Метрические и ультраметрические пространства сопротивлений

В. А. Гурвич

Данная заметка посвящена формулировке и доказательству следующего факта и его обобщений: сопротивления между полюсами сети удовлетворяют неравенству треугольника

$$\mu(a,b) \leqslant \mu(a,c) + \mu(c,b). \tag{1}$$

Упоминание физических терминов не должно вводить читателя в заблуждение: речь идет о математическом утверждении. Ниже мы его сформулируем строго и дадим план доказательства.

Изложение построено как цепочка связанных друг с другом упражнений, задач и указаний к ним и следует заметке [2].

1. Закон проводимости. Имеется ребро e с концами a и b (проводник). *Закон проводимости* — это функция f_e, которая *напряжению* y_e ставит в соответствие *ток* $y_e^* = f_e(y_e)$.

Здесь мы будем рассматривать только *степенной закон проводимости*:

$$y_e^* = f_e(y_e) = \lambda_e^s |y_e|^r \operatorname{sign}(y_e) = \frac{|y_e|^r}{\mu_e^s} \operatorname{sign}(y_e). \tag{2}$$

Параметры λ_e и $\mu_e = \lambda_e^{-1}$ называются соответственно *проводимостью* и *сопротивлением* ребра e. Параметры r и s мы будем называть показателем и нормировочной степенью закона проводимости. Будем предполагать, что все четыре параметра строго положительны.

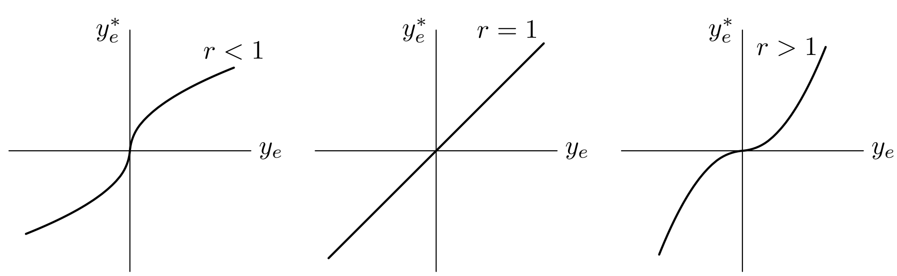

Рис. 1.

Заметим, что при $r = s = 1$ получается обычный закон Ома (ток пропорционален напряжению), значение показателя $r = 1/2$ типично для гидравлики и газовой динамики. Заметим также, что в формуле (2) можно было бы обойтись и без параметра s, но он нам понадобится в дальнейшем.

Упражнение 1. Проверьте, что функция f_e

(i) непрерывна и принимает все вещественные значения;

(ii) строго возрастает: $f_e(y_e) > f_e(y'_e)$ если $y_e > y'_e$,

(iii) нечетна: $f_e(-y_e) = -f_e(y_e)$; кроме того,

(iv) обратная функция f_e^{-1} также является степенной;

(v) найдите параметры r' и s' обратной функции.

2. Основные переменные. *Схема проводников* — неориентированный связный взвешенный граф $G = (V, E, \mu)$ с множеством вершин V, множеством ребер E и весами (сопротивлениями) ребер μ_e.

Задача расчета схемы — это задача решения некоторой системы уравнений. Переменные в этой системе делятся на четыре группы, по две переменные для каждой вершины и каждого ребра:

- ▷ *потенциалы* вершин x_v;
- ▷ *токи* на ребрах y_e^*;
- ▷ *напряжения* на ребрах y_e;
- ▷ *суммарные токи* в вершинах x_v^*.

