Доказательство. Если целая функция f является многочленом, это немедленно следует из «основной теоремы алгебры» (см. с. 38); в противном случае функция $z \mapsto f(1/z)$ имеет существенную особенность в нуле, и получаем противоречие с теоремой 11.9. $\square$

На самом деле при доказательстве этого следствия можно обойтись и без большой теоремы Пикара: оно немедленно вытекает из теоремы Лиувилля и следствия 9.17.

Лекция 12. Задача Миттаг-Леффлера

В каждом разделе математики существуют ключевые задачи, решение, исследование и обобщение которых приводит к вскрытию важных закономерностей и открывает новые перспективы. Если говорить об одномерном комплексном анализе, то к числу ключевых, бесспорно, относятся «задача Миттаг-Леффлера» и «задача Вейерштрасса», которым посвящена заключительная часть курса.

Определение 12.1. Пусть $a \in \mathbb{C}$. *Главной частью в точке a* называется любое выражение вида $\sum_{j=1}^{n} c_j/(z-a)^j$ (именно так выглядит главная часть ряда Лорана мероморфной функции, имеющей полюс в точке a).

Задачей Миттаг-Леффлера называется следующий вопрос:

Дано открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ и подмножество $S \subset U$, не имеющее в U предельных точек, а в каждой точке $a \in S$ задана главная часть f_a. Найти такую мероморфную в U функцию, что множество ее полюсов содержится в S и при этом в каждой точке $a \in S$ ее главная часть есть f_a.

Ответ на этот вопрос таков:

Теорема 12.2 (Миттаг-Леффлер). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Тогда любая задача Миттаг-Леффлера в U имеет решение.*

Доказательство. Хочется взять в качестве искомой функцию $f = \sum_{a\in S} f_a$, но, разумеется, ниоткуда не следует, что ряд будет сходиться.

Чтобы спасти эту наивную идею, попробуем заменить каждую функцию f_a на $f_a - \varphi_a$, где функции φ_a голоморфны в U; при этом главные части остаются прежними, но появляется надежда, что при удачном выборе φ_a ряд $\sum(f_a - \varphi_a)$ сходиться уже будет.

Конкретно это делается следующим образом. Зафиксируем до конца доказательства какой-нибудь сходящийся ряд с положительными членами $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j$.

Лемма 12.3. *Существует последовательность компактных подмножеств $K_j \subset U$ и голоморфных в U функций φ_j (j пробегает целые положительные числа) со следующими свойствами:*

(i) $K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1}$ *для всех j, и при этом* $\bigcup_j K_j = U$;

(ii) *если положить* $f_j = \sum_{a\in S\cap(K_{j+1}\setminus K_j)} f_a$ *при* $j > 1$, *то* $\sup_{z\in K_{j-1}} |f_j(z) - \varphi_j(z)| \leqslant \varepsilon_j$.

(*Формула для f_j имеет смысл, так как всякое множество вида $K_n \cap S$ конечно в силу того, что множество S не имеет предельных точек в U.*)

В предположении, что эта лемма доказана, положим

$$f = \sum_{a\in S\cap K_2} f_a + \sum_{j=2}^{\infty}(f_j - \varphi_j) \tag{12.1}$$

и покажем, что функция f — искомая. В самом деле, на всяком K_n ряд

$$\sum_{j=n}^{\infty}(f_j - \varphi_j)$$

состоит из функций, голоморфных в некоторой окрестности K_n, и при этом сходится на K_n абсолютно и равномерно ввиду условия (ii). Стало быть, на всяком K_n сумма (12.1) корректно определена и представляет собой функцию, мероморфную в некоторой окрестности K_n и имеющую на K_n полюсы только в точках множества $S \cap K_n$, причем в каждой точке $a \in S \cap K_n$ ее главная часть равна f_a. Поскольку ввиду условия (i) всякий компакт $K \subset U$ содержится в одном из K_j, формула (12.1) определяет искомую мероморфную функцию.

Остается доказать лемму 12.3. Для начала — еще одна лемма.

Лемма 12.4. *Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$; положим*

$$V_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} : |z - b| > |a - b|\}.$$

Пусть теперь $f(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j/(z-a)^j$; тогда для всякого компакта $K \subset V_{a,b}$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такая мероморфная на $\mathbb{C}$ функция ψ, не имеющая полюсов вне точки b, что $|f(z) - \psi(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in K$.

