрестности D и не имеющая нулей на ∂D. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \sum_{z\in \operatorname{int} D}\operatorname{ord}_z(f), \tag{10.1}$$

где через $\operatorname{ord}_z(f)$ обозначается кратность f в точке z (кратность нуля, если $f(z)=0$, и нуль, если $f(z)\neq 0$).

Доказательство. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — нули функции f в $\operatorname{int} D$. Поместим каждый z_i в замкнутый диск D_i, содержащийся в $\operatorname{int} D$ и не пересекающийся с остальными D_j. Из теоремы Коши следует, что левая часть (10.1) равна $(1/2\pi i)\sum_{j=1}^n \int_{\partial D_j} df/f$. В окрестности z_j функция f записывается в виде $f(z) = (z-a_j)^{m_j} g(z)$, где g голоморфна, $g(a_j)\neq 0$ и $m_j = \operatorname{ord}_{a_j}(f)$. Имеем, очевидно,

$$\frac{df}{f} = \frac{m_j\,dz}{z-a_j} + \frac{g'(z)\,dz}{g(z)}.$$

Интеграл от первого слагаемого по ∂D_j равен, очевидно, $2\pi i m_j$ (см. доказательство предложения 3.7), а от второго — нулю по теореме Коши (так как функция g'/g голоморфна в окрестности D_j). Все доказано. $\square$

Замечание 10.8. Утверждение предложения 10.7 можно различными способами усиливать. Можно, например, предполагать, что f не голоморфна, а всего лишь мероморфна в окрестности D, не имеет на ∂D ни нулей, ни полюсов, и считать, что $\operatorname{ord}_z(f) = -m$, если f имеет в точке z полюс порядка m: формула (10.1) останется верной. Далее, если h — другая функция, голоморфная в окрестности D, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} h(z)\cdot\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}=\sum_{z\in\operatorname{int}D}\operatorname{ord}_z(f)\cdot h(z).$$

Доказываются эти обобщения так же, как предложение 10.7.

Для доказательства теоремы Римана нам будет нужен принцип аргумента именно в таком виде, как мы его сформулировали в предложении 10.7, но было бы нехорошо умолчать о его геометрическом смысле. Поэтому, немного отвлекаясь от основной линии изложения, докажем следующее

Предложение 10.9. *Пусть D и f — такие же, как в предложении 10.7, и пусть $S^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ — единичная окружность. Определим отображение $\tilde f\colon\partial D\to S^1$ по формуле $\tilde f(z)=f(z)/|f(z)|$. Тогда левая часть* (10.1) *равна* $\deg\tilde f$ *(точнее говоря, сумме степеней ограничений $\tilde f$ на компоненты ∂D). Подразумевается, что каждая компонента ∂D снабжена индуцированной ориентацией как граница естественно ориентированной области D и что S^1 ориентирована как граница единичного круга.*

(Выражаясь менее формально, левая часть (10.1) — это число оборотов, которое кривая $f(\partial D)$ делает вокруг нуля.)

Доказательство. Заметим, что

$$f'(z)\,dz/f(z)=df/f=d(\ln|f|)+i\tilde f^*(d\varphi),$$

где $d\varphi$ — 1-форма на окружности «дифференциал от угла». Интеграл по ∂D от второго слагаемого равен, очевидно $2\pi i\times$ $\times$ (число оборотов); осталось показать, что интеграл от первого слагаемого равен нулю. Хочется сказать, что он равен нулю по теореме Стокса, так как форма $d(\ln|f|)$ замкнута (и даже точна), но буквально теорему Стокса применить все же нельзя, так как функция $z\mapsto\ln|f(z)|$ не является даже непрерывной в $\operatorname{int}D$. Мы обойдем эту трудность следующим образом. Пусть $a_1,\dots,a_n$ — нули функции f в D. Как и в доказательстве предложения 10.7, окружим нули z_j функции f непересекающимися кружками D_j; на $D \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ форма $d \ln |f|$ уже является самой настоящей точной формой, так что по теореме Стокса имеем

