Задачи

Этот набор задач ни в коей мере не претендует на то, чтобы служить задачником по комплексному анализу. Многие из приводимых ниже задач предлагались на практических занятиях в Независимом московском университете.

Элементарные функции

Напомним, что экспонента от комплексного числа определяется по формуле

$$e^z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j!},$$

а синус и косинус — по формулам

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Логарифмы и корни определить на всем $\mathbb{C}$ невозможно, но на всяком *односвязном* множестве $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ можно определить (не одним способом!) функцию, обратную к $z \mapsto z^n$ или $z \mapsto e^z$; всякую такую функцию называют «логарифмом» или «корнем n-й степени» (точнее говоря, «однозначной ветвью» логарифма или корня).

1. Докажите, что: а) $e^z = e^w$ тогда и только тогда, когда $z - w = 2\pi i n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) решения уравнений $\sin z = 0$ и $\cos z = 0$ над $\mathbb{C}$ — такие же, как над $\mathbb{R}$.

Будем говорить, что $f(a) = \infty$, если $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$; через $f(\infty)$ будем обозначать $\lim_{|z| \to \infty} f(z)$ (если этот предел существует). Через $\overline{\mathbb{C}}$ обозначим «сферу Римана» — множество $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

2. Существует ли предел $\lim_{|z| \to \infty} f(z)$ для следующих функций: а) f — многочлен степени n; б) $f(z) = \sin z$; в) $f(z) = e^z$?

Пусть $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ — невырожденная матрица с комплексными коэффициентами; она определяет *дробно-линейное отображение* из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, заданное формулой $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$. Как известно, дробно-линейные отображения переводят прямые и окружности в прямые и окружности.

3. Постройте дробно-линейное отображение, задающее взаимно однозначное отображение единичного круга $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на верхнюю полуплоскость $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

4. Докажите, что всякое нетождественное дробно-линейное отображение (рассматриваемое как отображение из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$) имеет либо одну, либо две неподвижные точки.

5. Докажите, что всякое дробно-линейное отображение сопряжено (с помощью дробно-линейного отображения) либо отображению вида $z \mapsto z + a$, где $a \in \mathbb{C}$, либо отображению вида $z \mapsto \lambda z$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(Дробно-линейное отображение, сопряженное отображению $z \mapsto z + a$, называется *параболическим*; если дробно-линейное отображение сопряжено отображению $z \mapsto \lambda z$, где $|\lambda| = 1$, оно называется *эллиптическим*; остальные дробно-линейные отображения называются *локсодромическими*.)

6. Докажите, что дробно-линейное отображение переводит верхнюю полуплоскость H в себя тогда и только тогда, когда его можно задать матрицей $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ с вещественными коэффициентами и положительным определителем.

7. Найдите образ полосы $U_{a,b} = \{z : a < \mathrm{Im}(z) < b\}$ при отображении $f(z) = e^z$. При каких a и b отображение f будет взаимно однозначно на $U_{a,b}$?

8. Найдите образ полуплоскости $H_a = \{z : \mathrm{Re}(z) > a\}$ при отображении $f(z) = z^2$. При каких a отображение f будет взаимно однозначно на H_a?

9. Найдите образ множества $U_a = \{z : |z| > a\}$ при отображении $z \mapsto z + (1/z)$. При каких a это отображение будет взаимно однозначно на U_a?

10. Постройте элементарную функцию, взаимно однозначно отображающую угол $\{z : -\pi/6 < \arg(z) < \pi/6\}$ на верхнюю полуплоскость (элементарная функция — это то, что получается композицией из рациональных функций, экспонент, корней и логарифмов).

11. Постройте элементарную функцию, взаимно однозначно отображающую полукруг $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0, |z| < 1\}$ на верхнюю полуплоскость.

12. Постройте элементарную функцию, взаимно однозначно отображающую единичный круг с центром в нуле на полосу $\{z : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$.

13. Пусть P — многочлен степени n с комплексными коэффициентами и Γ — такая окружность с центром в нуле, что все корни P лежат внутри Γ. Сколько оборотов вокруг нуля делает образ этой окружности при отображении $z \mapsto P(z)$?