Все системы уравнений, которые мы будем рассматривать, включают в себя уравнения, которые линейно выражают напряжения через потенциалы и суммарные токи через токи на ребрах. Для записи этих уравнений нам придется произвольным образом ориентировать рёбра и ввести функцию инцидентности $\operatorname{inc}(v, e)$:

$$\operatorname{inc}(v,e) = \begin{cases} +1, & \text{если вершина } v \text{ является началом ребра } e; \\ -1, & \text{если вершина } v \text{ является концом ребра } e; \\ 0, & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Упомянутые уравнения имеют вид

$$y_e = \sum_{v\in V} \operatorname{inc}(v,e) x_v, \tag{4}$$

$$x_v^* = \sum_{e\in E} \operatorname{inc}(v,e) y_e^*. \tag{5}$$

Заметим, что уравнение (4) для ребра $e = (a, b)$ можно записать проще $y_e = \mathrm{inc}(e, a)x_a + \mathrm{inc}(e, b)x_b$ или еще проще: $y_e = x_a - x_b$ (в последнем случае предполагается, что ребро e ориентировано от a к b).

Упражнение 2. Докажите, что из уравнений (4,5) следует равенство

$$\sum_{v \in V} x_v x_v^* = \sum_{e \in E} y_e y_e^*. \qquad (6)$$

3. Двухполюсные схемы. Зафиксируем две различные вершины $a, b \in V$, которые будем называть *полюсами*. Добавим к уравнениям (4,5) следующие уравнения

$$x_v^* = 0, \quad \text{для } v \in V \setminus \{a, b\}, \qquad (7)$$

выражающие первый закон Кирхгофа. Также зафиксируем потенциалы в полюсах

$$x_a = x_a^0, \qquad x_b = x_b^0. \qquad (8)$$

Зафиксируем параметры r и s. Кроме перечисленных выше линейных уравнений для каждого ребра $e \in E$ запишем закон проводимости (2).

Заметим, что полученная система уравнений обладает тем свойством, что значения потенциалов вершин x_v, $v \in V \setminus \{a, b\}$, однозначно определяют значения всех остальных переменных.

Задача 1. Докажите, что для любых x_a^0, x_b^0 существует единственное решение системы уравнений (4,5,7,8) и (2) для каждого ребра e.

Подсказка: примените метод последовательных приближений. Подберите такое начальное распределение потенциалов вершин, чтобы потом все потенциалы (нестрого) монотонно возрастали. Докажите, что в любой вершине последовательность потенциалов, во-первых, сходится и, во-вторых, куда нужно (т. е. к решению системы).

Таким образом доказано существование решения. Заметьте, что единственность пока не доказана. Неясно, например, почему предельные значения потенциалов в вершинах не зависят от порядка, в котором просматриваются вершины.

Проще всего вывести единственность решения из принципа Максвелла минимальной диссипации энергии. В случае двухполюсной схемы (G, a, b) этот принцип утверждает, что распределение потенциалов $x_v, v \in V$, удовлетворяющее ограничениям $x_a = x_a^0$ и $x_b = x_b^0$, должно минимизировать функцию

$$\sum_{e \in E} F_e(y_e) = \sum_{e \in E} \int f_e(y_e)\, dy_e, \qquad (9)$$

где напряжения y_e, $e \in E$, линейно выражаются через потенциалы x_v, $v \in V$, согласно (4).

Задача 2. Докажите принцип Максвелла для двухполюсных схем.

Упражнение 3. Покажите, что для рассматриваемого в этой заметке степеннóго закона проводимости получаем

$$F_e(y_e) = \int f_e(y_e)\,dy_e = \frac{|y_e|^{r+1}}{(r+1)\mu_e^s}, \tag{10}$$

что при $r = s = 1$ дает рассеиваемое по закону Джоуля – Ленца тепло.

Упражнение 4. Покажите, что функция F_e (строго) выпукла тогда и только тогда, когда f_e (строго) монотонно возрастает.

Таким образом, в случае степеннóго закона проводимости рассеиваемая энергия — строго выпуклая функция потенциалов. Наконец, нетрудно доказать, что строго выпуклая функция или не достигает минимума, или достигает его в единственной точке.

Упражнение 5. Докажите, что имеет место последний случай.