Доказательство леммы 12.4. Если $f(z) = 1/(z-a)$, то достаточно заметить, что геометрическая прогрессия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a-b)^{j-1}}{(z-b)^j}$$

сходится к $1/(z-a)$ равномерно на компактах в $V_{a,b}$, так что в качестве ψ можно взять подходящую частичную сумму этого ряда. Далее, любая функция вида $z \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_j/(z-a)^j$ может быть получена из функции $z \mapsto (z-a)^{-1}$ и констант с помощью операций сложения и умножения, и, с другой стороны, сумма и произведение мероморфных функций, не имеющих полюсов вне точки b, также является мероморфной функцией, не имеющей полюсов вне точки b. Поскольку предел суммы/произведения равномерно сходящихся последовательностей функций равен сумме/произведению пределов, отсюда и из доказанного нами частного случая все следует. $\square$

Теперь докажем и лемму 12.3. Положим

$$K_n = \left\{z \in U : \inf_{w \in \mathbb{C} \setminus U} |z - w| \geqslant \frac{1}{n} \text{ и } |z| \leqslant n\right\}.$$

Очевидно, что все K_n компактны и что выполнено условие (i). Теперь подберем функции φ_j. Пусть множество $S \cap (K_{j+1} \setminus K_j)$

состоит из m точек. Для всякой $a \in S \cap (K_{j+1} \setminus K_j)$ верно хотя бы одно из двух следующих утверждений: либо $\inf_{w \in \mathbb{C} \setminus U} |a - w| < 1/j$, либо $|a| > j$. В первом случае существует точка $b \in \mathbb{C} \setminus U$, для которой $|a - b| < 1/j$, и с другой стороны для всех $z \in K_{j-1}$ имеем $|z - b| \geqslant 1/(j-1) > 1/j$; применяя лемму 12.4 к функции f_a, точкам a и b и компакту K_{j-1}, найдем функцию ψ_a, голоморфную на $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ (и тем более в U), для которой $|f_a(z) - \psi_a(z)| \leqslant \varepsilon_j/m$ при всех $z \in K_{j-1}$. Во втором случае заметим, что функция f_a голоморфна в окрестности замкнутого диска с центром в нуле и радиусом j; разлагая ее в нуле в ряд Тейлора, получим, что существует многочлен ψ_a, для которого $|f_a(z) - \psi_a(z)| \leqslant \varepsilon_j/m$, как только $|z| \leqslant j$, и тем более при всех $z \in K_{j-1}$. Если теперь положить $\varphi_j = \sum_{a \in S \cap (K_{j+1} \setminus K_j)} \psi_a$, то получим, что φ_j голоморфна на U и $\sup_{z \in K_{j-1}} |f_j(z) - \varphi_j(z)| \leqslant \varepsilon_j$. Стало быть, лемма 12.3 доказана, а с ней и теорема 12.2. □

Итак, на открытых подмножествах комплексной плоскости всякая задача Миттаг-Леффлера разрешима. Следующий шаг — выяснить, как обстоит дело с этой задачей на произвольной римановой поверхности.

Во-первых, надо определить, что такое в этом контексте главная часть. Неформально выражаясь, главная часть в точке a римановой поверхности X — это нечто, записываемое в локальных координатах в окрестности точки a в виде $\sum_{j=1}^{n} c_j/(z-a)^j$; лучше, однако, дать аккуратное формальное определение:

Определение 12.5. Пусть X — риманова поверхность и $x \in X$. Обозначим через $\mathcal{O}_x$ множество ростков голоморфных функций в точке $x \in X$, а через $\mathcal{M}_x$ — множество ростков мероморфных функций в точке $x \in X$ (определения ростков — дословно те же, что на с. 45). Будем рассматривать $\mathcal{O}_x$ и $\mathcal{M}_x$ как векторные пространства над $\mathbb{C}$ (на самом деле $\mathcal{O}_x$ — кольцо, а $\mathcal{M}_x$ — даже поле, но нам ничего, кроме структуры векторного пространства, не понадобится). Тогда *главной частью* в точке x называется элемент факторпространства $\mathcal{M}_x/\mathcal{O}_x$. Если f — мероморфная функция на X, то ее *главной частью* в точке $x \in X$ называется класс ее ростка $f_x \in \mathcal{M}_x$ в факторпространстве $\mathcal{M}_x/\mathcal{O}_x$.

Задача Миттаг-Леффлера на римановой поверхности X формулируется точно так же, как на открытом подмножестве комплексной плоскости: дана риманова поверхность X, дискретное подмножество $S \subset X$, и для каждой точки $a \in S$ дана главная часть $f_a \in \mathcal{M}_a/\mathcal{O}_a$; спрашивается, существует ли на X мероморфная функция, имеющая в каждой точке $a \in S$ главную часть f_a и не имеющая полюсов вне S.

