Предисловие

Эти записки более или менее соответствуют курсу «Введение в когомологии пучков», прочитанному автором в НМУ в осеннем семестре 1997 года. Соответствие между разделами текста и отдельными лекциями не является взаимно однозначным.

По сравнению с текстами, раздававшимися слушателям после занятий, добавлены записки заключительной лекции (разд. 9). Текст слегка отредактирован; исправлены некоторые ошибки, в том числе и те, на которые мне указали слушатели.

Практически вся теория, изложенная в лекциях, была создана французскими математиками в 50-е годы нашего столетия. Не претендуя на изложение истории вопроса, назовем четыре имени. Ж. Лере и А. Картан создали понятие пучка. Ж.-П. Серр, ориентируясь на работы Картана по теории функций многих комплексных переменных, применил пучки и когомологии к алгебраической геометрии. Наконец, А. Гротендик систематизировал и далеко развил теорию пучков[1]. Бóльшая часть нашего курса соответствует примерно половине основополагающей работы Серра [10].

Хочу выразить глубокую благодарность всем слушателям курса за внимание и чрезвычайно полезные замечания. Особенно ценную обратную связь я получал от С. Васильева, О. Попова и А. Черепанова.

Литература

[1] М. Атья, И. Макдональд. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.

[2] Н. Бурбаки. Гомологическая алгебра. М.: Наука, 1987.

При наборе использовался макропакет XY-pic.

Автор благодарит РФФИ (грант № 98–01–01041) и INTAS (грант № 96–0807) за финансовую поддержку.

[1] Список достижений названных замечательных математиков этим отнюдь не исчерпывается.

[3] С.И. Гельфанд, Ю.И. Манин. Методы гомологической алгебры. М.: Наука, 1988.

[4] Р. Годеман. Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1958.

[5] В.И. Данилов. Когомологии алгебраических многообразий. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления). Т. 35 (Алгебраическая геометрия-2). М.: ВИНИТИ, 1989.

[6] С. Ленг. Алгебра. М.: Мир, 1965.

[7] Д. Мамфорд. Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир, 1966.

[8] Ю.И. Манин. Лекции по алгебраической геометрии 1966–1968 гг. Ротапринт мехмата МГУ, 1968.

[9] М. Рид. Алгебраическая геометрия для всех. М.: Мир, 1991.

[10] Ж.-П. Серр. Алгебраические когерентные пучки. В кн.: Расслоенные пространства и их приложения. М.: ИЛ, 1958, с. 372–458.

[11] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.

[12] И.Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии, т. 1. М.: Наука, 1988.

Содержание

1. Гомологии, гомотопии, конусы

Определение 1.1. Комплексом абелевых групп (модулей над данным кольцом, векторных пространств, и т. п.) называется занумерованный целыми числами набор абелевых групп (векторных пространств, модулей...) K^i и гомоморфизмов $d^i\colon K^i \to K^{i+1}$, удовлетворяющих условию $d^{i+1}d^i = 0$ для всех i.

Комплекс обозначается $K^{\cdot}$ (иногда точку, стоящую вместо «произвольного индекса», будем опускать). Комплекс называется *ограниченным снизу,* если $K^i = 0$ для всех $i \ll 0$, и *ограниченным сверху,* если $K^i = 0$ для всех $i \gg 0$. Комплекс, содержащий лишь конечное число ненулевых членов, называется *ограниченным.*

Определение 1.2. Гомоморфизмом (или попросту морфизмом) комплексов $f\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ называется такая последовательность гомоморфизмов $f^i\colon K^i \to L^i$, что $d^i f^i = f^{i+1} d^i$ для всех i (обычно пишут короче: $df = fd$).

Определение 1.3. i-той *группой когомологий* комплекса $K^{\cdot}$ называют факторгруппу (фактормодуль...) $\operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$. Обозначают i-тую группу когомологий так: $H^i(K^{\cdot})$.

Задача 1.4. Пусть

$$0 \to K^{\cdot} \to L^{\cdot} \to M^{\cdot} \to 0$$

— точная последовательность комплексов. Докажите, что она индуцирует точную последовательность когомологий

$$\cdots \to H^i(K^{\cdot}) \to H^i(L^{\cdot}) \to H^i(M^{\cdot}) \to H^{i+1}(K^{\cdot}) \to H^{i+1}(L^{\cdot}) \to \dots. \tag{1.1}$$

Замечание 1.5. Иногда пишут индексы снизу, требуют, чтобы d действовал из K_i в K_{i-1}, и называют такие комплексы цепными (а комплексы, о которых у нас шла речь в начале, тогда называют коцепными). Удобно не считать цепной комплекс отдельным понятием, а просто иметь в виду, что всякий комплекс можно записать и с нижними индексами, полагая $K_i = K^{-i}$ и $H_i(K_{\cdot}) = H^{-i}(K^{\cdot})$.

Пусть $K^\cdot$ и $L^\cdot$ — два комплекса. Существует тривиальный способ сконструировать гомоморфизм из $K^\cdot$ в $L^\cdot$. Именно, пусть $s^i\colon K^i \to L^{i-1}$ — произвольная последовательность гомоморфизмов. Положим $\varphi^i = d^{i-1}s^i + s^{i+1}d^i$ (в более вольной записи: $\varphi = ds + sd$). Легко видеть, что последовательность $\{\varphi^i\}$ является гомоморфизмом комплексов из $K^\cdot$ в $L^\cdot$.

Определение 1.6. Гомоморфизмы комплексов, полученные вышеописанной конструкцией, называются *гомотопически тривиальными.* Если f и g — гомоморфизмы из комплекса $K^\cdot$ в комплекс $L^\cdot$ и разность $f - g$ гомотопически тривиальна, то гомоморфизмы f и g называются *гомотопными.*

Пример 1.7. Пусть X и Y — топологические пространства, $f, g\colon X \to Y$ — гомотопные непрерывные отображения. Тогда индуцированные отображения сингулярных цепных (или коцепных) комплексов будут гомотопны (см. [11, с. 97–98]).

Задача 1.8. Покажите, что гомотопные гомоморфизмы из $K^\cdot$ в $L^\cdot$ индуцируют совпадающие гомоморфизмы из $H^i(K^\cdot)$ в $H^i(L^\cdot)$.

Задача 1.9. Пусть $\varphi\colon K^\cdot \to L^\cdot$ — гомотопически тривиальный гомоморфизм. Покажите что $\varphi \circ f$ и $g \circ \varphi$ гомотопически тривиальны, где f и g — произвольные гомоморфизмы в $K^\cdot$ (соответственно, из $L^\cdot$).

Определение 1.10. Говорят, что комплексы $K^\cdot$ и $L^\cdot$ *гомотопически эквивалентны,* если существуют такие гомоморфизмы $f\colon K^\cdot \to L^\cdot$ и $g\colon L^\cdot \to K^\cdot$, что fg и gf гомотопны тождественным отображениям. Комплекс называется *стягиваемым,* если он гомотопически эквивалентен комплексу, состоящему из одних нулей.

Определение 1.11. Точные последовательности

$$0 \to E_1 \to F_1 \to G_1 \to 0$$

и

$$0 \to E_2 \to F_2 \to G_2 \to 0$$

называются *изоморфными,* если их можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & 0, \end{array} \tag{1.2}$$

в которой вертикальные стрелки являются изоморфизмами.

Задача 1.12. Докажите, что в определении 1.11 достаточно потребовать, чтобы изоморфизмами были крайние левая и правая вертикальные стрелки.

Определение 1.13. Короткая точная последовательность

$$0 \to E \to F \to G \to 0 \tag{1.3}$$

называется расщепляющейся, если она изоморфна точной последовательности вида

$$0 \to E \xrightarrow{u} E \oplus G \xrightarrow{v} G \to 0,$$

где $u\colon e \mapsto e \oplus 0$ и $v\colon e \oplus g \mapsto g$.

Задача 1.14. Рассмотрим короткую точную последовательность (1.3) как комплекс (в этом и подобных случаях подразумевается, что слева и справа дописана бесконечная последовательность нулей). Докажите, что этот комплекс стягиваем тогда и только тогда, когда точная последовательность (1.3) расщепляется.

Задача 1.15. Перечислите все неизоморфные друг другу точные последовательности абелевых групп вида

$$0 \to \mathbb{Z} \to X \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to 0.$$

А что будет, если заменить $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

Определение 1.16. Гомоморфизм комплексов $f\colon K^\cdot \to L^\cdot$ называется *квазиизоморфизмом,* если он индуцирует изоморфизмы $H^i(K^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^i(L^\cdot)$ для всех i. Комплекс $K^\cdot$ называется *ацикличным,* если $H^i(K^\cdot) = 0$ для всех i.

Из задачи 1.8 ясно, что всякая гомотопическая эквивалентность является квазиизоморфизмом и всякий стягиваемый комплекс ацикличен.

Задача 1.17. Докажите, что всякий ацикличный комплекс векторных пространств стягиваем.

Задача 1.18. Приведите пример ацикличного, но не стягиваемого комплекса абелевых групп; приведите также пример квазиизоморфизма, не являющегося гомотопической эквивалентностью.

Конусы

Простейшая операция с комплексами — сдвиг.

Определение 1.19. Пусть K — комплекс и t — целое число. Комплекс $K[t]$ определяется так:

$$K[t]^i = K^{t+i}; \qquad d^i_{K[t]} = (-1)^t d^{t+i}_K.$$

Если $f\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ — гомоморфизм комплексов, то тот же самый набор гомоморфизмов $f^i\colon K^i \to L^i$ будет гомоморфизмом из $K[t]$ в $L[t]$; иногда этот гомоморфизм будет для ясности обозначаться $f[t]\colon K[t] \to L[t]$ (у каждой стрелки должны быть однозначно определенные начало и конец!).

Менее тривиально определяется такая важная операция над комплексами, как конус морфизма.

Определение 1.20. Пусть $f\colon K \to L$ — гомоморфизм комплексов. Его *конусом* называется комплекс $C(f)$, определенный так:

$$C(f)^i = K^{i+1} \oplus L^i;$$
$$d^i_{C(f)}(k; l) = (-dk; fk + dl).$$

Работая с конусами, удобно гомоморфизмы из $A \oplus B$ в $C \oplus D$ записывать в виде матриц $\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right)$, где $u \in \operatorname{Hom}(A, C)$, $v \in \operatorname{Hom}(B, C)$, $w \in \operatorname{Hom}(A, D)$, $z \in \operatorname{Hom}(B, D)$. При такой записи умножение матриц соответствует композиции гомоморфизмов. В частности, дифференциал в конусе морфизма $f\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ запишется в виде матрицы $\begin{pmatrix} -d_K & 0 \\ f & d_L \end{pmatrix}$.

Задача 1.21. Проверьте, что конус морфизма — действительно комплекс.

Пример 1.22. Для клеточного пространства (CW-комплекса) X обозначим через $C.(X)$ цепной комплекс, предназначенный для «клеточного» вычисления сингулярных гомологий X ([11, с. 109–110]). Далее, если (X, x_0) — клеточное пространство с отмеченной точкой (подразумевается, что x_0 является нульмерной клеткой), то положим $\tilde{C}.(X, x_0) = C.(X)/C.(x_0)$ (это — *приведенный клеточный комплекс* пространства (X, x_0)).

Пусть теперь $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ — клеточное отображение клеточных пространств с отмеченной точкой, и пусть $C(f)$ — приведенный конус отображения f, получающийся из обычного конуса ([11, с. 22]) стягиванием «образующей», содержащей отмеченную точку. Тогда приведенный клеточный комплекс $\tilde{C}.(C(f))$ изоморфен конусу естественного отображения $f_*\colon \tilde{C}.(X, x_0) \to \tilde{C}.(Y, y_0)$.

Задача 1.23. Проверьте, что отображения $g\colon l \mapsto (0; l)$ и $h\colon (k, l) \mapsto -k$ являются гомоморфизмами из L в $C(f)$ и из $C(f)$ в $K[1]$ соответственно.

Задача 1.24. Покажите, что гомоморфизмы f, g и h индуцируют точную последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \to H^i(K^{\cdot}) \xrightarrow{f_*} H^i(L^{\cdot}) \xrightarrow{g_*} H^i(C(f)^{\cdot}) \xrightarrow{h_*} \\ \to H^{i+1}(K^{\cdot}) \xrightarrow{f_*} H^{i+1}(L^{\cdot}) \to \dots . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Задача 1.25. Покажите, что конус тождественного гомоморфизма стягиваем (то есть гомотопически эквивалентен нулевому комплексу).

Задача 1.26. Пусть

$$0 \to K^{\cdot} \xrightarrow{i} L^{\cdot} \to M^{\cdot} \to 0$$

— точная последовательность комплексов. Покажите, что комплекс $M^{\cdot}$ квазиизоморфен конусу $C(i)$; покажите также, что при этом квазиизоморфизме точная последовательность (1.1) переходит в точную последовательность (1.4). Таким образом, конус морфизма является обобщением понятия «факторкомплекс».

2. Предпучки и пучки

Определение пучка удобно давать в два этапа.

Определение 2.1. Говорят, что $\mathcal{F}$ — *предпучок* абелевых групп (векторных пространств, колец...) на топологическом пространстве X, если каждому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставлена абелева группа (векторное пространство...) $\mathcal{F}(U)$, а каждой паре содержащихся друг в друге открытых множеств $V \subset U$ — гомоморфизм $\rho_V^U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ (отображения ограничения), и при этом выполнено следующее условие:

Если $W \subset V \subset U$, то $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$.

Если $s \in \mathcal{F}(U)$ и $V \subset U$, то вместо $\rho_V^U(s)$ обычно пишут $s|_V$ («ограничение s на V»). Элементы множества $\mathcal{F}(U)$ называются *сечениями* предпучка $\mathcal{F}$ над U.

Приведем примеры предпучков (незнакомые с алгебраической геометрией могут пока пропустить примеры, в которых участвуют алгебраические многообразия; в примере 3 можно также заменить слова «неособое алгебраическое многообразие» на «риманова поверхность» и «рациональная функция» на «мероморфная функция»).

1а. X произвольно, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо непрерывных функций на U со значениями в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

1б. X — гладкое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо гладких функций на U со значениями в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

1в. X — комплексно-аналитическое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо голоморфных функций на U.

1г. X — алгебраическое многообразие, снабженное топологией Зарисского, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо рациональных функций на X, определенных всюду на U.

2а. X произвольно, E — векторное расслоение на X, $\mathcal{F}(U)$ — пространство сечений расслоения E над U.

2б. X — гладкое многообразие, E — векторное расслоение на X, $\mathcal{F}(U)$ — пространство гладких сечений расслоения E над U.

2б$'$. X — гладкое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — пространство дифференциальных форм степени t на U.

2б$''$. X — гладкое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — пространство замкнутых дифференциальных форм степени t на U.

2б$'''$. X — гладкое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — пространство точных дифференциальных форм степени t на U.

2в. X — комплексно-аналитическое многообразие, E — векторное расслоение на X, $\mathcal{F}(U)$ — пространство голоморфных сечений расслоения E над U.

3. X — неособое алгебраическое многообразие (с топологией Зарисского), D — дивизор на X, $\mathcal{F}(U)$ — пространство таких рациональных функций f на X, что $(f)+D \geqslant 0$ на U.

4. X — алгебраическое многообразие, снабженное топологией Зарисского, $Y \subset X$ — замкнутое по Зарисскому подмножество, $\mathcal{F}(U)$ состоит из регулярных функций на U, тождественно обращающихся в нуль на $U \cap Y$.

5. $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(U)$ — множество обобщенных функций на U.

6. X произвольно; для всех непустых U имеем $\mathcal{F}(U) = G$, где G — фиксированная абелева группа, $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$, отображения ограничения на непустое множество тождественны.

Пучками называются предпучки, у которых глобальные свойства сечений определяются локальными. Точнее говоря:

Определение 2.2. Предпучок $\mathcal{F}$ на пространстве X называется *пучком,* если он удовлетворяет следующим условиям. Во-первых, $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$, а во-вторых (и в главных), пусть $U \subset X$ — открытое подмножество, $U = \bigcup U_i$ — его открытое покрытие. Для всякого набора $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ такого, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ для всех i и j, существует и единственно такое $s \in \mathcal{F}(U)$, что $s|_{U_i} = s_i$ для всех i.

Задача 2.3. Докажите, что во всех вышеприведенных примерах, кроме 2б$'''$ и 6, предпучки являются пучками.

Пучки из примеров 1 а–г называются *структурными пучками.*

Напомним, что топологическое пространство называется *неприводимым,* если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

- всякое непустое открытое подмножество в X всюду плотно в X
- X не является объединением двух своих собственных замкнутых подмножеств.

Хаусдорфово пространство неприводимо тогда и только тогда, когда состоит из одной точки; содержательные примеры неприводимых пространств дает топология Зарисского (см. ниже).

Задача 2.4. Докажите, что предпучок из примера 6 является пучком тогда и только тогда, когда пространство X неприводимо.

Задача 2.5. Докажите, что предпучок из примера 2б$'''$ не является пучком, если $H^t(X, \mathbb{R}) \neq 0$.

Решение. Пусть ω — замкнутая, но не точная t-форма на X. По лемме Пуанкаре найдется такое открытое покрытие $X = \bigcup U_i$, что все формы $\omega_i = \omega|_{U_i}$ точны. Ясно, что $\omega_i|_{U_i \cap U_j} = \omega_j|_{U_i \cap U_j}$, однако точной формы, ограничение которой на каждое U_i совпадает с ω_i, не существует: таковой формой может быть только ω, а она точной не является. $\square$

Гомоморфизмы предпучков и пучков определяются естественным образом:

Определение 2.6. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — предпучки (в частности, пучки) на пространстве X, то гомоморфизмом $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется набор гомоморфизмов $f_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ для каждого открытого $U \subset X$, коммутирующих с отображениями ограничения (подробнее: $f_U(s)|_V = f_V(s|_V)$, как только $V \subset U$).

Ядро, коядро и образ гомоморфизма *пред*пучков определяются бесхитростно:

Определение 2.7. Пусть $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — гомоморфизм предпучков. Тогда ядром (соответственно, коядром, образом) гомоморфизма f называется предпучок $U \mapsto \operatorname{Ker}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$ (соответственно: $U \mapsto \operatorname{Coker}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$, $U \mapsto \operatorname{Im}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$).

Задача 2.8. Доработайте это определение: определите отображения ограничения и убедитесь, что аксиомы предпучка выполнены.

Поскольку всякий пучок является предпучком, можно попытаться применить определение 2.7 и к пучкам. С ядром все проходит гладко:

Задача 2.9. Пусть $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — гомоморфизм пучков. Докажите, что предпучок $\operatorname{Ker} f$ является пучком.

С коядром и образом, однако же, этот номер не проходит. В самом деле, пусть, как в примере 2б$''$, Ω_X^m — пучок дифференциальных m-форм на дифференцируемом многообразии X ($\Omega_X^m(U)$ — пространство m-форм на открытом множестве $U \subset X$); пусть $d\colon \Omega_X^{m-1} \to \Omega_X^m$ — гомоморфизм, задаваемый внешним дифференцированием. Как мы видели в задаче 2.5, предпучок $\operatorname{Im} d$ быть пучком не обязан. Вот другой аналогичный пример.

Задача 2.10. Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. Рассмотрим на $\mathbb{C}$ пучок $\mathcal{O}^*$, определенный следующим образом: $\mathcal{O}^*(U)$ — множество голоморфных функций на U, нигде не обращающихся в нуль (групповая операция — умножение). Пусть $\varphi\colon \mathcal{O}^* \to \mathcal{O}^*$ — гомоморфизм, переводящий сечение (то бишь голоморфную функцию) f в f^n, где $n > 1$ — фиксированное целое число. Покажите, что предпучок $\operatorname{Im} \varphi$ не является пучком.

Указание. Из всякой ли голоморфной функции можно извлечь корень n-ой степени?

Итак, наивные определения коядра и образа доказали свою непригодность: по этим определениям из пучков могут получиться предпучки, не являющиеся пучками, между тем как для приложений важны именно пучки. Стало быть, приходится встать на более формальную точку зрения.

Определение 2.11. Ядром гомоморфизма пучков $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется пара $(\mathcal{K}, i)$, где $\mathcal{K}$ — пучок и $i\colon \mathcal{K} \to \mathcal{F}$ — гомоморфизм, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f \circ i = 0$;

2) если $i'\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{F}$ — такой гомоморфизм, что $f \circ i' = 0$, то существует единственный гомоморфизм $\varphi\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$, удовлетворяющий условию $i' = i \circ \varphi$ (см. диаграмму):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}' \arrow[d, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "i'"] & & \\ \mathcal{K} \arrow[r, "i"] & \mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G}. \end{tikzcd}$$

Иногда ядром называют сам пучок $\mathcal{K}$ или сам гомоморфизм i.

Определение 2.12. Коядром гомоморфизма пучков $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется пара $(\mathcal{C}, j)$, где $\mathcal{C}$ — пучок и $j\colon \mathcal{G} \to \mathcal{C}$ — гомоморфизм, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $j \circ f = 0$;

2) если $j'\colon \mathcal{G} \to \mathcal{C}'$ –такой гомоморфизм, что $j' \circ f = 0$, то существует единственный гомоморфизм $\psi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, удовлетворяющий условию $j' = \psi \circ j$ (см. диаграмму):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j'"'] & \mathcal{C} \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & & \mathcal{C}'. \end{tikzcd}$$

Иногда коядром называют сам пучок $\mathcal{C}$ или сам гомоморфизм j.

Из определений очевидно, что ядро и коядро гомоморфизма пучков определено однозначно с точностью до изоморфизма (если оно существует).

Образ гомоморфизма «по-научному» определяется так:

Определение 2.13. Образом гомоморфизма пучков $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется ядро его коядра.

Задача 2.14. Заменим всюду в определениях 2.11, 2.12 и 2.13 слово «пучок» на слово «модуль»; покажите, что получающиеся определения эквивалентны обычным определениям ядра, коядра и образа гомоморфизма модулей. Покажите, что, если заменить в тех же определениях слово «пучок» на «предпучок», то получающиеся определения будут эквивалентны определению 2.7.

Задача 2.15. Докажите, что ядро гомоморфизма пучков, определенное как в задаче 2.9, удовлетворяет условиям определения 2.11.

Итак, ядро гомоморфизма пучков всегда существует (и тем самым определено однозначно). Коядро у любого гомоморфизма пучков также существует, но для его построения нам потребуется некоторая подготовка. Начнем со следующего важного определения:

Определение 2.16. Пусть $\mathcal{F}$ — (пред)пучок на пространстве X, и пусть $x \in X$. Определим на множестве пар (s, U), где $U \subset X$ — открытое подмножество, содержащее x, и $s \in \mathcal{F}(U)$, такое отношение эквивалентности: $(s_1, U_1) \sim (s_2, U_2)$, если ограничения s_1 и s_2 на некоторое открытое подмножество $V \subset U_1 \cap U_2$, содержащее x, совпадают. Множество классов эквивалентности по этому отношению называется *слоем* (пред)пучка $\mathcal{F}$ в точке x.

Слой (пред)пучка $\mathcal{F}$ в точке x обозначается $\mathcal{F}_x$. Элементы $\mathcal{F}_x$ называются *ростками* $\mathcal{F}$ в точке x.

Задача 2.17. Докажите, что слой (в любой точке) структурного пучка n-мерного неособого комплексного многообразия изоморфен кольцу сходящихся степенных рядов от n переменных.

Следующий шаг в построении коядер состоит в том, чтобы определить для каждого предпучка «наиболее близкий к нему» пучок.

Именно, по произвольному предпучку $\mathcal{F}$ на пространстве X определим пучок $\mathcal{F}_+$ следующим образом. Сечение $\mathcal{F}_+$ над открытым подмножеством $U \subset X$ представляет собой семейство ростков $\sigma_x \in \mathcal{F}_x$, удовлетворяющее такому условию «непрерывности»: для всякой точки $x \in U$ существует такое открытое подмножество $V \subset U$, содержащее x, и такое сечение $s \in \mathcal{F}(V)$, что σ_y совпадает с ростком сечения s в точке y для всех $y \in V$. Отображения ограничения строятся очевидным образом.

Задача 2.18. Проверьте, что предпучок $\mathcal{F}_+$ всегда является пучком.

Пучок $\mathcal{F}_+$ называется *пучком, ассоциированным с предпучком* $\mathcal{F}$. По-английски операция перехода от $\mathcal{F}$ к $\mathcal{F}_+$ называется sheafication.

Задача 2.19. Пусть $\mathcal{F}$ — постоянный предпучок со слоем G, где G — абелева группа. Опишите, как устроены группы сечений $\mathcal{F}_+(U)$.

Пучок, ассоциированный с постоянным предпучком со слоем G, называется *постоянным пучком* и обозначается $\underline{G}$ или, если нет опасности путаницы, просто G.

Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок и $\mathcal{F}_+$ — ассоциированный с ним пучок. Построим канонический гомоморфизм $a\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}_+$ следующим образом: если $s \in \mathcal{F}(U)$, то $a(s)$ — семейство $\{s_x \in \mathcal{F}_x\}_{x \in U}$, в котором каждое s_x является ростком сечения s в точке x.

Задача 2.20. Покажите, что гомоморфизм a является изоморфизмом тогда и только тогда, когда предпучок $\mathcal{F}$ является пучком.

Задача 2.21. Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок, $\mathcal{G}$ — пучок на пространстве X. Покажите, что отображение $f \mapsto f \circ a$, где a — канонический гомоморфизм из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}_+$, задает изоморфизм между $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_+, \mathcal{G})$ и $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Замечание 2.22. На категорном языке (см. [3]) результат предыдущей задачи звучит так: функтор $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_+$ из категории предпучков в категорию пучков сопряжен слева «забывающему функтору» из категории пучков в категорию предпучков (по определению, забывающий функтор ставит в соответствие данному пучку $\mathcal{G}$ его же, рассматриваемого как предпучок).

Теперь мы можем построить коядро гомоморфизма пучков. Пусть $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — гомоморфизм пучков, и пусть $j_0\colon \mathcal{G} \to \mathcal{M}$ — коядро f как гомоморфизма *пред*пучков (таковое существует в силу задачи 2.14). Пусть, далее, $\mathcal{C}$ — предпучок, ассоциированный с $\mathcal{M}$, и $j = a \circ j_0$, где $a\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ — канонический гомоморфизм.

Задача 2.23. Докажите, что пара $(\mathcal{C}, j)$ является коядром гомоморфизма f.

Решение. Пусть $j'\colon \mathcal{G} \to \mathcal{C}'$ — такой гомоморфизм пучков, что $j' \circ f = 0$. Поскольку всякий пучок является предпучком и пара $(\mathcal{M}, j_0)$ является коядром f как гомоморфизма предпучков, существует единственный гомоморфизм $\psi_0\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}'$, для которого $j' = \psi_0 \circ j_0$;

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "j'"'] \arrow[dr, "j"] & \mathcal{M} \arrow[d, "a"] \arrow[dl, dashed, "\psi_0"'] \\
 & \mathcal{C}' & \mathcal{C} \arrow[l, dashed, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

в задаче 2.21 мы показали, что существует единственный гомоморфизм $\psi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, для которого $\psi \circ a = j$. Ясно, что гомоморфизм ψ — именно тот, существование которого требуется по определению коядра. □

Если $\mathcal{F}$ — предпучок на пространстве X, то, по определению, $\mathcal{G}$ является его подпредпучком, если $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ при всех U и отображения ограничения из $\mathcal{F}(U)$ в $\mathcal{F}(V)$ отображают $\mathcal{G}(U)$ в $\mathcal{G}(V)$. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки, то говорят, что $\mathcal{G}$ — *подпучок* пучка $\mathcal{F}$.

Определение 2.24. Пусть $\mathcal{G}$ — подпучок пучка $\mathcal{F}$; *фактор-пучком* $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ называется коядро естественного гомоморфизма $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$.

Задача 2.25. Покажите, что факторпучок $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ изоморфен пучку, ассоциированному с предпучком $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$.

Коль скоро ядра и коядра всегда существуют, у всякого гомоморфизма пучков существует и образ (см. определение 2.13).

Задача 2.26. Пусть $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — гомоморфизм пучков. Покажите, что $\operatorname{Im} f$ изоморфен пучку, ассоциированному с предпучком $U \mapsto (\operatorname{Im}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$.

Задача 2.27. Покажите, что образ гомоморфизма f пучков изоморфен коядру ядра f («теорема о гомоморфизме!»).

Чтобы у вас не создалось впечатления, что мы всего лишь нудно доказываем очевидные вещи, рассмотрим следующий пример. Повторим определения 2.11, 2.12 и 2.13, заменив в них всюду слово «пучок» на «коммутативная хаусдорфова топологическая группа» (под гомоморфизмами будем понимать непрерывные гомоморфизмы).

Задача 2.28. Покажите, что всякий гомоморфизм коммутативных хаусдорфовых топологических групп обладает ядром и коядром (Ответ: ядро — такое же, как получается при наивном определении, коядро — фактор по замыканию образа).

Задача 2.29. Пусть $A = \mathbb{R}$, $B = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$, и $f\colon A \to B$ — обмотка тора:

$$x \mapsto (x, x\sqrt{2}) \bmod (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}).$$

Покажите, что $\operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} f)$ неизоморфно $\operatorname{Im} f$.

Как видите, для хаусдорфовых коммутативных топологических групп теорема о гомоморфизме неверна. По-ученому говоря, категория пучков (так же, как и категория модулей) является абелевой категорией, а категория хаусдорфовых коммутативных топологических групп — нет. См. по этому поводу книгу [3].

Наконец, дадим определение точной последовательности пучков. Оно дословно совпадает с тем, к чему мы привыкли для модулей:

Определение 2.30. Последовательность пучков и гомоморфизмов

$$\ldots \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{g} \mathcal{F}_3 \to \ldots$$

называется *точной в члене* $\mathcal{F}_2$, если $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ как подпучки пучка $\mathcal{F}_2$.

Задача 2.31. Покажите, что последовательность пучков (на пространстве X) и гомоморфизмов

$$\ldots \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{g} \mathcal{F}_3 \to \ldots$$

точна в члене $\mathcal{F}_2$ тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$ точна в члене $(\mathcal{F}_2)_x$ последовательность слоев

$$\ldots \to (\mathcal{F}_1)_x \xrightarrow{f} (\mathcal{F}_2)_x \xrightarrow{g} (\mathcal{F}_3)_x \to \ldots .$$

Задача 2.32. Пусть X — комплексное многообразие (риманова поверхность, например), $\mathcal{O}_X$ — пучок голоморфных функций (пример 1в), $\mathcal{O}_X^*$ — пучок голоморфных функций, не обращающихся в нуль (задача 2.10), $\mathbb{Z}$ — постоянный пучок со слоем $\mathbb{Z}$. Покажите, что существует точная последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X^* \to 0,$$

в которой гомоморфизм φ переводит функцию f в $e^{2\pi i f}$.

Вот венец наших рассуждений с ядрами, коядрами и точными последовательностями:

Задача 2.33. Проверьте, что все результаты первого раздела остаются в силе, если в определении комплекса, гомотопии и т. п. слово «абелева группа» заменить на «пучок абелевых групп» (упражняйтесь, пока общий принцип не станет вам ясен).

Если $\mathcal{F}$ — пучок на пространстве X, то группа $\mathcal{F}(X)$ (группа глобальных сечений) обозначается еще $\Gamma(\mathcal{F})$ (или $\Gamma(X, \mathcal{F})$, если необходимо подчеркнуть, на каком пространстве определен пучок $\mathcal{F}$). Другое обозначение для той же самой группы: $H^0(X, \mathcal{F})$ или $H^0(\mathcal{F})$ («нулевая группа когомологий»).

