Лемма 14.2. *Для всякого натурального числа m существует голоморфная на U функция φ_m со следующими свойствами:*

(1) *функция $1-\varphi_m$ имеет простой нуль в точке a_m и не имеет других нулей в U;*

(2) *если $a_m \in K_{j+1} \setminus K_j$, то $|\varphi_m(z)| < 1$ для всех $z \in K_{j-1}$.*

Доказательство леммы 14.2. Если $a_m \in K_{j+1} \setminus K_j$, то либо $\inf_{w\in\mathbb{C}\setminus U} |a_m - w| < 1/j$, либо $|a_m| > j$. В первом случае существует точка $b \in \mathbb{C} \setminus U$, для которой $|a_m - b| < 1/j$, и с другой стороны для всех $z \in K_{j-1}$ имеем $|z-b| \geqslant 1/(j-1) > 1/j$, так что можно положить $\varphi_m(z) = \dfrac{a_m - b}{z-b}$; во втором случае можно просто положить $\varphi_m(z) = \dfrac{z}{a_m}$. □

Если бы мы могли быть уверены, что произведение $\prod(1-\varphi_m)$ сходится равномерно на компактах в U, то теорема была бы уже доказана, но эта сходимость, вообще говоря, ниоткуда не следует. Чтобы обеспечить сходимость, мы домножим каждый из сомножителей $(1-\varphi_m)$ на подходящую голоморфную функцию, не обращающуюся в нуль на U.

Лемма 14.3. *Для каждого натурального числа m можно выбрать голоморфную на U функцию ψ_m таким образом, чтобы для всякого натурального j произведение*

$$\prod_{a_m \notin K_j} (1-\varphi_m)e^{\psi_m} \tag{14.1}$$

равномерно сходилось на K_{j-1} к функции, не имеющей нулей на K_{j-1}.

Доказательство леммы 14.3. Напомним, что ряд

$$-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots$$

сходится при $|z| < 1$ к (одной из ветвей) функции $\ln(1-z)$; далее под $\ln(1-z)$ мы будем понимать именно сумму этого ряда. Очевидно, что утверждение леммы будет выполнено, если ряд

$$\sum_{a_m \notin K_j} (\ln(1-\varphi_m) + \psi_m), \tag{14.2}$$

составленный из логарифмов сомножителей произведения (14.1), будет равномерно сходиться на K_{j-1} (логарифмы в (14.2) имеют смысл, т. к. $|f_m(z)| < 1$ при $z \in K_{j-1}$ ввиду леммы 14.2). Чтобы обеспечить эту сходимость, зададимся каким-нибудь сходящимся рядом с положительными членами $\sum \varepsilon_m$ и для каждого такого m, что $a_m \notin K_j$, найдем такое число p_m, что

$$\left| \sum_{k=p_m}^{\infty} \frac{f_m(z)^k}{k} \right| \leqslant \varepsilon_m$$

при $z \in K_{j-1}$; это всегда возможно, поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-f_m(z)^k/k)$ равномерно сходится к $\log(1 - f_k)$ на K_{j-1}. Если теперь положить

$$\psi_m = \sum_{k=1}^{p_m - 1} \frac{f_m(z)^k}{k},$$

то равномерная сходимость на K_{j-1} ряда (14.2) будет обеспечена. □

Из лемм 14.2 и 14.3 немедленно следует, что бесконечное произведение

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - \varphi_m) e^{\psi_m}$$

сходится на U к голоморфной функции, дающей решение нашей задачи Вейерштрасса. □

Следствие 14.4. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, и пусть $S, T \subset U$ — непересекающиеся подмножества, не имеющие в U предельных точек. Предположим, что для каждого $a \in S$ задано целое положительное число n_a, а для каждого $b \in T$ задано целое положительное число m_b. Тогда на U существует мероморфная функция, которая в каждой точке $a \in S$ имеет нуль порядка n_a, в каждой точке $b \in T$ имеет полюс порядка m_b, а других нулей или полюсов в U не имеет.*

Доказательство. Пусть f и g — голоморфные функции, дающие решение задачи Вейерштрасса с данными $(S, \{n_a\})$ и

$(T, \{m_b\})$ соответственно; тогда мероморфная функция f/g обладает требуемыми свойствами. $\square$