14. Нарисуйте образ окружности с центром 3 и радиусом 4 при отображении $z \mapsto z^2 + z + 1$.

Функции голоморфные и не очень

Если не оговорено противное, через U будет обозначаться открытое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

15. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Выразите ее якобиан в точке $z \in U$ через $f'(z)$.

16. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — гладкое отображение (не предполагаемое голоморфным). Выразите его якобиан через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \overline{z}$.

Будем называть *сжатием* эллипса с полуосями a и b (где $a > b$) число $(a - b)/(a + b)$.

17. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — сохраняющее ориентацию гладкое отображение (не предполагаемое голоморфным) с невырожденной производной. Его производная переводит окружности в эллипсы. Выразите сжатие получающихся эллипсов через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \overline{z}$.

18. В условиях предыдущей задачи выразите через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \overline{z}$ угол, образуемый большой полуосью эллипса с действительной осью.

19. Приведите пример функции, непрерывной на окружности и не продолжающейся до функции, непрерывной в круге и голоморфной в его внутренности. [Указание: таких много.]

20. Гладкая функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ называется *гармонической*, если локально она является вещественной частью голоморфной функции. Докажите, что f гармонична тогда и только тогда, когда она удовлетворяет «уравнению Лапласа»

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

21. Гладкие функции $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ называются *гармонически сопряженными*, если функция $f + ig$ голоморфна (в этом случае, естественно, сами f и g будут гармоническими). Докажите, что для всяких гармонической функции $f\colon U \to \mathbb{R}$ и точки $z \in U$ существует окрестность $U' \ni z$ и функция $g\colon U' \to \mathbb{R}$, гармонически сопряженная к f в U' (иными словами, гармонически сопряженная функция всегда существует локально).

22. Приведите пример открытого множества U и гармонической функции $f\colon U \to \mathbb{C}$, для которой не существует гармонически сопряженной функции на всем U.

23. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, не обращающаяся в нуль. Докажите, что функция $z \mapsto \ln|f(z)|$ является гармонической.

24. Пусть функция f гармонична в окрестности замкнутого диска с центром a и радиусом r. Покажите, что

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

(«значение гармонической функции в центре круга равно среднему от ее значений на окружности»). [Указание: примените формулу Коши.]

25. Пусть функция f непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}$ с гладкой границей и принадлежит классу C^1 в $\operatorname{int} D$; докажите, что для всякого $a \in \operatorname{int} D$ имеет место формула

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)\, dz}{z - a} - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\partial f/\partial\overline{z}}{z - a}\, dx \wedge dy,$$

где x и y — действительная и мнимая часть числа z («формула Коши–Грина»).

26. Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ связно и $a \in U$. Предположим, что последовательность голоморфных в U функций $\{f_n\}$ удовлетворяет следующим условиям: $f_n(a) = 0$ для всех n, и последовательность $\{\operatorname{Re}(f_n)\}$ сходится в U равномерно на компактах. Докажите, что последовательность $\{f_n\}$ сходится в U равномерно на компактах. До какой степени можно ослабить условие $f_n(a) = 0$?

Локальные свойства

Задачи на локальные свойства голоморфных функций чем-то похожи на задачи по планиметрии: их тоже очень много, и среди них тоже много непростых. Не огорчайтесь, если что-то не получится.

27. Пусть f — целая функция, не являющаяся постоянной. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Докажите, что $\lim_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$.

28. Точки $P_1, \ldots, P_n$ лежат вне круга, ограниченного окружностью с центром в точке O. Докажите, что на этой окружности существует точка, для которой произведение расстояний до точек $P_1, \ldots, P_n$ больше, чем $OP_1 \cdot \ldots \cdot OP_n$, а также точка, для которой это произведение меньше, чем $OP_1 \cdot \ldots \cdot OP_n$.

29. Пусть функция f голоморфна в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, причем для всех $z \in \Delta$ выполнено тождество

$$(\operatorname{Re} f(z))^2 + 4(\operatorname{Im} f(z))^2 = 1.$$

Докажите, что f — константа.

30. Докажите, что открытые множества $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 3\}$ неизоморфны.