Задача 2.34. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

— точная последовательность пучков на пространстве X. Покажите, что индуцированная последовательность групп сечений

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_3) \tag{2.1}$$

также точна.

Задача 2.35. Покажите на примере, что точную последовательность (2.1) не всегда можно дополнить нулем справа, не нарушая точности (иными словами, эпиморфизм пучков не обязательно индуцирует эпиморфизм глобальных сечений).

Указание. Поищите примеры среди разобранных в этом разделе.

Теория когомологий пучков занимается, грубо говоря, тем, что измеряет неточность последовательностей 2.1.

3. Примеры из алгебраической геометрии

Напоминания

Напомним некоторые определения из элементарной алгебраической геометрии (по поводу подробностей и доказательств см. [9, 12]).

Зафиксируем алгебраически замкнутое поле k; *n-мерным аффинным пространством* над полем k называется множество всех упорядоченных наборов $(x_1, \ldots, x_n)$, где все x_j принадлежат k. Обозначается n-мерное аффинное пространство так: $\mathbb{A}^n$. Множества вида $\{\, x \in \mathbb{A}^n \mid f_\alpha(x) = 0 \quad \text{для всех } \alpha \,\}$, где $\{f_\alpha\}$ — набор многочленов от n переменных, называются замкнутыми подмножествами $\mathbb{A}^n$. Такое понимание слова «замкнутое множество» вводит на $\mathbb{A}^n$ топологию (нехаусдорфову, если $n > 0$); она называется *топологией Зарисского.*

Пусть X — замкнутое подмножество аффинного пространства $\mathbb{A}^n$, и пусть $R = k[T_1, \dots, T_n]$ — кольцо многочленов. Положим

$$I_X = \{\, f \in R \mid f(x) = 0 \quad \text{для всех } x \in X \,\}.$$

I_X является идеалом в кольце R. Множество X неприводимо тогда и только тогда, когда идеал I_X прост, или, эквивалентно, кольцо R/I_X не имеет делителей нуля. Это кольцо обозначается еще $k[X]$; если назвать регулярной функцией на X функцию из X в k, являющуюся ограничением с $\mathbb{A}^n$ функции, задаваемой многочленом, то $k[X]$ — кольцо регулярных функций на X.

Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — замкнутое подмножество, $A = k[X]$. Для всякого идеала $I \subset A$ положим

$$V(I) = \{\, x \in X \mid f(x) = 0 \quad \text{для всех } f \in I \,\}.$$

Соответствие $I \mapsto V(I)$ обладает следующими свойствами:

- $V(I) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $I = R$;
- $f \in A$ обращается в нуль во всех точках $x \in V(I)$ тогда и только тогда, когда $f^m \in I$ для некоторого m.

Утверждения «тогда» в обоих случаях тривиальны, утверждения «только тогда» составляют содержание так называемой теоремы Гильберта о нулях [1, 9].

Топология Зарисского на $\mathbb{A}^n$ индуцирует топологию Зарисского на всяком замкнутом подмножестве $X \subset \mathbb{A}^n$. Для всякого $f \in k[X]$ положим $D(f) = \{\, x \in X \mid f(x) \neq 0 \,\}$. Подмножества $D(f) \subset X$ открыты и образуют базу топологии Зарисского на X.

Всякое замкнутое (в топологии Зарисского — не будем всякий раз это оговаривать) подмножество $X \subset \mathbb{A}^n$ можно единственным образом представить в виде конечного объединения $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$, где все X_i замкнуты, неприводимы и не содержатся одно в другом.

Пусть теперь X — неприводимое замкнутое подмножество в аффинном пространстве. Построим на X пучок колец[2]. Для

[2] За счет небольшого технического усложнения аналогичный пучок можно построить, не предполагая неприводимости X. Нам с этой конструкцией иметь дело тоже придется, но чуть погодя.

этого рассмотрим поле частных кольца X; это поле обозначается $k(X)$ и называется *полем рациональных функций* на X. Если $\varphi \in k(X)$ — рациональная функция и $x \in X$, то будем говорить, что φ *определена в точке* x, если существуют такие функции $f, g \in k[X]$, что $\varphi = f/g$ и $g(x) \neq 0$. Если теперь $U \subset X$ — открытое подмножество, то обозначим через $\mathcal{O}_X(U)$ множество рациональных функций (то есть элементов поля $k(X)$), определенных во всех точках $x \in U$. Соответствие $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ с естественными отображениями ограничения является, очевидно, пучком. Этот пучок обозначается $\mathcal{O}_X$ и называется *структурным пучком* X.

Задача 3.1. Докажите, что $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k[X]$.

Решение. Из самого определения ясно, что $k[X] \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Пусть, напротив, $\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. По условию, это означает, что $\varphi \in k(X)$ и что для всякого $x \in X$ существуют такие $f_x, g_x \in k[X]$, что $\varphi = f_x/g_x$ и $g_x(x) \neq 0$. Стало быть, система уравнений $\{g_x = 0\}_{x \in X}$ несовместна; по теореме Гильберта о нулях отсюда следует, что функции g_x порождают единичный идеал в кольце $k[X]$, то есть что существуют точки $x_1, \ldots, x_m \in X$ и функции $h_1, \ldots, h_m \in k[X]$ такие, что

$$1 = h_1 g_{x_1} + \cdots + h_m g_{x_m}.$$

Умножим обе части этого равенства на φ. Поскольку $\varphi \cdot g_{x_i} = f_{x_i}$, получаем, что

$$\varphi = h_1 f_{x_1} + \cdots + h_m f_{x_m}.$$

Правая часть этого равенства лежит в $k[X]$, что и требовалось. $\square$

«Разбиение единицы», примененное в этом рассуждении, изобретено Серром.

Задача 3.2. В условиях предыдущей задачи пусть $f \in k[X]$. Покажите, что $\mathcal{O}_X(D(f))$ состоит из всех элементов поля $k(X)$, представимых в виде a/f^m, где $a \in k[X]$ и $m \geqslant 0$.

Указание. Воспользуйтесь второй частью теоремы Гильберта о нулях.

Алгебраическими многообразиями называются объекты, получающиеся в результате склейки аффинных многообразий. Точнее говоря:

Определение 3.3. Алгебраическим многообразием называется пара $(X, \mathcal{O}_X)$, где X — топологическое пространство и $\mathcal{O}_X$ — пучок колец на X, являющийся подпучком пучка (всех) функций на X со значениями в k, удовлетворяющая следующему условию: существует такое конечное открытое покрытие $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$, что для каждого U_i существуют аффинное многообразие X_i и гомеоморфизм $\varphi_i\colon U_i \to X_i$, отождествляющий сечения пучка $\mathcal{O}_X$ над открытыми подмножествами $V \subset U_i$ с сечениями пучка O_{X_i} над подмножествами $\varphi_i(V) \subset X_i$.

Именно так определял алгебраические многообразия Серр в знаменитой статье [10]. Такому понятию, однако, недостает гибкости, и для работы оно не всегда удобно. Более «правильное» понятие — изобретенные Гротендиком *схемы.* Один из возможных способов ознакомиться с теорией схем — по книге Д. Мамфорда [7].

Если X — алгебраическое многообразие, то слой структурного пучка O_X в точке $x \in X$ обозначается $\mathcal{O}_{X,x}$ и называется *локальным кольцом многообразия X в точке x.* Иногда вместо $\mathcal{O}_{X,x}$ пишут просто $\mathcal{O}_x$.

Нам потребуется еще определение *морфизмов* алгебраических многообразий. Морфизм из алгебраического многообразия $(X, \mathcal{O}_X)$ в алгебраическое многообразие $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — это непрерывное отображение $\varphi\colon X \to Y$, удовлетворяющее следующему условию: если $U \subset Y$ — открытое подмножество и $f \in \mathcal{O}_Y(U)$, то $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ (иными словами, морфизм — непрерывное отображение, переводящее регулярные функции в регулярные). Если многообразие Y аффинно, то всякий морфизм из X в Y однозначно определяется индуцированным гомоморфизмом колец $k[Y] \to \mathcal{O}_X(X)$, и обратно, всякий гомоморфизм этих колец, оставляющий основное поле k на месте, индуцирован некоторым морфизмом из X в Y.

Важнейшие примеры алгебраических многообразий, не являющихся аффинными, доставляют *проективные многообразия.* Именно, рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^n$ как фактор $(\mathbb{A}^{n+1} \setminus 0)/k^*$. Точки $\mathbb{P}^n$ будем задавать однородными координатами $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$. Замкнутыми подмножествами $\mathbb{P}^n$ назовем подмножества, заданные системами уравнений вида $\{ F_\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \}$, где $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ и F_α — *однородные* многочлены от $T_0, \ldots, T_n$. Топология на $\mathbb{P}^n$, определяемая таким набором замкнутых множеств, также называется топологией Зарисского. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое замкнутое подмножество; снабдим его топологией Зарисского (индуцированной с $\mathbb{P}^n$).

Обозначим через $\hat{X}$ замкнутое подмножество в $\mathbb{A}^{n+1}$, заданное теми же уравнениями, что X. Очевидно, $\hat{X}$ неприводимо. Аффинное многообразие $\hat{X}$ является конусом с вершиной в начале координат и называется аффинным конусом над X; имеем $X = (\hat{X} \setminus \{0\})/k^*$ (по крайней мере как множества). Положим $R_X = k[\hat{X}]$; если обозначить через $R_i \subset R_X$ аддитивную подгруппу, порожденную однородными многочленами степени i, то $R_X = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ и $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$; иными словами, R_X является *градуированным кольцом.* Пусть K — поле частных кольца R_X (то есть поле рациональных функций на $\hat{X}$). Для каждого открытого подмножества $U \subset X$ назовем *регулярной функцией* на U элемент $\varphi \in K$, удовлетворяющий следующему условию:

> Для всякой точки $x \in U$ существует такое $i \geqslant 0$, что
> $\varphi = F/G$, где $F, G \in R_i$ и $G(x) \neq 0$.

Иными словами, регулярная функция на U локально представляется в виде отношения двух однородных многочленов одинаковой степени (и тем самым действительно является функцией из U в k). Кольцо функций, регулярных на U, обозначается $\mathcal{O}_X(U)$.

Покажем, что пара $(X, \mathcal{O}_X)$, где пучок колец $\mathcal{O}_X$ на X определен по правилу $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$, является алгебраическим многообразием. Делается это следующим образом. Для всякого $i \in [0; n]$ через $\mathbb{A}^n_i \subset \mathbb{P}^n$ обозначим открытое подмножество, состоящее из точек, у которых однородная координата x_i отлична от нуля; отображение $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_n)$ задает биекцию между $\mathbb{A}_i^n$ и $\mathbb{A}^n$. Положим $U_i = X \cap \mathbb{A}_i^n$.

Задача 3.4. Докажите следующие утверждения:

(а) вышеописанная биекция между $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{A}_i^n$ является гомеоморфизмом (в топологии Зарисского);

(б) имеется изоморфизм пучков $\mathcal{O}_X|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$, где в правой части стоит структурный пучок на U_i, рассматриваемом как неприводимое замкнутое подмножество $\mathbb{A}_i^n \cong \mathbb{A}^n$.

Указание. Подробности можно посмотреть у Рида или Шафаревича.

Задача 3.5. Пусть X — аффинное многообразие, $f \in k[X]$. Покажите, что пара $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)})$ является аффинным алгебраическим многообразием.

Указание. Рассмотрите множество

$$Y = \{\, (x, t) \in X \times \mathbb{A}^1 \mid t \cdot f(x) = 1 \,\}.$$

Примеры пучков на алгебраических многообразиях

Пусть $\mathcal{O}$ — пучок колец на пространстве X. В наших приложениях X будет алгебраическим многообразием с топологией Зарисского, а $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ — структурным пучком, но начнем мы с более общей ситуации. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X. Будем говорить, что $\mathcal{F}$ является *пучком модулей над пучком колец* $\mathcal{O}$, или попросту $\mathcal{O}$-*модулем*, если на каждой из групп сечений $\mathcal{F}(U)$ задана структура $\mathcal{O}(U)$-модуля, причем эти структуры согласованы друг с другом в следующем смысле: если $V \subset U$, и если $f \in \mathcal{O}(U)$, $s \in \mathcal{F}(U)$, то $(fs)|_V = f|_V \cdot s|_V$. Если $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — два $\mathcal{O}$-модуля, то гомоморфизм пучков абелевых групп $f\colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ называется $\mathcal{O}$-гомоморфизмом, если все гомоморфизмы $\mathcal{F}_1(U) \to \mathcal{F}_2(U)$ являются гомоморфизмами $\mathcal{O}(U)$-модулей.

В дальнейшем, говоря о гомоморфизмах, изоморфизмах... $\mathcal{O}$-модулей, мы будем подразумевать $\mathcal{O}$-гомоморфизмы (если явно не оговорено иное).

Типичный пример $\mathcal{O}$-модуля: X — топологическое пространство (соответственно гладкое многообразие, комплексное многообразие), $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок, то есть пучок непрерывных (соответственно гладких, голоморфных) функций, E — векторное расслоение (соответственно гладкое векторное расслоение, голоморфное векторное расслоение) на X, $\mathcal{O}_X(E)$ — пучок непрерывных (соответственно гладких, голоморфных) сечений расслоения E. Тогда пучок $\mathcal{O}_X(E)$ является $\mathcal{O}_X$-модулем. Еще один (скучный) пример пучка модулей: постоянный пучок $\mathbb{Z}$ на пространстве X можно рассматривать как пучок колец; тогда *любой* пучок абелевых групп является пучком модулей над пучком колец $\mathbb{Z}$.

Пусть $\mathcal{O}$ — пучок колец на пространстве X. Тогда $\mathcal{O}$-модуль (то есть пучок $\mathcal{O}$-модулей) $\mathcal{F}$ называется *свободным ранга* r, если он изоморфен $\mathcal{O}^r$ — прямой сумме r экземпляров пучка $\mathcal{O}$. Более важно для нас понятие *локально свободного* пучка. $\mathcal{O}$-модуль $\mathcal{F}$ называется *локально свободным,* если у пространства X существует такое открытое покрытие $X = \bigcup U_i$, что $\mathcal{F}|_{U_i}$ свободен над $\mathcal{O}|_{U_i}$ для всех i. Пучок сечений векторного расслоения всегда локально свободен. Этот факт верен для расслоений на дифференцируемых или комплексных многообразиях или на произвольных топологических пространствах, но нам он нужен для расслоений на алгебраических многообразиях:

Задача 3.6. Пусть E — векторное расслоение на алгебраическом многообразии X (определение полностью аналогично, например, определению гладкого векторного расслоения на дифференцируемом многообразии, если всюду заменить слова «дифференцируемое многообразие» на «алгебраическое многообразие» и «гладкое отображение» на «морфизм»), $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок. Докажите, что пучок $\mathcal{O}_X(E)$ локально свободен.

Обратно, всякий локально свободный пучок (конечного ранга) происходит из векторного расслоения:

Задача 3.7. Пусть, в ситуации предыдущей задачи, $\mathcal{F}$ — локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль конечного ранга. Докажите, что $\mathcal{F}$ имеет вид $\mathcal{O}_X(E)$ для некоторого векторного расслоения E.

Указание. Пусть ограничения $\mathcal{F}$ на открытые подмножества U_i и U_j свободны. Сравнив базисы для $\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j}$, происходящие из базисов $\mathcal{F}|_{U_i}$ и $\mathcal{F}|_{U_j}$, получим матрицы перехода векторного расслоения.

Особенно важен случай векторных расслоений ранга 1 (*линейных расслоений*) и соответствующих им локально свободных пучков ранга 1 (они называются *обратимыми пучками*).

Приведем пример обратимого пучка. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, r — целое число. Определим пучок $\mathcal{O}_X(r)$ следующим образом. Пусть $R_X = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ — однородное координатное кольцо многообразия X (см. с. 26), K — поле частных R_X. Сечением $\mathcal{O}_X(r)$ над открытым множеством $U \subset X$ назовем такой элемент $\varphi \in K$, что для всякой точки $x \in U$ существует такое $i \geqslant 0$, что $\varphi = F/G$, где $F \in R_{i+r}$, $G \in R_i$ и $G(x) \neq 0$. Иными словами, сечения $\mathcal{O}_X(r)$ над U суть однородные функции степени r, определенные всюду на U. Если $r = 0$, то $\mathcal{O}_X(r)$ есть не что иное, как структурный пучок $\mathcal{O}_X$; если, однако, $r \neq 0$, то сечения $\mathcal{O}_X(r)$ функциями на X не являются: при попытке приписать сечению «значение» в данной точке обнаруживается, что это значение зависит от выбора однородных координат.

Задача 3.8. Убедитесь, что $\mathcal{O}_X(r)$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, являющийся обратимым пучком.

Решение. Пусть $U_i = X \cap \mathbb{A}^n_i$. Тогда умножение на x_i^{-r} дает изоморфизм из $\mathcal{O}_X(r)|_{U_i}$ на $\mathcal{O}_{U_i}$. □

Задача 3.9. Пусть $\mathbb{P}^n$ — проективизация $(n+1)$-мерного векторного пространства E (то есть множество прямых в E). В тривиальном векторном расслоении со слоем E над $\mathbb{P}(E)$ рассмотрим подрасслоение L, у которого слой над точкой $p \in \mathbb{P}(E)$, соответствующей прямой $\ell \subset E$, совпадает с этой прямой ℓ. Докажите, что это действительно локально тривиальное линейное расслоение и что соответствующий ему обратимый пучок изоморфен $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$.

Указание. Пусть $\langle e_0, e_1, \ldots, e_n \rangle$ — базис E. Всякое сечение этого расслоения над открытым множеством $U \subset \mathbb{P}^n$ имеет вид $f_0 e_0 + \cdots + f_n e_n$, где f_j — регулярные функции на U, удовлетворяющие условиям $f_i x_j = f_j x_i$ для всех i и j ($x_0, x_1, \ldots, x_n$ — однородные координаты). Тогда $f_0/x_0 = f_1/x_1 = \cdots = f_n/x_n$ — элемент поля K, представляющий сечение $\mathcal{O}_X(-1)$.

Пусть $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на многообразии X, соответствующий линейному расслоению L, и пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие, над которым пучок $\mathcal{L}$ (или, что эквивалентно, расслоение L) тривиализуется. Пусть $\varphi_i \colon \mathcal{L}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ — соответствующие изоморфизмы. Ограничим их на $U_i \cap U_j$ и рассмотрим автоморфизм $(\varphi_i)|_{U_i \cap U_j} \circ (\varphi_j)^{-1}|_{U_i \cap U_j} \colon \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \to \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$. Всякий автоморфизм пучка $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$ (как модуля над собой) есть не что иное, как умножение на функцию $g_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$, не обращающуюся в нуль нигде на $U_i \cap U_j$. Функции g_{ij} называются *функциями перехода* обратимого пучка (или соответствующего линейного расслоения). Конечно, они зависят от выбора тривиализующего покрытия $\{U_i\}$ и тривиализаций $\{\varphi_i\}$. Пусть $s \in \mathcal{L}(U)$ — сечение; положим $s_i = \varphi_i(s|_{U \cap U_i}) \in \mathcal{O}_X(U \cap U_i)$. Из нашего обсуждения ясно, что:

> Существует взаимно однозначное соответствие между сечениями пучка $\mathcal{L}$ над открытым множеством U и наборами регулярных функций $\{s_i \in \mathcal{O}_X(U \cap U_i)\}$, удовлетворяющими условию
>
> $$s_i|_{U \cap U_i \cap U_j} = g_{ij} s_j|_{U \cap U_i \cap U_j}.$$

Задача 3.10. Найдите функции перехода пучка $\mathcal{O}_X(r)$, связанные с покрытием $U_i = X \cap \mathbb{A}^n_i$ и тривиализациями, указанными в решении задачи 3.8.

Ответ. $g_{ij} = (x_j/x_i)^r$.

В связи с функциями перехода уместно дать следующие определения.

Определение 3.11. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве X, и пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ — открытое покрытие. *Чеховским 1-коциклом* (соответствующим пучку $\mathcal{F}$ и покрытию $\mathfrak{U}$) называется набор сечений $\{g_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)\}$ для всех пар (i,j), где $i \neq j$, удовлетворяющий условиям:

- $g_{ij} + g_{ji} = 0$ для всех i, j; $g_{ii} = 0$.
- $g_{ij}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} + g_{jk}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} + g_{ki}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} = 0$ для всех i, j, k.

Чеховский 1-коцикл $\{g_{ij}\}$ называется *кограницей,* если существуют такие сечения $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$, что $g_{ij} = h_i|_{U_i\cap U_j} - h_j|_{U_i\cap U_j}$ для всех i, j.

Факторгруппа группы 1-коциклов по группе 1-кограниц называется *первой группой чеховских когомологий покрытия* $\mathfrak{U}$ *с коэффициентами в пучке* $\mathcal{F}$ и обозначается $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Задача 3.12. Пусть X — алгебраическое многообразие, $\mathfrak{U}$ — его открытое покрытие. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфизма обратимых пучков на X, тривиализующихся над $\mathfrak{U}$, и группой $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$, где пучок $\mathcal{O}_X^*$ определен по правилу

$$\mathcal{O}_X^*(U) = \{\, f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(x) \neq 0 \text{ для всех } x \in U \,\}$$

(групповая операция — умножение).

Указание. Обратимому пучку ставятся в соответствие функции перехода; как они изменятся при другом выборе тривиализаций?

Задача 3.13. Докажите, что $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)) = 0$ при $r < 0$ и изоморфно пространству однородных многочленов степени r от $X_0, \ldots, X_n$ при $r \geqslant 0$.

Решение. Пусть s — сечение пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ над $\mathbb{A}^n_i \subset \mathbb{P}^n$. Тогда s/X_i^r — регулярная функция на $\mathbb{A}^n_i$, то есть многочлен от

$X_0/X_i, \ldots, X_{i-1}/X_i, X_{i+1}/X_i, \ldots, X_n/X_i$. Стало быть, $s|_{\mathbb{A}^n_i}$ представляется в виде F_i/X_i^m, где F_i — однородный многочлен степени $m+r$ (приводя к общему знаменателю, можно считать, что m — одно и то же для всех i). Итак, для всех i, j имеем $F_i/X_i^m = F_j/X_j^m$, или $X_j^m F_i = X_i^m F_j$. Следовательно, каждый из многочленов F_i делится на X_i^m. Если $s \neq 0$, то из этого следует, во-первых, что $\deg F_j \geqslant m \Rightarrow r \geqslant 0$, и во-вторых, что все F_j/X_i^m равны некоторому однородному многочлену G степени r. Все доказано. $\square$

Полагая в этой задаче $r = 0$, получаем, что $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = k$, то есть все регулярные функции на проективном пространстве являются константами. Точно так же константами являются все регулярные функции на любом проективном многообразии. Интуитивно это более или менее ясно (если основное поле — $\mathbb{C}$, то проективное многообразие является компактным комплексным пространством, а регулярные функции на нем голоморфны, так что утверждение следует из принципа максимума модуля), но доказать это алгебраически не так просто. Самое элементарное доказательство получается с помощью теории исключения (см. [12]). В нашем курсе этот факт окажется побочным продуктом теории когомологий когерентных пучков.

К счастью или к несчастью, при $r > 0$ и для произвольного $X \subset \mathbb{P}^n$ пространство $H^0(X, \mathcal{O}_X(r))$ так просто не вычислишь.

Приведем теперь примеры O_X-модулей, не являющихся локально свободными.

Пусть $Y \subset X$ — замкнутое (в топологии Зарисского, естественно) подмножество алгебраического многообразия X. Определим подпучок $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ так: $\mathcal{I}_Y(U)$ состоит из регулярных функций $f \in \mathcal{O}_X(U)$, тождественно обращающихся в нуль на Y. Очевидно, $\mathcal{I}_Y(U)$ является идеалом в кольце $\mathcal{O}_X(U)$, так что $\mathcal{I}_Y$ действительно является $\mathcal{O}_X$-модулем. Пучок $\mathcal{I}_Y$ называется *пучком идеалов* замкнутого подмножества $Y \subset X$; очень часто этот пучок не будет локально свободным. Впрочем, «очень часто» — не то же самое, что «всегда»:

Задача 3.14. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимая гиперповерхность степени d (это означает, что X — множество нулей неприводимого однородного многочлена степени d). Покажите, что $\mathcal{I}_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)$.

Задача 3.15. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — точка. Покажите, что пучок идеалов $\mathcal{I}_X \subset \mathbb{P}^n$ не является локально свободным при $n > 1$.

Другой пример. Пусть $Y \subset X$ — замкнутое подмногообразие алгебраического многообразия X, обозначим вложение через $i\colon Y \hookrightarrow X$. Пусть теперь $\mathcal{F}$ — любой пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Определим пучок $i_*\mathcal{F}$ на X так: $(i_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(Y \cap U)$ (это частный случай конструкции «прямого образа» пучка). Пучок $i_*\mathcal{F}$ обладает естественной структурой $\mathcal{O}_X$-модуля. В самом деле, чтобы ввести такую структуру, нам надо объяснить, как умножить регулярную функцию $f \in \mathcal{O}_X(U)$, где $U \subset X$, на сечение $s \in \mathcal{F}(U \cap Y)$. Это делается очевидным образом: $f \cdot s = (f|_U \cap Y) \cdot s$.

Задача 3.16. Пусть $Y \subset X$ — неприводимое замкнутое подмногообразие, i — вложение. Покажите, что существует естественная точная последовательность

$$0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0.$$

На практике в описанной ситуации применяют более вольную запись: вместо $i_*\mathcal{F}$ пишут просто $\mathcal{F}$.

Линейные системы

В этом разделе речь пойдет о связи между обратимыми пучками и морфизмами многообразий в проективные пространства.

Определение 3.17. *Линейной системой* на (алгебраическом) многообразии X называется пара $(\mathcal{L}, V)$, где $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на X и $V \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ — конечномерное векторное подпространство.

Замечание 3.18. Позже мы покажем, что для проективного X и локально свободного пучка $\mathcal{E}$ пространство $H^0(X, \mathcal{E})$ всегда конечномерно, так что для проективных X условие конечномерности в этом определении можно опустить.

Определение 3.19. Пусть $(\mathcal{L}, V)$ — линейная система на алгебраическом многообразии X; обозначим через L линейное расслоение, соответствующее обратимому пучку L. Точка $x \in X$ называется *базисной точкой* нашей линейной системы, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

(а) для всех $s \in V$ имеем $s(x) = 0$ (s рассматривается как сечение расслоения L);

(б) ростки сечений $s \in V$ в точке X *не* порождают $\mathcal{L}_x$ как $\mathcal{O}_{X,x}$-модуль.

Задача 3.20. Убедитесь, что эти условия действительно эквивалентны.

Пусть $(\mathcal{L}, V)$ — линейная система без базисных точек на многообразии X, и пусть L — линейное расслоение, соответствующее $\mathcal{L}$. Положим $\dim V = n+1$. Обозначим через $\mathbb{P}^*(V)$ множество гиперплоскостей (векторных подпространств коразмерности 1) в пространстве V. Линейная система определяет отображение из X в $\mathbb{P}^*(V)$ по формуле $x \mapsto V_x$, где гиперплоскость $V_x \subset V$ состоит из сечений L, принадлежащих пространству V и обращающихся в нуль в точке x.

Задача 3.21. Пусть $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ — базис пространства V. Отождествим слой расслоения L в точке x с k. Покажите, что гиперплоскость $V_x \subset V$ задается уравнением

$$s_0(x)v_0 + \dots + s_n(x)v_n = 0,$$

где $(y_0, \dots, y_n)$ — координаты в пространстве V относительно базиса $(s_0, s_1, \dots, s_n)$, и тем самым отображение из X в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^*(E)$ задается формулой $x \mapsto (s_0(x) : s_1(x) : \dots : s_n(x))$.

Задача 3.22. Покажите, что отображение, определяемое линейной системой, является морфизмом алгебраических многообразий.

Задача 3.23. Пусть $(\mathcal{L}, V)$ — линейная система без базисных точек на алгебраическом многообразии X. Покажите, что отображение, определяемое этой линейной системой, будет взаимно однозначным отображением на свой образ тогда и только тогда, когда линейная система «разделяет точки»: для любых двух точек $x, y \in X$ существует такое $s \in V$, что $s(x) = 0$, $s(y) \neq 0$.

Описанную конструкцию можно обратить:

Задача 3.24. Пусть $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$ — морфизм алгебраического многообразия в проективное пространство, причем $\varphi(X)$ не лежит ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{P}^n$. Докажите, что морфизм φ определяется некоторой линейной системой на X.

Указание. Пусть Λ — линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$, соответствующее обратимому пучку $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, и пусть $L = \varphi^*(\Lambda)$ — прообраз линейного расслоения Λ на X (напомним общегеометрическое понятие прообраза расслоения: если $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм, $\tilde{\Lambda}$ — тотальное пространство расслоения Λ, и $\pi : \tilde{\Lambda} \to Y$ — проекция, то $\tilde{L} = \{\, (x, \lambda) \in X \times \tilde{\Lambda} \mid \varphi(x) = \pi(\lambda) \,\}$ — тотальное пространство расслоения над X, называемого прообразом Λ относительно отображения φ). Если $x_0, \ldots, x_n$ — однородные координаты в $\mathbb{P}^n$, рассматриваемые как сечения Λ (см. задачу 3.13), то их же можно рассмотреть как сечения $L = \varphi^*\Lambda$. Линейная система, порождаемая этими сечениями, является искомой.

Задача 3.25. Пусть X — алгебраическое многообразие. Покажите, что конструкция морфизма по линейной системе задает взаимно однозначное соответствие между множеством линейных систем без базисных точек $(\mathcal{L}, V)$ на X, для которых $\dim V = n{+}1$, и множеством классов эквивалентности морфизмов $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$, для которых линейная оболочка $\varphi(X)$ совпадает со всем $\mathbb{P}^n$. При этом морфизмы φ и φ' считаются эквивалентными, если существует дробно-линейный автоморфизм $u\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, для которого $u \circ \varphi = \varphi'$.

Замечание 3.26. Поскольку морфизм $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$, для которого $\varphi(X)$ лежит в гиперплоскости, является композицией линейного вложения проективных пространств и морфизма, удовлетворяющего условиям этой задачи, мы получили полное описание морфизмов в проективные пространства.

Кстати, у проективных пространств и нет никаких автоморфизмов, кроме дробно-линейных.

Задача 3.27. Пусть X — алгебраическое многообразие, $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на X, и пусть $V \subset V' \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ — линейные подпространства размерностей m и m' соответственно. Предположим, что линейная система $(\mathcal{L}, V)$ не имеет базисных точек.

(а) Покажите, что и линейная система $(\mathcal{L}, V')$ не имеет базисных точек.

(б) Пусть $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^{m-1}$ и $\varphi'\colon X \to \mathbb{P}^{m'-1}$ — морфизмы, определяемые этими линейными системами. Покажите, что $\varphi = \pi \circ \varphi'$, где $\pi\colon \mathbb{P}^{m'-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ — проекция с центром в некотором линейном подпространстве Λ размерности $m' - m - 1$, не пересекающемся с $\varphi'(X)$ (проекция π изображена пунктирной стрелкой, так как она определена не на всем $\mathbb{P}^{m'}$, а только на $\mathbb{P}^{m'} \setminus \Lambda$).

Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие; предположим также, что X не лежит ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{P}^n$ (это просто нормировка). Какой линейной системой задается вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$? Сейчас увидим.

