

## Об одной замечательной нумерации положительных рациональных чисел

Д. Н. Андреев

### ВВЕДЕНИЕ

Счётность множества рациональных чисел — это один из самых первых фактов, с которыми знакомят начинающих изучать элементарные основы теории множеств. При этом, однако, все известные автору доказательства этого факта довольствуются лишь демонстрацией *принципиальной возможности* нумерации множества рациональных чисел, так или иначе сводя дело к вопросу о нумерации *пар целых чисел* (с надлежащим ограничением на их знаки). В то же время, рациональные числа естественным образом отождествляются лишь с парами *взаимно простых* целых чисел (также с нужным ограничением на знаки), и это обстоятельство при любом «стандартном» способе нумерации делает задачу реального нахождения номера заданного рационального числа — или, наоборот, рационального числа по заданному его номеру — практически безнадёжной.

В настоящей работе строится и изучается один способ нумерации положительных рациональных чисел, обладающий целым рядом замечательных свойств. Прежде всего, в этой нумерации упомянутые выше задачи решаются эффективно: нахождение номера рационального числа  $p/q$  требует лишь  $O(\log \max(p, q))$  арифметических операций, а нахождение рационального числа по его номеру  $n$  выполняется за  $O(\log n)$  арифметических операций. Далее, арифметическая функция, осуществляющая нумерацию, оказывается поразительно «гладкой» в сумматорном смысле: она не только обладает средним значением, но и имеет всего лишь логарифмический остаточный член сумматорной формулы! Наконец, эта нумерация естественным образом приводит к простой и красивой формулировке *принципа математической индукции* для положительных рациональных чисел.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы позволим себе использовать без специальных ссылок простейшие свойства разложений рациональных чисел в (конечные) цепные дроби, которые можно найти практически в любом стандартном курсе элементарной теории чисел.

Через  $\mathbb{N}$  мы обозначаем множество натуральных чисел, через  $\mathbb{Q}^+$  – множество положительных рациональных чисел. Символом  $\star$  отмечается конец доказательства.

Как известно, любое отличное от нуля рациональное число может быть разложено в обыкновенную конечную цепную дробь

$$[q_0; q_1, \dots, q_l] \stackrel{\text{def}}{=} q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_l}}} \quad (1)$$

ровно двумя различными способами, один из которых получается из другого заменой  $q_l > 1$  (или  $q_0 = 1$  при  $l = 0$ ) на  $(q_l - 1) + \frac{1}{1}$ . Нетрудно понять, что при такой замене сумма  $q_0 + \dots + q_l$  не изменяется; поэтому корректным будет следующее

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Высотой*  $\mathbf{h}(r)$  положительного рационального числа  $r$  мы будем называть сумму  $q_0 + \dots + q_l$  всех элементов его разложения в обыкновенную цепную дробь вида (1).

Непосредственно очевидны следующие свойства введённого понятия (доказательства предоставляются читателю):

**Свойство 1.**  $\mathbf{h}(r)$  принимает только натуральные значения, причём все натуральные числа служат её значениями.

**Свойство 2.**  $\mathbf{h}(r) = 1$  тогда и только тогда, когда  $r = 1$ .

**Свойство 3.** Для любого  $r \in \mathbb{Q}^+$  имеем:  $\mathbf{h}\left(\frac{1}{r}\right) = \mathbf{h}(r)$ ,  $\mathbf{h}(r + 1) = \mathbf{h}(r) + 1$ .

## 2. ОСНОВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Определим арифметическую функцию  $\mathbf{r}(n)$  следующим образом: положим  $\mathbf{r}(1) = 1$ , и для любого  $n \in \mathbb{N}$  пусть  $\mathbf{r}(2n) = \mathbf{r}(n) + 1$ ,  $\mathbf{r}(2n + 1) = \frac{1}{\mathbf{r}(n) + 1}$ . Очевидно, эти условия для всех  $n \in \mathbb{N}$  однозначно определяют значение  $\mathbf{r}(n)$ , являющееся положительным рациональным числом.

