Предисловие

Эта брошюра представляет собой расширенный вариант записок лекций, читавшихся студентам Независимого московского университета (НМУ) в весеннем семестре 2002 года.

Теория функций комплексного переменного (комплексный анализ) — очень классический, очень важный и довольно обширный раздел математики; вместить достаточно полный курс комплексного анализа в один семестр затруднительно даже в НМУ, и многие важные вещи будут у нас упомянуты лишь вскользь, а то и вовсе обойдены молчанием. Тем не менее хочется верить, что читатели получат от курса пользу и удовольствие.

При отборе материала я стремился максимально быстро подвести читателя к теории римановых поверхностей; мы формулируем и обсуждаем некоторые основные результаты (включая теорему Римана–Роха), а для простейшего нетривиального случая — именно, для эллиптических кривых — приводим и доказательства.

При подготовке этого издания были добавлены разд. 12, 13 и 14 (во время чтения курса эти темы были затронуты лишь очень вкратце); в добавлениях к другим разделам приведены некоторые сведения о функциях нескольких переменных (в той мере, в какой эту тему можно затронуть в начальном курсе), а также кое-какие доказательства, на которые на лекциях в НМУ не хватило времени.

В конце книги приведены упражнения.

Я благодарен О. В. Шварцману, беседы с которым помогли мне при подготовке курса, В. О. Бугаенко и С. А. Дориченко, помогавшим мне вести практические занятия, и, наконец, всем студентам–участникам этих занятий: без них не было бы ни этого курса, ни этой книжки.

Требования к подготовке читателя

В НМУ курс теории функций комплексного переменного читается в четвертом семестре; соответственно, мы будем при необходимости пользоваться тем, что студенты НМУ изучают в первых трех семестрах. Из этого материала будет использоваться (помимо того, что входит в стандартные университетские курсы) в основном следующее:

Комплексные числа: мы полагаем, что читатель уже отчасти знаком с комплексными числами, в частности, с определением показательной функции по формуле $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}(z^n/n!)$, с определениями синуса и косинуса комплексного числа ($\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$) и с «формулой Эйлера» $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

Математический анализ: понятие о гладком многообразии, дифференциальные формы, теорема Стокса.

Элементарная топология: фундаментальная группа, накрытия, классификация поверхностей, эйлерова характеристика поверхности.

Геометрия: дробно-линейные преобразования, модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.