Задача 3.28. Для всякого целого r постройте гомоморфизм пучков $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r) \to O_X(r)$ (точнее говоря, в правой части стоит $i_*\mathcal{O}_X(r)$, где i — вложение X в $\mathbb{P}^n$; см, с. 33); покажите, что этот гомоморфизм является эпиморфизмом и что его ядро изоморфно $\mathcal{I}_X(r)$, где подпучок $\mathcal{I}_X(r) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ состоит из сечений, обращающихся в нуль на X (дайте точное определение).

Решив эту задачу, мы, в частности, построили точную последовательность

$$0 \to \mathcal{I}_X(r) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r) \to \mathcal{O}_X(r) \to 0. \qquad (3.1)$$

Задача 3.29. Покажите, что вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ задается линейной системой $(\mathcal{O}_X(1), V)$, где V — образ гомоморфизма $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(\mathcal{O}_X(1))$, индуцированного построенным в предыдущей задаче гомоморфизмом пучков $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \to \mathcal{O}_X(1)$.

Что будет, если $V \neq H^0(\mathcal{O}_X(1))$, иными словами, если у пучка $\mathcal{O}_X(1)$ есть глобальные сечения, отличные от тех, что приходят из $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ (то есть от линейных комбинаций однородных координат)? Линейная система $(\mathcal{O}_X(1), V')$, где V' строго содержит V, задает вложение $i' \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n'}$, где $n' > n$ (по крайней мере теоретико-множественно, поскольку линейная система V, и тем более V', разделяет точки; можно показать, что это вложение будет и изоморфизмом на свой образ), причем $i'(X)$ не лежит ни в какой гиперплоскости; само же X будет проекцией $i'(X)$ (см. задачу 3.27).

Если многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ не является изоморфной проекцией многообразия, невырожденно вложенного в бо́льшее проективное пространство, то говорят, что X *линейно нормально;* как мы видели, это равносильно сюръективности гомоморфизма $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(\mathcal{O}_X(1))$, возникающего из точной последовательности (3.1) при $r = 1$. Если аналогичный гомоморфизм сюръективен при каком-то $r > 1$, то говорят, что многообразие *r-нормально* (это равносильно линейной нормальности r-того образа Веронезе многообразия X); многообразие, r-нормальное при всех $r > 1$, называется *проективно нормальным.*

С m-нормальностью проективных многообразий связан раздел алгебраической геометрии, в котором есть и яркие результаты, и нерешенные проблемы. Вот пример того, что сделано:

> Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неособое проективное многообразие, причем $\dim X > (2n-2)/3$. Тогда X линейно нормально (теорема Зака о секущих).

А вот пример гипотезы, остающейся недоказанной уже более 30 лет:

> Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неособое проективное многообразие, причем $\dim X > 2n/3$. Тогда X проективно нормально (гипотеза Хартсхорна; даже 2-нормальность X в этих предположениях не доказана).

4. Когерентные пучки

Как должна выглядеть теория когомологий

Зафиксируем пространство X. В наиболее элементарной части, относящейся к когомологиям одного-единственного пучка на фиксированном пространстве X, основные положения теории когомологий можно резюмировать следующим образом (всюду слово «пучок» означает «пучок абелевых групп» или «пучок векторных пространств»; для определенности примем, что мы работаем с пучками групп):

Каждому пучку $\mathcal{F}$ на X ставится в соответствие набор групп[3] $H^i(X,\mathcal{F})$, *где* $i \in \mathbb{Z}$, $i \geqslant 0$, *а каждому гомоморфизму пучков* $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *— набор гомоморфизмов*

$$H^i(f)\colon H^i(X,\mathcal{F}) \to H^i(X,\mathcal{G}),$$

обладающих следующими свойствами:

1) *Если* $f = g \circ h$, *то* $H^i(f) = H^i(g) \circ H^i(h)$ *(иными словами,* H^i *являются функторами).*

2) $H^0(X,\mathcal{F})$ *естественно изоморфно* $\Gamma(X,\mathcal{F})$ *(нарисуйте самостоятельно коммутативные диаграммы, выражающие эту естественность).*

3) *Если*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

— точная последовательность пучков, то для всех $i \geqslant 0$ *существуют гомоморфизмы* $\partial^i\colon H^i(X,\mathcal{F}'') \to H^{i+1}(X,\mathcal{F}')$ *такие, что последовательность*

$$\dots \to H^i(\mathcal{F}') \to H^i(\mathcal{F}) \to H^i(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\partial} H^{i+1}(\mathcal{F}') \to H^{i+1}(\mathcal{F}) \to \dots \tag{4.1}$$

является точной.

---

[3] Если мы работаем с пучками векторных пространств, то эти группы также являются векторными пространствами, но по традиции и в этом случае говорят о группах когомологий.

4) Если

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

— коммутативная диаграмма с точными строками, то диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathcal{F}'') & \xrightarrow{\partial^i} & H^{i+1}(\mathcal{F}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(\mathcal{G}'') & \xrightarrow{\partial'^i} & H^{i+1}(\mathcal{G}')\dots \end{array}$$

будут коммутативны.

Построение теории когомологий в полной общности — вещь не слишком простая. Поэтому сначала мы дадим определение-времянку, пригодное для построения когомологий так называемых когерентных пучков на алгебраических многообразиях (все встречавшиеся нам выше пучки модулей над структурным пучком на алгебраических многообразиях являются когерентными) и ни для чего больше, и с этим определением поработаем, общее же определение отложим на потом.

Определение когерентных пучков

Все пучки $\mathcal{O}_X$-модулей на алгебраическом многообразии X, рассматривавшиеся в предыдущем разделе, являются примерами *когерентных пучков.* Неформально говоря, когерентные пучки на алгебраическом многообразии X — это пучки $\mathcal{O}_X$-модулей, встречающиеся в геометрических рассуждениях. В важнейшем для нас случае проективного многообразия X эти слова можно уточнить следующим образом: множество когерентных пучков на X — это наименьшее множество[4] $\mathcal{O}_X$-модулей, обладающее такими свойствами:

[4]Или категория, если вас шокирует выражение «множество пучков».

- Все локально свободные пучки конечного ранга когерентны.

- Если $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — гомоморфизм когерентных $\mathcal{O}_X$-модулей, то $\operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Coker} f$ также когерентны.

На такое определение приятно смотреть, но чтобы про когерентные пучки можно было что-то доказывать, желательно иметь их более конкретное описание. Именно такое описание и будет положено нами в основу определения; эквивалентность его с приведенным выше описанием категории когерентных пучков на проективном многообразии выяснится лишь a posteriori.

Нам понадобятся определения кольца и модуля частных (подробности см. в [1, с. 49–52] или [6, с. 85–88 и 173]).

Кольца и модули частных

Пусть A — коммутативное кольцо. Подмножество $S \subset A$ называется *мультипликативным*, если для него выполнены два условия:

(а) $1 \in S$;

(б) если $s \in S$ и $t \in S$, то $st \in S$.

Пусть теперь M — модуль над A. Мы определим *модуль частных* $S^{-1}M$ как множество «дробей» вида m/s, где $m \in M$ и $s \in S$, складываемых с помощью приведения к общему знаменателю (обобщение конструкции поля частных целостного кольца). При этом возникает небольшая техническая трудность: если определить равенство дробей по правилу $(m/s = m'/s') \Leftrightarrow (s'm = sm')$, то в случае, когда модуль M имеет кручение, такое «равенство» может не быть транзитивным. Поэтому модуль частных определяют так:

> Если $S \subset A$ — мультипликативное подмножество и M — модуль на A, то через $S^{-1}M$ (*модуль частных* M *относительно* S или *локализация* M *относительно* S) обозначается множество классов эквивалентности

выражений m/s, где $m \in M$ и $s \in S$, относительно следующего отношения эквивалентности:

$$(m/s \sim m'/s') \Leftrightarrow (\exists\, t \in S\colon t(s'm - sm') = 0).$$

Сложение и умножение на элементы кольца A определяется по следующим формулам:

$$m/s + m'/s' = (s'm + sm')/ss'$$
$$a \cdot m/s = am/s.$$

Задача 4.1. Проверьте, что это определение корректно.

Задача 4.2. Покажите, что $m/s = 0$ тогда и только тогда, когда существует такое $t \in S$, что $tm = 0$.

Если $M = A$, то $S^{-1}A$ — не просто A-модуль: если определить умножение по формуле $(a/s) \cdot (a'/s') = (aa'/ss')$, то $S^{-1}A$ станет кольцом; если определить действие $S^{-1}A$ на $S^{-1}M$ по формуле $(a/s) \cdot (m/s') = (am/ss')$, то $S^{-1}M$ станет $S^{-1}A$-модулем.

Задача 4.3. Докажите все эти утверждения.

Задача 4.4. Пусть

$$M_1 \to M_2 \to M_3$$

— точная последовательность модулей над кольцом A, и пусть $S \subset A$ — мультипликативное множество. Докажите, что последовательность

$$S^{-1}M_1 \to S^{-1}M_2 \to S^{-1}M_3$$

также точна.

Следующая задача — «со звездочкой».

Задача 4.5. Пусть A — кольцо, M и N — модули над A, и $S \subset A$ — мультипликативное множество. Постройте естественный гомоморфизм

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

и покажите, что он является изоморфизмом в случае, когда кольцо A нетерово, а модуль M конечно порожден; покажите на примере, что в общем случае этот гомоморфизм может не быть изоморфизмом.

Приведем два типичных примера локализации.

Пусть A — кольцо, $f \in A$ и $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. Тогда вместо $S^{-1}M$ и $S^{-1}A$ пишут M_f и A_f соответственно.

Второй типичный случай локализации, для которого тоже есть специальное обозначение, таков. Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал. Тогда множество $S = A \setminus \mathfrak{p}$ мультипликативно; вместо $S^{-1}M$ и $S^{-1}A$ пишут $M_\mathfrak{p}$ и $A_\mathfrak{p}$ соответственно (это обозначение слабо согласуется с предыдущим, но так уж принято). Говорят, что, например, $A_\mathfrak{p}$ получено из A локализацией в простом идеале $\mathfrak{p}$.

Для нас особенно важен следующий частный случай локализации в простом идеале. Пусть X — аффинное многообразие над полем k; положим $A = k[X]$, и пусть M — модуль над A. Если $x \in X$, то положим $M_x = M_{\mathfrak{m}_x}$, где $\mathfrak{m}_x \subset A$ — максимальный идеал, соответствующий точке $x \in X$ (то есть состоящий из регулярных функций на X, обращающихся в нуль в точке x).

С точки зрения алгебры, интуитивный смысл колец и модулей частных следующий. Кольцо $S^{-1}A$ — это наименьшее кольцо, «содержащее» A и такое, что все элементы S в нем обратимы. Если A — кольцо без делителей нуля, то кавычки можно убрать, поскольку A тогда и вправду вкладывается в $S^{-1}A$, но в общем случае имеем лишь гомоморфизм из A в $S^{-1}A$, который может иметь ядро (задача 4.2). К модулю частных приводит (в рамках алгебры) следующий ход мыслей. Если M — модуль над кольцом A и мы хотим научиться умножать его элементы еще и на все элементы $S^{-1}A$, то для выполнимости аксиом модуля приходится добавить к M некоторые новые элементы (а если у модуля есть кручение, то, возможно, кое-что и отправить в нуль — см. ту же задачу 4.2). Как говорят, $S^{-1}M$ получен из M с помощью «расширения скаляров» от A до $S^{-1}A$ (см. [1, с. 39–40 и 53]).

В геометрии кольцо — это кольцо функций на пространстве, а типичные примеры кольца частных — это кольцо функций, определенных на открытом подмножестве (например, A_f как кольцо функций на $D(f)$ — см. задачу 3.2) или кольцо ростков функций в данной точке (кольцо A_x, где $A = k[X]$ и $x \in X$). Отсюда и термин «локализация». Модуль с точки зрения геометрии — это расслоение или пучок над пространством (вскоре мы увидим, почему), а модуль частных — множество сечений этого расслоения или пучка над открытым множеством или, например, ростков таких сечений в данной точке.

Когерентные и квазикогерентные пучки: определение

Определение когерентных пучков основывается на следующей конструкции. Пусть по-прежнему X — аффинное многообразие и положим $A = k[X]$, и пусть M — модуль над A. Свяжем с модулем M предпучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\tilde{M}$ следующим образом. Если $U \subset X$ — открытое множество, то сечением $\tilde{M}$ над U назовем семейство элементов $\{m_x \in M_x\}$ для всех $x \in U$, удовлетворяющее следующему условию согласованности: для любой точки $x \in U$ найдутся такие $f \in A$ и $m \in M$, что $x \in D(f) \subseteq U$ и $m_y = m/f$ для всех $y \in D(f)$ (ср. определение пучка, ассоциированного с предпучком; напомним также, что $D(f) \subset X$ есть множество точек, в которых функция f не обращается в нуль). Очевидно, предпучок $\tilde{M}$ является пучком.

Задача 4.6. Убедитесь, что $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.

Конструкция пучка $\tilde{M}$ является обобщением конструкции структурного пучка на аффинном многообразии:

Задача 4.7. Кольцо $A = k[X]$ также можно рассматривать как A-модуль. Докажите, что $\tilde{A} = \mathcal{O}_X$.

Теперь можно дать основное определение.

Определение 4.8. Пусть X — алгебраическое многообразие и $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Говорят, что пучок $\mathcal{F}$ *когерентен,* если существует аффинное открытое покрытие $X = \bigcup U_i$ такое, что всякий $\mathcal{F}|_{U_i}$ изоморфен $\tilde{M}_i$ как пучок $\mathcal{O}_{U_i}$-модулей, где M_i —

конечно порожденный модуль над $k[U_i]$. Если отбросить в этом определении требование конечной порожденности модулей M_i, получим определение *квазикогерентного* пучка.

Из этого определения и задачи 4.7 ясно, что все локально свободные пучки когерентны.

Изучим поподробнее пучки вида $\tilde{M}$. Главное, в чем нам надо разобраться, — как устроены их сечения над открытыми подмножествами вида $D(f)$, где $f \in A$. Если $m \in M$, то дробь вида m/f^r определяет элемент модуля M_x для всех $x \in D(f)$; набор этих элементов определяет, стало быть, сечение пучка $\tilde{M}$ над $D(f)$. Ясно, что при этом получается гомоморфизм $M_f \to \tilde{M}(D(f))$.

Задача 4.9. Покажите, что этот гомоморфизм является мономорфизмом.

Указание. Пусть $I = \{a \in A \mid am = 0\}$ (этот идеал называется *аннулятором* элемента m). Если $m/f^r = 0$ во всех M_x при $x \in D(f)$, то из задачи 4.2 следует, что $V(I) \cap D(f) = \varnothing$ (напомним, что $V(I) \subseteq X$ — множество общих нулей функций из I), то есть $V(I) \subseteq V(f)$. Примените теорему Гильберта о нулях.

Задача 4.10. Покажите, что слой пучка $\tilde{M}$ в точке x равен M_x.

Итак, у нас имеется вложение $M_f \hookrightarrow \tilde{M}(D(f))$. Существенно, что это вложение является изоморфизмом. Разобьем доказательство этого факта на ряд этапов.

Задача 4.11. Пусть $f \in A$, $m \in M$, и пусть $m/f^r \in M_f$. Обозначим через $s \in \tilde{M}(D(f))$ сечение пучка $\tilde{M}$ над $D(f)$, соответствующее m/f^r. Пусть $g \in A$; покажите, что ограничение $s|_{D(fg)}$ совпадает с сечением $\tilde{M}$ над $D(fg)$, определенным элементом $g^r m/(fg)^r \in M_{fg}$.

Далее, нам потребуется такой простой, но важный факт:

Задача 4.12. Пусть X — аффинное многообразие, и пусть $f \in A = k[X]$. Покажите, что из всякого открытого покрытия топологического пространства $D(f)$ можно выделить конечное подпокрытие (пространства с таким свойством называются *квазикомпактными*).

Указание. Поскольку множества вида $D(g)$ образуют базу топологии Зарисского, можно считать, что покрытие составлено из множеств вида $D(g_\alpha)$. Имеем, по условию, $V(\dots, g_\alpha, \dots) \subset V(f)$. По теореме Гильберта о нулях некоторая степень f лежит в идеале, порожденном g_α. Следовательно, существуют такие $g_1, \dots, g_n$, $h_1, \dots, h_n$ и $s > 0$, что

$$f^s = g_1 h_1 + \dots + g_n h_n. \tag{4.2}$$

Покажите, что $D(f) = D(g_1) \cup \dots \cup D(g_n)$.

Теперь можно приступать к доказательству основного утверждения.

Задача 4.13. Покажите, что $\tilde{M}(D(f)) = M_f$ (в частности, $\Gamma(X, \tilde{M}) = M$).

Решение. Пусть $s = \{s_x\}_{x \in D(f)}$ — сечение M над $D(f)$. По условию, для каждого $x \in D(f)$ существуют такие $m_x \in M$ и $g_x \in A$, что $g_x(x) \neq 0$ и $s_y = m_x/g_x$ для всех $y \in D(g_x)$. Пользуясь задачей 4.12, выберем конечное число $g_1, \dots, g_n \in A$ и $m_1, \dots, m_n \in M$ таким образом, что для всякого $x \in X$ существует такое $i \in [1;n]$, что $g_i(x) \neq 0$ и $s_x = m_i/g_i$. Очевидно, $s_i = s|_{D(g_i)} \in \tilde{M}(D(g_i))$ — сечение, определенное элементом $m_i/g_i \in M_{g_i}$. По условию, $s_i|_{D(g_i g_j)} = s_j|_{D(g_i g_j)}$, отсюда $g_j m_i/(g_i g_j) = g_i m_j/(g_i g_j)$ в $M_{g_i g_j}$ (задача 4.11). Если бы модуль M не имел кручения, то отсюда мы бы могли заключить, что $g_j m_i = g_i m_j$ и далее завершить доказательство как в задачах 3.1 и 3.2. В общем случае поступим так. Из того, что $g_j m_i/(g_i g_j) - g_i m_j/(g_i g_j) = 0$ в $M_{g_i g_j}$, следует, что существуют такие натуральные числа t_{ij}, что $(g_i g_j)^{t_{ij}}(g_j m_i - g_i m_j) = 0$ (задача 4.2). Положим $t = \max\{t_{ij}\}$ — это t будет годиться для всех пар (i,j). Если теперь положить $m_i' = g_i^t m_i$ и $g_i' = g_i^{t+1}$, то окажется, что $s_i = m_i'/g_i' \in M_{g_i'} = M_{g_i}$, и при этом уже $g_i' m_j' = g_j' m_i'$. Теперь работает серровское разбиение единицы:

поскольку $D(f) = \bigcup_{i=1}^n D(g'_i)$, теорема Гильберта о нулях гласит, что $f^r = \sum_{i=1}^n h_i g'_i$ для некоторых $r \geqslant 0$ и $h_1, \ldots, h_n \in A$. Положим $m = \sum h_i m'_i$; легко видеть, что $f^r m'_i = g'_i m$ для всех i, откуда $m/f^r = m'_i/g'_i$ для всех i, и $m/f^r = s$. $\square$

Задача 4.14. Пусть M — модуль над кольцом $A = k[X]$, где X — аффинное многообразие, и пусть $f \in A$. Покажите, что ограничение пучка $\tilde{M}$ на открытое подмножество $D(f) \subset A$ изоморфно $\widetilde{M_f}$ (здесь M_f рассматривается как A_f-модуль; напомним, что $A_f \cong k[D(f)]$).

Случай аффинных многообразий

Пусть опять X — аффинное многообразие, $A = k[X]$. Всякий пучок вида $\tilde{M}$, где M — модуль над A, является, по определению, квазикогерентным; a priori могло бы оказаться, что существуют (квази)когерентные пучки на X, в таком виде не представляющиеся (точнее, представляющиеся в таком виде только локально). Основное свойство квазикогерентных пучков состоит в том, что этого не происходит:

> Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X. Тогда $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$, где $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Если $\mathcal{F}$ когерентен, то модуль M к тому же конечно порожден над $k[X]$.

Неформально говоря, при работе с (квази)когерентными пучками нет нужды локализовать дальше, чем до аффинного открытого подмножества.

Для доказательства этого утверждения нужна небольшая подготовка.

Задача 4.15. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X; пусть $A = k[X]$ и $f \in A$. Если $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ и $s|_{D(f)} = 0$, то $f^r s = 0$ для некоторого $r > 0$.

Указание. Если $\mathcal{F} = \tilde{M}$, где M — модуль над A, то все немедленно следует из задачи 4.13. В общем случае имеем, по определению

$X = \bigcup_{i=1}^{n} D(g_i)$, где $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$. Следовательно, для каждого i существует такое r_i, что $f^{r_i} s|_{D(g_i)} = 0$. Возьмите $r = \max\{r_i\}$.

Задача 4.16. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X; пусть $A = k[X]$ и $f \in A$. Если $s \in \mathcal{F}(D(f))$, то существует такое $t > 0$, что $f^t \cdot s$ продолжается до сечения пучка $\mathcal{F}$ над всем X.

Решение. Если $\mathcal{F} = \tilde{M}$, то все по-прежнему следует из задачи 4.13. В общем случае пусть $X = \bigcup_{i=1}^{n} D(g_i)$, где $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$. Если положить $s|_{D(g_i)\cap D(f)} = s_i$, то для каждого i найдутся такие число r_i и сечение $\tilde{s}_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$, что $(f^{r_i} \cdot \tilde{s}_i)|_{D(fg_i)} = f^{r_i} \cdot s_i$. Поскольку открытое покрытие конечно, можно считать (выбрав наибольшее), что все r_i равны одному числу r. Если бы все $\tilde{s}_i$ склеивались в одно сечение $\tilde{s} \in \Gamma(\mathcal{F})$, то задача была бы решена: выполнялось бы равенство $f^r \cdot \tilde{s}|_{D(f)} = f^r \cdot s$. Гарантировать это, однако, мы не можем: максимум, что можно сказать, — это то, что разность $\tilde{s}_i|_{D(g_i g_j)} - \tilde{s}_j|_{D(g_i g_j)}$ равна нулю при ограничении на $D(fg_ig_j)$. В силу задачи 4.15 для каждой пары (i, j) можно найти такое число r_{ij}, что

$$f^{r_{ij}} \cdot (\tilde{s}_i|_{D(g_i g_j)} - \tilde{s}_j|_{D(g_i g_j)}) = 0.$$

Положим $t = r + \max\{r_{ij}\}$. Тогда ограничения сечений $f^t \cdot \tilde{s}_i$ и $f^t \cdot \tilde{s}_j$ на $D(g_i g_j)$ совпадают; стало быть, они склеиваются в одно сечение, ограничение которого на $D(f)$ совпадает с $f^t \cdot s$. □

Теперь можно доказывать сформулированное выше основное свойство когерентных пучков на аффинных многообразиях.

Задача 4.17. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X; положим $A = k[X]$, $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Тогда $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$.

Указание. Определим гомоморфизм $\mathcal{O}_X$-модулей $\tilde{M} \to \mathcal{F}$ по такой формуле: если $m \in M$ и $f \in A$, то $m/f \mapsto f^{-1} \cdot (m|_{D(f)})$ (в правой части m рассматривается как глобальное сечение пучка $\mathcal{F}$; доведите эту формулу до аккуратной формулировки). Мономорфность этого гомоморфизма следует из задачи 4.15, а эпиморфность — из задачи 4.16.

Задача 4.18. Пусть в условиях предыдущей задачи пучок $\mathcal{F}$ когерентен. Докажите, что A-модуль $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ конечно порожден.

Указание. Пусть $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$, где модуль M_i конечно порожден над A_{g_i}. Выберем у каждого из M_i конечное множество образующих, помножим их на подходящую степень g_i и продолжим на все X (задача 4.16). Покажите, что полученные сечения $\mathcal{F}$ порождают $\Gamma(X, \mathcal{F})$ как A-модуль.

Вот одно следствие из задачи 4.18. Будем говорить, что сечения $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ порождают пучок $\mathcal{F}$ (здесь $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей на алгебраическом многообразии X), если для всякой точки $x \in X$ ростки этих сечений в точке x порождают $\mathcal{F}_x$ как $O_{X,x}$-модуль. Например, если $\mathcal{F}$ — обратимый пучок, то сечения $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ порождают $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда линейная система, порожденная $s_1, \ldots, s_n$, не имеет базисных точек.

Задача 4.19. Пусть X — алгебраическое многообразие. Покажите, что $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}$ порожден конечным числом глобальных сечений тогда и только тогда, когда для некоторого $r > 0$ существует эпиморфизм $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{O}_X^r \twoheadrightarrow \mathcal{F}$.

Указание. Задать гомоморфизм $\varphi\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ — все равно, что задать глобальное сечение $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ (именно, $s = \varphi(1)$); задать гомоморфизм $\mathcal{O}^r \to \mathcal{F}$ — все равно, что задать r штук глобальных сечений.

Задача 4.20. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на аффинном многообразии X. Тогда он порожден конечным числом своих глобальных сечений.

Утверждение этой задачи называется «теоремой А» Серра для аффинных многообразий.

Теорему А можно применить к локально свободному пучку:

Задача 4.21. Пусть E — векторное расслоение над аффинным многообразием X. Покажите, что у этого векторного расслоения существует конечное число сечений $s_1, \ldots, s_n$, обладающих таким свойством: для всякой точки $x \in X$ векторы $(s_1)_x, \ldots, (s_n)_x$ порождают векторное пространство E_x.

Продолжим разговор о когерентных пучках на аффинных многообразиях.

Мы выяснили, что задать (квази)когерентный пучок на аффинном многообразии X — все равно, что задать модуль над $k[X]$. Оказывается, задать гомоморфизм когерентных пучков — то же самое, что задать гомоморфизм модулей:

Задача 4.22. Пусть M и N — модули над кольцом $A = k[X]$, где X — аффинное многообразие. Постройте гомоморфизм из $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$ и покажите, что он является изоморфизмом.

Указание. Пусть $\varphi\colon M \to N$ — гомоморфизм модулей. Тогда гомоморфизм пучков задается по правилу $m/f^r \mapsto \varphi(m)/f^r$. Обратное отображение задается так: гомоморфизму пучков $\tilde{M} \to \tilde{N}$ ставится в соответствие гомоморфизм их групп глобальных сечений.

Задачи 4.17 и 4.22 в совокупности показывают, что квазикогерентные пучки над аффинным X — это «то же самое», что модули над $k[X]$. Говоря по-ученому, функтор $M \mapsto \tilde{M}$ задает эквивалентность категорий A-модулей и квазикогерентных пучков на X. Это утверждение иногда называется теоремой Серра об эквивалентности.

Коль скоро категории эквивалентны, ядра и коядра в одной категории соответствуют ядрам и коядрам в другой:

Задача 4.23. Пусть X — аффинное многообразие,

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{j} \mathcal{C}$$

— гомоморфизмы квазикогерентных $\mathcal{O}_X$-модулей, и

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi_*} \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{j_*} \Gamma(X, \mathcal{C})$$

— индуцированные гомоморфизмы групп (точнее, $k[X]$-модулей) глобальных сечений. Тогда пара $(\mathcal{C}, j)$ является коядром φ тогда и только тогда, когда пара $(\Gamma(X, \mathcal{C}), j_*)$ является коядром φ_*.

Указание. Вот как доказывается, что «только тогда». Итак, $(\mathcal{C}, j) = \operatorname{Coker} \varphi$. Чтобы доказать, что j_* — коядро φ_*, предположим, что $h\colon \Gamma(X, \mathcal{G}) \to M$ — такой гомоморфизм $k[X]$-модулей, что $h \circ \varphi_* = 0$. Пусть $\tilde{h}\colon \mathcal{G} \to \tilde{M}$ — индуцированный гомоморфизм пучков. Тогда, поскольку j — коядро φ, существует такой гомоморфизм $\psi\colon \mathcal{C} \to \tilde{M}$, что $\tilde{h} = \psi \circ \tilde{h}$. Покажите, что индуцированный гомоморфизм $\psi_*\colon \Gamma(X, \mathcal{C}) \to N$ — тот самый, существование которого требуется определением коядра.

Задача 4.24. Сформулируйте и докажите утверждение, получающееся из задачи 4.23 заменой коядер на ядра.

Из доказанных утверждений вытекает такое важное следствие:

Задача 4.25. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{u} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{v} \mathcal{F}_3 \to 0 \tag{4.3}$$

— точная последовательность квазикогерентных пучков на аффинном многообразии. Тогда индуцированная последовательность

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{u_*} \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{v_*} \Gamma(X, \mathcal{F}_3) \to 0$$

тоже точна.

Указание. Точность последовательности (4.3) равносильна тому, что пара $(\mathcal{F}_1, u)$ является ядром гомоморфизма v и пара $(\mathcal{F}_3, v)$ является коядром гомоморфизма u.

Тот факт, что точной последовательности квазикогерентных пучков на аффинном многообразии соответствует точная последовательность групп сечений, свидетельствует о том, что старшие группы когомологий этих пучков на этих многообразиях «должны» обращаться в нуль. Так оно, как мы увидим, и будет.

В заключение заметим, что радикальное упрощение теории когерентных пучков, видимо, невозможно по той причине, что не всякий пучок $\mathcal{O}_X$-модулей квазикогерентен:

Задача 4.26. Пусть X — алгебраическое многообразие, $x \in X$. Определим подпучок $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_X$ так:

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} \mathcal{O}_X(U) & \text{если } x \notin U; \\ 0 & \text{если } x \in U. \end{cases}$$

Покажите, что $\mathcal{F}$ — пучок идеалов в $\mathcal{O}_X$ (и тем самым $\mathcal{O}_X$-модуль), не являющийся квазикогерентным.

Общий случай

Из описания структуры (квази)когерентных пучков на аффинных многообразиях следует такой полезный технический результат:

Задача 4.27. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на алгебраическом многообразии X. Тогда для всякого аффинного открытого подмножества $U \subset X$ существует такой модуль M над $k[U]$, что ограничение $\mathcal{F}|_U$ изоморфно $\tilde{M}$; если $\mathcal{F}$ когерентен, то модуль M конечно порожден над $k[U]$.

Задача 4.28. Пусть Y — замкнутое подмногообразие X и $\mathcal{F}$ — (квази)когерентный пучок на Y. Покажите, что $\mathcal{F}$, рассматриваемый как $\mathcal{O}_X$-модуль (иными словами, пучок $i_*\mathcal{F}$, где $i\colon Y \hookrightarrow X$ — вложение), также является (квази)когерентным.

Нам осталось доказать, что для пучков на проективных многообразиях наше определение когерентного пучка равносильно определению со с. 39. Вот первый шаг к доказательству этого факта (утверждение важно и само по себе):

Задача 4.29. Докажите, что ядро и коядро гомоморфизма (квази)когерентных пучков также (квази)когерентно.

Второй шаг в доказательстве эквивалентности двух определений — важная «теорема А Серра для проективных многообразий». Чтобы ее сформулировать и доказать, нам потребуется ввести понятие «подкрутки», для чего, в свою очередь, придется напомнить основные факты про тензорное произведение модулей.

Тензорное произведение и подкрутка

Начнем с напоминания основных фактов про тензорное произведение модулей (подробности — во второй главе книжки [1]).

Итак, пусть M, N и P — модули над коммутативным кольцом A. Отображение $\Phi\colon M \times N \to P$ называется билинейным, если выполнены такие условия:

$$\begin{aligned} \Phi(m_1 + m_2, n) &= \Phi(m_1, n) + \Phi(m_2, n); \\ \Phi(m, n_1 + n_2) &= \Phi(m, n_1) + \Phi(m, n_2) \\ \Phi(am, n) &= \Phi(m, an) = a\Phi(m, n). \end{aligned}$$

(здесь $a \in A$).