$$\int_{\partial D} d \ln |f| = \sum_j \int_{\partial D_j} d \ln |f|,$$

причем слагаемые в правой части не зависят от радиусов кругов D_j. Покажем, что каждое из этих слагаемых равно нулю. В самом деле, коль скоро $f(z_j)=0$, имеем $|\ln f(z)|=O(|\ln|z-z_j||)$ при $z \to z_j$; следовательно, если обозначить через ε_j радиус круга D_j, то получим (см. предложение 1.5), что

$$\left| \int_{\partial D_j} d \ln |f| \right| = O(|\varepsilon_j \ln \varepsilon_j|) \quad \text{при } \varepsilon_j \to 0.$$

Поскольку $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$, все доказано. $\square$

Вернемся к прерванному доказательству теоремы Римана. Мы применим принцип аргумента следующим образом.

Предложение 10.10. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, голоморфных на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, сходящаяся равномерно на компактах в U к непостоянной функции $f\colon U \to \mathbb{C}$. Тогда если все функции f_n однолистны, то и f однолистна.*

Доказательство. Предположим противное: $f(z_1) = f(z_2) = a$. Тогда легко видеть, что существует такая область с кусочно-гладкой границей $D \subset U$, что $z_1, z_2 \in \operatorname{int} D$ и функция f не принимает значения a на ∂D (легко построить такую D, граница которой является ломаной, а при желании можно эту границу и сгладить). Положим $g_i(z) = f_i(z) - a$, $g(z) = f(z) - a$. Из условия и предложения 2.8 ясно, что последовательность g_n'/g_n сходится к g'/g равномерно на ∂D; следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{g_n'(z)\,dz}{g_n(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{g'(z)\,dz}{g(z)}.$$

Так как $g(z_1) = g(z_2) = 0$, предложение 10.7 показывает, что правая часть этого равенства не меньше двух; так как все f_j однолистны, то же предложение показывает, что в левой части все члены последовательности не превосходят единицы — противоречие! □

Теперь все готово для того, чтобы обосновать существование максимума $|f'(a)|$. Введем следующие определения.

Определение 10.11. Обозначим через $H(U)$ множество голоморфных функций на U. Подмножество $F \subset H(U)$ будем называть *замкнутым*, если для всякой последовательности функций $f_n \in F$, равномерно сходящейся на компактах в U к функции $f \in H(U)$, имеем $f \in F$.

Подмножество $C \subset H(U)$ называется *компактным*, если у всякой последовательности функций $f_n \in C$ существует подпоследовательность, равномерно сходящаяся на компактах в U к функции $f \in C$.

Отображение $\Phi\colon C \to \mathbb{C}$, где $C \subset H(U)$, называется *непрерывным*, если для всякой последовательности функций $f_n \in C$, равномерно сходящейся на компактах в U к функции $f \in C$, имеем $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = \Phi(f)$.

Замечание 10.12. Использование топологической терминологии в определении 10.11 — не произвол: на $H(U)$ действительно можно ввести метризуемую топологию (она называется «топологией компактной сходимости» или «компактно-открытой топологией»), относительно которой последовательность функций f_n сходится тогда и только тогда, когда она равномерно сходится на компактах в U. Эту топологию можно определить, например, как наименее тонкую топологию, в которой открыты все множества вида $\mathcal{F}(K, V)$, где $K \subset U$ — произвольное компактное подмножество, $V \subset \mathbb{C}$ — произвольное открытое подмножество, и $\mathcal{F}(K, V)$ — множество таких функций $f \in H(U)$, что $f(K) \subset V$. В нашем курсе мы не будем углубляться в эту конструкцию, но проведем все необходимые рассуждения ad hoc.

Доказательства следующих двух предложений стандартны.