ТЕОРЕМА 1. Функция  $\mathbf{r}(n)$  принимает каждое положительное рациональное значение один и только один раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем сперва, что для любого  $r \in \mathbb{Q}^+$  найдётся такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $\mathbf{r}(n) = r$ . Доказательство проведём индукцией по величине  $\mathbf{h}(r)$ . База индукции очевидна, поскольку при  $\mathbf{h}(r) = 1$  имеем  $r = 1$ , и можно взять  $n = 1$ , так как  $\mathbf{r}(1) = 1$ . Пусть  $h > 1$ ; предположим, что для  $\mathbf{h}(r) < h$  требуемое уже доказано, и возьмём произвольное  $r$ , для которого  $\mathbf{h}(r) = h$ ; заметим, что  $r \neq 1$ , так как  $h > 1$ . Если  $r > 1$ , то  $h = \mathbf{h}(r) = \mathbf{h}(r - 1) + 1$ , откуда  $\mathbf{h}(r - 1) = h - 1$ ; по индуктивному предположению, найдётся такое  $n' \in \mathbb{N}$ , что  $\mathbf{r}(n') = r - 1$ , и, взяв  $n = 2n'$ , получим  $\mathbf{r}(n) = \mathbf{r}(2n') = \mathbf{r}(n') + 1 = r$ . Если же  $r < 1$ , то  $\frac{1}{r} > 1$ ; тогда  $h = \mathbf{h}(r) = \mathbf{h}(\frac{1}{r}) = \mathbf{h}(\frac{1}{r} - 1) + 1$ , откуда  $\mathbf{h}(\frac{1}{r} - 1) = h - 1$ ; по индуктивному предположению, найдётся такое  $n' \in \mathbb{N}$ , что  $\mathbf{r}(n') = \frac{1}{r} - 1$ , и, взяв  $n = 2n' + 1$ , получим  $\mathbf{r}(n) = \mathbf{r}(2n' + 1) = \frac{1}{\mathbf{r}(n') + 1} = r$ .

2) Докажем теперь, что для любого  $m \in \mathbb{N}$  имеем  $\mathbf{r}(n) \neq \mathbf{r}(m)$  при  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq m$ ; доказательство проведём индукцией по  $m$ . База индукции здесь также очевидна: если  $n \neq 1$ , то либо  $n = 2n'$  с некоторым  $n' \in \mathbb{N}$ , и тогда  $\mathbf{r}(n) = \mathbf{r}(2n') = \mathbf{r}(n') + 1 > 1$ , либо  $n = 2n' + 1$  с некоторым  $n' \in \mathbb{N}$ , и тогда  $\mathbf{r}(n) = \mathbf{r}(2n' + 1) = \frac{1}{\mathbf{r}(n') + 1} < 1$ . Пусть  $m > 1$ , и пусть для всех  $m' < m$  уже доказано, что  $\mathbf{r}(n) \neq \mathbf{r}(m')$  при  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq m'$ . Возьмём произвольное  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq m$ . Если  $m$  чётно, то  $m = 2m'$ , где  $m' \in \mathbb{N}$  и  $m' < m$ ; теперь при нечётном  $n$  имеем  $\mathbf{r}(n) \leq 1 < \mathbf{r}(m)$ , а при чётном  $n$  положим  $n = 2n'$ , где  $n' \in \mathbb{N}$ , и, очевидно,  $n' \neq m'$ , откуда  $\mathbf{r}(n) - \mathbf{r}(m) = \mathbf{r}(2n') - \mathbf{r}(2m') = \mathbf{r}(n') - \mathbf{r}(m') \neq 0$  по предположению индукции. Если же  $m$  нечётно, то  $m = 2m' + 1$ , где  $m' \in \mathbb{N}$  и  $m' < m$ ; теперь при чётном  $n$  имеем  $\mathbf{r}(n) > 1 > \mathbf{r}(m)$ , а при нечётном  $n$  положим  $n = 2n' + 1$ , где  $n' \in \mathbb{N}$ , и, очевидно,  $n' \neq m'$ , откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(n) - \mathbf{r}(m) &= \\ &= \mathbf{r}(2n' + 1) - \mathbf{r}(2m' + 1) = \frac{1}{\mathbf{r}(n') + 1} - \frac{1}{\mathbf{r}(m') + 1} = \\ &= \frac{\mathbf{r}(m') - \mathbf{r}(n')}{(\mathbf{r}(m') + 1)(\mathbf{r}(n') + 1)} \neq 0 \end{aligned}$$

по предположению индукции. ★

Таким образом, мы видим, что построенная нами функция  $\mathbf{r}(n)$  действительно осуществляет нумерацию всех положительных рациональных чисел, и, следовательно, на  $\mathbb{Q}^+$  определена обратная ей функция со значениями в  $\mathbb{N}$ , которую мы будем обозначать через  $\mathbf{n}(r)$ .