Тензорным произведением модулей M и N называется модуль $M \otimes_A N$ (или попросту $M \otimes N$) вместе с билинейным отображением $\Phi_0\colon M \times N \to M \otimes_A N$, удовлетворяющие следующему условию: для всякого билинейного отображения $\Phi\colon M \times N \to P$ существует единственный гомоморфизм $\varphi\colon M \otimes_A N \to P$, такой, что $\Phi = \varphi \circ \Phi_0$. Иными словами, тензорное произведение M и N — это «наименьший» модуль, в который может бить билинейное отображение из $M \times N$.

Обозначим $\Phi_0(m, n) = m \otimes n \in M \otimes N$. Тогда A-модуль $M \otimes N$ порождается образующими $m \otimes n$ для всевозможных $m \in M, n \in N$ и следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \otimes n &= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n; \\ m \otimes (n_1 + n_2) &= m \otimes n_1 + m \otimes n_2; \\ (am) \otimes n &= m \otimes (an) = a(m \otimes n). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Приведем три поучительных примера.

(a) Пусть $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, причем числа m и n взаимно просты. Тогда $M \otimes N = 0$. В самом деле, пусть $pm + qn = 1$, где p и q — целые числа. Тогда для любых $u \in M$, $v \in N$ имеем:

$$\begin{aligned} u \otimes v = (pm + qn)(u \otimes v) = pm(u \otimes v) + qn(u \otimes v) = \\ = (pmu) \otimes v + u \otimes (qnv) = 0 \end{aligned}$$

(из соотношений (4.4) легко видеть, что $u \otimes 0 = 0 \otimes v = 0$ всегда).

(б) Пусть M и N — свободные модули с базисами $\langle e_1, \ldots, e_m \rangle$ и $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ соответственно. Тогда $M \otimes N$ — свободный модуль ранга mn с базисом, состоящим из всевозможных $e_i \otimes f_j$.

(в) Пусть M — произвольный A-модуль, $I \subset A$ — идеал, и пусть $N = A/I$. Тогда $M \otimes N \cong M/IM$.

Задача 4.30. Докажите утверждения примеров (б) и (в), исходя непосредственно из определения тензорного произведения.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — квазикогерентные пучки на алгебраическом многообразии X. Тогда их тензорным произведением называется пучок, ассоциированный с предпучком

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U).$$

Можно показать, что $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ — также (квази)когерентный пучок; точнее говоря, если X — аффинное многообразие, $A = k[X]$, $\mathcal{F} = \tilde{M}$, $\mathcal{G} = \tilde{N}$, то $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \widetilde{M \otimes_A N}$. Читатель, желающий вникнуть в детали, может доказать это самостоятельно, пользуясь изложенными в главе 3 книги [1] фактами о взаимосвязи тензорного произведения и локализации.

Пусть теперь $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X, $m \in \mathbb{Z}$. Пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_x(r)$ называют *подкруткой* пучка $\mathcal{F}$ на r и обозначают $\mathcal{F}(r)$. Подкрутка (как и вообще тензорное умножение на обратимый пучок) ничего не меняет в локальном строении пучка: ведь с локальной точки зрения это просто тензорное умножение модуля над кольцом $A = k[U]$, где U — аффинное открытое множество, на то же самое кольцо A, от чего модуль не изменится. Зато подкрутка меняет способ склейки пучка из локальных кусков. Чтобы освоиться с подкруткой, вот задача:

Задача 4.31. Докажите, что $\mathcal{O}_X(r) \otimes \mathcal{O}_X(s) \cong \mathcal{O}_X(r + s)$.

Указание. Определим гомоморфизм $\mathcal{O}_X(r)\otimes\mathcal{O}_X(s)\to\mathcal{O}_X(r+s)$ по формуле $f\otimes g\mapsto f\cdot g$ (здесь f и g — сечения $\mathcal{O}_X(r)$ и $\mathcal{O}_X(s)$ соответственно над открытым множеством $U\subset X$). Это определение корректно: произведение однородных функций степеней r и s действительно даст однородную функцию степени $r+s$, и очевидно, что это отображение согласуется с соотношениями (4.4). Осталось проверить, что этот гомоморфизм является изоморфизмом; это достаточно проверить на всех пересечениях $X\cap\mathbb{A}^n_i$, где пучки $\mathcal{O}_X(l)$ соответствуют свободным модулям ранга 1; см. пример (б) выше.

Задача 4.32. Пусть

$$0\to\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_2\to\mathcal{F}_3\to 0$$

— точная последовательность квазикогерентных пучков на проективном многообразии $X\subset\mathbb{P}^n$. Покажите, что для всякого $r\in\mathbb{Z}$ индуцированная последовательность

$$0\to\mathcal{F}_1(r)\to\mathcal{F}_2(r)\to\mathcal{F}_3(r)\to 0$$

также точна.

Замечание 4.33. Вообще, тензорное умножение на локально свободный пучок сохраняет точность последовательностей. Про умножение на произвольный когерентный пучок этого сказать уже нельзя (невозможно гарантировать точность слева). С примерами такого рода мы через некоторое время столкнемся. По поводу общей теории см. [1, с. 40–42].

Теперь мы можем заняться обещанным проективным вариантом теоремы A. Аффинный вариант этой теоремы гласил, что каждый когерентный пучок над аффинным многообразием порождается конечным числом своих глобальных сечений (задача 4.20). Для пучков над проективными многообразиями буквально такой результат неверен, поскольку когерентный пучок может вообще не иметь ненулевых сечений (пример тому — пучки $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ при $r<0$). Тем не менее, оказывается, что для данного когерентного пучка $\mathcal{F}$ на проективном многообразии и для всех

$r \gg 0$ пучки $\mathcal{F}(r)$ уже порождены глобальными сечениями — в этом и состоит проективная теорема A.

Чтобы доказать теорему A, заметим, прежде всего, следующее. Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, то всякий однородный многочлен степени r от однородных координат $T_0, \dots, T_n$ определяет глобальное сечение пучка $O_X(r)$ (если $X \neq \mathbb{P}^n$, то различные однородные многочлены могут определять одно и то же сечение). Если теперь F — такой многочлен и $s \in \mathcal{F}(U)$, где $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X и $U \subset X$ — открытое множество, то $s \otimes F \in \mathcal{F}(r)(U)$.

Руководствуясь этим соображением, будем имитировать доказательство аффинной теоремы A так:

Задача 4.34. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$; пусть $U \subset X$ — открытое подмножество, $s \in \mathcal{F}(U)$, и пусть $s|_{U \cap \mathbb{A}^n_i} = 0$ для некоторого i (напомним, что открытое подмножество $\mathbb{A}^n_i \subset \mathbb{P}^n$ определяется условием $T_i \neq 0$). Тогда для некоторого $r > 0$ имеем $s \otimes T_i^r = 0$ как сечение пучка $\mathcal{F}(r)$ над U.

Решение. Пусть, для начала, $U \subset \mathbb{A}^n_j$ для некоторого $j \neq i$. Тогда $U \cap \mathbb{A}^n_i = D(T_i/T_j)$, и из задачи 4.15 следует, что $(T_i/T_j)^r s = 0$ для некоторого r; последнее равенство равносильно тому, что $s \otimes T_i^r = 0$. В общем случае представим U в виде объединения множеств, содержащихся в каких-то $\mathbb{A}^n_j$, и возьмем максимум получающихся чисел r. □

Задача 4.35. Пусть в тех же условиях $s \in \mathcal{F}(X \cap \mathbb{A}^n_i)$. Тогда для всех $r \gg 0$ сечение $s \otimes T_i^r \in \mathcal{F}(r)(X \cap \mathbb{A}^n_i)$ продолжается до сечения пучка $\mathcal{F}(r)$ над всем X.

Решение. На сей раз мы следуем решению задачи 4.16. Именно, эта задача показывает, что для каждого $j \neq i$ и для всех $r \gg 0$ сечение $(T_i/T_j)^r \cdot (s|_{\mathbb{A}^n_i \cap \mathbb{A}^n_j})$ продолжается на $\mathbb{A}^n_j$. Выберем одно такое r, годное для всех j. Получится, что для каждого $j \neq i$ сечение $(s|_{\mathbb{A}^n_i \cap \mathbb{A}^n_j}) \otimes T_i^r \in \mathcal{F}(r)(\mathbb{A}^n_i \cap \mathbb{A}^n_j)$ продолжается до сечения $\mathcal{F}(r)$ над $\mathbb{A}^n_j$. Если бы эти сечения были согласованы на пересечениях $\mathbb{A}^n_{j'} \cap \mathbb{A}^n_{j''}$, то все было бы готово; если этой согласованности нет, то добьемся ее за счет увеличения r как в решении задачи 4.16 (ссылаясь на 4.34 вместо 4.15). $\square$

Теперь уже легко сформулировать и доказать теорему A для проективных многообразий:

Задача 4.36. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$; тогда для всех $r \gg 0$ пучок $\mathcal{F}(r)$ порождается конечным числом своих глобальных сечений.

Часто используется такое следствие теоремы A:

Задача 4.37. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$; тогда существует эпиморфизм $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$, где $\mathcal{E}$ — конечная прямая сумма пучков вида $\mathcal{O}_X(m)$.

Указание. Из теоремы A следует, что существует эпиморфизм $\mathcal{O}_X^m \to \mathcal{F}(r)$; подкрутите на $-r$.

Наконец, мы можем завершить доказательство эквивалентности (для случая проективных многообразий) определения когерентного пучка, с которым мы работали, и «простого» определения со с. 39.

Задача 4.38. Покажите, что всякий когерентный пучок на проективном многообразии изоморфен коядру гомоморфизма локально свободных пучков.

Указание. Примените задачу 4.37 дважды.

5. Когомологии Чеха

Определение

Пусть

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{G} \to 0$$

— точная последовательность пучков абелевых групп или векторных пространств на топологическом пространстве X. Теория когомологий занимается изучением препятствий к эпиморфности индуцированного гомоморфизма $v_*\colon \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$.

Пусть $s \in \Gamma(X, \mathcal{G})$; что мешает ему подняться до глобального сечения пучка $\mathcal{F}$? Поскольку гомоморфизм пучков $u\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ является эпиморфизмом, сечение s, во всяком случае, поднимается локально: существует такое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ пространства X открытыми множествами, что (для каждого $i \in I$) $s|_{U_i} = v_*(t_i)$, где $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Для всякой пары $i, j \in I$ положим $t_{ij} = t_i|_{U_I \cap U_j} - t_j|_{U_I \cap U_j}$. Если все t_{ij} равны нулю, то сечения t_i склеиваются в одно, и искомый подъем найден. В общем случае можно только сказать, что $v(t_{ij}) = 0$, то есть что $t_{ij} = v_*(s_{ij})$, где $s_{ij} \in \mathcal{E}(U_i \cap U_j)$. Очевидно, $s_{ij} + s_{ji} = 0$ и $s_{ij} + s_{jk} + s_{ki} = 0$ для всяких i, j и k. Таким образом, набор $\{s_{ij}\}$ является чеховским 1-коциклом покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{E}$ (определение 3.11). Далее, если сами t_i не склеиваются в глобальное сечение пучка $\mathcal{F}$, можно попытаться исправить дело за счет другого выбора t_i. Произвол этого выбора следующий: вместо t_i можно взять $t_i + u_*(s_i)$, где $s_i \in \mathcal{E}(U_i)$. Сечения $t_i + u_*(s_i)$ склеиваются в одно тогда и только тогда, когда их ограничения на попарные пересечения множеств U_i совпадают, то есть когда $s_{ij} = s_j - s_i$ — иными словами, когда коцикл $\{s_{ij}\}$ является кограницей (см. то же определение). Итак, всякое сечение $\mathcal{G}$, локально поднимающееся в $\mathcal{F}$ над покрытием $\mathfrak{U}$, определяет элемент группы $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$, причем сечение поднимается в $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда этот элемент равен нулю.

Теперь определим группы $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ для любого пучка $\mathcal{F}$ и для любого $i \geqslant 0$. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на пространстве X и $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ — открытое покрытие (среди множеств U_i могут быть пустые или повторяющиеся). Если $i_0, \ldots, i_r \in I$, то положим, по определению, $U_{i_0,\ldots,i_r} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_r}$.

Чеховской r-коцепью покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$ называется набор сечений $s_{i_0,\ldots,i_r} \in \mathcal{F}(U_{i_0,\ldots,i_r})$ (для всех последовательностей из $r+1$ элемента I), кососимметричный по $i_0, \ldots, i_r$ (это означает, что при перестановке двух индексов знак меняется на противоположный, а также что $s_{i_0,\ldots,i_r} = 0$, если среди индексов есть совпадающие). Группа всех чеховских r-коцепей обозначается $C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Гомоморфизм $d^r\colon C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{r+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$

действует по следующей формуле:

$$(d^r s)_{i_0,\dots,i_{r+1}} = \sum_{t=0}^{r+1} (-1)^t s_{i_0,\dots,i_{t-1},i_{t+1},\dots,i_{r+1}}|_{U_{i_0,\dots,i_{r+1}}}.$$

Задача 5.1. Покажите, что $d^r(C^r(\mathfrak{U},\mathcal{F}))$ действительно лежит в $C^{r+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ и что $d^{r+1}d^r = 0$.

Тем самым набор $(C^r(\mathfrak{U},\mathcal{F}), d^r)$ образует комплекс $C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$. Этот комплекс называется *комплексом Чеха* покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$. Положим $\check{H}^r(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = H^r(C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{F}))$. Эта группа называется, по определению, r-й *группой когомологий Чеха покрытия* $\mathfrak{U}$ *с коэффициентами в пучке* $\mathcal{F}$.

Задача 5.2. Покажите, что $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$.

Задача 5.3. Убедитесь, что новое определение $\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ эквивалентно старому.

Когомологии Чеха покрытия — первое приближение к когомологиям пучка. Правда, это лишь приближение: при разном выборе покрытий могут получаться разные ответы, и даже если ограничиться одним фиксированным покрытием, то может нарушаться такое (основное) свойство когомологий, как наличие точной когомологической последовательности (4.1) (точной последовательности пучков может не соответствовать точная последовательность комплексов Чеха). Чтобы получить что-то разумное, надо переходить к пределу по семейству всех покрытий, и даже этот подход дает результаты не для всех пространств, а теория получается довольно неуклюжей. Если, однако, X — квазипроективное[5] алгебраическое многообразие, а пучок $\mathcal{F}$ (квази)когерентен, то чеховский подход увенчивается полным успехом: оказывается, что для всех конечных *аффинных* (то есть состоящих из аффинных открытых подмножеств) покрытий $\mathfrak{U}$ группы $\check{H}^r(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ изоморфны; если обозначить эту не зависящую

[5]То есть изоморфное открытому подмножеству проективного многообразия; в частности, все проективные и все аффинные многообразия квазипроективны.

от выбора аффинного покрытия группу через $H^r(X,\mathcal{F})$, то оказывается, что все свойства когомологий (для квазикогерентных пучков) выполнены. Оставляя общее определение когомологий и эквивалентность его чеховскому для когерентных пучков на потом, займемся чеховскими когомологиями. В первых задачах нам еще нет нужды предполагать, что X — алгебраическое многообразие.

Для любого покрытия $\mathfrak{U}$ и пучка $\mathcal{F}$ положим

$$C^{-1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

и определим гомоморфизм $d^{-1}\colon C^{-1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to C^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ по формуле $(d^{-1}s)_i = s|_{U_i}$. Комплекс

$$0 \to C^{-1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{d^{-1}} C^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} C^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \dots$$

будем называть *пополненным комплексом Чеха* и обозначать $\tilde{C}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$.

Задача 5.4. Покажите, что $H^r(\tilde{C}(\mathfrak{U},\mathcal{F})) = \check{H}^r(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ при $r>0$ и $H^r(\tilde{C}(\mathfrak{U},\mathcal{F})) = 0$ при $r \leqslant 0$.

Задача 5.5. Пусть само пространство X входит в покрытие $\mathfrak{U}$ в качестве одного из его элементов. Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = 0$ при $r>0$.

Указание. Достаточно показать, что пополненный комплекс Чеха стягиваем. Если $X = U_\alpha$, то стягивающую гомотопию σ строим так: для $s \in \tilde{C}^r(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ положим $(\sigma s)_{i_0,\dots,i_{r-1}} = s_{\alpha,i_0,\dots,i_{r-1}}$.

Одно свойство квазипроективных многообразий

В дальнейшем нам потребуется следующий технический результат из алгебраической геометрии:

> Пусть X — алгебраическое многообразие, изоморфное открытому подмножеству проективного многообразия (такие многообразия называются квазипроективными), и пусть $U,V \subset X$ — аффинные открытые подмножества (то есть открытые подмножества,

изоморфные аффинным многообразиям). Тогда подмножество $U \cap V \subset X$ тоже аффинно.

Для знающих определение произведения алгебраических многообразий объясним, как доказывается этот факт. Как известно, диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута, если X квазипроективно. Многообразие $U \times V$ аффинно как произведение двух аффинных; значит, и его замкнутое подмножество $U \cap V \cong (U \times V) \cap \Delta$ также аффинно.

Для тех, кому это доказательство ничего не сказало, приведем два примера.

(а) Пусть X — аффинное многообразие, $f, g \in k[X]$. Открытые подмножества $D(f)$ и $D(g)$, как известно, аффинны (задача 3.5). Их пересечение равно $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ и, стало быть, тоже аффинно.

(б) Склеим два экземпляра аффинного пространства $\mathbb{A}^n$, отождествив в них подмножество $\mathbb{A}^n \setminus 0$ (через 0 мы обозначили начало координат). На получившемся множестве X введем топологию (множество открыто, если открыты его пересечения с обоими экземплярами $\mathbb{A}^n$) и пучок функций (функция на $U \subset X$ регулярна, если регулярны ее ограничения на пересечения U с обоими экземплярами $\mathbb{A}^n$). Получается алгебраическое многообразие, причем оба экземпляра $\mathbb{A}^n$ будут его аффинными открытыми подмножествами. Их пересечение есть $\mathbb{A}^n \setminus 0$, и при $n > 1$ это многообразие не аффинно (объяснение для знающих ТФКП: над $\mathbb{C}$ аффинное многообразие должно быть многообразием Штейна, каковым $\mathbb{C}^n \setminus 0$ при $n > 1$ не является; можно также вывести неаффинность этого многообразия прямо из определений, либо, как мы вскоре увидим, из когомологических соображений).

Задача 5.6. Пусть $\mathfrak{U}$ — аффинное открытое покрытие квазипроективного многообразия X, и пусть

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

— точная последовательность (квази)когерентных пучков. Покажите, что существует точная последовательность

$$\cdots \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}') \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}'') \to \\ \to \check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}') \to \check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \dots .$$

Указание. Покажите, что последовательность комплексов Чеха точна.

Комплекс Кошуля

Чтобы считать когомологии Чеха когерентных пучков (а также доказывать корректность их определения), нам придется познакомиться с важным понятием гомологической алгебры — *комплексом Кошуля.* Начнем с мотивировок.

Пусть A — коммутативное кольцо, и пусть $I \subset A$ — идеал, порожденный элементами $f_1, \dots, f_n$. Эту мысль можно выразить также следующим образом: существует точная последовательность

$$0 \leftarrow A/I \leftarrow A \leftarrow A^n, \tag{5.1}$$

в которой гомоморфизм из свободного модуля $A^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ в A задается по правилу $e_i \mapsto f_i$. Далее, между образующими $f_1, f_2, \dots, f_n$ могут быть какие-то соотношения; предположим, что можно выделить конечное число соотношений таким образом, что все прочие соотношения из них следуют (если кольцо A нетерово, так оно и будет). Пусть таких «образующих» соотношений m штук; эту мысль можно выразить, сказав, что точная последовательность (5.1) может быть продолжена до точной последовательности

$$0 \leftarrow A/I \leftarrow A \leftarrow A^n \leftarrow A^m,$$

где образующие свободного модуля A^m находятся во взаимно однозначном соответствии с соотношениями между $f_1, \dots, f_n$, а гомоморфизм из A^m в A^n устроен так: если образующей A^m соответствует соотношение вида $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$, то эта образующая переходит в $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \in A^n$.

Между соотношениями, в свою очередь, тоже могут быть соотношения, и т. д; продолжая в том же духе, получаем точную последовательность

$$0 \leftarrow A/I \leftarrow A \leftarrow A^n \leftarrow A^m \leftarrow A^p \leftarrow \dots ;$$

эта последовательность (а точнее говоря, комплекс, который получится, если отбросить в ней A/I) называется *свободной резольвентой* A-модуля A/I.

Как устроены свободные резольвенты в общем случае, коротко не скажешь[6], но можно по крайней мере выделить некоторое множество присутствующих всегда соотношений между образующими $f_1, \dots, f_n$, соотношений между этими соотношениями, и т. д. При этом, поскольку нет гарантии, что этими соотношениями все исчерпывается, мы не обязательно получим резольвенту: можно быть уверенным лишь в том, что получится комплекс свободных A-модулей. Этот комплекс и будет называться комплексом Кошуля.

Теперь давайте конкретно. Пусть A — коммутативное кольцо, $f_1, \dots, f_n \in A$ — последовательность из n элементов кольца A. Для каждого целого $i \in [0; n]$ пусть $K_i^A(f_1, \dots, f_n)$ — свободный A-модуль ранга $\binom{n}{i}$ с базисом, состоящим из элементов $e_{p_1,\dots,p_i}$, где $1 \leqslant p_1 < p_2 < \dots < p_i \leqslant n$ (если $n = 0$, то $K_0^A(f_1, \dots, f_n)$ имеет базис из одного элемента e). Определим гомоморфизмы $d_i \colon K_i^A(f_1, \dots, f_n) \to K_{i-1}^A(f_1, \dots, f_n)$ на элементах базиса по формуле:

$$d_i \colon e_{p_1,\dots,p_i} \mapsto \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} f_j e_{p_1,\dots,p_{j-1},p_{j+1},\dots,p_i}.$$

Задача 5.7. Докажите, что последовательность модулей и гомоморфизмов

$$0 \to K_n^A(f_1, \dots, f_n) \xrightarrow{d_n} K_{n-1}^A(f_1, \dots, f_n) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$
$$\dots \xrightarrow{d_1} K_0^A(f_1, \dots, f_n) \to 0$$

[6]Например, классическая «теорема Гильберта о сизигиях» гласит, что в случае, когда $A = k[X_1, \dots, X_N]$ (кольцо многочленов), всегда существует свободная резольвента длины $\leq N$.

является комплексом (вспомните, что мы говорили про запись комплексов с нижними индексами).

Комплекс $K^A_\cdot(f_1, \ldots, f_n)$ называется *комплексом Кошуля.*

Задача 5.8. Докажите, что $H_0(K^A_\cdot(f_1, \ldots, f_n)) = A/(f_1, \ldots, f_n)$.

Задача 5.9. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(1) комплекс $K^A_\cdot(f_1, \ldots, f_n)$ стягиваем;

(2) комплекс $K^A_\cdot(f_1, \ldots, f_n)$ ацикличен;

(3) $(f_1, \ldots, f_n) = A$.

Указание. Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (1): если $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$, то определим стягивающую гомотопию

$$s\colon K^A_i(f_1, \ldots, f_n) \to K^A_{i+1}(f_1, \ldots, f_n)$$

по формуле

$$e_{p_1, \ldots, p_i} \mapsto \sum_{j \in [1;n] \setminus \{p_1, \ldots, p_i\}} g_j e_{(j, p_1, \ldots, p_i)},$$

где для всякой последовательности $S = (q_1, \ldots, q_r)$ мы полагаем $e_S = \varepsilon e_{q'_1, \ldots, q'_r}$ (ε — знак перестановки, расставляющей элементы последовательности S в порядке возрастания, $(q'_1, \ldots, q'_r)$ — результат такой перестановки).

В работе с комплексами Кошуля помогает такой факт:

Задача 5.10. Докажите, что $K^A_\cdot(f_1, \ldots, f_n)$ изоморфен конусу $C(\varphi)$, где гомоморфизм $\varphi\colon K^A_\cdot(f_2, \ldots, f_n) \to K^A_\cdot(f_2, \ldots, f_n)$ задается умножением на f_1.

Далее будем писать $H^A_i(f_1, \ldots, f_n)$ вместо $H^i(K^A_\cdot(f_1, \ldots, f_n))$. Из предыдущей задачи вытекает такое важное следствие:

Задача 5.11. Докажите, что имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \to H^A_i(f_2, \ldots, f_n) \xrightarrow{f_1} H^A_i(f_2, \ldots, f_n) \to \\ H^A_i(f_1, \ldots, f_n) \to H^A_{i-1}(f_2, \ldots, f_n) \xrightarrow{f_1} H^A_{i-1}(f_2, \ldots, f_n) \ldots \end{aligned} \tag{5.2}$$

Как мы отмечали, комплекс $K_\cdot^A(f_1, \ldots, f_n)$, вообще говоря, не обязан быть резольвентой A-модуля $A/(f_1, \ldots, f_n)$. Сейчас мы разберем важный случай, когда комплекс Кошуля резольвентой все-таки будет (и тем самым все соотношения и «высшие соотношения» между $f_1, \ldots, f_n$ порождаются тривиальными — «кошулевскими»).

Последовательность $f_1, \ldots, f_n \in A$, где A — коммутативное кольцо, называется *регулярной*, если f_1 не является делителем нуля в A, f_2 не является делителем нуля в $A/(f_1)$, f_3 не является делителем нуля в $A/(f_1, f_2)$,..., f_n не является делителем нуля в $A/(f_1, \ldots, f_{n-1})$ («не является делителем нуля» означает, в частности, «отлично от нуля»).

Задача 5.12. Пусть $f_1, \ldots, f_n \in A$ — регулярная последовательность. Докажите, что $H_i^A(f_n, f_{n-1}, \ldots, f_1) = 0$ при $i > 0$.

Указание. Индукция по n с использованием точной последовательности (5.2).

В важных для геометрии случаях результат этой задачи допускает обращение. Именно, предположим, что кольцо A и его элементы $f_1, \ldots, f_n$ удовлетворяют одному из следующих условий:

- A — кольцо многочленов, $f_1, \ldots, f_n$ — однородные многочлены положительной степени;

- A — локальное кольцо алгебраического многообразия в данной точке x, $f_1, \ldots, f_n$ — ростки функций, обращающихся в нуль в точке x.

Тогда из ацикличности комплекса Кошуля $K_\cdot^A(f_n, \ldots, f_1)$ в степенях, отличных от нуля, вытекает регулярность последовательности $f_1, \ldots, f_n$ (достаточно даже обращения в нуль $H_1^A(f_n, \ldots, f_1)$). Нам этот результат не потребуется, и доказывать его мы не будем.

Независимость от выбора покрытия

Теперь мы можем доказать, что когомологии Чеха конечного аффинного открытого покрытия квазипроективного многообразия с коэффициентами в квазикогерентном пучке не зависят от выбора покрытия. Первый шаг в доказательстве таков. Мы рассматриваем аффинное многообразие X; положим $A = k[X]$, и пусть $f_1, \dots, f_n \in A$ — такие функции, что $\bigcup_i D(f_i) = X$. Обозначим покрытие многообразия X множествами $D(f_i)$ через $\mathfrak{U}$. Наша ближайшая цель — показать, что $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при $i > 0$ для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ (что и не удивительно: результат задачи 4.25 подсказывает, что это равенство должно выполняться для *любого* конечного аффинного покрытия, и так оно, как мы далее увидим, и будет).

Начнем с самого важного частного случая. Именно, пусть $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Обращение в нуль старших когомологий Чеха $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в $\mathcal{F}$ равносильно ацикличности пополненного комплекса Чеха $\tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$. Она доказывается следующим образом. Для каждого целого $m > 0$ рассмотрим подкомплекс $C^{\cdot}_m \subset \tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$, определенный так: $s \in \tilde{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ лежит в C^r_m тогда и только тогда, когда всякий элемент $s_{i_0,\dots,i_r} \in A_{f_{i_0}\dots f_{i_r}}$ представим в виде $a/(f_{i_0}\dots f_{i_r})^m$, где $a \in A$. Неформально говоря, коцепи, лежащие в $C^{\cdot}_m$, «имеют полюса порядка не выше m».

Задача 5.13. Покажите, что $C^{\cdot}_m$ — действительно подкомплекс в $\tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$, что $C^{\cdot}_m \subset C^{\cdot}_{m+1}$, и что $\tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = \bigcup_{m>0} C^{\cdot}_m$.

Задача 5.14. Покажите, что из ацикличности комплексов $C^{\cdot}_m$ при всех достаточно больших m будет вытекать ацикличность комплекса $\tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$.

Покажем теперь, что комплексы $C^{\cdot}_m$ действительно ацикличны (вообще при всех $m > 0$).

Задача 5.15. Покажите, что комплекс $C^{\cdot}_m$ изоморфен сдвинутому комплексу Кошуля $K^A_{\cdot}(f_1^m, -f_2^m, f_3^m, \dots, (-1)^{n-1} f_n^m)[1-n]$.

Указание. Гомоморфизм из сдвинутого комплекса Кошуля в $C^{\cdot}_m$ строится так. Пусть $e_{p_1,\dots,p_i}$ — элемент базиса K^A_i, где $i < n$.

Ему соответствует следующая чеховская $(n-1-i)$-коцепь, определенная следующим образом. Пусть $q_1, q_2, \dots, q_{n-i}$ — элементы множества $[1;n] \setminus \{p_1, \dots, p_i\}$, записанные в порядке возрастания. Положим $s_{q_1,q_2,\dots,q_{n-i}} = 1/(f_{p_1} \dots f_{f_i})^r$ и $s_{t_1,t_2,\dots,t_{n-i}} = 0$ при $\{t_1, \dots, t_{n-i}\} \neq \{q_1, q_2, \dots, q_{n-i}\}$; элементу $e_{1,\dots,n} \in K_n^A$ соответствует $1 \in A = \tilde{C}^{-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$.

Задача 5.16. Покажите, что все комплексы $C_m^{\cdot}$ ацикличны.

Указание. Ввиду предыдущей задачи, надо только убедиться в ацикличности соответствующих комплексов Кошуля. Это следует из задачи 5.9: в самом деле, коль скоро $X = \bigcup D(f_i)$, то $(f_1, \dots, f_n) = A$ (теорема Гильберта о нулях). Выведите отсюда, что $(f_1^m, \dots, f_n^m) = A$ (постарайтесь обойтись без теоремы о нулях в этом выводе).

Сопоставляя результаты задач 5.16 и 5.15, получаем, что $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = 0$ при $i > 0$, как и было обещано.

Задача 5.17. Пусть M — свободный A-модуль (не обязательно конечного ранга). Покажите, что $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \tilde{M}) = 0$ при $i > 0$.

Указание. Для модулей ранга 1 мы это уже знаем.

Задача 5.18. Пусть $\mathfrak{U}$ — конечное покрытие, состоящее из n элементов. Покажите, что $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при $i \geqslant n$ для *любого* пучка абелевых групп $\mathcal{F}$ на X.

Задача 5.19. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X. Покажите, что существует точная последовательность

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0, \tag{5.3}$$

где $\mathcal{E} = \tilde{M}$ для некоторого свободного A-модуля M.

Указание. Всякий модуль — фактормодуль свободного.

Задача 5.20. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X. Покажите, что $H^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при всех $i > 0$.