Предложение 10.13. *Замкнутое подмножество в компактном множестве является компактным.* □

Предложение 10.14. *Пусть $C \subset H(U)$ — компактное подмножество и $\Phi\colon C \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение. Тогда отображение Φ достигает наибольшего значения для некоторой функции $f \in C$.* $\square$

Пусть теперь $U \subset \Delta$ — открытое множество, $a \in U$ и $C \subset H(U)$ — множество таких однолистных голоморфных отображений из U в Δ, что $|f'(a)| \geqslant 1$. Так как $U \subset \Delta$, это множество непусто, а из предложения 10.10 следует, что $C \subset H(U)$ замкнуто; из предложения 2.8 следует, что отображение $\Phi\colon C \to \mathbb{R}$, заданное формулой $\Phi(f) = |f'(a)|$, непрерывно. Стало быть, ввиду предложения 10.14, для того, чтобы обосновать наше допущение, достаточно показать, что множество $C \subset H(U)$ компактно. Ввиду предложения 10.13 это вытекает из следующей теоремы:

Теорема 10.15 (теорема Монтеля). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $M > 0$. Тогда множество*

$$\{f \in H(U) : \sup_{z \in U} |f(z)| \leqslant M\}$$

компактно в $H(U)$.

Доказательство. Мы воспользуемся следующим результатом из оснований анализа.

Предложение 10.16 (теорема Арцела́). *Пусть X — компактное метрическое пространство с метрикой ρ, а $C(X)$ — пространство непрерывных функций на X с* sup*-нормой. Для того чтобы замкнутое подмножество $C \subset C(X)$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(1) *Существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $f \in C$ и $x \in X$ («равномерная ограниченность»).*

(2) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho(x, x') < \delta$, где $x, x' \in X$, следует неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ для всех $f \in C$ («равностепенная непрерывность»).* $\square$

Доказательство этой теоремы мы опускаем; его можно найти в любом достаточно подробном курсе анализа (из книг, вышедших недавно, можно, например, указать «Математический анализ» В. А. Зорича, том II, гл. XVI, § 4).

Теперь перейдем к доказательству теоремы Монтеля. Легко видеть, что можно выбрать последовательность компактных подмножеств $K_i \subset U$, обладающую тем свойством, что $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ для всех i и $\bigcup_i K_i = U$. Пусть $C_i \subset C(K_i)$ — множество ограничений функций из C на K_i. Покажем, что всякое C_i компактно в $C(K_i)$. Ввиду условия и теоремы Арцела достаточно проверить равностепенную непрерывность. Далее, поскольку K_i можно покрыть конечным числом замкнутых дисков произвольно малого радиуса, содержащихся в U, достаточно установить равностепенную непрерывность на каждом таком диске $D \subset U$. Пусть γ — окружность, концентрическая с D, имеющая бо́льший радиус и содержащаяся в U. Тогда для $z \in D$ имеем, по теореме Коши,

$$\left|f'(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}\right| \leqslant \frac{MR}{(R-r)^2},$$

где r и R — радиусы D и γ соответственно. Значит, модули производных функций из C равномерно ограничены в D некоторой константой M_1. Если теперь $z_1, z_2 \in D$ и $f \in C$, то $|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant M_1|z_1 - z_2|$, откуда равностепенная непрерывность очевидна.

Пусть теперь $\{f_n\}$ — последовательность функций из C. Ввиду доказанного из нее можно выбрать равномерно сходящуюся на K_1 подпоследовательность $f_{11}, f_{12}, \ldots$; из этой последовательности можно выбрать равномерно сходящуюся на K_2 подпоследовательность $f_{21}, f_{22}, \ldots$ и т. д.: каждая последовательность $\{f_{m+1,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится на K_{m+1} и является подпоследовательностью в $\{f_{mj}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Тогда диагональная последовательность $f_{11}, f_{22}, \ldots$ равномерно сходится на каждом K_m (поскольку начиная с f_{mm} она является подпоследовательностью в $\{f_{mj}\}_{j\in\mathbb{N}}$), а значит и на любом компакте в U. Это завершает доказательство теоремы Монтеля, а с ней — и теоремы Римана. □