Ясно, что если риманова поверхность X несвязна, то задачу Миттаг-Леффлера можно решать отдельно на каждой компоненте, так что всюду в дальнейшем мы будем считать X связной. Оказывается, что вопрос о разрешимости задачи Миттаг-Леффлера решается очень по-разному в зависимости от того, компактна X или нет.

Если X компактной не является[4], то *любая* задача Миттаг-Леффлера на X имеет решение. По этому поводу мы скажем только, что эта теорема является непосредственным обобщением доказанной нами теоремы 12.2, но ее доказательство, для которого нужны принципиально новые идеи, далеко выходит за рамки нашего курса.

Если же X, напротив, компактна, то в задаче Миттаг-Леффлера возникают новые интересные эффекты: оказывается, что в этом случае она разрешима уже не всегда, причем можно указать необходимое и достаточное условие ее разрешимости. Оставшаяся часть этой лекции и вся следующая лекция будут посвящена именно задаче Миттаг-Леффлера на компактных римановых поверхностях.

Для начала заметим, что всякое дискретное подмножество в компактном пространстве конечно, так что в задаче Миттаг-Леффлера на компактной римановой поверхности X всегда задано *конечное* число точек с главными частями в них.

---

[4]Риманова поверхность, ни одна связная компонента которой не является компактной, называется *открытой*.

Начнем со случая сферы Римана (из сформулированной нами в лекции 11 теоремы Кёбе следует, что это — единственная компактная риманова поверхность рода 0). В этом случае ничего интересного еще не происходит:

Предложение 12.6. *Всякая задача Миттаг-Леффлера на* $\overline{\mathbb{C}}$ *имеет решение.*

Доказательство. Очевидно, что главная часть на $\overline{\mathbb{C}}$ в точке $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ — не что иное, как главная часть в смысле определения 12.1, то есть некоторая рациональная функция, а главная часть в бесконечности — многочлен от z; сложив все данные рациональные функции (плюс многочлен, если дана еще и главная часть в бесконечности), мы получим рациональную функцию, т. е. мероморфную функцию на $\overline{\mathbb{C}}$; очевидно, что она дает решение задачи Миттаг-Леффлера. □

Пусть теперь род X равен $g > 0$. То, что не любая задача Миттаг-Леффлера на X имеет решение, увидеть легко. Пусть, например, исходные данные этой задачи предписывают искомой мероморфной функции иметь ровно один полюс, притом кратности 1. Тогда ясно, что решения быть не может, поскольку такая мероморфная функция, рассматриваемая как голоморфное отображение из X в $\overline{\mathbb{C}}$, должна иметь в прообразе точки $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ ровно одну точку и при этом быть в этой точке неразветвленной, откуда ввиду предложения 7.1 (4) следует, что это отображение имеет степень 1 и тем самым является изоморфизмом — противоречие (ср. доказательство предложения 9.7). Для того, однако, чтобы получить точное условие разрешимости задачи Миттаг-Леффлера, нам придется ввести важное понятие «вычета мероморфной формы».

В свое время мы определили, что такое голоморфная форма на римановой поверхности (определение 8.7). Теперь нам предстоит встретиться и с мероморфными формами.

Определение 12.7. Пусть X — произвольная риманова поверхность. *Мероморфной формой* на X называется голоморфная 1-форма ω на $X \setminus S$, где $S \subset X$ — некоторое дискретное подмножество, удовлетворяющая следующему условию: у всякой точки $a \in S$ существует такая окрестность $U \ni a$, что ограничение ω на $U \setminus \{a\}$ можно записать в виде $f\omega'$, где f — мероморфная функция на U с полюсом в a и ω' — голоморфная форма на U.

Говоря неформально, мероморфная форма — это объект, который в локальных координатах записывается в виде $f(z)\,dz$, где функция f мероморфна. Ясно также, как определить понятие *полюса* мероморфной формы.

Предложение-определение 12.8. *Пусть ω — мероморфная форма на (произвольной) римановой поверхности X, и пусть $a \in X$. Рассмотрим замкнутый диск $D \subset X$, содержащий a и не содержащий полюсов формы ω, кроме, быть может, самой точки a. Тогда число*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\omega$$

(ориентация ∂D индуцирована естественной ориентацией D) не зависит от выбора D; оно называется вычетом *формы ω в точке a и обозначается* $\operatorname{Res}_a \omega$. *Если в каких-то локальных координатах форма ω записывается в виде $f(z)\,dz$, где $z(a) = 0$, то* $\operatorname{Res}_a \omega$ *совпадает с коэффициентом при z^{-1} в ряде Лорана мероморфной функции f.*

Доказательство. Вне своих полюсов форма ω голоморфна, так что независимость вычета от выбора D немедленно следует из теоремы Стокса и того обстоятельства, что все голоморфные формы на римановых поверхностях замкнуты. Совпадение вычета с коэффициентом при z^{-1} немедленно следует из формулы (3.2) для коэффициентов ряда Лорана. □

Ясно, что $\operatorname{Res}_a \omega = 0$, если точка a не является полюсом формы ω.