Решение. Проведем убывающую индукцию по i. Для $i \geqslant n$ мы это уже знаем (задача 5.18). Пусть известно, что $\check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ для всех квазикогерентных пучков $\mathcal{F}$. Чтобы доказать, что $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при $i > 0$, рассмотрим последовательность когомологий, ассоциированную с точной последовательностью (5.3):

$$\cdots \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to \ldots .$$

В ней $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = 0$ в силу результата задачи 5.17, а $\check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) = 0$ по предположению индукции. □

Перейдем к произвольным аффинным покрытиям. Пусть, для начала, X — произвольное топологическое пространство. Если $U \subset X$ — открытое подмножество и $\mathfrak{U}$ — покрытие X, то $\{U_i \cap U\}_{i \in I}$ — покрытие U, которое мы будем обозначать $\mathfrak{U}|_U$.

Задача 5.21. Пусть покрытие $\mathfrak{U}$ конечно. Постройте гомоморфизм комплексов $\varphi\colon \tilde{C}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \tilde{C}(\mathfrak{U}|_U, \mathcal{F}|_U)$ и покажите, что конус $C(-\varphi)$ изоморфен $\tilde{C}(\mathfrak{U}', \mathcal{F})[1]$, где $\mathfrak{U}'$ — покрытие, получаемое добавлением множества U к покрытию $\mathfrak{U}$.

Задача 5.22. Пусть $\mathfrak{U}$ — конечное покрытие, $U \subset X$ — открытое подмножество, $\mathfrak{U}'$ — покрытие, получаемое добавлением множества U к покрытию $\mathfrak{U}$. Предположим, что $\check{H}^t(\mathfrak{U}|_U, \mathcal{F}|_U) = 0$ для всех $t > 0$. Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^r(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ для всех r.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и точной последовательностью (1.4).

Задача 5.23. Пусть $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ — два конечных покрытия, причем каждый элемент покрытия $\mathfrak{U}_2$ содержится в каком-то элементе покрытия $\mathfrak{U}_1$ (как говорят, покрытие $\mathfrak{U}_2$ *вписано* в покрытие $\mathfrak{U}_1$). Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U}_1, \mathcal{F}) \cong \check{H}^r(\mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2, \mathcal{F})$ для всех r.

Указание. $\mathfrak{U}_2$ вообще не обязано быть покрытием: это может быть семейство открытых множеств, каждое из которых содержится в каком-то множестве из покрытия $\mathfrak{U}_1$. Проведите индукцию по числу элементов семейства $\mathfrak{U}_2$ (см. предыдущую задачу).

Пусть теперь по-прежнему X — аффинное многообразие и $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X.

Задача 5.24. Пусть $\mathfrak{U}$ — аффинное покрытие вида $\bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$, и пусть $\mathfrak{V}$ — произвольный конечный набор аффинных открытых подмножеств X. Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}, \mathcal{F}) = \check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Указание. Проведите индукцию по числу элементов в семействе $\mathfrak{V}$ с использованием задачи 5.22.

Задача 5.25. Докажите, что в любое открытое покрытие аффинного многообразия X можно вписать подпокрытие, составленное из множеств вида $D(f)$.

Задача 5.26. Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при $r > 0$, где $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X, а $\mathfrak{U}$ — конечное аффинное покрытие X.

Указание. Пусть $\mathfrak{V}$ — конечное покрытие множествами вида $D(f)$, вписанное в $\mathfrak{U}$. Выведите из предыдущих задач, что $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \check{H}^r(\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}, \mathcal{F})$ и $\check{H}^r(\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}, \mathcal{F}) = 0$.

Разобравшись с аффинными многообразиями, легко покончить и со всеми остальными.

Задача 5.27. Пусть X — алгебраическое многообразие, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — его конечные аффинные покрытия, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \check{H}^r(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ для всех r.

Указание. Докажите, что обе группы когомологий изоморфны $\check{H}^r(\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}, \mathcal{F})$; для этого воспользуйтесь задачами 5.22 и 5.26.

Определение когомологий квазикогерентных пучков

Теперь мы можем дать обещанное определение-времянку.

Определение 5.28. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный или квазикогерентный пучок на квазипроективном алгебраическом многообразии X. Тогда, по определению, $H^r(X, \mathcal{F}) = \check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ для какого-нибудь (стало быть, и любого) конечного аффинного покрытия $\mathfrak{U}$.

Напомним, что существование точной последовательности когомологий гарантируется результатом задачи 5.6.

В свете этого определения результат задачи 5.26 означает, что старшие когомологии когерентного или квазикогерентного пучка на аффинном многообразии тривиальны. Этот факт называется «теоремой B» Серра для аффинных многообразий; он является аналогом одноименной теоремы A. Картана для многообразий Штейна. Доказательство теоремы Серра гораздо проще, чем теоремы Картана, но и теорема Серра при любом изложении и любом выборе определения когомологий нетривиальна.

Задача 5.29. Пусть $\mathcal{F}$ — (квази)когерентный пучок на Y, и пусть $i\colon Y \hookrightarrow X$ — замкнутое вложение. Докажите, что $H^r(Y,\mathcal{F}) = H^r(X, i_*\mathcal{F})$ для всех r.

Указание. Пусть $\mathfrak{U}$ — аффинное открытое покрытие X и $\mathfrak{U}'$ — покрытие, высекаемое им на Y. Убедитесь, что $C^{\cdot}(\mathfrak{U}, i_*\mathcal{F})$ и $C^{\cdot}(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ — один и тот же комплекс.

Серровские вычисления и их следствия

Для начала найдем когомологии структурного пучка на проколотом аффинном пространстве $X = \mathbb{A}^{n+1} \setminus (0, \dots, 0)$. Всюду далее будем предполагать, что $n > 0$.

Вычисление H^0 совсем элементарно:

Задача 5.30. Покажите, что $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k[T_0, \dots, T_n]$ (иными словами, всякая регулярная функция на $X \subset \mathbb{A}^{n+1}$ продолжается на все $\mathbb{A}^{n+1}$).

Указание. Если рациональная функция $f \in k(T_0, \dots, T_n)$ регулярна на X, то регулярны и ее ограничения на все подмножества $D(T_i) \subset X$. Функция, регулярная на $D(T_i)$, имеет вид h/T_i^m, где $h \in k[T_0, \dots, T_n]$.

Для вычисления старших когомологий мы воспользуемся той же техникой аппроксимации, что при вычислении когомологий структурного пучка на аффинном многообразии. Именно, пусть $\mathfrak{V}$ — покрытие X аффинными открытыми множествами $D(T_i)$ для $i = 0, \ldots, n$. Для каждого $m > 1$ рассмотрим подкомплекс $C^{\cdot}_m \subset \tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X)$, определенный следующим образом: $s \in \tilde{C}^r(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X)$ лежит в C^r_m тогда и только тогда, когда всякий элемент $s_{i_0,\ldots,i_r}$ представим в виде $F/(T_{i_0} \ldots T_{i_r})^m$, где $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$ (коцепи, лежащие в $C^{\cdot}_m$, имеют полюса порядка не выше m).

Задача 5.31. Покажите, что $C^{\cdot}_m$ — действительно подкомплекс в $\tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X)$, что $C^{\cdot}_m \subset C^{\cdot}_{m+1}$, и что $\tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = \bigcup_{m>0} C^{\cdot}_m$.

Задача 5.32. Покажите, что комплекс $C^{\cdot}_m$ изоморфен сдвинутому комплексу Кошуля $K^A_{\cdot}(T_0^m, -T_1^m, \ldots, (-1)^n T_n^m)[-n]$, где $A = k[T_0, \ldots, T_n]$.

Задача 5.33. Покажите, что $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ при $0 < i < n$.

Указание. Ввиду предыдущей задачи, это сводится к вопросу о комплексе Кошуля $K^A_{\cdot}(T_0^m, -T_1^m, \ldots, (-1)^n T_n^m)$. Покажите, что последовательность $(T_0^m, -T_1^m, \ldots, (-1)^n T_n^m)$ является регулярной.

Группа $H^n(X, \mathcal{O}_X)$, однако же, нулевой уже не будет. В самом деле:

Задача 5.34. Покажите, что $H^n(C^{\cdot}_m) \cong (T_0 T_1 \ldots T_n)^{-1} V$, где V — векторное пространство полиномов от $T_0^{-1}, \ldots, T_n^{-1}$, в которые каждый из (T_i^{-1}) входит в степени $\leqslant m$.

Указание. Ввиду задачи 5.32, $H^n(C^{\cdot}_m) \cong H_0(K^A_{\cdot}(T_0^m, \ldots, T_n^m))$.

Поскольку $\tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X)$ является объединением возрастающей последовательности комплексов $C^{\cdot}_m$, из результата предыдущей задачи можно найти и $H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X)$:

Задача 5.35. Покажите, что

$$H^n(X, \mathcal{O}_X) \cong (T_0 T_1 \ldots T_n)^{-1} k[T_0^{-1}, \ldots, T_n^{-1}].$$

Точнее говоря: всякая n-коцепь в чеховском комплексе покрытия $\mathfrak{V}$ есть одно-единственное сечение $s_{0,1,\ldots,n} \in k[T_0, \ldots, T_n]_{T_0 \ldots T_n}$.

Так вот, всякая n-коцепь когомологична какому-то элементу из $(T_0T_1\dots T_n)^{-1}k[T_0^{-1},\dots,T_n^{-1}]$, и все эти элементы представляют различные классы когомологий.

Разумеется, $H^i(X,\mathcal{O}_X)=0$ при $i>n$. Кстати, нетривиальность когомологий структурного пучка у проколотого аффинного пространства $\mathbb{A}^m$ показывает, что при $m>1$ это многообразие не аффинно.

От проколотого аффинного пространства легко перейти и к проективному:

Задача 5.36. Пусть $\mathbb{P}^n=X/k^*$, где $X=\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{(0,\dots,0)\}$. Обозначим через $\mathfrak{U}$ покрытие $\mathbb{P}^n$ аффинными подпространствами $\mathbb{A}^n_i=D(T_i)/k^*$ для $i=0,\dots,n$, и пусть $\mathfrak{V}$ — покрытие X, рассматривавшееся выше. Покажите, что

$$\tilde{C}(\mathfrak{V},\mathcal{O}_X)\cong\bigoplus_{r=-\infty}^{\infty}\tilde{C}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)),$$

причем прямому слагаемому $\tilde{C}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))\subset\tilde{C}(\mathfrak{V},\mathcal{O}_X)$ соответствует подкомплекс в $\tilde{C}(\mathfrak{V},\mathcal{O}_X)$, состоящих из коциклов, все элементы которых являются однородными рациональными функциями степени r.

Задача 5.37. Докажите следующие утверждения про когомологии пучков $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ (первое из них мы на самом деле уже знаем из задачи 3.13):

1) $H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))=0$ при $r<0$ и изоморфно пространству мономов степени r от $T_0,\dots,T_n$ при $r\geqslant 0$ ($T_0,\dots,T_n$ — однородные координаты).

2) $H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))=0$ при $i>n$ и при $0<i<n$ (для всякого r).

3) $H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))=0$ при $r>-n-1$.

4) Если $r\leqslant -n-1$, то $H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))=0$ изоморфно пространству мономов степени $-(r+n+1)$ от $T_0^{-1},\dots,T_n^{-1}$ (в частности, это пространство одномерно при $r=-n-1$; мы подразумеваем, что каждый из T_i^{-1} имеет степень 1).

Результат этой задачи как раз и называется «серровским явным вычислением».

Из серровских вычислений легко выводятся две (также принадлежащие Серру) основные теоремы о когомологиях когерентных пучков на проективных многообразиях. Начнем с теоремы конечности.

Задача 5.38. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Докажите, что все $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ являются конечномерными пространствами над основным полем.

Решение. Серровское явное вычисление показывает, что утверждение верно для прямых сумм пучков вида $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(s)$. Кроме того, при $i > n$ утверждение верно для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$: поскольку $\mathbb{P}^n$ обладает аффинным открытым покрытием из $n+1$ множества, $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = 0$ при $i > n$. Теперь проведем убывающую индукцию по i, как в задаче 5.20. Пусть уже доказано, что $H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G})$ конечномерно для любого когерентного пучка $\mathcal{G}$, и пусть $\mathcal{F}$ — произвольный когерентный пучок. В силу следствия проективной теоремы A (задача 4.37) существует точная последовательность когерентных пучков

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0,$$

в которой $\mathcal{E}$ — прямая сумма пучков вида $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(s)$. Рассмотрим точную последовательность когомологий:

$$\cdots \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}) \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) \to H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}) \to \dots .$$

В ней $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E})$ конечномерно в силу Серровского вычисления, а $H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G})$ — по предположению индукции. Следовательно, конечномерно и $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$. Все доказано. □

Доказанный результат немедленно обобщается на любые проективные многообразия:

Задача 5.39. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на проективном многообразии X. Докажите, что все $H^i(X, \mathcal{F})$ являются конечномерными пространствами над основным полем.

Указание. См. задачу 5.29.

Из теоремы конечности вытекает, в частности, конечномерность пространства глобальных сечений когерентных (стало быть, любых локально свободных) пучков на проективном многообразии.

Еще одно следствие теоремы конечности:

Задача 5.40. Докажите, что всякая регулярная функция на проективном многообразии является константой.

Решение. Надо показать, что $H^0(X, \mathcal{O}_X)$, где X — проективное многообразие, совпадает с основным полем k. Заметим, что $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ — кольцо; оно не имеет делителей нуля (если $fg = 0$, то $X = V(f) \cup V(g)$; в силу неприводимости X отсюда вытекает, что либо f, либо g равна нулю) и, по теореме конечности, оно конечномерно над k. Однако конечномерная коммутативная алгебра над полем без делителей нуля является полем. Следовательно, $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ — конечное расширение алгебраически замкнутого поля k, откуда $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$. □

Вторая основная теорема — теорема B для проективных многообразий.

Задача 5.41. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Докажите, что существует такое число n_0, что при всех $r > n_0$ имеем $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) = 0$ при $i > 0$.

Указание. Если $\mathcal{F}$ — прямая сумма пучков вида $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(s)$, то это с очевидностью следует из вычислений Серра; далее примените убывающую индукцию по i, как в задаче 5.38.

Результат этой задачи также переносится на произвольные проективные многообразия:

Задача 5.42. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$. Докажите, что существует такое число n_0, что при всех $r > n_0$ имеем $H^i(X, \mathcal{F}(r)) = 0$ при $i > 0$.

Указание. См. задачу 5.29.

6. Некоторые приложения

Многочлен Гильберта

Начнем с общего определения. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок векторных пространств на топологическом пространстве X, и пусть $H^i(X,\mathcal{F})$ конечномерны при всех $i \geqslant 0$ и равны нулю при всех $i \gg 0$. Тогда *эйлеровой характеристикой* пучка $\mathcal{F}$ называется число

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i h^i(X,\mathcal{F}),$$

где через $h^i(X,\mathcal{F})$ обозначена (и далее будет обозначаться) $\dim H^i(X,\mathcal{F})$.

Задача 6.1. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

— точная последовательность пучков. Предположим, что для всех $\mathcal{F}_i$ определена эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{F}_i)$. Докажите, что $\chi(\mathcal{F}_1) + \chi(\mathcal{F}_3) = \chi(\mathcal{F}_2)$.

Задача 6.2. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \cdots \to \mathcal{F}_n \to 0$$

— точная последовательность пучков. Предположим, что для всех $\mathcal{F}_i$ определена эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{F}_i)$. Докажите, что $\sum_{i=0}^n (-1)^i \chi(\mathcal{F}_i) = 0$.

Указание. Длинную точную последовательность можно разрезать на короткие.

Ввиду того, что эйлерова характеристика аддитивна в точных последовательностях, вычислять ее легче, чем группы когомологий по отдельности. С другой стороны, она несет и меньше информации, чем группы когомологий. Например, эйлерова характеристика не меняется при непрерывной деформации пучка — значит, она непригодна для выделения случаев «необщего положения». Кроме того, непосредственный геометрический смысл имеют, как правило, H^i с малыми i (чаще всего H^0). Поэтому, подсчитав эйлерову характеристику пучка, нередко приходится еще думать, как от нее перейти к нужной нам, скажем, h^0. Ниже мы для этих целей воспользуемся теоремой B, гарантирующей, что для «достаточно подкрученных» пучков старшие когомологии обращаются в нуль и тем самым $h^0 = \chi$.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Тогда, в силу теоремы конечности, эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{F})$ заведомо определена. Рассмотрим функцию $m \mapsto \chi(\mathcal{F}(m))$. Вскоре мы покажем, что эта функция всегда является многочленом от m; этот многочлен называется *многочленом Гильберта* пучка $\mathcal{F}$ и обозначается $P_{\mathcal{F}}$. А пока, предполагая существование многочлена Гильберта доказанным, выведем из него (существования) некоторые следствия.

Задача 6.3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — замкнутое подмножество. Покажите, что $\chi(\mathcal{O}_X(m)) = h^0(\mathcal{O}_X(m))$ для всех $m \gg 0$.

Пусть R — кольцо многочленов $k[x_0, \dots, x_n]$, где $x_0, \dots, x_n$ — однородные координаты в $\mathbb{P}^n$. Имеем $R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$, где $R_i \subset R$ — векторное подпространство, порожденное однородными многочленами степени i. С каждым замкнутым подмножеством $X \subset \mathbb{P}^n$ можно связать идеал $I_X \subset R$, порожденный однородными многочленами, тождественно обращающимися в нуль на X. Поскольку идеал I_X порожден однородными многочленами, он и сам *однороден,* иными словами, $I_X = \sum_i (I_X \cap R_i)$. Соответственно, факторкольцо $R_X = R/I_X$ будет *градуированным:* выполнено равенство $R_X = \bigoplus (R_X)_i$, где $(R_X)_i = R_i/(I_X \cap R_i)$, причем $R_i R_j \subset R_{i+j}$. Градуированное кольцо R_X называется *однородным координатным кольцом* замкнутого подмножества X. Геометрический смысл размерностей его компонент следующий: $\dim(R_X)_i$ — это коразмерность пространства однородных многочленов степени i, обращающихся в нуль всюду на X, в пространстве всех однородных многочленов степени i. Выражаясь на классическом языке, $\dim(R_X)_i$ есть число линейных условий, которые подмножество X накладывает на формы степени i.

Задача 6.4. Проверьте все утверждения, оставленные в предыдущем абзаце без доказательства.

Задача 6.5. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — замкнутое подмножество. Покажите, что функция $m \mapsto \dim(R_X)_m$ при всех $m \gg 0$ является многочленом.

Указание. Выведите из точной последовательности

$$0 \to \mathcal{I}_X(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \to \mathcal{O}_X(m) \to 0,$$

что $\dim(R_X)_m = h^0(\mathcal{O}_X(m))$ при всех $m \gg 0$.

Кстати, функция $m \mapsto \dim(R_X)_m$ называется *функцией Гильберта* подмножества X и обозначается $h_X(m)$. Тот факт, что при больших значениях аргумента функция Гильберта ведет себя как многочлен, можно доказать и без всяких когомологий.

Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — замкнутое подмножество, то многочлен Гильберта пучка $\mathcal{O}_X$ называется также многочленом Гильберта подмножества X и обозначается P_X. Все коэффициенты многочлена Гильберта имеют геометрический смысл; например, мы докажем, что его степень совпадает с *размерностью* множества X, а старший коэффициент однозначно определяет *степень* (число точек пересечения с общим линейным подпространством дополнительной размерности). Это — важные инварианты многообразия X, причем степень зависит от вложения X в проективное пространство, а размерность — нет. Другой важный инвариант, также не зависящий от вложения, — это свободный член многочлена Гильберта. Его независимость от вложения очевидна, поскольку он равен $P_X(0) = \chi(X, \mathcal{O}_X)$. По историческим причинам принято рассматривать не прямо эйлерову характеристику структурного пучка, а число $p_a(X) = (-1)^{\dim X}(\chi(X, \mathcal{O}_X) - 1)$. Это число называется *арифметическим родом.* Если, например, X — неособая кривая над $\mathbb{C}$, то $p_a(X) = h^1(\mathcal{O}_X)$ совпадает с числом ручек X как компактной римановой поверхности. Если у кривой X есть особенности, но при малом шевелении коэффициентов уравнений X получается неособая кривая, то $p_a(X)$ совпадает с числом ручек этой неособой кривой.

Теперь займемся доказательством того, что многочлен Гильберта данного когерентного пучка $\mathcal{F}$ действительно является многочленом. Доказательство будет проведено индукцией по размерности проективного пространства с помощью типичной операции «переход к гиперплоскому сечению».

Пусть вообще $Y \subset X$ — замкнутое подмногообразие многообразия X и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Тогда $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y$ — когерентный пучок на X, причем ограничение этого пучка на $X \setminus Y$ есть нулевой пучок. Стало быть, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y$ можно рассматривать как пучок на $\mathcal{O}_Y$. Легко видеть, что это пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей. Пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y$, рассматриваемый как пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей, обозначается иногда $\mathcal{F}|_Y$. Если $\mathcal{F}$ — пучок, соответствующий векторному расслоению E на X, то $\mathcal{F}|_Y$ соответствует его ограничению $E|_Y$. Типичный пример: пусть X аффинно, $A = k[X]$ и $I \subset A$ — идеал функций, обращающихся в нуль на Y, $\mathcal{F} = \tilde{M}$. Тогда $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y = \widetilde{M/IM}$.

Для случая, когда $X = \mathbb{P}^n$, $Y = \mathbb{P}^{n-1}$, эта конструкция выглядит так. Пусть s — сечение пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ (то есть линейная однородная функция от $x_0, \ldots, x_n$), множеством нулей которого является гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$.

Задача 6.6. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Докажите, что имеет место точная последовательность

$$\mathcal{F}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}} \to 0, \tag{6.1}$$

в которой s — умножение на s.

Отображение s в этой точной последовательности мономорфизмом быть не обязано (например, если $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}$, то это вообще тождественный нуль), так что дополнить ее нулем слева не всегда возможно. Тем не менее, это можно сделать «почти всегда». Именно, верно следующее утверждение:

> Для данного когерентного пучка $\mathcal{F}$ на $\mathbb{P}^n$ и общей линейной формы $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ последовательность
>
> $$0 \to \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}} \to 0 \tag{6.2}$$
>
> точна (здесь $\mathbb{P}^{n-1} = V(s) \subset \mathbb{P}^n$).

Для доказательства этого утверждения нам придется разобраться, в каком случае умножение на данную функцию является мономорфизмом когерентного пучка; для этого, в свою очередь, потребуется совершить экскурс в коммутативную алгебру, а именно, познакомиться с важным понятием «ассоциированных простых идеалов». Хорошая ссылка на эту тему — [6, с. 172–177].

Задача 6.7. Пусть M — модуль над кольцом A и $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал. Покажите, что M содержит подмодуль, изоморфный $A/\mathfrak{a}$, тогда и только тогда, когда существует элемент $m \in M$ такой, что $\mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{a}$.

Задача 6.8. Пусть M — модуль над кольцом A. Покажите, что всякий максимальный элемент в множестве идеалов вида $\mathrm{Ann}(m)$ для всех $m \in M \setminus \{0\}$ является простым идеалом.

Решение. Пусть идеал $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$ является максимальным во множестве аннуляторов ненулевых элементов модуля M; покажем, что идеал $\mathfrak{p}$ прост. В самом деле, пусть $fg \in \mathfrak{p}$, то есть $fgx = 0$. Нам надо показать, что f или g лежит в $\mathfrak{p}$. Если $f \notin \mathfrak{p}$, то $fx \neq 0$ и $\mathrm{Ann}(fx) \supset \mathrm{Ann}(x)$. Ввиду максимальности $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$ в множестве аннуляторов имеем $\mathrm{Ann}(fx) = \mathfrak{p}$. Так как $g \in \mathrm{Ann}(fx) = \mathrm{Ann}(x)$, получаем, что $g \in \mathfrak{p}$. $\square$

Задача 6.9. Пусть M — ненулевой модуль над *нетеровым* кольцом A. Покажите, что M содержит подмодуль, изоморфный $A/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал.

Если A — коммутативное кольцо, M — модуль над A и $\mathfrak{p} \subset A$ — такой простой идеал, что M содержит подмодуль, изоморфный $A/\mathfrak{p}$ (эквивалентно: $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$ для некоторого $x \in M$), то говорят что простой идеал $\mathfrak{p}$ *ассоциирован* с модулем M. Множество всех простых идеалов, ассоциированных с модулем M, обозначается $\mathrm{Ass}(M)$. Как мы только что доказали, $\mathrm{Ass}(M) \neq \varnothing$ для ненулевого модуля M над нетеровым кольцом A.

Задача 6.10. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в кольце A. Покажите, что $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

Задача 6.11. Пусть M — модуль над нетеровым кольцом A. Покажите, что

$$\left\{ f \in A \mid \text{гомоморфизм } M \xrightarrow{f} M \text{ не мономорфен} \right\} = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}.$$

Указание. Если $f \in \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, то умножение на f отправляет в нуль ненулевые элементы $A/\mathfrak{p} \subset M$. Обратно, если $M \xrightarrow{f} M$ — не мономорфизм, то $f \in \mathrm{Ann}(x)$ для некоторого $x \neq 0$; примените задачу 6.8.

Теперь покажем, что для конечно порожденного модуля над нетеровым кольцом количество ассоциированных простых идеалов конечно. Для начала — такой факт:

Задача 6.12. Пусть

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

— точная последовательность модулей над кольцом A. Покажите, что $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'')$.

Указание. Пусть $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$. Если $A/\mathfrak{p} \cap M' = 0$, то покажите, что $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M'')$; если $A/\mathfrak{p} \cap M' \neq 0$, то покажите, что аннулятор любого ненулевого элемента из этого пересечения совпадает с $\mathfrak{p}$.

Задача 6.13. Пусть M — конечно порожденный модуль над нетеровым кольцом A. Покажите, что существует конечная фильтрация

$$M = M_n \supset M_{n-1} \supset \cdots \supset M_1 \supset M_0 = 0$$

такая, что все M_i/M_{i-1} изоморфны $A/\mathfrak{p}_i$ для каких-то простых идеалов $\mathfrak{p}_i \subset A$.

Указание. Существование модуля $M_1 \cong A/\mathfrak{p}_1$ вытекает из непустоты $\mathrm{Ass}(M)$. Для нахождения M_2 воспользуйтесь непустотой $\mathrm{Ass}(M/M_1)$, и т. д.

Задача 6.14. Пусть M — конечно порожденный модуль над нетеровым кольцом A. Покажите, что множество $\mathrm{Ass}(M)$ конечно.

Теперь мы можем доказать, что последовательность (6.2) точна для почти всех $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ (в том числе и слева).

Задача 6.15. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$, и пусть $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Покажите, что гомоморфизм $\mathcal{F}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F}$ мономорфен тогда и только тогда, когда для всех $i \in [0; n]$ умножение на s/x_i является мономорфизмом модуля $H^0(\mathbb{A}^n_i, \mathcal{F}(-1))$ в себя.

Задача 6.16. Покажите, что существует конечное число таких проективных подмногообразий $Y_1, \ldots, Y_N \subset \mathbb{P}^n$, отличных от всего $\mathbb{P}^n$, что для всякого сечения $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$, не обращающегося тождественно в нуль ни на одном из Y_i, гомоморфизм $\mathcal{F}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F}$ мономорфен.

Указание. Для каждого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(H^0(\mathbb{A}^n_i, \mathcal{F}(-1)))$ рассмотрите многообразие $V(\mathfrak{p}) \subset \mathbb{A}^n_i$ и его замыкание в $\mathbb{P}^n$.

Про геометрический смысл $\operatorname{Ass}(M)$ можно сказать и побольше; в дальнейшем мы еще раз обратимся к этой тематике. А пока что докажем наконец, что многочлен Гильберта действительно является многочленом.

Задача 6.17. Пусть уже доказано, что функция $r \mapsto \chi(\mathcal{G}(r))$ будет многочленом для всех когерентных пучков $\mathcal{G}$ на $\mathbb{P}^{n-1}$. Покажите, что функция $r \mapsto \chi(\mathcal{F}(r))$ будет многочленом для всех когерентных пучков $\mathcal{F}$ на $\mathbb{P}^n$.

Указание. Пусть гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ выбрана таким образом, чтобы последовательность (6.2) была точна; тогда $\chi(\mathcal{F}(r)) - \chi(\mathcal{F}(r-1)) = \chi(\mathcal{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}}(r))$.

Осталось проверить «базу индукции»: случай $n = 1$. В этом случае для почти всех $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{G} \to 0,$$

где когерентный пучок $\mathcal{G}$ сосредоточен в одной точке — нуле сечения s. Очевидно, что $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}(r)$ для всех r, так что $\chi(\mathcal{G}(r))$ не зависит от r, откуда следует, что $r \mapsto \chi(\mathcal{F}(r))$ — линейный многочлен.

Задача 6.18. Докажите утверждения, оставленные без доказательства в предыдущем абзаце.

Размерность, особость и неособость

В этом разделе мы сформулируем без доказательства несколько фактов, относящихся к основаниям алгебраической геометрии. Большинство из них хорошо согласуется с интуицией, но их строгие доказательства довольно утомительны.

Начнем с определения размерности. Пусть X — алгебраическое многообразие. Тогда *размерностью* многообразия X называют максимальную длину цепочек вида

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X,$$

где все X_j — неприводимые замкнутые подмножества и все включения строгие (длина цепочки — число n). Как отмечал Ю.И. Манин, это определение аналогично определениям из «Начал» Евклида: «оконечность поверхности есть линия, оконечность же линии есть точка...».

Вот основные свойства размерности.

(1) $\dim \mathbb{P}^n = \dim \mathbb{A}^n = n$.

(2) Если X — алгебраическое многообразие, f — регулярная функция на X и $V(f) \subset X$ — множество ее нулей, то все компоненты $V(f)$ имеют размерность в точности $\dim X - 1$.

Задача 6.19. Выведите свойство (1) из свойства (2) и определения размерности.

Указание. Проведите индукцию по n.

(3) Если $f\colon X \to Y$ — морфизм проективных многообразий, причем $f(X) = Y$ и все слои f конечны, то $\dim X = \dim Y$.

Теперь перейдем к определениям особых и неособых точек. Будем исходить из следующего примера. Пусть f — неприводимый многочлен от n переменных и $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$. Тогда точка

$p \in X$ будет неособой, если не все частные производные многочлена f обращаются в нуль в этой точке. Чтобы дать определения для общего случая, определим касательные пространства. Именно, *касательным пространством Зарисского* к замкнутому подмножеству $X \subset \mathbb{A}^n$ в точке $p = (a_1, \dots, a_n) \in X$ называется аффинное подпространство в $\mathbb{A}^n$, заданное системой уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} (\partial f / \partial T_i)(p)(T_i - a_i) = 0 \tag{6.3}$$

для всех $f \in I(X)$ (через $I(X) \subset k[T_1, \dots, T_n]$ обозначен идеал функций, обращающихся в нуль на X).

В этом определении вместо «для всех $f \in I(X)$» можно сказать «для всех f из некоторой системы образующих идеала $I(X)$». Касательное пространство Зарисского обозначается $T_p X \subset \mathbb{A}^n$.

В нашем примере с гиперповерхностью $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ касательное пространство Зарисского в особой точке будет совпадать со всем $\mathbb{P}^n$, в то время как касательное пространство в неособой точке $p = (a_1, \dots, a_n)$ — гиперплоскость, заданная уравнением

$$(\partial f / \partial T_1)(p)(T_1 - a_1) + \dots + (\partial f / \partial T_n)(p)(T_n - a_n).$$

У определения касательного пространства есть и «проективный» вариант: *касательным пространством Зарисского* к замкнутому подмножеству $X \subset \mathbb{P}^n$ в точке $p = (x_0 : \dots : x_n) \in X$ называется линейное подпространство в $\mathbb{P}^n$, заданное системой уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} (\partial F / \partial X_i)(x_0, \dots, x_n) \cdot x_i = 0$$

для всех $F \in I(X)$ (на сей раз $I(X)$ обозначает *однородный* идеал X).

