Лекция 13. Теорема Римана–Роха

В этой лекции мы выведем из теоремы Римана–Роха (теорема 12.14) один из ключевых фактов теории компактных римановых поверхностей (который также называется теоремой Римана–Роха).

Для начала обсудим такой вопрос: мы знаем, что за препятствия к разрешимости задачи Миттаг-Леффлера отвечают голоморфные формы; сколько же, собственно говоря, голоморфных форм существует на компактной римановой поверхности? Ответ таков:

Предложение 13.1. *Векторное пространство голоморфных дифференциальных форм на компактной римановой поверхности рода g имеет размерность g (над $\mathbb{C}$).*

Доказывать это предложение мы не будем; отметим только, что конечномерность этого векторного пространства вы при желании можете доказать самостоятельно уже сейчас, но для того, чтобы доказать равенство его размерности и рода поверхности, требуется некоторая дополнительная техника, выходящая за рамки нашего элементарного курса.

Теперь введем несколько приличествующих случаю определений.

Определение 13.2. Пусть f — мероморфная функция на римановой поверхности X и $a \in X$. *Порядком* функции f в точке a (обозначение: $\mathrm{ord}_a(f)$) называется число k, если f имеет в точке a нуль порядка k, число $-k$, если f имеет в a полюс порядка k, и число нуль в остальных случаях. Точно так же определяется и обозначается порядок мероморфной формы в данной точке (если в локальных координатах в окрестности a форма записывается в виде $f\,dz$, то ее порядок — это порядок функции f; поскольку при замене координат f умножается на не обращающуюся в нуль голоморфную функцию, от выбора локальных координат это число не зависит).

Определение 13.3. *Дивизором* на компактной римановой поверхности X называется формальное выражение $D = m_1a_1 + \ldots$

$\ldots + m_n a_n$, где $a_j \in X$ и m_j — целые числа (n произвольно). Дивизор D называется *эффективным* (обозначение: $D \geqslant 0$), если все коэффициенты a_j неотрицательны. Если f — мероморфная функция на X, то через (f) обозначается дивизор вида $\sum_{a\in X} \operatorname{ord}_a(f) \cdot a$ (разумеется, лишь конечное число слагаемых в этой сумме отлично от нуля); если ω — мероморфная форма, то через (ω) обозначатеся дивизор $\sum_{a\in X} \operatorname{ord}_a(\omega) \cdot a$. Дивизоры, равные (f) для некоторой мероморфной функции f, называются *главными*[5]. Наконец, *степенью* дивизора $D = \sum m_j a_j$ называется число $\deg D = \sum m_j$.

Чтобы усвоить все эти определения, докажем два факта (важных и сами по себе):

Предложение 13.4. *Степень любого главного дивизора равна нулю.*

Доказательство. Если f — мероморфная функция, то предложение 12.10 гласит, что для всякой точки $a \in X$ имеем $\operatorname{ord}_a(f) = \operatorname{Res}_a(df/f)$. Теперь все следует из предложения 12.11. □

Предложение 13.5. *Если ω_1 и ω_2 — мероморфные формы на данной компактной римановой поверхности X, то* $\deg(\omega_1) = \deg(\omega_2)$.

Доказательство. Пусть в какой-то координатной окрестности $U \subset X$ наши формы записываются в виде $\omega_1 = f_1\,dz$, $\omega_2 = f_2\,dz$, где f_1, f_2 — мероморфные функции на U и z — локальная координата. Положим $f_U = f_1/f_2$. Если теперь в какой-то другой координатной окрестности $V \subset X$, пересекающейся с U, имеем $\omega_1 = g_1\,dw$, $\omega_2 = g_2\,dw$, то на $U \cap V$ имеем $g_1 = f_1 \cdot (dz/dw)$, $g_1 = f_1 \cdot (dz/dw)$, так что $f_1/f_2 = g_1/g_2$. Следовательно, корректно определена мероморфная функция f на X, заданная правилом

$f = f_1/f_2$, если $\omega_1 = f_1\,dz$, $\omega_2 = f_2\,dz$ (в каких-то локальных координатах).