31. Пусть f — целая функция, не являющаяся многочленом. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Докажите, что

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = +\infty.$$

32. Пусть P — многочлен степени n от одной переменной с комплексными коэффициентами. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |P(z)|$. Докажите, что функция $r \mapsto M(r)/r^n$ монотонно убывает на $(0; +\infty)$. [Указание: принцип максимума.]

33. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, и пусть непостоянная функция $f \colon D \to \mathbb{C}$ непрерывна в D, голоморфна в $\operatorname{int} D$, и $|f(z)| = 1$ для всех $z \in \partial D$. Докажите, что функция f имеет нуль в $\operatorname{int} D$.

34. Докажите, что проколотый диск $\Delta^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ неизоморфен кольцу $A = \{z : a < |z| < b\}$ $(0 < a < b < \infty)$.

35. Пусть функции f, g и h голоморфны и непостоянны на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Докажите, что функция

$$z \mapsto |f(z)| + |g(z)| + |h(z)|$$

не может иметь в U локального максимума. [Указание: если сразу не выйдет, попробуйте вернуться к этой задаче после задачи 36.]

36. Пусть функция f непрерывна в диске $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Покажите, что

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

[Указание: вспомните «теорему о среднем» (задача 24).]

37. Пусть $U = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Положим $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Покажите, что функция $r \mapsto M(r)$ может иметь на интервале $(r_1; r_2)$ не более одного локального минимума.

38. Функция f непрерывна на замкнутом круге $D = \{z : |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Дано, что все значения f на границе круга вещественны. Докажите, что f — константа.

39. Пусть $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ и $\mathcal{M}$ — множество всех голоморфных отображений $f\colon \Delta \to \Delta$, для которых $f(0) = 2/3$ (не обязательно сюръективных). Найдите $\sup_{f \in \mathcal{M}} |f'(0)|$. [Указание: вам поможет лемма Шварца.]

40. Докажите, что не существует функции f, голоморфной в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ и обладающей следующими свойствами: $|f(z)| < 1$ для всех $z \in \Delta$, $f(0) = 1/2$, $f(1/2) = 7/8$.

41. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, и пусть непостоянная функция $f\colon D \to \mathbb{C}$ непрерывна в D и голоморфна в $\operatorname{int} D$. Предположим, что f обращается в нуль в точках $a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{int} D$ (не обязательно только в них). Докажите, что

$$|f(0)| \leqslant \max_{z \in D} |f(z)| \cdot \prod_{j=1}^{n} |a_j|.$$

42. Пусть функция f голоморфна и ограничена в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. Докажите, что множество ее нулей в Δ не может состоять из всевозможных чисел вида $n/(n+1)$, где n — целое положительное число. [Указание: см. задачу 41.]

43. (Для знакомых с рядами Фурье.) Пусть $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ и $f : \partial\Delta \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Докажите, что f продолжается до функции, непрерывной на Δ и голоморфной в $\operatorname{int}\Delta$, тогда и только тогда, когда $\int_{\partial\Delta} z^n f(z)\,dz = 0$ при всех целых $n \geqslant 0$. [Указание: помимо рядов Фурье, надо будет воспользоваться принципом максимума.]

44. Пусть функции f и g непрерывны на ограниченной области D с кусочно-гладкой границей и голоморфны в ее внутренности. Пердположим, что при всех $z \in \partial D$ выполнено неравенство $|f(z)| > |g(z)|$. Докажите, что функции f и $f+g$ имеют (с учетом кратности) одинаковое количество нулей во внутренности D.

45. $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ — голоморфная и однолистная функция в единичном круге Δ. Найдите площадь области $f(\Delta)$.

46. $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ — голоморфная, однолистная и ограниченная функция в единичном круге. Докажите, что $|a_n| = O(1/\sqrt{n})$.

Несколько задач о функциях нескольких переменных

47. Пусть $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, удовлетворяющая условию $|f(z)| = O(\|z\|^N)$, где $N > 0$, $\|z\| = \max(|z_1|, \ldots, |z_n|)$. Докажите, что f — многочлен.

48. Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{C}^n$, $L \subset \mathbb{C}^n$ — гиперплоскость (комплексная) и f — голоморфная и ограниченная функция в $U \setminus L$. Докажите, что f продолжается до функции, голоморфной на всем U (многомерный аналог теоремы Римана о продолжении).