И в этом определении можно брать не все однородные многочлены, зануляющиеся на X, а ограничиться образующими идеала I_X.

«Аффинное» и «проективное» определения касательного пространства согласованы друг с другом: если $X \subset \mathbb{A}^n_0$ — замкнутое подмножество, $\mathbb{A}^n_0 \subset \mathbb{P}^n$ и $p \in X$, причем $T_pX \subset \mathbb{A}^n_0$ — касательное пространство к X в точке p в смысле «аффинного» определения, то $\overline{T_pX} \subset \mathbb{P}^n$ — касательное пространство к $\overline{X}$ в точке p в смысле «проективного» определения (черта обозначает замыкание в $\mathbb{P}^n$).

Можно показать, что $\dim T_pX \geqslant \dim X$ для всех $p \in X$, где X — аффинное (или проективное) многообразие. Точка $p \in X$ называется *неособой,* если $\dim T_pX = \dim X$, и *особой,* если $\dim T_pX > \dim X$. Убедитесь, что это определение согласуется с нашим примером гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$.

При данном нами определении неособости неясно даже, не зависит ли это понятие от выбора вложения: вдруг при одном вложении многообразия в $\mathbb{P}^n$ данная точка будет особой, а при другом — неособой? На самом деле у касательных пространств (соответственно, у неособых точек) есть инвариантное определение. Именно, пусть $\mathcal{O}_x$ — локальное кольцо точки x на многообразии X. Рассмотрим идеалы $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ (напомним, что он состоит из ростков функций, обращающихся в нуль в точке x) и $\mathfrak{m}_x^2 \subset \mathfrak{m}_x$. Тогда векторное пространство $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k)$ называется *касательным пространством Зарисского* к X в точке x и обозначается $\mathcal{T}_xX$, а двойственное к нему пространство $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ называется *кокасательным пространством Зарисского.* Если $f\colon X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий и $f(x) = y$, то возникают естественный гомоморфизм $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ и двойственный к нему гомоморфизм $f_*\colon \mathcal{T}_xX \to \mathcal{T}_yY$. Другой (эквивалентный) вариант определения касательного пространства таков: $\mathcal{T}_xX$ есть множество «дифференцирований из O_x в k над k», где дифференцированием называется k-линейное отображение $D\colon \mathcal{O}_x \to k$, для которого выполнена формула Лейбница: $D(fg) = f(0)D(g) + g(0)D(f)$. Из этой формулы очевидно, что дифференцирование обращается в нуль на $\mathfrak{m}_x^2$, откуда получаем вложение пространства дифференцирований в $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k)$; можно показать, что это вложение является изоморфизмом. Согласно нашим определениям, всякий росток $f \in \mathfrak{m}_x$ определяет элемент пространства $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ и тем самым линейный функционал на двойственном к нему касательном пространстве Зарисского $\mathcal{T}_x X$; этот функционал называется *дифференциалом* функции (точнее, ростка) f и обозначается $d_x f$.

Связь с прежним определением касательного пространства устанавливается следующим образом. Если $X = \mathbb{A}^n$ и $x \in X$, то $\mathcal{T}_x X$ есть векторное пространство, соответствующее аффинному пространству $\mathbb{A}^n$ (именно, вектору $(v_1, \ldots, v_n)$ соответствует дифференцирование $f \mapsto \sum v_i \cdot (\partial f/\partial X_i)(x))$. Если теперь $i\colon X \subset \mathbb{A}^n$ — вложение, то $T_x X \subset \mathbb{A}^n$ есть аффинное подпространство, полученное откладыванием от точки x векторного пространства $i_*(\mathcal{T}_x X)$.

Перечислим теперь нужные нам свойства особых и неособых точек и касательных пространств Зарисского.

1. Множество неособых точек алгебраического многообразия X открыто по Зарисскому и непусто.

2. Пусть $I \subset \mathcal{O}_{X,x}$ — идеал, $V = V(I)$ — соответствующий ему росток подмногообразия («множество нулей функций из I»). Тогда $I = I(V)$ (то есть I является идеалом *всех* ростков, тождественно обращающихся в нуль на V) в том и только том случае, когда подпространство $\mathcal{T}_x V \subset \mathcal{T}_x X$ совпадает с пересечением ядер дифференциалов $d_x f$ для всех $f \in I$ (или, что равносильно, для всех f из некоторого семейства образующих идеала I). [Вообще говоря, это пересечение ядер может быть строго больше, чем $\mathcal{T}_x V$: рассмотрите случай $X = \mathbb{A}^2$, $x = (0,0)$, $I = (x_1^2)$].

3. Если точка $x \in X$ неособа, то кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ есть кольцо с однозначным разложением на множители.

Задача 6.20. Пусть $x \in X$ — неособая точка и $f \in \mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$. Предположим, что $d_x f \neq 0$. Покажите, что:

1. f — неприводимый элемент кольца $\mathcal{O}_x$;

2. Росток подмногообразия $V = V(f)$ неприводим (применительно к ростку неприводимость означает, что он имеет только одну компоненту, проходящую через x) и неособ в точке x.

3. $I(V) = (f)$.

По индукции из результата этой задачи получится вот что:

Задача 6.21. Пусть $x \in X$ –неособая точка и $f_1, \dots, f_m \in \mathfrak{m}_x$. Предположим, что дифференциалы $d_x f_1, \dots, d_x f_m$ линейно независимы. Тогда:

1. Росток подмногообразия $V = V(f_1, \dots, f_n)$ неприводим и неособ в точке x.

2. $I(V) = (f_1, \dots, f_n)$.

3. Последовательность $f_1, \dots, f_n$ регулярна.

Вернемся к геометрии. Пусть $V_1, \dots, V_r \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхности. Будем говорить, что они *трансверсальны,* если для всякой точки $x \in V_1 \cap \dots \cap V_r$ пересечение касательных пространств $T_x V_1 \cap \dots \cap T_x V_r$ имеет размерность $n - r$ (заметим, что из этого, в частности, следует, что все V_i неособы в точке x). Если гиперповерхности $V_1, \dots, V_r \subset \mathbb{P}^n$ трансверсальны, то их пересечение X называется *полным пересечением.* С точки зрения «внешней геометрии» полные пересечения — самый простой класс проективных многообразий. Наша ближайшая цель — показать, что полное пересечение X положительной размерности будет проективно нормально (иными словами, что гомоморфизм $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(t))$ будет эпиморфизмом при всех $t \geqslant 0$). Вот как это делается.

Задача 6.22. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие. Покажите, что X будет t-нормальным (то есть гомоморфизм $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(t))$ будет эпиморфизмом) тогда и только тогда, когда $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_X(t)) = 0$.

Чтобы убедиться в занулении $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_X(t))$, построим для этого пучка резольвенту. Это делается так. Пусть F_i — уравнение гиперповерхности V_i (подразумевается, что многочлен F_i неприводим), и пусть $d_i = \deg F_i = \deg V_i$. Через

$$s_i \colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t + d_i)$$

обозначим гомоморфизм, задаваемый умножением на F_i (для разных t это разные гомоморфизмы, но от того, что мы их обозначим одинаково, путаницы не возникнет). Положим $\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ и $\mathcal{E}_i = \bigoplus_{1\leqslant j_1<j_2<\dots<j_i\leqslant r} \mathcal{L}_{j_1,\dots,j_i}$, где $\mathcal{L}_{j_1,\dots,j_i} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d_{j_1} - \dots - d_{j_i})$, и построим комплекс

$$0 \to \mathcal{E}_r \to \mathcal{E}_{r-1} \to \dots \to \mathcal{E}_0 \to 0, \tag{6.4}$$

в котором дифференциалы устроены следующим образом. Каждый гомоморфизм из $\mathcal{E}_i$ в $\mathcal{E}_{i-1}$ задается набором гомоморфизмов из $\mathcal{L}_{j_1,\dots,j_i}$ в $\mathcal{L}_{t_1,\dots,t_{i-1}}$. Так вот, этот набор выглядит так: гомоморфизм из $\mathcal{L}_{j_1,\dots,j_i}$ в $\mathcal{L}_{j_1,\dots,\widehat{j_t},\dots,j_i}$ (крышка над индексом означает, что он опускается) имеет вид $(-1)^{t-1}s_{j_t}$, а гомоморфизмы из $\mathcal{L}_{j_1,\dots,j_i}$ в $\mathcal{L}_{t_1,\dots,t_{i-1}}$, для которых последовательность $(t_1,\dots,t_{i-1})$ не получается удалением одного элемента из последовательности $(j_1,\dots,j_i)$, равны нулю.

Задача 6.23. Покажите, что то, что получилось, действительно является комплексом.

Задача 6.24. Пусть $x \in \mathbb{A}^n_l \subset \mathbb{P}^n$. Покажите, что комплекс слоев в точке x

$$0 \to (\mathcal{E}_r)_x \to (\mathcal{E}_{r-1})_x \to \dots \to (\mathcal{E}_0)_x \to 0,$$

соответствующий комплексу (6.4), изоморфен комплексу Кошуля $K.(f_1,\dots,f_m)$, где $f_j = F_j/x_l^j$.

Задача 6.25. Покажите, что комплекс (6.4) ацикличен в степенях, отличных от нуля, и что его нулевая гомология изоморфна $\mathcal{O}_X$.

Задача 6.26. Пусть $X = V_1\cap\dots\cap V_r \subset \mathbb{P}^n$ — полное пересечение положительной размерности. Покажите, что $H^1(\mathcal{I}_X(t)) = 0$ при всех t.

Указание. Положим $\mathcal{E}_i(t) = \mathcal{K}_i$. Тогда получится точная последовательность

$$0 \to \mathcal{K}_r \to \mathcal{K}_{r-1} \to \dots \to \mathcal{K}_0 \to \mathcal{I}_X(r) \to 0.$$

Разобьем ее на короткие:

$$\begin{gathered}0 \to \mathcal{Z}_0 \to \mathcal{K}_0 \to \mathcal{I}_X(r) \to 0\\ 0 \to \mathcal{Z}_1 \to \mathcal{K}_1 \to \mathcal{Z}_0 \to 0\\ 0 \to \mathcal{Z}_2 \to \mathcal{K}_2 \to \mathcal{Z}_1 \to 0\ldots\end{gathered}$$

и воспользуемся тем, что $H^i(K_j) = 0$ при всех j и при $0 < i < n$ (ввиду серровского вычисления).

В случае, когда $r = n$, полное пересечение — конечное множество точек. Точная последовательность (6.4) позволяет подсчитать их количество.

Задача 6.27. Покажите, что при $r = n$ комплекс (6.4) ацикличен в степенях, отличных от нуля, и что его нулевая гомология изоморфна прямой сумме пучков $\mathcal{O}_x$ для всех $x \in V_1 \cap \cdots \cap V_r$ (пучок $\mathcal{O}_x$ — это «небоскреб», сосредоточенный в точке x: группа его сечений над $U \not\ni x$ есть нуль, а группа его сечений над $U \ni x$ есть основное поле k).

Задача 6.28. Покажите, что старшие группы когомологий «небоскреба» равны нулю.

Указание. Покажите, что его пополненный комплекс Чеха изоморфен сдвигу комплекса Кошуля $K^k_\cdot(\pm 1, \ldots, \pm 1)$.

Задача 6.29. Покажите, что $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)) = \binom{n+r}{r}$.

Задача 6.30. Пусть $V_1, \ldots, V_n$ — n штук трансверсальных гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$, причем $\deg V_i = d_i$. Покажите, что пересечение $X = V_1 \cap \cdots \cap V_n$ состоит из $d_1 d_2 \ldots d_n$ точек.

Решение. Обозначим число точек X через N. Пусть $\mathcal{K}.$ — комплекс (6.4) при $r = n$. Из задач 6.27 и 6.28 следует, что $\chi(H^0(\mathcal{K}.)) = N$. Теперь из задачи 6.2 вытекает, что

$$N = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \chi(\mathcal{E}_i). \tag{6.5}$$

Ввиду задачи 6.29 слагаемые в правой части выражаются через биномиальные коэффициенты, после чего можно найти N в явном виде. Интереснее, однако, вместо выкладок с биномиальными коэффициентами пойти по такому пути. Рассмотрим комплекс (6.4), в котором положено $F_1 = X_1^{d_1}, \dots, F_n = X_n^{d_n}$. Легко видеть (докажите!), что он также ацикличен в степенях, отличных от нуля, а его нулевая гомология представляет собой прямую сумму $d_1 d_2 \dots d_n$ небоскребов, сосредоточенных в точке $(1 : 0 : \dots : 0)$. Следовательно, его эйлерова характеристика, которая также вычисляется по формуле (6.5), равна $d_1 d_2 \dots d_n$. Все доказано. $\square$

Доказанный нами факт называется теоремой Безу. Наше доказательство этой теоремы в каком-то смысле параллельно тем, в которых гиперповерхности вырождаются. С научной точки зрения успех этого доказательства связан с тем, что эйлерова характеристика пучка не меняется при его непрерывной деформации. Подробнее по этому поводу см. книгу [7].

Наконец, применим тот же прием для интерпретации старшего члена многочлена Гильберта многообразия.

Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, $\dim X = m$. Можно показать (мы этого делать не будем), что существуют m штук гиперплоскостей $H_1, \dots, H_m$ таких, что пересечение $Z = H_1 \cap \dots \cap H_m \cap X$ трансверсально (в частности, не содержит особых точек X). Обозначим количество точек в этом пересечении через d. Мы покажем, что старший член многочлена Гильберта $P_X(t)$ имеет вид $(d/m!)t^m$. Делается это так:

Задача 6.31. Постройте комплекс пучков

$$0 \to \mathcal{K}_m \to \mathcal{K}_{m-1} \to \dots \to \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_0 \to 0,$$

в котором $\mathcal{K}_0 = \mathcal{O}_X$ и $\mathcal{K}_i = \mathcal{O}_X(-i)^{\binom{m}{i}}$, обладающий следующими свойствами: в степени, отличной от 0, он ацикличен, а его нулевая гомология изоморфна $\bigoplus_{z \in Z} \mathcal{O}_z$.

Задача 6.32. Покажите, что число точек во множестве Z равно

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P_X(t-i)$$

для всех $t \in Z$.

Осталось применить чисто алгебраический результат:

Задача 6.33. Пусть P — многочлен от одной переменной. Покажите, что многочлен

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} P(t-i)$$

является ненулевой константой d тогда и только тогда, когда $\deg P = m$, и при этом старший член P равен $(d/m!)t^m$.

7. Общее определение когомологий

Вялые пучки и вялые резольвенты

Вернемся к произвольным пучкам абелевых групп (или векторных пространств) на произвольных пространствах (для определенности будем считать, что имеем дело с пучками абелевых групп, и писать просто «пучок»).

Чтобы построить теорию когомологий для произвольных пучков на произвольных пространствах, нам потребуется понятие вялого пучка. По определению, пучок $\mathcal{F}$ на пространстве X называется *вялым*[7], если всякое сечение $\mathcal{F}$ над всяким открытым подмножеством $U \subset X$ продолжается до сечения над всем X.

Приведем примеры вялых пучков. Во-первых, в некоторых случаях вялыми будут постоянные пучки.

Задача 7.1. Покажите, что ненулевой постоянный пучок на связном пространстве X является вялым тогда и только тогда, когда пространство X неприводимо.

Вот второй пример вялого пучка: X — произвольное топологическое пространство, $\mathcal{F}(U)$ — группа всех (не обязательно непрерывных) функций из U в $\mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F}$ — вялый пучок.

[7] В русском переводе книги Р. Хартсхорна «Алгебраическая геометрия» вялые пучки названы плоскими.

Следующая задача показывает, что при любом разумном построении теории когомологий старшие (уж по крайней мере первые) когомологии вялых пучков должны обращаться в нуль.

Задача 7.2. Пусть

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G} \to 0$$

— точная последовательность пучков, в которой пучок $\mathcal{E}$ вял. Докажите, что отображение $\Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{G})$ эпиморфно.

Указание. Пусть $s \in \mathcal{G}(X)$. Нам надо поднять s до сечения $t \in \mathcal{F}(X)$. По крайней мере, существует такое открытое покрытие $X = \bigcap_{i \in I} U_i$, что $s|_{U_i}$ поднимается до сечения $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ для всех $i \in I$. Ключевое место таково: пусть $s|_{U_1}$ и $s|_{U_2}$ поднимаются до t_1 и t_2 соответственно; тогда $s|_{U_1 \cup U_2}$ поднимается до некоторого $t \in \mathcal{F}(U_1 \cup U_2)$. В самом деле, пусть $u = t_1|_{U_1 \cap U_2} - t_2|_{U_1 \cap U_2} \in \mathcal{F}(U_1 \cap U_2)$. Если $u = 0$, то все уже готово. В противном случае заметим, что $j(u) = 0 \in \mathcal{G}(U_1 \cap U_2)$, откуда $u = i(v)$, где $v \in \mathcal{E}(U_1 \cap U_2)$. Поскольку пучок $\mathcal{E}$ вял, сечение v продолжается до сечения $\bar{v} \in \mathcal{E}(X)$. Положим $t_2' = t_2 + i(\bar{v})$; тогда сечения t_1 и t_2' склеиваются в сечение $\mathcal{F}$ над $U_1 \cup U_2$, образ которого равен $s|_{U_1 \cup U_2}$.

Если бы покрытие было конечно, то доказательство завершалось бы индукцией по числу его элементов; в общем случае надо воспользоваться какой-нибудь разновидностью трансфинитной индукции. Например, леммой Цорна: рассмотрим частично упорядоченное множество, элементы которого — пары (U, t), где $t \in \mathcal{F}(U)$ и $j(t) = s|_U \ldots$

Большинство встречающихся в приложениях пучков вялыми отнюдь не являются. Следующий пример вялого пучка важен с общетеоретической точки зрения. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на пространстве X. Определим пучок $C^0(\mathcal{F})$ (пучок разрывных сечений) так: $C^0(\mathcal{F})(U)$ есть множество семейств вида $\{s_x\}_{x \in U}$, где $s_x \in \mathcal{F}_x$ (в отличие от встречавшихся нам аналогичных конструкций, никаких условий на взаимосвязь s_x для различных x не накладывается). Очевидно, $C^0(\mathcal{F})$ — действительно пучок, а не просто предпучок, и столь же очевидно, что этот пучок является вялым.

Задача 7.3. Пусть $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ — гомоморфизм пучков. Постройте по нему естественный гомоморфизм пучков $C^0(\mathcal{F}_1) \to C^0(\mathcal{F}_2)$ и докажите, что он обладает следующим свойством. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

— точная последовательность пучков. Тогда последовательность

$$0 \to C^0(\mathcal{F}_1) \to C^0(\mathcal{F}_2) \to C^0(\mathcal{F}_3) \to 0$$

тоже точна (по-ученому: функтор $C^0(\cdot)$ является точным).

Давайте теперь поймем, как можно строить теорию когомологий в общем случае. Предположим, теория когомологий (в том смысле, как объяснено в начале разд. 4) уже построена. Тогда когомологии пучков можно вычислять с помощью так называемых резольвент. Сначала — подготовительная задача:

Задача 7.4. Пусть в точной последовательности (пучков абелевых групп на пространстве X)

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{K} \to \mathcal{Z} \to 0$$

пучок $\mathcal{K}$ обладает тем свойством, что $H^i(X, \mathcal{K}) = 0$ при всех $i > 0$ (такие пучки называются *ацикличными*). Докажите, что:

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{F}) &= \operatorname{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{K}) \to \Gamma(X, \mathcal{Z})); \\ H^1(X, \mathcal{F}) &= \operatorname{Coker}(\Gamma(X, \mathcal{K}) \to \Gamma(X, \mathcal{Z})); \\ H^i(X, \mathcal{F}) &= H^{i-1}(X, \mathcal{Z}) \qquad \text{при } i > 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\mathcal{K}^{\cdot}$ — любой комплекс пучков на пространстве X. С ним можно связать комплекс абелевых групп

$$\cdots \to \Gamma(X, \mathcal{K}^{i-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^i) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^{i+1}) \to \dots,$$

обозначаемый $\Gamma(X, \mathcal{K}^{\cdot})$.

Задача 7.5. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на пространстве X, и пусть комплекс пучков $\mathcal{K}^{\cdot}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathcal{K}^i = 0$ при $i < 0$.

2) $H^0(\mathcal{K}^\cdot) = \mathcal{F}$, $H^i(\mathcal{K}^\cdot) = 0$ при $i \neq 0$ (комплексы, удовлетворяющие условиям (1) и (2), называются *резольвентами* пучка $\mathcal{F}$).

3) Все пучки $\mathcal{K}^i$ ацикличны.

Докажите, что $H^i(\Gamma(X, \mathcal{K}^\cdot)) = H^i(X, \mathcal{F})$.

Указание. Разрежьте комплекс $\mathcal{K}^\cdot$ на короткие точные последовательности

$$\begin{array}{lllllllllll}
0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{K}^0 \to \mathcal{Z}^1 \to 0 & & & & \\
 & 0 \to \mathcal{Z}^1 \to \mathcal{K}^1 \to \mathcal{Z}^2 \to 0 & & & \\
 & & 0 \to \mathcal{Z}^2 \to \mathcal{K}^2 \to \mathcal{Z}^3 \to 0 \dots
\end{array}$$

и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Кстати говоря, если даже пучки, из которых составлена резольвента, не ацикличны, то некоторую информацию о когомологиях пучка $\mathcal{F}$ можно получить с помощью спектральных последовательностей.

Итак, для построения когомологий разумно использовать резольвенты, составленные из пучков, которые разумно считать ацикличными; в качестве таковых выберем, руководствуясь результатом задачи 7.2, вялые пучки. А чтобы с определением было удобно работать, резольвенту будем выбирать каноническим образом. Именно, для данного пучка $\mathcal{F}$ выберем естественное вложение $\mathcal{F} \hookrightarrow C^0(\mathcal{F})$; рассмотрим факторпучок $C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F}$, обозначим $C^1(\mathcal{F}) = C^0(C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F})$, и пусть $d^0\colon C^0(\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{F})$ — сквозное отображение в такой диаграмме:

$$\begin{tikzcd} C^0(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "d^0"'] & C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F} \arrow[r, hook] & C^1(\mathcal{F}). \end{tikzcd}$$

Пусть $C^2(\mathcal{F}) = C^0(\operatorname{Coker} d^0)$, и пусть $d^1 : C^1(\mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{F})$ — такое сквозное отображение:

$$\begin{tikzcd} C^0(\mathcal{F}) \arrow[r, "d^0"] & C^1(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "d^1"'] & \operatorname{Coker} d^0 \arrow[r, hook] & C^2(\mathcal{F}). \end{tikzcd}$$

Продолжая в том же духе, получим последовательность вялых пучков и гомоморфизмов:

$$0 \to C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^2} \dots$$

Комплекс $C^{\cdot}(\mathcal{F})$ называется *резольвентой Годемана* пучка $\mathcal{F}$.

Задача 7.6. Покажите, что гомоморфизм пучков $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ индуцирует естественный гомоморфизм резольвент Годемана $C^{\cdot}(\mathcal{F}_1) \to C^{\cdot}(\mathcal{F}_2)$, обладающий следующим свойством. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

— точная последовательность пучков. Тогда последовательность

$$0 \to C^{\cdot}(\mathcal{F}_1) \to C^{\cdot}(\mathcal{F}_2) \to C^{\cdot}(\mathcal{F}_3) \to 0$$

тоже точна.

Теперь мы можем дать основное определение. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве X. Тогда его i-той группой когомологий $H^i(X, \mathcal{F})$ (или просто $H^i(\mathcal{F})$, если из контекста ясно, о каком пространстве идет речь) называется группа когомологий $H^i(\Gamma(X, C^{\cdot}(\mathcal{F})))$, где $C^{\cdot}(\mathcal{F})$ — резольвента Годемана и $\Gamma(X, C^{\cdot}(\mathcal{F}))$ — комплекс абелевых групп

$$0 \to \Gamma(X, C^0(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, C^1(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, C^2(\mathcal{F})) \to \dots$$

Если хотят подчеркнуть зависимость $H^i(X, \mathcal{F})$ от X, то ее называют i-той группой когомологий пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$.

Задача 7.7. Покажите, что $H^i(X, \mathcal{F})$ обладают всеми свойствами, перечисленными в начале разд. 4.

Указание. Воспользуйтесь задачами 7.6 и 7.2.

Для начала давайте удостоверимся, что все вялые пучки действительно ацикличны. Для этого воспользуемся таким простым результатом:

Задача 7.8. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

— точная последовательность пучков, в которой пучки $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ вялые. Докажите, что и пучок $\mathcal{F}_3$ вял.

Теперь можно разобраться с когомологиями вялых пучков:

Задача 7.9. Докажите, что всякий вялый пучок ацикличен.

Указание. Разрежьте резольвенту Годемана вялого пучка на короткие точные последовательности, как в задаче 7.4. Далее воспользуйтесь задачами 7.2 и 7.8.

Вот первое следствие, имеющее отношение к реальной жизни:

Задача 7.10. Пусть $\mathcal{F}$ — такой пучок на пространстве X, что $\mathcal{F}_x \neq 0$ для одной-единственной точки $x \in X$ (иными словами, $\mathcal{F}$ — небоскреб). Докажите, что $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ при $i > 0$.

Наша следующая цель — доказать, что для когерентных пучков на алгебраических многообразиях общее определение когомологий согласуется с определением-времянкой из разд. 5.

Сначала дадим следующее определение. Пусть $f\colon Y \to X$ — непрерывное отображение и $\mathcal{F}$ — пучок на Y. Рассмотрим предпучок на X, определенный по правилу $U \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(U))$; очевидно, что этот предпучок является пучком. Полученный пучок называется *прямым образом $\mathcal{F}$ относительно отображения f* и обозначается $f_*\mathcal{F}$.

Прямые образы играют важную роль в теории пучков, но нам они потребуются для весьма ограниченных целей. Именно, пусть $\mathcal{F}$ — пучок на X и $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$ — конечное открытое покрытие пространства X. С этим покрытием можно следующим образом связать резольвенту $\mathcal{F}$.

Для всякого набора индексов $1 \leqslant i_0 < \cdots < i_r \leqslant N$ положим $U_{i_0,\dots,i_r} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_r}$ и $\mathcal{F}_{i_0,\dots,i_r} = i_*(\mathcal{F}|_{U_{i_0,\dots,i_r}})$, где $i\colon U_{i_0,\dots,i_r} \to X$ — вложение. Для всякого $r \in [0; N]$ положим $\mathcal{F}^r(\mathfrak{U}) = \oplus_{1 \leqslant i_0 < \cdots < i_r \leqslant N} \mathcal{F}_{i_0,\dots,i_r}$. Определим гомоморфизмы

$d^r\colon \mathcal{F}^r(\mathfrak{U}) \to \mathcal{F}^{r+1}(\mathfrak{U})$ следующим образом. Всякое сечение s пучка $\mathcal{F}^r(\mathfrak{U})$ над открытым множеством $V \subset X$ есть, по определению, набор сечений $s_{i_0,\dots,i_r} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r} \cap V)$. Положим теперь

$$d^r(s)_{i_0,\dots,i_{r+1}} = \sum_{\alpha=0}^{r+1} (-1)^\alpha s_{i_0,\dots,\widehat{i_\alpha},\dots,i_{r+1}}|_{U_{i_0,\dots,i_{r+1}} \cap V}.$$

(шляпка над индексом означает, что этот индекс должен быть опущен).

Задача 7.11. Покажите, что последовательность пучков и гомоморфизмов

$$0 \to \mathcal{F}^0(\mathfrak{U}) \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}^1(\mathfrak{U}) \xrightarrow{d_1} \dots$$

является резольвентой пучка $\mathcal{F}$.

Указание. Покажите, что для каждой точки $x \in X$ комплекс $0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^0(\mathfrak{U})_x \to \mathcal{F}^1(\mathfrak{U})_x \to \dots$ будет стягиваем; для этого, в свою очередь, зафиксируйте какое-нибудь i такое, что $U_i \ni x$, и действуйте по образцу задачи 5.5.

Задача 7.12. Докажите, что комплекс векторных пространств $\Gamma(X, \mathcal{F}^\cdot(\mathfrak{U}))$ изоморфен комплексу Чеха $C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Итак, ввиду задачи 7.4, чтобы доказать совпадение когомологий когерентных пучков на квазипроективных алгебраических многообразиях, вычисленных по Чеху и с помощью резольвент Годемана, достаточно доказать, что $H^m(X, i_*\mathcal{F}) = 0$ при $m > 0$, где $i\colon U \hookrightarrow X$ — вложение аффинного открытого подмножества U в X и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на U. Ключевой момент здесь — доказать, что $H^m(X, \mathcal{F}) = 0$ при $m > 0$, где $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X («теорема А» в новом обличье!); остальное получается несложными формальными редукциями. Давайте на теореме А для начала и сосредоточимся. Изложим план ее доказательства.

Зафиксируем аффинное многообразие X; пусть $A = k[X]$. Среди всех A-модулей можно выделить класс так называемых инъективных модулей (определение см. ниже), обладающих следующими свойствами:

1) Всякий A-модуль является подмодулем некоторого инъективного модуля.

2) Если I — инъективный A-модуль, то квазикогерентный пучок $\tilde{I}$ вял.

Из этих двух утверждений обращение в нуль старших когомологий (квази)когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X немедленно следует. В самом деле, пусть $\mathcal{F} = \tilde{M}$, где M — A-модуль. Вложим M в инъективный модуль I^0, затем вложим $I^0/M = Z^1$ в инъективный модуль I^1, затем вложим I^1/Z^1 в инъективный модуль I^2, и т. д. В итоге получится комплекс инъективных модулей $0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots$, являющийся резольвентой модуля M. Соответствующий комплекс квазикогерентных пучков $0 \to \tilde{I}^0 \to \tilde{I}^1 \to \tilde{I}^2 \to \dots$ является вялой резольвентой пучка $\mathcal{F}$; следовательно, $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(\tilde{I}^\cdot)) = H^i(I^\cdot)$, что по построению равно нулю при $i > 0$.

Инъективные модули и инъективные оболочки

Приступим к выполнению намеченного плана доказательства теоремы А. Начнем со стандартного материала: определение инъективных модулей и вложение произвольного модуля в инъективный (кстати, инъективные модули нужны не только для доказательства теоремы А; они важны и во многих других вопросах).

Пусть A — кольцо (будем считать, что коммутативное и с единицей, хотя вся теория из этого раздела распространяется и на некоммутативные кольца), и пусть I — модуль над A. Говорят, что модуль I *инъективен,* если для всякой тройки (M, N, f), где N является A-модулем, $M \subset N$ является его подмодулем, и $f\colon M \to I$ — гомоморфизм, существует продолжение f на модуль N (сплошными стрелками обозначены гомоморфизмы, данные по условию, пунктирными — гомоморфизмы, существование которых утверждается):

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dl, dashed] \\ I & \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

По-другому это определение можно сформулировать так: если N — любой модуль над A и $M \subset N$ — любой его подмодуль, то естественный гомоморфизм $\mathrm{Hom}_A(N, I) \to \mathrm{Hom}_A(M, I)$ сюръективен.

Начнем с простых формальных свойств инъективных модулей.

Задача 7.13. Пусть инъективный модуль I является подмодулем модуля M. Докажите, что I выделяется в M прямым слагаемым.

Задача 7.14. Пусть модуль I является прямой суммой своих подмодулей I_1 и I_2. Докажите, что I инъективен тогда и только тогда, когда I_1 и I_2 инъективны.