Если $x_a^0 \neq x_b^0$, то в a и b первый закон Кирхгофа не выполняется.

Задача 3. Докажите, что $x_a^* + x_b^* = 0$. Более того, если $x_a > x_b$, то все токи из a вытекают (т. е. $y_e^* \operatorname{inc}(a,e) > 0$ для каждого ребра e, инцидентного a), а в b втекают (т. е. $y_e^* \operatorname{inc}(b,e) < 0$ для каждого ребра e, инцидентного b); если $x_a < x_b$, то выполняются противоположные неравенства; если же $x_a = x_b$, то $x_v = x_a = x_b$ и $x_v^* = 0$ для всех $v \in V$, а $y_e = y_e^* = 0$ для всех $e \in E$.

Величина $y(a,b) = x_a - x_b$ называется напряжением, а $y^*(a,b) = x_a^* = -x_b^*$ — током в двухполюсной схеме (G,a,b).

Задача 4. Докажите, что ток $y^*(a,b)$ и напряжение $y(a,b)$ также связаны степенным законом проводимости с теми же самыми параметрами r и s, т. е.

$$y^*(a,b) = f_{a,b}(y(a,b)) = \lambda(a,b)^s |y(a,b)|^r \operatorname{sign}(y(a,b)) = \frac{|y(a,b)|^r}{\mu(a,b)|^s} \operatorname{sign}(y(a,b)). \tag{11}$$

Величины $\lambda(a,b)$ и $\mu(a,b) = \lambda(a,b)^{-1}$ называются соответственно проводимостью и сопротивлением двухполюсной схемы (G,a,b).

Замечание. Задача 4 объясняет, почему мы ограничились степенным законом проводимости. Можно показать (см. [1]), что для любого другого семейства непрерывных функций аналогичное утверждение неверно.

Упражнение 6. Проверьте, что

(i) $\mu(a,b) = \mu(b,a)$ и

(ii) $\mu(a,b) > 0$ при $a \neq b$; иными словами, $y^*(a,b) > 0$ при $x_a > x_b$.

По определению положим $\mu(a,b) = 0$ при $a = b$.

Упражнение 7. Проверьте, что если зафиксировать потенциал x_a в одной вершине $a \in V$ и потребовать выполнения первого закона Кирхгофа в остальных $x_v^* = 0$, $v \in V \setminus \{a\}$, то $x_v = x_a$ для всех $v \in V$, $y_e = y_e^* = 0$ для всех $e \in E$ и $x_a^* = 0$.

Замечание. Пусть дана двухполюсная схема (G, a, b) на взвешенном графе $G = (V, E\mu)$. Заменим сопротивление μ_{e_0} сопротивлением μ'_{e_0} и обозначим полученный граф $G' = (V, E\mu')$. «Интуитивно очевидно», что $\mu'_{a,b} \geqslant \mu_{a,b}$, если $\mu'_{e_0} \geqslant \mu_{e_0}$. Но как это доказать? Ляшко [3] предлагает и в этом случае применить принцип Максвелла.

Рассмотрим распределения потенциалов x_v и x'_v, $v \in V$, решающие схемы (G, a, b) и (G', a, b), а также соответствующие напряжения y_e и y'_e, $e \in E$, определенные линейным соотношением (4).

Поскольку $\mu_{e_0} \leqslant \mu'_{e_0}$, неравенство $F'_e(y_{e_0}) \leqslant F_e(y_{e_0})$ следует из (10). При этом $F'_e(y_e) = F_e(y_e)$ для всех остальных рёбер $e \in E \setminus \{e_0\}$ и, значит, $\sum_{e\in E} F'_e(y_e) \leqslant \sum_{e\in E} F_e(y_e)$. Кроме того, по принципу Максвелла $\sum_{e\in E} F'_e(y'_e) \leqslant \sum_{e\in E} F'_e(y_e)$. Таким образом, $\sum_{e\in E} F'_e(y'_e) \leqslant \sum_{e\in E} F_e(y_e)$ и, значит, $\mu'_{a,b} \geqslant \mu_{a,b}$ согласно (10).