49. Пусть Δ — полидиск в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ с центром в начале координат, $L = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \Delta : z_1 = z_2 = 0\}$ и f — голоморфная функция в $\Delta \setminus L$. Докажите, что f продолжается до функции, голоморфной на всем Δ.

Римановы поверхности

50. Докажите, что всякое голоморфное отображение из $\overline{\mathbb{C}}$ в эллиптическую кривую является константой. [Это немедленно следует из формулы Римана–Гурвица (см. следствие 7.6), но нельзя ли найти более элементарное решение?]

51. Докажите, что не существует непостоянного голоморфного отображения $f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$, где X — компактная риманова поверхность, имеющего ровно одно критическое значение.

52. Пусть существует непостоянное голоморфное отображение из компактной римановой поверхности X на сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}$ с двумя критическими значениями (алгебраический геометр сказал бы: «разветвленное над двумя точками»); что можно сказать о поверхности X?

(Теорема Г. А. Белого гласит, что отображение $f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$, разветвленное над тремя точками, существует тогда и только тогда, когда X изоморфна римановой поверхности, соответствующей уравнению $F(z, w) = 0$, где F — многочлен с коэффициентами, являющимися алгебраическими числами.)

53. Найдите род римановой поверхности, соответствующей уравнению $w^2 = P(z)$, где P — многочлен степени n без кратных корней. (Такие римановы поверхности называются *гиперэллиптическими*; эллиптические кривые подходят под наше определение, но гиперэллиптическими их обычно не называют; всякая риманова поверхность рода 2 является гиперэллиптической — см. задачу 65; в роде > 2, напротив, большинство римановых поверхностей гиперэллиптическими не являются.)

54. На римановой поверхности из задачи 53 функция w является мероморфной; найдите ее нули и полюсы (вместе с их кратностями).

55. Постройте на гиперэллиптической римановой поверхности рода g (см. задачу 53) g штук линейно независимых голоморфных форм.

56. Пусть f — мероморфная функция на компактной римановой поверхности X. Докажите, что сумма кратностей ее нулей равна сумме кратностей ее полюсов. [Найдите решение, не использующее вычетов.]

57. Найдите род римановой поверхности, соответствующей уравнению $z^n + w^n = 1$. (На самом деле таков будет род любой римановой поверхности, соответствующей уравнению $F(z, w) = 0$, где F — многочлен «общего положения» степени n; можете попробовать это доказать.)

58. Пусть $P \in \mathbb{C}[z, w]$ — неприводимый многочлен и $X \subset \mathbb{C}^2$ — множество таких точек (z, w), что $P(z, w) = 0$ и хотя бы одна из частных производных многочлена P отлична от нуля в этой точке. Тогда X является (некомпактной) связной римановой поверхностью. Докажите, что всякая ограниченная голоморфная функция на X является константой.

59. Докажите, что на сфере Римана нет ненулевых голоморфных форм.

60. Докажите, что пространство голоморфных форм на компактной римановой поверхности конечномерно.

61. На компактной римановой поверхности X выбрано n точек $a_1, \ldots, a_n$. Докажите, что для любых n чисел $t_1, \ldots, t_n$, удовлетворяющих условию $t_1 + \ldots + t_n = 0$, существует мероморфная форма ω на X, имеющая в каждой точке a_i простой полюс с вычетом t_i и не имеющая других полюсов.

62. Пусть X — компактная риманова поверхность. Докажите, что для всякой точки $a \in X$ и всякого целого числа $n > 1$ существует мероморфная форма на X, имеющая в точке a полюс порядка n и не имеющая других полюсов.

63. Пусть X — компактная риманова поверхность положительного рода и $a \in X$. Докажите, что на X существует голоморфная форма, не обращающаяся в нуль в точке a.

64. Докажите, что всякая компактная риманова поверхность рода 1 является эллиптической кривой. [Указание: пользуясь теоремой Римана–Роха, постройте мероморфные функции, аналогичные по своим свойствам $\wp$ и $\wp'$.]