Из этой задачи следует, что прямая сумма *конечного* числа инъективных модулей также инъективна. Для бесконечного семейства инъективных модулей это в общем случае неверно.

Задача 7.15. Докажите, что прямое произведение любого (в том числе бесконечного!) семейства инъективных модулей также инъективно.

Теперь перейдем к более содержательным вещам.

Задача 7.16. Пусть $A = \mathbb{Z}$, так что A-модуль — то же самое, что абелева группа. Докажите, что всякая инъективная абелева группа I делима (то есть уравнение $nx = a$ разрешимо в I для всех $a \in I$ и $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

Указание. Положите $N = \mathbb{Z}$, $M = n\mathbb{Z}$ в определении инъективного модуля.

Обратно, всякая делимая абелева группа инъективна, как это вытекает из следующих двух задач:

Задача 7.17. Пусть M — абелева группа, $N \subset M$ — подгруппа, и $f\colon N \to I$ — гомоморфизм в делимую абелеву группу I. Докажите, что для всякого $z \in M \setminus N$ можно продолжить гомоморфизм f на подгруппу в M, порожденную N и z

Задача 7.18. Покажите, что всякая делимая абелева группа инъективна.

Указание. Содержательная часть этого утверждения доказана в предыдущей задаче. Остается формально завершить рассуждение с помощью леммы Цорна или какого-нибудь ее эквивалента.

Результат предыдущей задачи обобщается с $\mathbb{Z}$ на произвольное кольцо следующим образом:

Задача 7.19. Докажите, что A-модуль I инъективен тогда и только тогда, когда для всякого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ и гомоморфизма $f\colon \mathfrak{a} \to I$ существует такой элемент $m \in I$, что $f(a) = am$ для всех $a \in \mathfrak{a}$.

Указание. Условие на гомоморфизм f равносильно тому, что он продолжается до гомоморфизма $A \to I$. Далее имитируйте решение задач 7.17 и 7.18.

Приведем красивый пример инъективного модуля. Пусть k — поле характеристики нуль, $A = k[x_1, \dots, x_n]$ (кольцо многочленов). Рассмотрим A-модуль I, определенный следующим образом. Как абелева группа I — это то же самое кольцо A, но действие A на I определяется так: если $f \in A$ и $m \in I$, то $f \cdot m = f(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n) \cdot m$ (иными словами, f действует на m как дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами). Модуль I называется модулем *обратных функций Маколея.* Покажем, что модуль M инъективен над A.

Для начала заметим, что в данном случае нам достаточно проверить условие инъективности (7.1) лишь в случае, когда модули M и N конечно порождены: в самом деле, в виду задачи 7.19 и указания к ней, можно даже ограничиться случаем $N = A$, $M = \mathfrak{a}$ (идеал в A), а поскольку кольцо A нетерово, $\mathfrak{a}$ является конечно порожденным A-модулем. Обозначим теперь $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n) \subset A$. Этот максимальный идеал сыграет основную роль в наших рассуждениях. Покажем, что при проверке условия инъективности можно ограничиться случаем, когда (конечно порожденные) M и N аннулируются некоторой степенью $\mathfrak{m}$. Это делается так. Во-первых:

Задача 7.20. Пусть M — конечно порожденный A-модуль и $f\colon M \to I$ — гомоморфизм. Покажите, что $f(\mathfrak{m}^r M) = 0$ для некоторого $r > 0$.

Указание. Степени многочленов, являющихся образами конечной системы образующих модуля M, ограничены в совокупности.

Во-вторых:

Задача 7.21. Пусть $M \subset N$ — конечно порожденные A-модули. Покажите, что для всякого $r > 0$ существует такое $s > 0$, что $\mathfrak{m}^s N \cap M \subset \mathfrak{m}^r M$.

Решение. Приводимое ниже рассуждение взято из книги [1]. Результат этой задачи — частный случай «леммы Артина-Риса» (см. [1, предложение 10.9]).

Рассмотрим градуированное кольцо $\hat{A} = A \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^2 \oplus \dots$ и градуированный $\hat{A}$-модуль $\hat{N} = N \oplus \mathfrak{m}N \oplus \mathfrak{m}^2 N \oplus \dots$, на котором $\hat{A}$ действует следующим образом: если $F \in (\hat{A})_d = \mathfrak{m}^d$ — однородный многочлен степени d и $y \in (\hat{N})_r = \mathfrak{m}^r N$, то $fy \in \mathfrak{m}^{r+d} N$ рассматривается как элемент $(\hat{N})_{r+d}$. Так как кольцо A нетерово и N — конечно порожденный A-модуль, то $\hat{A}$ — нетерово кольцо и $\hat{N}$ конечно порожден над $\hat{A}$. Следовательно, градуированный подмодуль $\bigoplus_{i \geqslant 0} (\mathfrak{m}^i N \cap M) \subset \hat{N}$ также конечно порожден. Выберем в нем конечную систему однородных образующих. Тогда можно взять $s > r + \delta$, где δ — максимальная степень образующих. $\square$

Пусть теперь $M \subset N$ — конечно порожденные A-модули и $F\colon M \to I$ — гомоморфизм. Выберем r как в задаче 7.20, а затем, по этому r, выберем s как в задаче 7.21. Тогда имеем вложение $M/(\mathfrak{m}^s N \cap M) \hookrightarrow N/\mathfrak{m}^s N$, гомоморфизм f пропускается через $M/(\mathfrak{m}^s N \cap M)$, и оба модуля $M/(\mathfrak{m}^s N \cap M)$ и $N/\mathfrak{m}^s N$ аннулируются $\mathfrak{m}^s$; ясно, что задачи продолжения f с M на N и с $M/(\mathfrak{m}^s N \cap M)$ на $N/\mathfrak{m}^s N$ равносильны. Поэтому будем далее считать, что M и N аннулируются какой-то степенью $\mathfrak{m}$. Достаточно, как водится, показать, что можно продолжить f на $M + Az$, где $z \in N \setminus M$. Пусть $\mathfrak{a} = \{\, a \in A \mid az \in M \,\}$. Как и в задаче 7.19, все сводится к продолжению гомоморфизма $\mathfrak{a} \to I$ до гомоморфизма $A \to I$.

Задача 7.22. Покажите, что $\mathfrak{m}^s \subseteq \mathfrak{a} \subset A$ для некоторого целого s, и выведите отсюда, что существует такая конечная фильтрация

$$A = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_l = \mathfrak{a},$$

что $\mathfrak{a}_j/\mathfrak{a}_{j+1}$ изоморфны $k = A/\mathfrak{m}$ как A-модули для всех j.

Стало быть, все свелось к продолжению гомоморфизма с M до N, где $N/M \cong A/\mathfrak{m}$.

Задача 7.23. Покажите, что возможность такого продолжения равносильна возможности продолжения гомоморфизма $f\colon \mathfrak{m} \to I$ до гомоморфизма $A \to I$.

Указание. Действуйте как в задаче 7.19; лемма Цорна не понадобится.

Что же такое гомоморфизм из $\mathfrak{m}$ в I? У A-модуля $\mathfrak{m}$ есть образующие $x_1, \ldots, x_n$. Между ними есть очевидные соотношения: $x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i$. Более того, все прочие отношения являются их следствием, так как комплекс Кошуля $K^A_{\cdot}(x_1, \ldots, x_n)$ ацикличен в ненулевых степенях. Стало быть, гомоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{m} \to I$ — это набор многочленов $f_1, \ldots, f_n$ (где $f_i = \varphi(x_i)$), удовлетворяющих соотношениям $\partial f_i/\partial x_j = \partial f_j/\partial x_i$ для всех i и j, а его продолжение на A — это такой многочлен g, что $\partial g/\partial x_i = f_i$ для всех i. Стало быть, задача продолжения свелась к такой: дана полиномиальная дифференциальная форма $\omega = \sum f_i dx_i$, причем $d\omega = 0$; верно ли, что $\omega = dg$ для некоторого многочлена g? Согласно лемме Пуанкаре, ответ утвердителен, и инъективность модуля I доказана.

Задача 7.24. Покажите, что лемма Пуанкаре верна для полиномиальных дифференциальных форм над полем характеристики нуль.

Указание. Имитируйте доказательство, в котором проводится интегрирование по радиусам; кстати, верна ли лемма Пуанкаре в характеристике p?

Вернемся к общей теории: покажем, что всякий модуль можно вложить в инъективный.

Задача 7.25. Пусть x — ненулевой элемент абелевой группы A. Покажите, что существует гомоморфизм $f\colon A \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, для которого $f(x) \neq 0$.

Пусть A — коммутативное кольцо и G — абелева группа. Рассмотрим абелеву группу $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$, состоящую, по определению, из всевозможных гомоморфизмов A как абелевой группы в G. На группе $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ введем структуру A-модуля следующим образом: если $a \in A$ и $f\colon A \to G$, то $(af)\colon A \to G$ действует по формуле $b \mapsto f(ab)$.

Задача 7.26. Покажите, что для любого A-модуля M и любой абелевой группы G имеет место естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G)$$

(в левой части стоят гомоморфизмы A-модулей, в правой — абелевых групп).

Задача 7.27. Пусть абелева группа G делима. Покажите, что A-модуль $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ инъективен.

Указание. В свете предыдущей задачи это вытекает из того, что группа G инъективна как $\mathbb{Z}$-модуль.

Задача 7.28. Пусть M — модуль над кольцом A и $x \in M$ — ненулевой элемент. Докажите, что существует гомоморфизм A-модулей $f\colon M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, для которого $f(x) \neq 0$.

Задача 7.29. Докажите, что всякий A-модуль является подмодулем некоторого инъективного модуля.

Указание. Пользуясь задачей 7.28, вложите A-модуль M в произведение A-модулей $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ в количестве, равном количеству ненулевых элементов M.

Предыдущая задача обеспечивает вложение произвольного модуля в инъективный, но этот инъективный модуль несуразно велик. На самом деле для всякого A-модуля M существует и однозначно определен наименьший содержащий его инъективный модуль (он называется *инъективной оболочкой* A-модуля M), и такие модули уже более обозримы. Следующая серия задач посвящена построению инъективных оболочек.

Начнем со следующего определения. Пусть M — A-модуль, $N \subset M$ — подмодуль. Говорят, что M является *существенным расширением* модуля N, если для всякого ненулевого $x \in M$ существует такой $a \in A$, что $ax \in N$ и $ax \neq 0$.

Задача 7.30. Приведите пример несущественного расширения.

Задача 7.31. Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "g"] \\ P & \end{tikzcd}$$

вложение i является существенным расширением, а гомоморфизм f инъективен. Докажите, что и гомоморфизм g инъективен.

Задача 7.32. Пусть M — подмодуль модуля I, и пусть подмодуль $E \subseteq I$, содержащий M, является его существенным расширением и максимален среди подмодулей I с этими свойствами (проверьте, что таковой всегда существует!). Докажите, что E выделяется прямым слагаемым в I.

Задача 7.33. Докажите, что у всякого модуля есть существенное расширение, являющееся инъективным модулем.

Существенное расширение модуля M, являющееся инъективным модулем, называется *инъективной оболочкой* модуля M.

Задача 7.34. Докажите следующие свойства инъективных оболочек:

1) Пусть $M \overset{i}{\hookrightarrow} E$ — инъективная оболочка модуля M и пусть $M \overset{j}{\hookrightarrow} N$ — существенное расширение. Докажите, что существует инъективный гомоморфизм $f\colon N \to E$ такой, что $f \circ j = i$ (иными словами, инъективная оболочка модуля M является его максимальным существенным расширением).

2) Пусть $M \overset{i}{\hookrightarrow} E$ — инъективная оболочка модуля M и пусть $M \overset{j}{\hookrightarrow} I$ — вложение в инъективный модуль. Докажите, что существует такой инъективный гомоморфизм $f\colon E \to I$, что $f \circ i = j$ (иными словами, инъективная оболочка модуля M является наименьшим содержащим его инъективным модулем).

3) Если $M \overset{i_1}{\hookrightarrow} E_1$ и $M \overset{i_2}{\hookrightarrow} E_2$ — две инъективные оболочки модуля M, то существует такой изоморфизм $f\colon E_1 \to E_2$, что $f \circ i_1 = i_2$ (иными словами, инъективная оболочка единственна).

Инъективная оболочка A-модуля M обозначается $E_A(M)$. Предупреждение: инъективная оболочка единственна с точностью до изоморфизма, но этот изоморфизм отнюдь не единствен, так что сопоставление модулю его инъективной оболочки не является функтором.

8. Структура инъективных модулей и теорема сравнения

Инъективные модули над нетеровыми кольцами

В предыдущем разделе речь шла об общих свойствах инъективных модулей. Теперь нам потребуются свойства инъективных модулей над *нетеровыми* кольцами.

Задача 8.1. Докажите, что любая (в том числе и бесконечная) прямая сумма инъективных модулей над нетеровым кольцом также будет инъективным модулем.

Указание. Для конечных прямых сумм (над любыми кольцами) утверждение очевидно. Далее, согласно задаче 7.19, достаточно решить задачу о продолжении гомоморфизма идеала $\mathfrak{a} \subset A$ до гомоморфизма кольца A. Поскольку идеал конечно порожден, гомоморфизм из него пропускается через гомоморфизм в *конечную* прямую сумму.

Кстати, верно и обратное утверждение: кольцо нетерово тогда и только тогда, когда любая прямая сумма инъективных модулей инъективна. Доказательство см. в [2, с. 27, упр. 21].

Задача 8.2. Пусть I — инъективный модуль над нетеровым кольцом A. Докажите, что I содержит прямое слагаемое, изоморфное $E_A(A/\mathfrak{p})$ для некоторого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$.

Указание. Модуль I имеет хотя бы один ассоциированный простой идеал (см. задачу 6.9).

Задача 8.3. Докажите, что всякий инъективный модуль над нетеровым кольцом A является прямой суммой модулей вида $E_A(A/\mathfrak{p})$, где $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал.

Указание. Рассмотрим частично упорядоченное множество, элементы которого — подмодули нашего модуля I, являющиеся прямой суммой модулей вида $E_A(A/\mathfrak{p}_\alpha)$ для различных простых $\mathfrak{p}_\alpha \subset A$, с фиксированным разложением в эту прямую сумму, и применим к нему лемму Цорна; при проверке того, что множество удовлетворяет «условию индуктивности», придется пользоваться результатом задачи 8.1, а при проверке того, что максимальный элемент — это весь модуль I, потребуется результат задачи 8.2.

Изучим повнимательнее модули $E_A(A/\mathfrak{p})$ — строительные блоки, из которых складываются инъективные модули над нетеровыми кольцами.

Задача 8.4. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал нетерова кольца A. Покажите, что модуль $E_A(A/\mathfrak{p})$ не содержит подмодулей, изоморфных $A/\mathfrak{q}$, где $\mathfrak{q} \subset A$ — простой идеал, отличный от $\mathfrak{p}$ (иными словами: $\operatorname{Ass}(E_A(A/\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$).

Указание. Если $A/\mathfrak{q} \subset E_A(A/\mathfrak{p})$ и $x \in A/\mathfrak{q}$, то некоторое ненулевое y, являющееся кратным x, лежит в $A/\mathfrak{p}$. Найдите двумя способами $\mathrm{Ann}(y)$.

Задача 8.5. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал нетерова кольца A. Покажите, что для всякого $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ умножение на f является автоморфизмом модуля $E_A(A/\mathfrak{p})$.

Указание. Мономорфность выводи́те из того, что $E_A(A/\mathfrak{p})$ — существенное расширение $A/\mathfrak{p}$, а эпиморфность — из того, что модуль $fE_A(A/\mathfrak{p}) \cong E_A(A/\mathfrak{p})$ также инъективен, и пункта (2) задачи 7.34.

Чтобы двигаться дальше, нам придется разобраться поподробнее с ассоциированными простыми идеалами. Информация о структуре множеств $\mathrm{Ass}(M)$, которую мы получим, нужна в алгебраической геометрии и коммутативной алгебре не только для сравнения двух определений когомологий.

Снова ассоциированные простые идеалы

Вся нижеизложенная теория может быть при правильной формулировке развита для модулей над любым нетеровым кольцом A; мы, однако же, будем предполагать, что $A = k[X]$, где X — аффинное многообразие. Зафиксируем эти обозначения до конца раздела.

Сначала перескажем то, что мы уже знаем из разд. 6 про ассоциированные простые идеалы, на геометрическом языке (пользуясь «соответствием Серра» между конечно порожденными A-модулями и когерентными пучками на X — см. задачи 4.17 и 4.22).

Напомним, что всякое неприводимое замкнутое подмножество $Y \subset X$ имеет вид $V(\mathfrak{p})$ для некоторого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ и что соответствие $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами простых идеалов кольца A и неприводимых замкнутых подмножеств X. Пусть теперь $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Будем говорить, что неприводимое замкнутое подмногообразие $Y \subset X$ *ассоциировано* с пучком $\mathcal{F}$, если существует вложение $\mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mathcal{F}$ (пучок $\mathcal{O}_Y$ обычным образом рассматривается как $\mathcal{O}_X$-модуль)[8]. Если $Y = V(\mathfrak{p})$ (идеал $\mathfrak{p}$ прост) и $\mathcal{F} = \tilde{M}$, то Y ассоциировано с $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}$ ассоциирован с M. Множество подмногообразий, ассоциированных с $\mathcal{F}$, обозначается $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$. Мы знаем из разд. 6, что для ненулевого пучка $\mathcal{F}$ множество $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$ конечно и непусто. Кроме того, если $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$, где $Y \subset X$ — неприводимое замкнутое подмножество, то $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}) = \{Y\}$ (задача 6.10).

Введем теперь следующее определение. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный пучок на произвольном топологическом пространстве X. Тогда его *носителем* (обозначается $\mathrm{supp}(\mathcal{F})$) называется множество таких точек $x \in X$, что $\mathcal{F}_x \neq 0$. В такой общности ничего интересного про носитель пучка сказать, пожалуй, нельзя. Вернемся, однако, к случаю, когда X — аффинное алгебраическое многообразие:

Задача 8.6. Пусть $Y \subset X$ — замкнутое неприводимое подмножество. Чему равен $\mathrm{supp}(\mathcal{O}_Y)$?

Задача 8.7. Пусть M — конечно порожденный A-модуль и $\mathcal{F} = \tilde{M}$. Покажите, что $\mathrm{supp}(\mathcal{F}) = V(\mathrm{Ann}(M)) \subset X$ (идеал $\mathrm{Ann}(M)$ — это *аннулятор* модуля M, то есть множество таких элементов $f \in A$, что $fM = 0$).

Решение. Чтобы доказать включение $\mathrm{supp}(\mathcal{F}) \subseteq V(\mathrm{Ann}(M))$, надо проверить следующее: если $x \notin V(\mathrm{Ann}(M))$ (то есть существует такая функция f, что $fM = 0$, но $f(x) \neq 0$), то $M_x = 0$. Сделайте это самостоятельно (конечная порожденность модуля M не потребуется). Пусть, напротив, $M_x = 0$, и пусть $m_1, \dots, m_r$ — система образующих модуля M. Тогда $m_i/1 = 0$ в M_x для всех i, так что существуют такие функции $f_1, \dots, f_r \in A$, что $f_i(x) \neq 0$ и $f_i m_i = 0$. Положим $f = f_1 f_2 \dots f_r$. Тогда $f(x) \neq 0$ и $f \in \mathrm{Ann}(M)$, то есть $x \notin V(\mathrm{Ann}(M))$. Все доказано. □

[8] Наша терминология носит «учебный» характер: обычно элементами множества $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$ считают не сами подмногообразия в X, а их «общие точки» (в схемном смысле), и соответственно называют $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$ множеством *ассоциированных точек* пучка $\mathcal{F}$.

В частности, мы доказали, что носитель когерентного пучка на аффинном многообразии — замкнутое подмножество. Впрочем, не только на аффинном:

Задача 8.8. Докажите, что носитель когерентного пучка на произвольном алгебраическом многообразии является замкнутым подмножеством.

Если $s \in \mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}$ — пучок на топологическом пространстве X, то *носителем* сечения s называют множество $\operatorname{supp} s = \{\, x \in X \mid s_x \neq 0 \,\}$ (то есть множество тех точек, в которых росток сечения s отличен от нуля).

Задача 8.9. Докажите, что носитель сечения квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на алгебраическом многообразии X является замкнутым множеством.

Указание. Пусть s — сечение, о котором идет речь, и $\mathcal{G}$ — подпучок пучка $\mathcal{F}$, порожденный сечением s. Покажите, что $\operatorname{supp} s = \operatorname{supp}(\mathcal{G})$.

Теперь займемся непосредственно $\operatorname{Ass}(\mathcal{F})$ (по-прежнему X — аффинное многообразие и $A = k[X]$).

Задача 8.10. Пусть $Y \subset X$ — подмногообразие, ассоциированное с когерентным пучком $\mathcal{F}$. Докажите, что Y содержится в одной из неприводимых компонент $\operatorname{supp}(\mathcal{F})$.

Указание. Если $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, то $\operatorname{supp}(\mathcal{G}) \subset \operatorname{supp}(\mathcal{F})$.

Следующая задача показывает, что ассоциированные многообразия хорошо себя ведут при ограничении на открытые подмножества.

Задача 8.11. Пусть $f \in A$, $U = D(f) \subset X$ (напомним, что U — также аффинное многообразие), и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Пусть $\operatorname{Ass}(\mathcal{F}) = \{Y_1, \ldots, Y_r\}$. Докажите, что

$$\operatorname{Ass}(\mathcal{F}|_U) = \{\, Y_j \cap U \mid Y_j \cap U \neq \varnothing \,\}.$$

Решение. Если $Y \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$, то $\mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mathcal{F}$, откуда $\mathcal{O}_Y|_U \hookrightarrow \mathcal{F}|_U$; если $Y \cap U \neq \varnothing$, то $\mathcal{O}_Y|_U = \mathcal{O}_{Y\cap U}$; этим доказано включение «$\subseteq$». Докажем обратное включение. Пусть $\mathcal{F} = \tilde{M}$, где M — модуль над A (значит, $M = \mathcal{F}(X)$), тогда $\mathcal{F}|_U = \widetilde{M_f}$, и пусть $Y \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F}|_U)$ является множеством нулей простого идеала $\operatorname{Ann}(m/f^r) \subset A_f$ (подразумевается, что $m \in M$). Нам достаточно показать, что $\bar{Y} \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$. Поскольку умножение на f является автоморфизмом модуля M_f, имеем $\operatorname{Ann}_{A_f}(m/f^r) = \operatorname{Ann}_{A_f}(m)$. Пусть $s \in \mathcal{F}(X)$ соответствует элементу $m \in M$, тогда

$$\operatorname{Ann}_A(m) = \{\, f \in A \mid f \cdot s = 0 \,\} = \{\, f \in A \mid (f \cdot s)|_U = 0 \,\} = \\ \{\, f \in A \mid f = 0 \text{ на } Y \,\} = \{\, f \in A \mid f = 0 \text{ на } \bar{Y} \,\}.$$

Все доказано. □

Результат этой задачи показывает, что ассоциированные подмногообразия можно корректно определить для когерентного пучка $\mathcal{F}$ на любом алгебраическом многообразии X: надо покрыть X аффинными открытыми подмножествами, взять ассоциированные подмногообразия в каждом из подмножеств, а затем взять объединения. Задача 8.11 показывает, что на пересечениях все будет «состыковано».

Теперь можно доказать, что все неприводимые компоненты носителя ассоциированы с пучком.

Задача 8.12. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на аффинном многообразии X. Тогда все неприводимые компоненты $\operatorname{supp}(\mathcal{F})$ лежат в $\operatorname{Ass}(\mathcal{F})$.

Указание. Рассуждая от противного, пусть Y — компонента носителя $\mathcal{F}$, не ассоциированная с $\mathcal{F}$. Выведите из результата задачи 8.10, что тогда существует открытое подмножество $D(f) \subset X$, не пересекающееся ни с одним элементом из $\operatorname{Ass}(\mathcal{F})$ и такое, что $D(f) \cap Y \neq \varnothing$. Получите из задачи 8.11, что $\operatorname{Ass}(\mathcal{F}|_{D(f)}) = \varnothing$; поскольку при этом $\operatorname{supp}(\mathcal{F}|_{D(f)}) \neq \varnothing$, получится противоречие с задачей 6.9.

Ассоциированные подмногообразия, являющиеся компонентами носителя, называются *изолированными* ассоциированными подмногообразиями (более традиционное словоупотребление: изолированные, или минимальные ассоциированные идеалы — в коммутативной алгебре, и изолированные ассоциированные точки — в алгебраической геометрии). Прочие ассоциированные подмногообразия (согласно задачам 8.12 и 8.10, они вложены в изолированные) так и называются *вложенными* (в коммутативной алгебре соответствующие ассоциированные идеалы также называют вложенными).

Приведем пример. Пусть $X = \mathbb{A}^3$, $\mathcal{F} = \widetilde{A/I}$, где

$$I = (x(x^2+y^2+z^2), y(x^2+y^2+z^2), z(x^2+y^2+z^2)) \subset A.$$

Очевидно, $\operatorname{supp}(\mathcal{F})$ совпадает с множеством нулей идеала I, то есть с конусом $Q \subset \mathbb{A}^3$, заданным уравнением $x^2+y^2+z^2 = 0$. Ввиду задачи 8.12, $Q \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$. Однако $\operatorname{Ass}(\mathcal{F})$ этим не исчерпывается. В самом деле, аннулятор элемента $(x^2+y^2+z^2) \bmod I \in A/I$ совпадает с (x, y, z), так что начало координат также является ассоциированным подмногообразием пучка $\mathcal{F}$ (вложенным в Q).

Задача 8.13. Покажите, что никаких других ассоциированных подмногообразий у пучка $\mathcal{F}$ нет.

Указание. См. задачу 6.12.

Наш экскурс в коммутативную алгебру подходит к концу; осталось доказать то утверждение, ради которого мы его предприняли:

Задача 8.14. Пусть M — модуль (не обязательно конечно порожденный) над A, и пусть $\operatorname{Ass}(M)$ состоит из единственного простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$. Покажите, что для всякого $x \in M$ существует такое $r > 0$, что $\mathfrak{p}^r x = 0$.

Указание. Перейдя к подмодулю, порожденному x, можно считать, что M конечно порожден. Из задачи 8.12 вытекает, что $\operatorname{supp}(\tilde{M}) = V(\mathfrak{p})$; теперь из задачи 8.7 и теоремы Гильберта о нулях вытекает, что $\mathfrak{p}^r \subseteq \operatorname{Ann}(M)$ для некоторого $r > 0$, откуда все и следует.

В заключение повторим, что вся теория, изложенная в этом подпункте, обобщается на модули над произвольным нетеровым кольцом. Есть два способа познакомиться с этим обобщением. Первый способ — прочитать чисто алгебраическое изложение в книгах Ленга «Алгебра» (глава 6, § 4) или Бурбаки «Коммутативная алгебра» (глава 3). Второй способ — познакомиться с формализмом аффинных схем и когерентных пучков на них (это с избытком содержится в «Алгебраической геометрии» Хартсхорна; более сжатое изложение можно извлечь из упражнений к первой и третьей главам книги [1]), после чего пересказать то, что вы знаете про Ass, в контексте когерентных пучков на произвольных нетеровых схемах; доказательства воспроизводятся почти дословно.

Завершение доказательства теоремы сравнения

Продолжим с того места, где мы остановились в задаче 8.5. По-прежнему X — аффинное многообразие, $A = k[X]$. Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал.

Задача 8.15. Покажите, что для каждого элемента $x \in E(A/\mathfrak{p})$ существует такое $r > 0$, что $\mathfrak{p}^r x = 0$.

Указание. Сопоставьте задачи 8.14 и 8.4.

Положим $\mathcal{F}_\mathfrak{p} = \widetilde{E(A/\mathfrak{p})}$.

Задача 8.16. Пусть $U = D(f) \subset X$, причем $U \cap V(\mathfrak{p}) = \varnothing$. Покажите, что $\mathcal{F}_\mathfrak{p}(U) = 0$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.17. Пусть $U = D(f) \subset X$, причем $U \cap V(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$. Покажите, что $\mathcal{F}_\mathfrak{p}(U) = E(A/\mathfrak{p})$. Пусть также $g \in A$, причем $D(fg) \cap V(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$. Покажите, что отображение ограничения $\mathcal{F}_\mathfrak{p}(D(f)) \to \mathcal{F}_\mathfrak{p}(D(fg))$ является тождественным.

Указание. Воспользуйтесь задачей 8.5.

Задача 8.18. Пусть $U \subset X$ — произвольное открытое подмножество. Покажите, что $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}(U) = E(A/\mathfrak{p})$, если $U \cap V(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$, и $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}(U) = 0$, если $U \cap V(\mathfrak{p}) = \varnothing$. Покажите также, что отображения ограничения $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}(U) \to \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}(V)$ являются тождественными, если $V \cap V(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$.

Задача 8.19. Покажите, что пучок $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ вял.

Из результата этой задачи следует, что $H^i(X, \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}) = 0$ при $i > 0$. Поскольку любой A-модуль M является прямой суммой модулей вида $E(A/\mathfrak{p})$, возникает искушение доказать, что $H^i(X, \tilde{M}) = 0$ при $i > 0$, в одну строчку: раз M — прямая сумма модулей $E(A/\mathfrak{p})$, то $\tilde{M}$ — прямая сумма пучков $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$, а прямая сумма вялых пучков является вялой. Единственное «но» в том, что при правильном определении бесконечной прямой суммы прямая сумма вялых пучков на произвольном пространстве может вялой и не быть. Не развивая общую теорию, докажем то, что нам непосредственно нужно.

Задача 8.20. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие. Покажите, что убывающие цепочки его замкнутых подмножеств стабилизируются.

Указание. Кольцо $k[X]$ нетерово.

Задача 8.21. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие. Покажите, что всякое открытое подмножество $U \subset X$ является конечным объединением множеств вида $D(f) \subset X$ для различных $f \in A$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.22. Пусть $\{M_\alpha\}$ — семейство (вообще говоря, бесконечное) модулей над кольцом A, и $M = \bigoplus_\alpha M_\alpha$. Положим $\mathcal{F}_\alpha = \widetilde{M_\alpha}$ и $\mathcal{F} = \tilde{M}$. Покажите, что для всякого открытого подмножества $U \subset X$ имеет место равенство $\mathcal{F} = \bigoplus_\alpha \mathcal{F}_\alpha$.

Указание. Если $U = D(f)$, то это простое утверждение про модули частных. В общем случае множество U является, ввиду предыдущей задачи, конечным объединением множеств вида $D(f)$; проведите индукцию по их числу.

Задача 8.23. Пусть, в условиях предыдущей задачи, все пучки $\mathcal{F}_\alpha = \widetilde{M_\alpha}$ являются вялыми. Покажите, что и пучок $\mathcal{F} = \tilde{M}$ будет вялым.

Задача 8.24. Пусть I — инъективный модуль над A. Покажите, что пучок $\tilde{I}$ является вялым.

Следующая задача показывает, что наша осторожность в работе с бесконечными прямыми суммами пучков не была излишней:

Задача 8.25. Пусть $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ — бесконечное семейство пучков на топологическом пространстве X. Определим предпучок $\mathcal{F}$ по правилу $U \mapsto \bigoplus_\alpha \mathcal{F}_\alpha$. Покажите на примере, что предпучок $\mathcal{F}$ может не быть пучком.

Сопоставляя результаты задач 8.24 и 7.29 с планом, изложенным на с. 95, мы можем, наконец, сказать, что теорема А (для общего определения когомологий) доказана.