Еще одно следствие теоремы Вейерштрасса показывает, что всякая мероморфная функция на открытом множестве комплексной плоскости является отношением двух голоморфных функций (прямо из определения мероморфной функции следует только, что это утверждение верно в окрестности каждой точки):

Следствие 14.5. *Пусть f — мероморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Тогда на U существуют такие голоморфные функции g и h, что $f = g/h$.*

Доказательство. Пусть $S \subset U$ — множество полюсов функции f, и пусть n_a — порядок полюса $a \in S$. Если теперь обозначить через h голоморфную функцию, дающую решение задачи Вейерштрасса с данными $(S, \{n_a\})$, то функция $g = fh$ голоморфна на U и $f = g/h$. $\square$

Итак, на открытых подмножествах комплексной плоскости всякая задача Вейерштрасса разрешима. Следующий шаг — выяснить, как обстоит дело с этой задачей на произвольной римановой поверхности.

Ясно, что если риманова поверхность X несвязна, то задачу Вейерштрасса можно решать отдельно на каждой компоненте, так что всюду в дальнейшем мы будем считать X связной. Как и в случае с задачей Миттаг-Леффлера, ответ на вопрос о разрешимости задачи Вейерштрасса зависит от того, компактна X или нет.

Если X компактной не является, то *любая* задача Вейерштрасса на X имеет решение. Доказательство этого факта требует примерно той же техники, что и доказательство теоремы Миттаг-Леффлера для открытой римановой поверхности, и тем самым выходит за рамки нашего курса.

Теперь посмотрим, что происходит, когда риманова поверхность X компактна.

Поскольку на компактных римановых поверхностях нет непостоянных голоморфных функций, вопрос об обобщении на этот случай теоремы 14.1 не стоит, но вполне можно пытаться обобщать следствие 14.4: строить на X *мероморфную* функцию с заданными нулями и полюсами. Множества нулей и полюсов мероморфной функции на компактной римановой поверхности с неизбежностью конечны (поскольку эти множества не могут иметь предельных точек); вспоминая определение дивизора (опр. 13.3), получаем такую формулировку задачи Вейерштрасса для компактной римановой поверхности:

Пусть $D = m_1a_1 + \ldots + m_na_n$ — дивизор на компактной римановой поверхности X; существует ли на X такая мероморфная функция f, что $D = (f)$?

Иными словами, надо выяснить, какие дивизоры на компактной римановой поверхности являются главными.

Прежде чем обсуждать эту задачу, сформулируем следующее тривиальное, но полезное утверждение:

Предложение 14.6. *Сумма и разность двух главных дивизоров является главным дивизором.*

Доказательство. Поскольку порядок произведения (соответственно частного) двух функций в данной точке равен сумме (соответственно разности) порядков, имеем равенства $(f) + (g) = (fg)$ и $(f) - (g) = (f/g)$. □

Теперь вернемся к задаче Вейерштрасса. Сразу видно, что на компактной римановой поверхности не любая задача Вейерштрасса имеет решение: предложение 13.4 гласит, что степень главного дивизора обязана быть равна нулю.

Для сферы Римана это необходимое условие является и достаточным:

Предложение 14.7. *Дивизор на $\overline{\mathbb{C}}$ является главным тогда и только тогда, когда его степень равна нулю.*

Доказательство. Часть «только тогда» содержится в предложении 13.4; для доказательства части «тогда» заметим, что любой дивизор степени 0 представляется в виде суммы дивизоров вида $a - b$; поэтому ввиду предложения 14.6 нам достаточно показать, что на $\overline{\mathbb{C}}$ любой дивизор вида $a-b$ является главным, а это очевидно (если a и b конечны, в качестве искомой функции можно взять $(z-a)/(z-b)$; случай, когда a или b равно ∞, предоставляется читателю). $\square$

Самое интересное, как всегда, начинается, когда род римановой поверхности больше нуля. В этом случае равенство нулю степени дивизора уже недостаточно для того, чтобы дивизор был главным: существует много других препятствий. Мы не будем даже формулировать необходимое и достаточное условие для произвольного рода, так как это завело бы нас слишком далеко, но разберем простейший (и показательный) случай эллиптической кривой.

Итак, пусть $E=\mathbb{C}/L$ — эллиптическая кривая, где $L\subset\mathbb{C}$ — решетка. Напомним, что на E можно ввести структуру группы (именно, факторгруппы аддитивной группы поля $\mathbb{C}$ по подгруппе L).