65. Докажите, что всякая компактная риманова поверхность рода 2 является гиперэллиптической кривой. [Указание: пользуясь теоремой Римана–Роха, постройте мероморфную функцию с двумя простыми полюсами.]

66. Докажите, что компактная риманова поверхность является эллиптической кривой тогда и только тогда, когда на ней существует голоморфная форма без нулей.

67. Пусть X — компактная риманова поверхность рода g и $a_1, \ldots, a_g \in X$ — набор g точек общего положения. Докажите, что $l(a_1 + \ldots + a_g) = 1$.

68. Докажите, что для всякой компактной римановой поверхности X рода g существует такое непостоянное голоморфное отображение $f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$, что $\deg f \leqslant g + 1$. (На самом деле существует и отображение f, для которого $\deg f \leqslant [(g+1)/2] + 1$, но доказать это гораздо труднее.)

Эллиптические кривые

69. Постройте конформное отображение прямоугольника на верхнюю полуплоскость. [Указание: воспользуйтесь $\wp$-функцией.]

70. Какие эллиптические кривые имеют нетривиальный автоморфизм, сохраняющий точку 0 («нетривиальный» означает «отличный от $z \mapsto -z$»)?

71. Найдите j-инвариант эллиптической кривой, являющейся фактором $\mathbb{C}$ по квадратной решетке. [Указание: не пытайтесь считать «в лоб».]

72. Найдите j-инвариант эллиптической кривой, являющейся фактором $\mathbb{C}$ по решетке, порожденной 1 и $e^{\pi i/3}$.

73. У каких точек $z \in H$ стабилизатор относительно действия $SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ будет нетривиален?

74. Пусть $G \subset SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$ — подгруппа, разрывно и свободно действующая на верхней полуплоскости. Докажите, что G не содержит эллиптических элементов (см. определение на с. 123), отличных от тождественного преобразования.

75. Выразите ряд Эйзенштейна G_4 через G_2 и G_3.

76. Выразите j-инвариант через G_2 и G_3. [При решении этой задачи поможет программа наподобие `maple`.]

77. Докажите, что эллиптическая кривая изоморфна фактору $\mathbb{C}$ по прямоугольной решетке тогда и только тогда, когда она является римановой поверхностью уравнения $w^2 = P(z)$, где P — многочлен третьей степени с тремя различными вещественными корнями.

78. Докажите, что эллиптическая кривая изоморфна фактору $\mathbb{C}$ по «ромбической» решетке (т. е. решетке, порожденной двумя векторами равной длины) тогда и только тогда, когда она является римановой поверхностью уравнения $w^2 = P(z)$, где P — многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами и одним вещественным корнем.

79. Квадратная решетка удовлетворяет условиям как задачи 77, так и задачи 78. Нет ли тут противоречия?

80. Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — решетка, порожденная числами 1 и τ, где $\operatorname{Im}\tau \neq 0$, и пусть $\wp$ — соответствующая функция Вейерштрасса. Дано, что $\wp(1/2) = 0$. Запишите в явном виде уравнение какой-нибудь алгебраической функции, риманова поверхность которой изоморфна эллиптической кривой $\mathbb{C}/L$.

81. Докажите, что поле мероморфных функций на эллиптической кривой порождается (над $\mathbb{C}$) функциями $\wp$ и $\wp'$.

Гиперболическая метрика

82. Выпишите гиперболическую метрику на проколотом круге $\Delta^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$.

83. Выпишите гиперболическую метрику на кольце $A = \{z : a < |z| < b\}$, где $0 < a < b < \infty$.

84. Найдите площадь компактной римановой поверхности рода $g > 1$ относительно гиперболической метрики.

85. Докажите, что всякое голоморфное отображение из негиперболической римановой поверхности в гиперболическую является константой.

86. Докажите, что всякое голоморфное отображение проколотого диска в компактную риманову поверхность X рода, большего 1, продолжается до голоморфного отображения всего диска в X.

87. f и g — целые функции, удовлетворяющие тождеству $(f(z))^2 + (g(z))^3 = 1$. Докажите, что f и g — константы.

88. Конечна или бесконечна площадь в гиперболической метрике открытого множества $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$?