Теперь мы можем доказать «теорему сравнения» (то есть совпадение $H^i(X,\mathcal{F})$ и $\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на квазипроективном многообразии X и $\mathfrak{U}$ — его конечное аффинное покрытие). Начнем с леммы:

Задача 8.26. Пусть U — аффинное открытое подмножество квазипроективного многообразия X, и пусть $i\colon U \hookrightarrow X$ — вложение. Покажите, что для всякой точной последовательности

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

квазикогерентных пучков на U последовательность

$$0 \to j_*\mathcal{F}_1 \to j_*\mathcal{F}_2 \to j_*\mathcal{F}_3 \to 0$$

также точна.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 4.25 и тем, что на X пересечение двух аффинных открытых подмножеств также аффинно.

Без дополнительных предположений утверждение этой задачи неверно: функтор «прямой образ» (в том числе и прямой образ при открытом вложении) отнюдь не является точным справа.

Для доказательства теоремы сравнения достаточно, ввиду того, что говорилось в предыдущем разделе, установить такой факт:

> Пусть $U \subset X$ — аффинное открытое подмножество и $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на U. Тогда $H^j(X, i_*\mathcal{F}) = 0$ при $j > 0$, где $i\colon U \hookrightarrow X$ — вложение.

Доказывается это следующим образом. Положим $A = k[U]$, и пусть $\mathcal{F} = \tilde{M}$, где M — модуль над A. Пусть

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots \tag{8.1}$$

— инъективная резольвента модуля M (точнее говоря, инъективная резольвента, к которой добавлен сам модуль M).

Задача 8.27. Покажите, что последовательность пучков

$$0 \to i_*\tilde{M} \to i_*\widetilde{I^0} \to i_*\widetilde{I^1} \to i_*\widetilde{I^2} \to \dots \tag{8.2}$$

точна.

Указание. Последовательность пучков на U, соответствующая точной последовательности (8.1), разбивается на короткие точные последовательности вида

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0,$$

где все $\mathcal{F}_i$ квазикогерентны.

Задача 8.28. Покажите, что точной последовательности (8.2) соответствет точная последовательность групп глобальных сечений.

Указание. $(i_*\widetilde{I^r})(X) = I^r$.

Наконец, заметим, что последовательность (8.2) с выброшенным $i_*\tilde{M}$ является вялой резольвентой пучка $i_*\tilde{M}$. В самом деле, все $\widetilde{I^r}$ будут вялыми пучками на U ввиду задачи 8.24, а их прямые образы будут вялыми ввиду следующего простого факта:

Задача 8.29. Пусть $i\colon U \hookrightarrow X$ — вложение открытого подмножества в топологическое пространство X и $\mathcal{F}$ — вялый пучок на U. Покажите, что пучок $i_*\mathcal{F}$ вял на X.

Сопоставляя результаты задач 8.27, 8.28 и 8.29, получаем, что $H^j(X, i_*(\tilde{M})) = 0$ при $i > 0$, что и требовалось.

9. Универсальное свойство когомологий

Когомологии как прямой предел

Определение когомологий пучков с помощью вялых резольвент оставляет ощущение неудовлетворенности: неясно, почему мы воспользовались именно вялыми пучками, и не получится ли других когомологий, если строить их с помощью резольвент из пучков другого типа. Сейчас мы покажем, что определенные нами когомологии обладают некоторым универсальным свойством (теорема 9.4); эту теорему можно рассматривать как еще одно (эквивалентное) определение когомологий, не привязанное к каком-то определенному типу резольвент. Это определение более естественно, чем данное нами в разд. 7, и, кроме того, ведет к важным обобщениям.

Условимся, что все комплексы, о которых пойдет речь далее, будут ограниченными снизу. Все пучки будут рассматриваться на фиксированном топологическом пространстве X.

Для начала чуть-чуть обобщим понятие резольвенты.

Определение 9.1. *Резольвентой* пучка $\mathcal{F}$ называется (ограниченный снизу) комплекс пучков $\mathcal{K}^\cdot$ вместе с квазиизоморфизмом $i\colon \mathcal{F} \to K^\cdot$ (в левой части пучок $\mathcal{F}$ рассматривается как комплекс, единственным ненулевым элементом которого является $\mathcal{F}$ в степени 0).

Задача 9.2. Пусть $\mathcal{K}^i = 0$ при $i < 0$. Покажите, что $\mathcal{K}^\cdot$ будет резольвентой пучка $\mathcal{F}$ в смысле нашего нового определения тогда же, когда и в смысле определения 7.5.

Задача 9.3. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{K}^\cdot$ — резольвента пучка $\mathcal{F}$ в смысле определения 9.1. Покажите, что существует квазиизоморфизм $j\colon \mathcal{K}^\cdot \to \mathcal{L}^\cdot$, где $\mathcal{L}^i = 0$ при $i < 0$.

Указание. Положите $\mathcal{L}^0 = \mathcal{K}^0/d\mathcal{K}^{-1}$.

Теперь мы можем сформулировать основное свойство когомологий пучков.

Теорема 9.4. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на пространстве X, и пусть $m \geqslant 0$ — целое число. Тогда для всякой резольвенты $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{K}^\cdot$ существует гомоморфизм $f_{\mathcal{K}^\cdot}\colon H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot)) \to H^m(X, \mathcal{F})$. При этом набор гомоморфизмов $\{f_{\mathcal{K}^\cdot}\}_{\mathcal{K}^\cdot}$ обладает следующими свойствами:*

(1) Если $(\mathcal{K}^\cdot, i)$ — резольвента пучка $\mathcal{F}$ и $q\colon \mathcal{K}^\cdot \to \mathcal{L}^\cdot$ — квазиизоморфизм, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot)) \arrow[rr, "q_*"] \arrow[dr, "f_{\mathcal{K}^\cdot}"'] & & H^m(\Gamma(\mathcal{L}^\cdot)) \arrow[dl, "f_{\mathcal{L}^\cdot}"] \\ & H^m(X, \mathcal{F}) & \end{tikzcd}$$

коммутативна (здесь гомоморфизм $f_{\mathcal{L}^\cdot}$ соответствует резольвенте $(\mathcal{L}^\cdot, q \circ i)$, гомоморфизм q_* индуцирован гомоморфизмом q).

(2) Пусть H — такая абелева группа, что для всякой резольвенты $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{K}^\cdot$ выбран гомоморфизм $g_{\mathcal{K}^\cdot}\colon H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot)) \to H$, причем для всякого квазиизоморфизма $q\colon \mathcal{K}^\cdot \to \mathcal{L}^\cdot$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot)) \arrow[rr, "q_*"] \arrow[dr, "g_{\mathcal{K}^\cdot}"'] & & H^m(\Gamma(\mathcal{L}^\cdot)) \arrow[dl, "g_{\mathcal{L}^\cdot}"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

коммутативны. Тогда существует и единствен гомоморфизм $\varphi\colon H^m(X,\mathcal{F}) \to H$, *обладающий тем свойством, что* $\varphi \circ g_{\mathcal{K}^\cdot} = f_{\mathcal{K}^\cdot}$ *для всякой резольвенты* $\mathcal{K}^\cdot$.

Эта теорема означает вот что. В качестве приближения к m-тым когомологиям пучка $\mathcal{F}$ можно взять $H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot))$, где $\mathcal{K}^\cdot$ — какая-нибудь резольвента пучка; чтобы получить не приближенное, а точное значение $H^m(X,\mathcal{F})$, надо перейти к пределу. Иными словами, $H^m(X,\mathcal{F})$ есть прямой предел групп $H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot))$ по множеству всевозможных $\mathcal{K}^\cdot$, являющихся резольвентами пучка $\mathcal{F}$. На самом деле буквально так сказать нельзя: в определении прямого предела по частично упорядоченному множеству подразумевается, что каждой паре сравнимых индексов соответствует ровно один гомоморфизм, в то время как в нашем случае две резольвенты $\mathcal{K}^\cdot$ и $\mathcal{L}^\cdot$ могут быть связаны многими разными квазиизоморфизмами. Если быть точным, теорема утверждает, что $H^m(X,\mathcal{F})$ есть предел функтора

$$\mathcal{K}^\cdot \mapsto H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot)),$$

действующего из категории резольвент пучка $\mathcal{F}$ в категорию абелевых групп.

Можно также рассматривать теорему 9.4 как *определение* когомологий: именно, скажем, что $H^m(X,\mathcal{F})$ — это группа, удовлетворяющая условиям (1) и (2).

Задача 9.5. Покажите, что эта группа единственна, если она существует («единственность прямого предела!»).

Задача 9.6. Пусть мы рассматриваем теорему 9.4 как определение когомологий; покажите, что эквивалентное определение получится, если ограничиться только резольвентами вида $\mathcal{F} \to \mathcal{K}^\cdot$, в которых $\mathcal{K}^i = 0$ при $i < 0$ (то есть резольвентами в смысле задачи 7.5).

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.3: резольвенты в смысле задачи 7.5 образуют кофинальное подмножество в «множестве» всех резольвент.

Доказательство теоремы 9.4 основано на двух следующих утверждениях:

Утверждение 1. Для каждого (ограниченного снизу) комплекса пучков $\mathcal{K}^\cdot$ существуют ограниченный снизу комплекс $\mathcal{C}^\cdot$, состоящий из вялых пучков, и квазиизоморфизм $\mathcal{K}^\cdot \to \mathcal{C}^\cdot$.

В ситуации, описанной в этом утверждении, будем говорить, что пара $(\mathcal{C}^\cdot, i)$ (или комплекс $\mathcal{C}^\cdot$) является *вялой резольвентой* комплекса $\mathcal{K}^\cdot$.

Утверждение 2. Пусть $\mathcal{E}^\cdot \xrightarrow{u} \mathcal{F}^\cdot$ и $\mathcal{E}^\cdot \xrightarrow{v} \mathcal{G}^\cdot$ — квазиизоморфизмы ограниченных снизу комплексов пучков. Тогда найдутся ограниченный снизу комплекс $\mathcal{M}^\cdot$ и квазиизоморфизмы $\mathcal{F}^\cdot \xrightarrow{v_1} \mathcal{M}^\cdot$ и $\mathcal{G}^\cdot \xrightarrow{u_1} \mathcal{M}^\cdot$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}^\cdot \arrow[dr, dashed, "v_1"] & \\ \mathcal{E}^\cdot \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & \mathcal{M}^\cdot \\ & \mathcal{G}^\cdot \arrow[ur, dashed, "u_1"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до гомотопии (в дальнейшем будем говорить короче: гомотопически коммутативна).

Для начала выведем теорему из этих двух утверждений; этот вывод почти целиком сводится к формальным манипуляциям. Предпошлем выводу две простые технические леммы.

Задача 9.7. Пусть $\mathcal{C}^\cdot$ — ограниченный снизу ацикличный комплекс пучков, в котором все $\mathcal{C}^i$ являются вялыми. Покажите, что комплекс абелевых групп $\Gamma(\mathcal{C}^\cdot)$ также ацикличен.

Указание. Разрежьте $\mathcal{C}^\cdot$ на короткие точные последовательности.

Задача 9.8. Пусть $\mathcal{C}_1^\cdot \xrightarrow{f} \mathcal{C}_2^\cdot$ — квазиизоморфизм ограниченных снизу комплексов, составленных из вялых пучков. Покажите, что индуцированный морфизм $\Gamma(\mathcal{C}_1^\cdot) \xrightarrow{f_*} \Gamma(\mathcal{C}_2^\cdot)$ также является квазиизоморфизмом.

Указание. Рассмотрите конус морфизма f.

Выведем теперь теорему из утверждений 1 и 2. Начнем с ее первой части: пусть $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{K}^\cdot$ — резольвента пучка $\mathcal{F}$; построим гомоморфизм $f_{\mathcal{K}^\cdot}\colon H^m(\Gamma(\mathcal{K}')) \to H^m(X, \mathcal{F})$. Сделаем это так. Обозначим через $j\colon \mathcal{F} \to \mathcal{C}^\cdot$ резольвенту Годемана пучка $\mathcal{F}$.

Задача 9.9. Выведите из утверждений 1 и 2, что существует гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{K}^\cdot \arrow[dr, "j_1"] & \\
\mathcal{F} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & \mathcal{C}_1^\cdot \\
& \mathcal{C}^\cdot \arrow[ur, "i_1"'] &
\end{tikzcd} \tag{9.1}$$

в которой i_1 и j_1 — квазиизоморфизмы и все пучки $\mathcal{C}_1^i$ вялые.

По определению, $H^m(X, \mathcal{F}) = H^m(\Gamma(\mathcal{C}^\cdot))$, а в силу задачи 9.8 гомоморфизм $(i_1)_*\colon H^m(\Gamma(\mathcal{C}^\cdot)) \to H^m(\Gamma(\mathcal{C}_1^\cdot))$ является изоморфизмом; положим теперь $f_{\mathcal{K}^\cdot} = (i_1)_*^{-1} \circ (j_1)_*$.

Задача 9.10. Диаграмма (9.1) не единственна; покажите, что гомоморфизм $f_{\mathcal{K}^\cdot}$ не зависит от произвола в ее выборе.

Указание. Пусть $k\colon \mathcal{C}_1^\cdot \to \mathcal{C}_2^\cdot$ — квазиизоморфизм, причем комплекс $\mathcal{C}_2^\cdot$ также состоит из вялых пучков. Покажите, что гомоморфизм $f_{\mathcal{K}^\cdot}$, определенный с помощью диаграммы (9.1), совпадает с таковым, определенным с помощью диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{K}^\cdot \arrow[dr, "j_2"] & \\
\mathcal{F} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & \mathcal{C}_2^\cdot \\
& \mathcal{C}^\cdot \arrow[ur, "k \circ i_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Задача 9.11. Докажите утверждение (1) теоремы 9.4.

Указание. Постройте гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{L}^{\cdot} \arrow[dr] & \\
 & \mathcal{K}^{\cdot} \arrow[ur, "q"] \arrow[dr] & & \mathcal{C}_2^{\cdot} \\
\mathcal{F}^{\cdot} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr] & & \mathcal{C}_1^{\cdot} \arrow[ur] & \\
 & \mathcal{C}^{\cdot} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

в которой $\mathcal{C}^{\cdot}$ — резольвента Годемана пучка $\mathcal{F}$, все стрелки являются квазиизоморфизмами, и комплексы $\mathcal{C}_1^{\cdot}$ и $\mathcal{C}_2^{\cdot}$ состоят из вялых пучков.

Теперь докажем часть (2) теоремы 9.4. Пусть группа H удовлетворяет условию (2) теоремы; тогда для каждой резольвенты $\mathcal{K}^{\cdot}$ пучка $\mathcal{F}$ существует гомоморфизм $g_{\mathcal{K}^{\cdot}} : H^m(\Gamma(\mathcal{K}^{\cdot})) \to H$, а нам нужно построить удовлетворяющий условиям гомоморфизм $\varphi\colon H^m(X, \mathcal{F}) \to H$. Положим $\varphi = g_{\mathcal{C}^{\cdot}}$, где $\mathcal{C}^{\cdot}$ — резольвента Годемана пучка $\mathcal{F}$.

Задача 9.12. Покажите, что гомоморфизм φ таков, как требуется в части (2) теоремы.

Итак, теорема 9.4 доказана. Остается доказать утверждения 1 и 2 (и рассказать по ходу дела о некоторых других полезных вещах).

Двойные комплексы

В этом разделе мы докажем утверждение 1.

Двойным комплексом $K^{\cdot\cdot}$ называется семейство абелевых групп (модулей, пучков…) K^{ij}, занумерованных парами целых чисел, и гомоморфизмов $\delta^{ij}\colon K^{ij} \to K^{i+1,j}$ и $d^{ij}\colon K^{ij} \to K^{i,j+1}$, удовлетворяющих таким условиям:

$$\begin{aligned} &\delta^{i+1,j} \circ \delta^{ij} = 0; \\ &d^{i,j+1} \circ d^{ij} = 0; \\ &d^{i+1,j} \circ \delta^{ij} = \delta^{i,j+1} \circ d^{ij}. \end{aligned}$$

Двойной комплекс $K^{\cdot\cdot}$ можно рассматривать как комплекс комплексов

$$\dots \to K^{i-1\,\cdot} \to K^{i\,\cdot} \to K^{i+1\,\cdot} \to \dots;$$

обратно, всякий комплекс комплексов мы можем (и будем) будем рассматривать как двойной комплекс.

Если $K^{\cdot\cdot}$ — двойной комплекс, то ему можно поставить в соответствие простой комплекс $sK^{\cdot}$ следующим образом. $(sK)^r = \bigoplus_{i+j=r} K^{ij}$, а дифференциал $d_{sK}\colon (sK)^r \to (sK)^{r+1}$ переводит $x \in K^{ij}$ в $\delta^{ij}(x) \oplus (-1)^i d^{ij}(x) \in K^{i+1,j} \oplus K^{i,j+1} \subset (sK)^{i+j+1}$.

Задача 9.13. Проверьте, что $sK^{\cdot}$ действительно является комплексом.

Задача 9.14. Проверьте, что конус гомоморфизма $f\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ есть простой комплекс, соответствующий двойному комплексу (т. е. комплексу комплексов)

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{-1}{K^{\cdot}} \xrightarrow{f} \underset{0}{L^{\cdot}} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Двойные комплексы встречаются в жизни очень часто, но нам сейчас потребуется только одно их свойство:

Задача 9.15. Рассмотрим комплекс комплексов

$$0 \to K^{0\cdot} \to K^{1\cdot} \to K^{2\cdot} \to \dots.$$

Предположим, что все комплексы $K^{i\cdot}$ обладают тем свойством, что $H^p(K^{i\cdot}) = 0$ при $p > 0$ и $K^{iq} = 0$ при $q < 0$. Положим $F^i = H^0(K^{i\cdot})$. Докажите, что комплекс $0 \to F^0 \to F^1 \to \dots$ квазиизоморфен простому комплексу $sK^{\cdot}$, ассоциированному с двойным комплексом $K^{\cdot\cdot}$ (точнее говоря: естественное вложение $F^{\cdot} \hookrightarrow sK^{\cdot}$ является квазиизоморфизмом).

Указание. Объясним, для примера, почему при $r > 0$ отображение $H^r(F^\cdot) \to H^r(sK^\cdot)$ является эпиморфизмом. Итак, пусть $x = x^{0,r} + x^{1,r-1} + \cdots + x^{r,0} \in sK^r$ является коциклом ($x^{ij} \in (K^i)^j$). Тогда, в частности, $d^{0,r}(x^{0,r}) = 0$, откуда, так как $H^r(K^{0\cdot}) = 0$, имеем $x^{0,r} = d^{0,r-1}y$, где $y \in (K^0)^{r-1}$. Рассматривая y как элемент $(sK)^{r-1}$, положим $x' = x - dy$. Тогда $x' \in sK^r$ — коцикл, гомологичный коциклу x, но при этом $(x')^{0,r} = 0$. Продолжая аналогично, можно убить все $x^{r-i,i}$, для которых $i > 0$.

Задача 9.16. Пусть $\mathcal{K}^\cdot$ — ограниченный снизу комплекс пучков. Покажите, что существует квазиизоморфизм $\mathcal{K}^\cdot \to \mathcal{C}^\cdot$, где $\mathcal{C}^\cdot$ — ограниченный снизу комплекс, состоящий из вялых пучков.

Указание. Сопоставим каждому из $\mathcal{K}^i$ его резольвенту Годемана; эти резольвенты образуют комплекс комплексов.

Итак, утверждение 1 доказано.

Конусы и треугольники

Чтобы доказать утверждение 2, нам придется поработать с конусами морфизмов. Начнем со следующего важного определения.

Определение 9.17. *Отмеченным треугольником* называется набор из трех комплексов K, L и M и морфизмов $u\colon K \to L$, $v\colon L \to M$ и $w\colon M \to K[1]$, удовлетворяющий следующем условию: существуют морфизм комплексов $f\colon E \to F$ и гомотопические эквивалентности $a\colon K \to E$, $b\colon L \to F$ и $c\colon M \to C(f)$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} K & \xrightarrow{u} & L & \xrightarrow{v} & M & \xrightarrow{w} & K[1] \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & {\scriptstyle a[1]}\downarrow \\ E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & C(f) & \xrightarrow{h} & E[1] \end{array} \qquad (9.2)$$

коммутативна с точностью до гомотопии (здесь $C(f)$ — конус морфизма f, $g\colon F \to C(f)$ и $h\colon C(f) \to E[1]$ — отображения, описанные в задаче 1.23).

Нижнюю строчку диаграммы (9.2) мы будем называть *стандартным треугольником;* можно сказать, что отмеченный треугольник — это треугольник, гомотопически эквивалентный стандартному.

К этому определению необходимы некоторые комментарии. Во-первых, слово «комплекс» может означать комплекс абелевых групп, модулей, пучков,... — и вообще, коль на то пошло, объектов любой данной абелевой категории. Во-вторых, мы в этом разделе считаем все комплексы ограниченными снизу; точно такое же определение годится, однако, и для комплексов, ограниченных сверху, или ограниченных с обеих сторон, или для произвольных комплексов.

Далее, отмеченные треугольники удобно изображать с помощью диаграмм наподобие такой:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "u"] & & L \arrow[dl, "v"] \\ & M \arrow[ul, "w", "\circ" {at start}] & \end{tikzcd}$$

(кружочек при стрелке означает, что морфизм бьет не в K, а в $K[1]$).

Отметим, наконец, что иногда (особенно в устной речи) отмеченные треугольники называют просто треугольниками.

Установим некоторые свойства отмеченных треугольников.

Начнем с технического результата, показывающего, что стандартные треугольники гомотопных морфизмов будут гомотопически эквивалентны.

Задача 9.18. Пусть $f_1, f_2 \colon E \to F$ — два гомотопных морфизма. Покажите, что существует гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{f_1} & F & \xrightarrow{g_1} & C(f) & \xrightarrow{h_1} & E[1] \\ \| & & \| & & \varphi\Big\downarrow & & \| \\ E & \xrightarrow{f_2} & F & \xrightarrow{g_2} & C(f) & \xrightarrow{h_2} & E[1], \end{array}$$

в которой g_1 и h_1 (соответственно, g_2 и h_2) — канонические морфизмы, ассоциированные с конусом морфизма f_1 (соответственно, f_2), а φ — гомотопическая эквивалентность.

Указание. Все такие факты доказываются более или менее одинаково. Именно, пусть гомотопия между f_1 и f_2 задается набором гомоморфизмов $s^i\colon E^i \to F^{i-1}$, так что $f_1 - f_2 = ds + sd$. Нам требуется построить гомоморфизмы $\varphi^i\colon E^{i+1} \oplus F^i \to E^{i+1} \oplus F^i$. Запишем искомый гомоморфизм в виде 2×2-матрицы (см. с. 10) $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$, в которой $x\colon E^{i+1} \to E^{i+1}$, $z\colon E^{i+1} \to F^i$, и т. д., и подумаем, какими могли бы быть x, y, z и t. Начнем с y: поскольку никакого разумного гомоморфизма из F^i в E^{i+1} из условия извлечь нельзя, положим $y = 0$. Далее, z должно быть гомоморфизмом из E^{i+1} в F^i; по условию нам дан один такой гомоморфизм, а именно s^{i+1}; вот и положим $z = s^{i+1}$. Наконец, x и t — гомоморфизмы из E^{i+1} в E^{i+1} и из F^i в F^i соответственно; естественно попробовать положить оба морфизма тождественными (никаких других эндоморфизмов E^{i+1} или F^i в условии не дано). Итак, в качестве первой попытки положим $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Вообще говоря, могло бы оказаться, что наш первый выбор неудачен и что надо, например, сменить знак у s или заменить некоторые единицы минус единицами или нулями, но в данном случае мы сразу попали в точку: проверьте, что φ — гомоморфизм комплексов, что средний и правый квадраты коммутативны (даже «по-настоящему», а не с точностью до гомотопии; гомотопическая же коммутативность левого квадрата есть составная часть условия), а также что φ является гомотопической эквивалентностью (на самом деле даже изоморфизмом).

В дальнейшем рассуждения такого типа мы будем оставлять читателю.

Теперь сформулируем одно из основных свойств отмеченных треугольников, показывающее, что все три угла треугольника фактически равноправны:

Задача 9.19. Пусть

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "u"] & & L \arrow[dl, "v"] \\ & M \arrow[ul, "w"] & \end{tikzcd} \tag{9.3}$$

— отмеченный треугольник. Тогда треугольники

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "v"] & & M \arrow[dl, "w"] \\ & K[1] \arrow[ul, "-u[1]"] & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "w"] & & K[1] \arrow[dl, "-u[1]"] \\ & L[1] \arrow[ul, "-v[1]"] & \end{tikzcd}$$

также являются отмеченными.

Указание. Сначала сделайте это для случая, когда треугольник (9.3) является стандартным.

В примере 1.22 мы отмечали, что конусу морфизма комплексов $u\colon K \to L$ в топологии соответствует конус $C(u)$ отображения пространств $u\colon X \to Y$. При этом соответствии результату задачи 9.19 соответствует следующий (очевидный) топологический факт: конус естественного вложения $v\colon Y \hookrightarrow C(u)$ гомотопически эквивалентен надстройке ΣX (напомним, что надстройка соответствует сдвигу комплекса).

Зафиксируем полезное следствие из доказанного свойства треугольников.

Задача 9.20. Пусть в отмеченном треугольнике одна из вершин является ацикличным комплексом. Покажите, что противолежащая ей сторона является квазиизоморфизмом.

Второе важное свойство конусов удобнее иллюстрировать не геометрически, а алгебраически. Именно, как мы помним из задачи 1.26, конус вложения $i\colon K \hookrightarrow L$ квазиизоморфен факторкомплексу L/K. Следующая задача, результат которой называется «аксиомой октаэдра», показывает, как на языке конусов и треугольников выглядит общеизвестная теорема об изоморфизме: $(M/K)/(L/K) \cong M/L$, если $K \subset L \subset M$.

Задача 9.21. Пусть в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & & M' \arrow[dl, "e"'] \arrow[ddll, dashed, bend right, "u"'] & & \\
 & K \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"] & & L \arrow[ul, "a"'] \arrow[dl, "g"'] & \\
L' \arrow[ur, "d"] \arrow[rrrr, dashed, bend right, "v"'] & & M \arrow[ll, "c"'] \arrow[rr, "p"] & & K' \arrow[ul, "b"']
\end{tikzcd}$$

центральный треугольник гомотопически коммутативен, а три обрамляющих его треугольника являются отмеченными. Тогда существуют обозначенные пунктиром морфизмы $u\colon M' \to L'$ и $v\colon L' \to K'$ такие, что:

(1) Треугольник

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[dl, bend right, "u"'] & \\
L' \arrow[rr, bend right, "v"'] & & K' \arrow[ul, "a[1]\circ b"']
\end{tikzcd}$$

является отмеченным.

(2) Диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[ddl, bend right, "u"'] & \\
 & & L \arrow[ul, "a"'] \arrow[dl, "g"] \\
L' & M \arrow[l, "c"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & K[1] \arrow[r, "{f[1]}"] & L[1] & \\
L' \arrow[ur, "d"] \arrow[rrr, bend right, "v"] & & & K' \arrow[ul, "b"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & M' \arrow[dl, "e"] \arrow[ddll, dashed, "u"'] \\
 & K[1] & \\
L' \arrow[ur, "d"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
L' \arrow[rr, dashed, bend right, "\overline{v}"'] & M \arrow[l, "c"'] \arrow[r, "p"] & K'
\end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативны.

Указание. Сначала с помощью задачи 9.18 сведите все к случаю, когда центральный треугольник по-настоящему (а не только гомотопически) коммутативен, а три обрамляющих его треугольника являются стандартными (а не только отмеченными). Теперь все сводится к бесхитростным вычислениям в духе задачи 9.18.

Вот теперь можно доказать утверждение 2.

Задача 9.22. Пусть $u\colon E \to F$ и $v\colon E \to G$ — квазиизоморфизмы. Покажите, что существует комплекс M и квазиизоморфизмы $v_1\colon F \to M$ и $u_1\colon G \to M$ такие, что $v_1 \circ u$ гомотопно $u_1 \circ v$.

Указание. Пусть $C(u)$ — конус морфизма u, и пусть $a\colon F \to C(u)$ и $b\colon C(u) \to E[1]$ — естественные отображения. Тогда, в силу результата задачи 9.19, треугольник

$$
\begin{tikzcd}
F[1] \arrow[dr, "-a[1]"] & \\
& C(u) \arrow[dl, "b"] \\
E[1] \arrow[uu, "-u[1]"] &
\end{tikzcd}
$$

является отмеченным. Теперь применим аксиому октаэдра к коммутативному треугольнику, состоящему из комплексов $C(u)$, $E[1]$ и $G[1]$ и морфизмов b, $v[1]$ и $w = v[1] \circ b$. В результате получится, что существуют обозначенные пунктиром морфизмы:

$$\begin{tikzcd}
F[1] \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "-a[1]"] & & C(w) \arrow[dl] \arrow[ddd, dashed, bend left, start anchor=south east, end anchor=east] \\
& C(u) \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "w"] & \\
E[1] \arrow[uu, "-u[1]"] \arrow[rr, "v[1]"] & & G[1] \arrow[uu, "g"'] \arrow[dl] \\
& C(v[1]) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Выведите из аксиомы октаэдра, что f и g являются квазиизоморфизмами и что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F[1] \arrow[r, "f"] & C(w) \\
E[1] \arrow[u, "-u[1]"] \arrow[r, "v[1]"] & G[1] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd} \tag{9.4}$$

гомотопически коммутативна. Чтобы получить из (9.4) то, что нужно, остается сделать сдвиг и сменить знак у некоторых морфизмов.

Итак, утверждение 2 и теорема 9.4 доказаны.

Теорема 9.4 указывает путь к различным обобщениям когомологий пучков. Например, если рассматривать эту теорему как определение когомологий, то не обязательно считать, что $\mathcal{F}$ в ее условии — один-единственный пучок. С тем же успехом можно считать, что $\mathcal{F}^{\cdot}$ — ограниченный снизу комплекс пучков (резольвентами комплекса $\mathcal{F}^{\cdot}$ при этом будут называться квазиизоморфизмы вида $\mathcal{F}^{\cdot} \to \mathcal{K}^{\cdot}$). В результате получится определение того, что называется m-той *группой гиперкогомологий* комплекса $\mathcal{F}^{\cdot}$ и обозначается $\mathbb{H}^m(X, \mathcal{F}^{\cdot})$ или попросту $H^m(X, \mathcal{F}^{\cdot})$. С другой стороны, если $\mathcal{F}^{\cdot}$ — комплекс пучков на пространстве X и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то, беря предел пучков на пространстве Y вида $H^m(f_*\mathcal{K}^\cdot)$, где $\mathcal{K}^\cdot$ пробегает все резольвенты комплекса $\mathcal{F}^\cdot$, получим *высшие прямые образы* комплекса $\mathcal{F}^\cdot$ (или пучка $\mathcal{F}$, если комплекс сводится к единственному пучку) при отображении f; они обозначаются $R^m f_*(\mathcal{F}^\cdot)$. Легко видеть, что $R^0 f_*\mathcal{F} = f_*\mathcal{F}$ в случае, когда $\mathcal{F}$ — один-единственный пучок.

Более того, и теорема 9.4, и упомянутые выше ее обобщения являются фрагментами из большой теории. По-русски эта теория прекрасно изложена в книге [3]; краткое и изящное (но совсем без доказательств) изложение основ можно найти в записках ее создателя Ж.-Л. Вердье (ученика Гротендика). Эти записки опубликованы в томе 569 серии “Lecture notes in mathematics”.