Теорема 14.8. *Пусть $D=p_1a_1+\ldots+p_na_n$ — дивизор на эллиптической кривой E. Тогда мероморфная функция f, обладающая тем свойством, что $(f)=D$, существует в том и только том случае, когда выполняются следующие два условия:*

(1) $p_1+\ldots+p_n=0$ *(иными словами,* $\deg D=0$*);*

(2) $p_1a_1+\ldots+p_na_n=0$*, где сложение понимается в смысле группового закона на эллиптической кривой.*

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости. Необходимость условия (1) вытекает из предложения 13.4. Чтобы доказать необходимость условия (2), предположим, что $D=(f)$, где f — мероморфная функция на E, обозначим через $\langle\omega_1,\omega_2\rangle$ какой-нибудь базис решетки L и обозначим через $D\subset\mathbb{C}$ параллелограмм, порожденный этим базисом (иными словами, параллелограмм с вершинами $0,\omega_1,\omega_1+\omega_2,\omega_2$). Подвергнем его параллельному переносу на подходящий вектор $w\in\mathbb{C}$ таким образом, чтобы ни один из прообразов точек $a_1,\ldots,a_n\in E$ при естественной проекции $p\colon\mathbb{C}\to E$ не лежал на сторонах параллелограмма; полученный параллелограмм будем также обозначать буквой D.

У каждой из точек $a_1, \dots, a_n$ существует один и только один прообраз при отображении p, лежащий внутри параллелограмма D; обозначим эти прообразы через $z_1, \dots, z_n$ соответственно. Наконец, компонуя мероморфную функцию f с проекцией p, мы получаем двоякопериодическую мероморфную функцию на $\mathbb{C}$; мы будем обозначать эту последнюю той же буквой f.

Теперь воспользуемся «усиленным принципом аргумента», сформулированным в замечании 10.8. Если положить в нем $h(z) = z$, то получится следующее:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = p_1 z_1 + \ldots + p_n z_n. \tag{14.3}$$

Преобразуем интеграл в левой части (14.3):

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)} &= \underbrace{\int_w^{w+\omega_1} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}}_{I_1} + \underbrace{\int_{w+\omega_1}^{w+\omega_1+\omega_2} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}}_{I_2} + \\ &+ \underbrace{\int_{w+\omega_1+\omega_2}^{w+\omega_2} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}}_{I_3} + \underbrace{\int_{w+\omega_2}^{w} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}}_{I_4}\end{aligned} \tag{14.4}$$

(через $\int_w^{w+\omega_1}$ обозначен интеграл по отрезку с концами w и $w+\omega_1$, ориентированному от w к $w+\omega_1$, остальные обозначения имеют аналогичный смысл).

Поскольку функция f, и тем самым f'/f, периодична с периодами ω_1 и ω_2, мы имеем равенство

$$\begin{aligned}-I_3 &= \int_{w+\omega_2}^{w+\omega_1+\omega_2} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \int_w^{w+\omega_1}(u-\omega_2)\frac{f'(u)\,du}{f(u)} = \\ &= I_1 - \omega_2\int_w^{w+\omega_1}\frac{f'(u)\,du}{f(u)}.\end{aligned}$$

Преобразуя аналогичным образом $-I_4$, получаем отсюда:

$$I_1 + I_3 = \omega_2\int_w^{w+\omega_1}\frac{f'(u)\,du}{f(u)}; \tag{14.5}$$

$$I_2 + I_4 = \omega_1\int_w^{w+\omega_2}\frac{f'(u)\,du}{f(u)}. \tag{14.6}$$

Покажем, что интегралы в правых частях (14.5) и (14.6) равны $2\pi i \times$ (целое число). В самом деле, рассмотрим какую-нибудь первообразную функции f'/f, определенную в окрестности точки w, и продолжим ее аналитически вдоль, скажем, отрезка $[w; w+\omega_1]$ (со вторым из интегралов рассуждение такое же); тогда ясно (из формулы Ньютона–Лейбница, если угодно), что интеграл от $f'(u)\,du/f(u)$ по отрезку $[w; w+\omega_1]$ равен разности значений продолженного ростка в точке $w+\omega_1$ и исходного ростка в точке w. Однако же функция f'/f периодична с периодом ω_1, а всякая первообразная функции f'/f является ветвью логарифма функции f. Следовательно, наш интеграл равен разности значений каких-то двух ветвей функции $\ln f$ в точке w, а эта разность с неизбежностью принадлежит $2\pi i\mathbb{Z}$.