4. Последовательное и параллельное соединение ребер. Рассмотрим две простейших двухполюсных схемы, изображенных на рисунке 2.

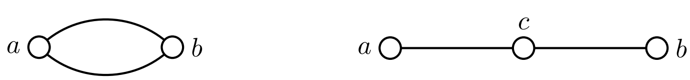

Рис. 2.

Упражнение 8. Покажите, что сопротивления этих схем вычисляются по формулам

$$\mu_{a,b}^{-s} = (\mu_{e'}^{-s} + \mu_{e''}^{-s}) \quad \text{и} \quad \mu_{a,b}^{s/r} = (\mu_{e'}^{s/r} + \mu_{e''}^{s/r}), \tag{12}$$

5. Неравенство треугольника. Зафиксируем теперь не две, а три вершины $a, b, c \in V$.

Задача 5. Докажите неравенство

$$\mu(a,c)^{s/r} + \mu(c,b)^{s/r} \geqslant \mu(a,b)^{s/r}. \tag{13}$$

Опишем план решения этой задачи. Зафиксируем в двухполюсной сети (G, a, b) потенциалы $x_a = x_a^0$ и $x_b = x_b^0$. Пусть для определенности $x_a^0 \geqslant x_b^0$. Согласно задаче 1 все остальные потенциалы определены однозначно, в частности, потенциал вершины c принимает некоторое значение x_c^0.

Рассмотрим еще две двухполюсные схемы: (G, a, c) с потенциалами x_a^0, x_c^0 и (G, c, b) с потенциалами x_c^0, x_b^0. Будем искать распределения потенциалов в (G, a, c) методом последовательных приближений, а в качестве начального приближения возьмем распределение потенциалов в схеме (G, a, b).

Заметим, что при этом потенциалы вершин a и c не меняются.

Задача 6. Докажите, что потенциалы остальных вершин монотонно возрастают; в каждой вершине последовательность потенциалов сходится; в результате получается искомое распределение.

Задача 7. Выведите неравенства для токов

$$y^*(a,b) \geqslant y^*(a,c) \quad \text{и} \quad y^*(a,b) \geqslant y^*(c,b). \tag{14}$$

Покажите, что эти неравенства выполняются не только для рассматриваемых степенны́х, но и для любых монотонно неубывающих функций проводимости.

Задача 8. Выведите неравенство (13) из (14).

Задача 9. Покажите, что при $s \geqslant r$ из (13) вытекает неравенство треугольника $\mu(a,c)+\mu(c,b) \geqslant \mu(a,b)$, а при $s/r \to \infty$ в пределе получается ультраметрическое неравенство $\max(\mu(a,c), \mu(c,b)) \geqslant \mu(a,b)$.

Задача 10. Покажите, что равенство в (13) достигается, если и только если любой путь между a и b проходит через c.

Подсказка: Покажите, что в этом случае оба неравенства в (14) превращаются в равенства, а иначе оба неравенства строгие.

6. Четыре примера метрики сопротивлений.

6.1. При $r = s = 1$ получаем обычные «электрические» сопротивления. Таким образом, как и было обещано, сопротивления между вершинами графа G образуют метрику.

6.2. Граф $G = (V, E)$ моделирует сеть дорог. Сопротивление μ_e интерпретируется как длина дороги $e \in E$ (или время проезда по ней); а $\mu(a,b)$ — это длина кратчайшего пути из a в b (или минимальное время проезда). В этом случае неравенство треугольника очевидно.

Задача 11. Покажите, что этот случай описывается предельным переходом $r = s \to \infty$ или более общо $s \to \infty$, $r/s \to 1$.