[5] На самом деле главные дивизоры — наименее интересные, но такая терминология общепринята (она происходит из аналогии главных дивизоров с главными идеалами в кольцах).

Имеем, очевидно, $\omega_1 = f\omega_2$, откуда $(\omega_1) = (f) + (\omega_2)$ (при умножении функций и/или форм порядки складываются), так что $\deg(\omega_1) = \deg(f) + \deg(\omega_2)$, и все следует из предложения 13.4. □

Давайте заодно узнаем, чему именно равна степень дивизора вида (ω).

Предложение 13.6. *Если ω — мероморфная форма на компактной римановой поверхности X рода g, то* $\deg(\omega) = 2g - 2$.

Доказательство. Ввиду предложения 13.5 достаточно посчитать $\deg(\omega)$ для какой-нибудь одной мероморфной формы ω; выберем в качестве таковой форму df, где f — непостоянная мероморфная функция на X — она найдется, например, ввиду теоремы существования Римана (с. 54). Будем рассматривать f как голоморфное отображение из X в $\overline{\mathbb{C}}$; скомпоновав f с подходящим дробно-линейным автоморфизмом сферы Римана, можно добиться того, что среди прообразов точки $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ не будет точек ветвления, что мы и будем далее предполагать. Теперь подсчитаем $\deg(df)$. Обозначим степень отображения f через n, а индексы ветвления — через $e_1, \ldots, e_m$. Заметим, что f имеет ровно n простых полюсов — это прообразы точки ∞; в каждом из этих полюсов форма df имеет, очевидно, полюс порядка 2. С другой стороны, нули формы df — это в точности точки ветвления отображения f, причем если индекс ветвления в какой-то точке равен e, то df, очевидно, имеет в этой точке нуль порядка $e - 1$. Итак, df имеет n полюсов порядка 2 и m нулей порядков $e_1 - 1, \ldots, e_m - 1$. Суммируя, получаем, что $\deg(df) = \sum_{j=1}^{m}(e_j - 1) - 2n$, а это число равно $2g - 2$ по формуле Римана–Гурвица. □

Определение 13.7. Пусть D — дивизор на (компактной) римановой поверхности X. Тогда через $L(D)$ обозначается векторное пространство, состоящее из таких мероморфных функций f, что $(f) + D \geqslant 0$, а через $I(D)$ — векторное пространство, состоящее из таких мероморфных форм ω, что $(\omega) - D \geqslant 0$ (проверьте самостоятельно, что это действительно векторные пространства!). Размерности пространств $L(D)$ и $I(D)$ обозначаются через $l(D)$ и $i(D)$ соответственно.

Если дивизор $D = \sum_{j=1}^{n} m_j a_j$ эффективен, то $L(D)$ состоит из всех мероморфных функций, не имеющих полюсов вне точек $a_1, \dots, a_n$, а в этих точках имеющих полюсы не более чем данного порядка (если какие-то точки входят в D со знаком минус, то дополнительно функции предписывается иметь в этих точках нули не менее чем определенного порядка). Пространство $I(D)$ состоит, для эффективных дивизоров D, из голоморфных форм, имеющих нули (не менее чем данного порядка) в точках, входящих в D (если же D содержит какие-то точки со знаком минус, то формам разрешается в этих точках иметь полюсы).

Вот пример на эти понятия:

Предложение 13.8. *Если D_1 и D_2 — такие дивизоры на X, что их разность $D_1 - D_2$ является главным дивизором, то векторные пространства $L(D_1)$ и $L(D_2)$ изоморфны, и пространства $I(D_1)$ и $I(D_2)$ также изоморфны (и тем самым $l(D_1) = l(D_2)$, $i(D_1) = i(D_2)$).*

(Заметим в скобках, что если разность двух дивизоров является главным дивизором, то эти два дивизора называются «линейно эквивалентными».)