Подставляя значения для I_1+I_3 и I_2+I_4 в формулу (14.4), получаем, с учетом (14.3) и предыдущего наблюдения,

$$p_1 z_1 + \ldots + p_n z_n = \frac{1}{2\pi i}(I_1+I_2+I_3+I_4) = s\omega_1 + t\omega_2,$$

где $s, t \in \mathbb{Z}$, а это равенство как раз и означает, что $p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n = 0$ в E. Необходимость условий (1) и (2) тем самым доказана.

Докажем, что эти условия достаточны. Начнем с простейшего случая:

Лемма 14.9. *Пусть a, b, c, d — четыре точки на E (не обязательно различные), удовлетворяющие условию $a+b=c+d$ (в смысле групповой операции на E). Тогда дивизор $a+b-c-d$ является главным.*

Доказательство леммы. До конца доказательства леммы и всей теоремы 14.8 будем обозначать сложение и вычитание точек на эллиптической кривой знаками $\oplus$ и $\ominus$ (дабы не спутать эти операции с формальным сложением и вычитанием точек, применяемым в записи дивизоров).

Будем рассматривать $\wp$-функцию Вейерштрасса, соответствующую решетке L, как мероморфную функцию на E. Как известно (см. предложение 8.3), $\wp(u)=\wp(v)$ тогда и только тогда, когда $u=v$ или $u=\ominus v$. Поскольку $\wp$ имеет в нуле полюс порядка 2, получаем, что для всякой точки $u \in E \setminus \{0\}$ дивизор $u + (\ominus u) - 2 \cdot 0$ является главным (он имеет вид (f), где $f(z) = \wp(z) - \wp(u)$). Следовательно, для всяких точек $u, x \in E$ дивизор $(x \oplus u) + (x \ominus u) - 2 \cdot x$ также является главным, поскольку это дивизор вида (f), где $f(z) = \wp(z - x) - \wp(u)$. Ясно, что для любых двух точек $a, b \in E$ можно подобрать такие $u, x \in E$, что $a = x \oplus u$, $b = x \ominus u$; поскольку при этом $a \oplus b = 2x$, получаем, что дивизор $a + b - 2x$ является главным; если $c \oplus d = a \oplus b$, то и дивизор $c + d - 2x$ является главным; поскольку разность двух главных дивизоров также является главным дивизором, лемма доказана. □

Пусть теперь $D = a_1 + \ldots + a_n - b_1 - \ldots - b_n$, где $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = b_1 \oplus \ldots \oplus b_n$ в смысле групповой операции на эллиптической кривой. Докажем, что дивизор D является главным, индукцией по n. В самом деле, при $n = 1$ из условия следует, что $D = 0$, и такой дивизор является главным по тривиальной причине (в качестве искомой функции f можно взять ненулевую константу), при $n = 2$ дивизор является главным по лемме 14.9; если же $n > 2$, то найдем такую точку $c \in E$, что $a_1 \oplus a_2 = b_1 \oplus c$; тогда дивизор $D' = a_1 + a_2 - b_1 - c$ является главным по лемме 14.9, а дивизор $D - D' = c + a_3 + \ldots + a_n - b_2 - \ldots - b_n$ является главным по предположению индукции, так как в него входят $n - 1 < n$ точек с положительными коэффициентами, и при этом $c \oplus a_3 \oplus \ldots \oplus a_n = b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$ по построению. Значит, и дивизор $D = D' + (D - D')$ является главным. Этим завершается доказательство достаточности и всей теоремы. □

Доказанная нами теорема называется теоремой Абеля–Якоби (точнее говоря, это ее частный случай для эллиптических кривых).

Теоремы Абеля–Якоби и Римана–Роха — два ключевых факта классической теории компактных римановых поверхностей; вооружившись ими, можно начать развивать эту теорию (называемую также «теорией алгебраических кривых над $\mathbb{C}$») и получить множество замечательных результатов. Вы сможете узнать об этом из других книг (см. «Литературные указания» в конце), а наша книга на этом заканчивается.