Замечание 12.9. В определении 12.8 не обязательно, конечно, требовать, чтобы форма ω была именно мероморфной: достаточно, чтобы точка a была ее изолированной особенностью.

В старых текстах часто говорят о вычете функции f (определенной на открытом подмножестве комплексной плоскости), подразумевая под ним коэффициент при минус первой степени в ряде Лорана; в современной терминологии такой вычет — не что иное, как вычет формы $f\,dz$.

Вот пример на вычисление вычетов:

Предложение 12.10. *Пусть f — мероморфная функция на римановой поверхности X. Тогда вычет мероморфной формы df/f в точке a равен k, если f имеет в этой точке нуль порядка k, и $-k$, если f имеет в этой точке полюс порядка k.*

Доказательство. Если, в локальных координатах, $f(z) = z^r g(z)$, где $g(0) \neq 0$, то $df/f = r\,dz/z + g'(z)\,dz/g(z)$; так как второе слагаемое является голоморфной формой в окрестности z, оно не влияет на главную часть ряда Лорана, и имеем $\operatorname{Res}_a(df/f) = r$. □

Основное свойство вычетов содержится в следующем предложении:

Предложение 12.11 (теорема о вычетах). *Пусть ω — мероморфная форма на компактной римановой поверхности X. Тогда сумма вычетов формы ω во всех ее полюсах равна нулю.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — полюсы формы ω. Окружим каждый a_j маленьким диском D_j, не содержащим других полюсов; очевидно, эти диски можно выбрать непересекающимися. На многообразии с краем $X' = X \setminus \bigcup \operatorname{int} D_j$ форма ω голоморфна и тем самым замкнута. Следовательно, по теореме Стокса имеем

$$\sum_j \int_{\partial D_j} \omega = \int_{\partial X'} \omega = \int_{X'} d\omega = 0,$$

что и требовалось. □

Следствие 12.12. *Если мероморфная форма на компактной римановой поверхности имеет ровно один полюс, то кратность этого полюса не меньше двух.*

Вот аналог предложения 12.11 для областей с границей:

Предложение 12.13. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область с кусочно-гладкой границей и f — функция, мероморфная в окрестности D и* *не имеющая полюсов на ∂D. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{a\in D}\operatorname{Res}_a(f\,dz).$$

Доказательство этого предложения можно спокойно предоставить читателю. Комбинируя это предложение с предложением 12.10, получаем новое (а по сути — то же самое) доказательство принципа аргумента.

Теперь объясним, как с помощью понятия вычета получить препятствие к построению мероморфной формы с данными главными частями. Пусть X — риманова поверхность, $a\in X$, и пусть $f\in\mathcal{M}_a/\mathcal{O}_a$ — главная часть (т. е. росток мероморфной функции с точностью до прибавления ростка голоморфной функции). Если ω — голоморфная форма на X, то $f\omega$ — росток мероморфной формы (попросту — мероморфная форма, определенная в окрестности a) с точностью до прибавления ростка голоморфной формы (т. е. голоморфной формы, определенной в окрестности a). Поскольку от прибавления голоморфной формы вычет не меняется, корректно определен вычет $\operatorname{Res}_a(f\omega)$. Пусть теперь на *компактной* римановой поверхности X задана задача Миттаг-Леффлера: даны точки $a_1,\dots,a_n\in X$ и в каждой точке a_j задана главная часть $f_j\in\mathcal{M}_{a_j}/\mathcal{O}_{a_j}$. Предположим, что эта задача имеет решение, т. е. что найдется мероморфная функция f, имеющая в точке a_j главную часть f_j и не имеющая полюсов вне $\{a_1,\dots,a_n\}$. Тогда для всякой голоморфной формы ω имеем, ввиду предложения 12.11,

$$\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}_{a_j}(f_j\omega)=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}_{a_j}(f\omega)=0.$$

Стало быть, если на X есть ненулевые голоморфные формы, главные части уже не могут быть какими попало: каждая такая форма задает условие на главные части, необходимое для разрешимости соответствующей задачи Миттаг-Леффлера. Замечательным образом оказывается, что никаких других препятствий к разрешимости этой задачи нет. Это важное утверждение называется «теоремой Римана–Роха».