6.3. Пусть теперь граф $G = (V, E)$ моделирует трубопровод. Каждое ребро $e \in E$ — это труба, по которой транспортируется жидкость или газ; λ_e интерпретируется как пропускная способность трубы e, т. е. количество жидкости или газа, которое можно пропустить по e в единицу времени, а

$\lambda(a,b)$ — это пропускная способность всей двухполюсной схемы, т. е. максимальное количество жидкости или газа, которое можно прокачать из a в b за единицу времени.

Задача 12. Покажите, что этот случай описывается предельным переходом $s = 1$, $r \to 0$ или более общо $s \to 1$, а $r \to 0$. При этом величины μ удовлетворяют ультраметрическому неравенству. Что означает это неравенство в терминах проводимостей, т. е. максимальных возможных потоков между a и b, b и c, c и a? (См. [4, теорема 9.1].)

6.4. Пусть теперь граф $G = (V, E)$ моделирует систему рек и каналов, а λ_e обозначает *ширину* e, т. е. максимальный размер (ширину, вес, водоизмещение) корабля, который еще может пройти по e; при этом $\lambda(a,b)$ — это ширина всей двухполюсной схемы, т. е. максимальный размер корабля, который еще может пройти из a в b.

Задача 13. Покажите, что этот случай описывается предельным переходом $s \to \infty$, $r = 1$ или более общо $s \to \infty$, а $r/s \to 0$. При этом величины μ удовлетворяют ультраметрическому неравенству. Что оно означает в терминах проводимостей?

Замечание. В моделях 6.3 и 6.4 предполагается, что вершины никак не ограничивают возможности транспортировки, а в 6.2 они не увеличивают длины пути.

Подсказка к задачам 11–13. Начните со схем, изображенных на рисунке 2, и подберите параметры r и s для этих схем.

Воспользуйтесь упражнением 8 и формулой конволюции

$$\mu(t) = (\mu_{e'}^t + \mu_{e''}^t)^{1/t}.$$

Упражнение 9. Докажите, что

$$\mu(t) \to \max(\mu_{e'}, \mu_{e''}) \text{ при } t \to +\infty \quad \text{и} \quad \mu(t) \to \min(\mu_{e'}, \mu_{e''}) \text{ при } t \to -\infty. \tag{15}$$

Упражнение 10. Решите задачи 11–13 для случая параллельно-последовательных двухполюсных схем.

Задача 14. Обобщите полученные результаты на произвольные двухполюсные схемы.

7. Линейный случай. Обычные электрические сопротивления отвечают случаю $r = s = 1$.

В этом случае можно усилить рассуждение из п. 3, где было показано, что ток и напряжение между двумя полюсами связаны законом проводимости с теми же параметрами r и s, что и на каждом ребре. Другими словами, двухполюсную схему можно заменить одним ребром.

Замечание. Минти [5] показал, что двухполюсную схему можно заменить одним ребром не только для степенного, но и для произвольного монотонного закона проводимости. Точнее говоря, если закон проводимости на каждом ребре e задается монотонно неубывающей функцией f_e, то двухполюсную схему с полюсами a, b можно заменить ребром (a, b) с монотонно неубывающей функцией проводимости $f_{(a,b)}$.

Теперь рассмотрим k-полюсную схему в линейном случае. Зафиксируем $k \geqslant 2$ различных полюсов $a_1, \dots, a_k \in V$. Добавим к уравнениям (4,5) первый закон Кирхгофа для вершин, которые не являются полюсами:

$$x_v^* = 0, \quad \text{для } v \in V \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, \tag{16}$$

а в полюсах зафиксируем потенциалы

$$x_{a_i} = x_i^0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{17}$$

Упражнение 11. Докажите, что существует единственное решение линейной системы уравнений (2, 4, 5, 16, 17).

Две k-полюсные схемы $(G, a_1, \dots, a_k)$ и $(G', a'_1, \dots, a'_k)$ будем называть *эквивалентными*, если при одинаковых потенциалах в полюсах суммарные токи в полюсах тоже одинаковы, т. е. при условиях $x_{a_i} = x_{a'_i} = x_i^0$ в уравнениях (17) для решений систем уравнений (2, 4, 5, 16, 17) выполнено $x^*_{a_i} = x^*_{a'_i}$ для $1 \leqslant i \leqslant k$.