Доказательство. Пусть $D_1 = D_2 + (f)$. Поскольку для всякой мероморфной функции φ имеем

$$(f \cdot \varphi) + D_2 = (\varphi) + (f) + D_2 = (\varphi) + D_1,$$

получаем, что неравенства $(\varphi) + D_1 \geqslant 0$ и $(f\varphi) + D_2 \geqslant 0$ равносильны, так что отображение $\varphi \mapsto f \cdot \varphi$ является изоморфизмом $L(D_1)$ на $L(D_2)$. Рассуждение для $I(D)$ дословно такое же. $\square$

Обозначим через K дивизор вида (ω), где ω — какая-нибудь мероморфная форма (это стандартное обозначение; такие дивизоры называются «каноническими»).

Предложение 13.9. *$i(K - D) = l(D)$, $l(K - D) = i(D)$.*

Доказательство. Если f — мероморфная функция, то

$$(f) + D = (f\omega) - (\omega) + D = (f\omega) - (K - D),$$

так что отображение $f \mapsto f\omega$ задает изоморфизм пространств $L(D)$ и $I(K - D)$; этим доказано первое равенство;

подставляя в первом равенстве $K - D$ вместо D, получаем второе равенство. □

Теперь мы можем, наконец, доказать второй вариант теоремы Римана–Роха.

Теорема 13.10 (теорема Римана–Роха II). *Если D — дивизор на компактной римановой поверхности X рода g, то*

$$l(D) - i(D) = \deg D + 1 - g.$$

Доказательство. Предположим для начала, что дивизор $D = \sum_{j=1}^{n} m_j a_j$ эффективен (т. е. что все a_j положительны). Обозначим через V векторное пространство, состоящее из n-ок $(f_1, \dots f_n)$, где f_j — главная часть в точке a_j с полюсом порядка $\leqslant m_j$. Поскольку главная часть полностью определяется коэффициентами лорановского разложения в какой-то системе координат, имеем $\dim V = m_1 + \ldots + m_n = \deg D$. Рассмотрим теперь отображение $\Phi\colon L(D) \to V$, ставящее в соответствие функции f набор ее главных частей в точках $a_1, \dots, a_n$. Ядро отображения Φ состоит из мероморфных функций, не имеющих полюсов, то есть голоморфных функций, то есть констант, так что это ядро одномерно. Положим $W = \Phi(L(D)) \subset V$. Из сказанного выше ясно, что $l(D) = 1 + \dim W$. Остается найти размерность пространства W. По определению, это пространство состоит из тех исходных данных задачи Миттаг-Леффлера, для которых все полюсы сконцентрированы в точках $a_1, \dots, a_n$, порядок полюса главной части в a_j не превосходит m_j, и при этом такая задача Миттаг-Леффлера имеет решение. Ввиду теоремы 12.14 условие на то, чтобы соответствующая задача Миттаг-Леффлера была разрешима, можно сформулировать следующим образом. Для каждой формы $\omega \in \Omega(X)$, где через $\Omega(X)$ обозначено пространство голоморфных форм на X, определим линейный функционал λ_ω на V, действующий по формуле

$$\lambda_\omega\colon (f_1, \dots, f_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_j}(f_j\omega);$$

пространство W есть пересечение ядер всех функционалов λ_ω.

Стало быть,

$$\dim W = \dim V - \text{размерность пространства функционалов } \lambda_\omega.$$

Размерность же этого последнего пространства, в свою очередь, равна

$$\dim \Omega(X) - \dim \begin{Bmatrix} \text{формы } \omega \in \Omega(X), \text{ для которых функци-} \\ \text{онал } \lambda_\omega \text{ нулевой} \end{Bmatrix}.$$

Однако же λ_ω является нулевым функционалом тогда и только тогда, когда $\omega \in I(D)$; следовательно,

$$\begin{aligned} l(D) = 1 + \dim W = 1 + \dim V - (\dim \Omega(X) - \dim I(D)) = \\ = 1 + \deg D - g + i(D), \end{aligned}$$

что и утверждалось. Итак, мы доказали теорему для *эффективных* дивизоров D.