Теорема 12.14 (теорема Римана–Роха I). *Пусть на компактной римановой поверхности X даны точки $a_1, \ldots, a_n$ и главные части $f_1, \ldots, f_n$, где $f_j \in \mathcal{M}_{a_j}/\mathcal{O}_{a_j}$. Тогда мероморфная функция, имеющая в каждой точке a_j главную часть f_j и не имеющая полюсов вне $\{a_1, \ldots, a_n\}$, существует в том и только в том случае, когда для всякой голоморфной формы ω на X выполнено равенство*

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_j}(f_j\omega) = 0. \tag{12.2}$$

Необходимость условий (12.2) мы только что проверили; доказательство достаточности в общем случае выходит за рамки нашего курса. Тем не менее у нас хватает средств, чтобы доказать теорему 12.14 для эллиптических кривых. Давайте это сделаем.

Предложение 12.15. *Теорема* 12.14 *верна, если X — эллиптическая кривая.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{C}/L$ — эллиптическая кривая (L — решетка в $\mathbb{C}$). Если $\pi\colon \mathbb{C} \to X$ — естественное отображение и ω — голоморфная форма на X, то $\pi^*\omega$ — голоморфная форма на $\mathbb{C}$, имеющая вид $f\,dz$, где f — целая функция, обладающая тем свойством, что $f(z+u) = f(z)$ для всех $u \in L$; поскольку из этого следует, что функция f ограничена, по теореме Лиувилля она является константой, и $\pi^*\omega = \lambda\,dz$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тем самым простарнство голоморфных форм на X одномерно и порождается формой, прообраз которой при отображении π есть dz; мы позволим себе и саму эту форму на X обозначать dz.

С учетом предыдущего обсуждения получаем, что нам надо только доказать следующий факт:

Пусть на эллиптической кривой X заданы главные части $f_1, \ldots, f_n$ в точках $a_1, \ldots, a_n$, и пусть $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_j}(f_j\,dz) = 0$. Тогда соответствующая задача Миттаг-Леффлера на X имеет решение.

Мы построим функцию, дающую решение этой задачи, из $\wp$-функций и их производных. Очевидно, все будет доказано, как только мы установим следующие два факта:

(1) Для любой точки $a \in X$ и любого целого числа $k \geqslant 2$ существует мероморфная функция на X, имеющая в точке a главную часть $1/(z-a)^k$ и не имеющая полюсов, отличных от a (здесь и ниже в качестве локальных координат на X мы выбираем естественные координаты на $\mathbb{C}$).

(2) Для любых двух различных точек $a, b \in X$ существует мероморфная функция на X, имеющая главную часть $1/(z-a)$ в точке a, главную часть $-1/(z-b)$ в точке b и не имеющая полюсов, отличных от a и b.

(В самом деле, если данные задачи Миттаг-Леффлера удовлетворяют условию на сумму вычетов, то ее решение можно получить, взяв подходящую линейную комбинацию функций вида (1) и (2).)

Чтобы проверить утверждение (1), достаточно заметить, что $(k-2)$-я производная $\wp$-функции имеет в нуле главную часть вида const/z^k (с ненулевой константой) и не имеет полюсов вне нуля; умножая на подходящую константу и заменяя $\wp(z)$ на $\wp(z-a)$, получаем всё, что нужно.

Чтобы проверить утверждение (2), рассмотрим точку $c \in X$, не являющуюся точкой второго порядка, и положим $\lambda = \wp(c) = \wp(-c)$. Тогда функция $f(z) = 1/(\wp(z) - \lambda)$ имеет полюсы первого порядка в точках c и $-c$ и не имеет других полюсов; в силу теоремы о вычетах вычеты формы $f\,dz$ в точках c и $-c$ противоположны друг другу, так что, умножив f на подходящую константу, можно считать, что главные части функции f в точках c и $-c$ имеют вид $1/(z-c)$ и $-1/(z+c)$ соответственно. Тем самым утверждение (2) доказано для случая, когда $a=c$, $b=-c$. В общем случае для данных точек a и b найдем такие элементы $c, t \in X$, что $a=c-t$, $b=-c-t$: достаточно взять в качестве c любое решение уравнения $2c=a-b$, а в качестве t — любое решение уравнения $2t=-(a+b)$; заметим, что $2c \neq 0$, поскольку $a \neq b$, так что c не есть точка второго порядка, и к ней применима предыдущая конструкция; теперь функция $z \mapsto f(z-t)$ обладает, очевидно, всеми требуемыми свойствами. $\square$