Задача 15. Для каждой k-полюсной схемы с n вершинами существует эквивалентная ей k-полюсная схема с k вершинами.

Эту задачу можно решить, явно указав редукцию $(n+1)$-вершинной схемы к n-вершинной, где $n \geqslant k$.

Занумеруем вершины $(n+1)$-вершинной схемы G от 0 до n и обозначим через λ_{ij} проводимость на ребре (i, j). (Если такого ребра нет, то проводимость равна 0.) Построим n-вершинную схему G', вершины которой занумерованы от 1 до n, а проводимости заданы формулой

$$\lambda'_{ij} = \lambda_{ij} + \frac{\lambda_{0i}\lambda_{0j}}{\sum\limits_{\ell=1}^{n} \lambda_{0\ell}}\,. \tag{18}$$

Задача 16. Докажите, что схемы G и G' эквивалентны.

Опишем план решения этой задачи.

Во-первых, заметим, что в силу линейности при параллельном соединении ребер проводимости складываются. Поэтому достаточно преобразовать $(n+1)$-вершинную звезду в эквивалентную n-вершинную схему. Звезда на вершинах 0, 1, ..., n содержит n ребер $(0, i)$.

Во-вторых, поскольку система уравнений линейна, то достаточно рассмотреть базисные наборы потенциалов в вершинах $1, \dots, n$ вида $x_i = 1$, а $x_\ell = 0$ при $\ell \neq i$. Проводимости $\lambda'_{i\ell}$ можно найти, вычислив потенциал в вершине 0. При этом оказывается, что λ'_{ij} получает одно и то же значение для двух базисных наборов: с $x_i = 1$ и с $x_j = 1$.

Замечание. При $n = 3$ замена 4-вершинной звезды на треугольник называется Y-Δ преобразованием.

Упражнение 12. Выведите неравенство треугольника в линейном случае из эквивалентности произвольной 3-полюсной схемы некоторой 3-вершинной схеме.

В случае двухполюсной схемы из формулы (18) можно получить формулу Кирхгофа для проводимости $\lambda(a, b)$. Для этого введём матрицу Кирхгофа M для n-вершинной схемы: $M_{ij} = \lambda_{ij}$ при $i \neq j$ и $M_{ii} = -\sum_j \lambda_{ij}$. Рассмотрим два минора матрицы Кирхгофа: $\Delta_1(a, b)$ — это определитель матрицы, полученной вычеркиванием строки a и столбца b, а $\Delta_2(a, b)$ — это определитель матрицы, полученной вычеркиванием строк a, b и столбцов a, b.

Задача 17. Выведите из формулы (18) формулу Кирхгофа для проводимостей

$$\lambda(a, b) = |\Delta_1(a, b)/\Delta_2(a, b)| \ . \tag{19}$$

Благодарности. Автор признателен М. Н. Вялому за полезные идеи и улучшение изложения.

Список литературы

[1] Гвишиани А. Д., Гурвич В. А. *Динамические задачи классификации и выпуклое программирование в приложениях*. М.: Наука, 1992.

[2] Гвишиани А. Д., Гурвич В. А. *Метрические и ультраметрические пространства сопротивлений* // УМН, 1987. Т. 42, вып. 6. С. 187–188.

[3] Ляшко О. *Почему не уменьшается сопротивление?* // Квант, №1, 1985. С. 10–15.

[4] Ху Т. *Целочисленное программирование и потоки в сетях*. М.: Мир, 1974.

[5] Minty G. J. *Monotone networks* // Proceedings of the Royal Society of London, 1960. Ser. A, vol. 257. P. 194–212.

В. А. Гурвич, RUTCOR, Rutgers University
email: `gurvich@rutcor.rutgers.edu`