Теперь распространим доказанное нами утверждение на произвольные дивизоры. Покажем сначала, что для любого дивизора D выполнено неравенство

$$l(D) - i(D) \geqslant \deg D + 1 - g. \tag{13.1}$$

Если D эффективен, то мы уже доказали, что это неравенство выполняется (и даже обращается в равенство). Однако же любой дивизор может быть получен из эффективного путем вычитания конечного числа точек; поэтому наше неравенство будет доказано, как только мы установим, что при вычитании из D одной точки левая часть неравенства (13.1) уменьшается не больше, чем правая. Ясно, что правая часть (13.1) при вычитании из D одной точки уменьшается на 1; поэтому неравенство (13.1) будет доказано, как только мы установим следующую лемму:

Лемма 13.11. *Если D — дивизор на X и $a \in X$ — точка, то*

$$l(D-a) - i(D-a) \geqslant (l(D) - i(D)) - 1.$$

(На самом деле, как немедленно следует из доказываемой нами теоремы, это неравенство всегда обращается в равенство, но доказательство теоремы еще не закончено!)

Доказательство леммы. Ясно, что $L(D-a) \subseteq L(D)$ и $I(D) \subseteq I(D-a)$, причем коразмерность $L(D-a)$ в $L(D)$ и коразмерность $I(D)$ в $I(D-a)$ обе не превосходят единицы: условие, выделяющее подпространство $L(D-a)$ в $L(D)$ или $I(D)$ в $I(D-a)$, заключается в обращении в нуль одного коэффициента ряда Лорана, причем может случится, что для всех элементов пространства $L(D)$ (соответственно, $I(D-a)$) этот коэффициент равен нулю, и тогда имеет место равенство $L(D-a)=L(D)$ (соответственно, $I(D)=I(D-a)$). Стало быть, $l(D)\geqslant l(D-a)\geqslant l(D-a)-1$ и $i(D)+1\geqslant i(D-a)\geqslant i(D)$. Тем самым a priori возможны четыре случая:

(1) $l(D-a)=l(D)-1$, $i(D-a)=i(D)$;

(2) $l(D-a)=l(D)$, $i(D-a)=i(D)+1$;

(3) $l(D-a)=l(D)$, $i(D-a)=i(D)$;

(4) $l(D-a)=l(D)-1$, $i(D-a)=i(D)+1$.

Случаи (1)–(3) нас устраивают; покажем, что случай (4) невозможен.

В самом деле, пусть он имеет место; тогда существуют мероморфная функция $f\in L(D)\setminus L(D-a)$ и мероморфная форма $\omega\in I(D-a)\setminus I(D)$. Рассмотрим теперь мероморфную форму $f\omega$; она должна иметь простой полюс в точке a и быть голоморфной вне a, а это противоречит теореме о вычетах (см. следствие 12.12). □

Итак, лемма доказана, а с ней и неравенство (13.1); теперь применим неравенство (13.1) к дивизору $K-D$ вместо D, где K, как и в предложении 13.9, — дивизор вида (ω), где ω — какая-нибудь мероморфная форма. С учетом предложения 13.9, неравенство (13.1), в которое подставлено $K-D$ вместо D, запишется так:

$$i(D)-l(D)\geqslant \deg(K-D)+1-g= \\ =\deg K-\deg D+1-g=g-1-\deg D$$

(мы воспользовались тем, что $\deg K=2g-2$ ввиду предложения 13.6). Умножая обе части получившегося неравенства на (-1), мы получим, что для дивизора D выполнено неравенство (13.1), в котором знак $\geqslant$ заменен на $\leqslant$; значит, это неравенство обращается в равенство, и все доказано. □