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ НУМЕРАЦИИ

Теперь займёмся вопросом о том, как связаны между собой соответствующие друг другу значения функций  $n = \mathbf{n}(r)$  и  $r = \mathbf{r}(n)$ . Оказывается, эта связь выражается тем, что *двоичное разложение* числа  $n$  и *разложение в цепную дробь* числа  $r$  практически могут быть, что называется, «прочитаны» одно по другому.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и  $r \in \mathbb{Q}^+$  таковы, что  $r = \mathbf{r}(n)$  и  $n = \mathbf{n}(r)$ . Стандартное представление  $n$  в двоичной системе счисления:  $n = 2^{m_0} + 2^{m_1} + \dots + 2^{m_l}$ , где  $0 \leq m_0 < \dots < m_l$ , и «длинное» разложение  $r$  в обыкновенную цепную дробь:  $r = [q_0; q_1, \dots, q_{l-1}, q_l]$ , где  $q_l = 1$ , связаны так, что  $l' = l + 1$ , и для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq l$ , имеет место равенство  $m_k = q_0 + \dots + q_k$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Перефразируя известное изречение Дж. И. Литлвуда о тождествах, можно сказать, что доказательство этой теоремы тривиально, — *после того, как она сформулирована*; действительно, доказательство, которое мы проведём индукцией по  $n$ , сводится к достаточно рутинной проверке.

База индукции усматривается непосредственно: для  $n = 1 = 2^0$  имеем  $r = 1 = [0; 1]$ , так что  $l = 0$ ,  $m_0 = 0$ ;  $l' = 1$ ,  $q_0 = 0$ , и справедливость утверждения теоремы очевидна. Пусть  $n > 1$ ; предположим, что для всех  $n' \in \mathbb{N}$ ,  $n' < n$  утверждение уже доказано. Если  $n$  чётно, то  $n = 2n'$ , где  $n' \in \mathbb{N}$ ,  $n' < n$ ; очевидно,  $m_0 > 0$  и  $n' = 2^{m_0-1} + \dots + 2^{m_l-1}$ ; поскольку, по предположению индукции, для  $r' = \mathbf{r}(n')$  имеем  $r' = [m_0 - 1; m_1 - m_0, \dots, m_l - m_{l-1}, 1]$ , то  $r = r' + 1 = [m_0; m_1 - m_0, \dots, m_l - m_{l-1}, 1]$ , что и утверждается. Если же  $n$  нечётно, то  $n = 2n' + 1$ , где  $n' \in \mathbb{N}$ ,  $n' < n$ ; очевидно,  $m_0 = 0$  и  $n' = 2^{m_1-1} + \dots + 2^{m_l-1}$ ; поскольку, по предположению индукции, для  $r' = \mathbf{r}(n')$  имеем  $r' = [m_1 - 1; m_2 - m_1, \dots, m_l - m_{l-1}, 1]$ , то  $r = \frac{1}{r' + 1} = [0; m_1 - 0, \dots, m_l - m_{l-1}, 1]$ , что и утверждается. ★

**СЛЕДСТВИЕ.** Для нахождения  $\mathbf{n}(r)$  по  $r$  и  $\mathbf{r}(n)$  по  $n$  достаточен объём вычислений, имеющий логарифмический относительно данного порядок.

Действительно, разложение числа  $r = p/q$  в обыкновенную цепную дробь сводится к алгоритму Евклида, который, как известно, выполняется за  $O(\log \max(p, q))$  шагов с ограниченным числом арифметических операций на каждом шаге, а нам для нахождения  $n$  понадобится добавить в каждый шаг также лишь ограниченное число операций. Что же касается разложения числа  $n$  в стандартное двоичное представление, то оно, очевидно, осуществляется за  $O(\log n)$  шагов с ограниченным числом арифметических операций, а нам для вычисления  $r$ , которое сводится к

сворачиванию цепной дроби в обыкновенную, понадобится добавить в каждый шаг также лишь ограниченное число операций.

#### 4. СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

Здесь мы покажем, что функция  $r(n)$  обладает средним значением, и получим наилучшую оценку остаточного члена её сумматорной формулы. Доказательство основывается на ряде тождеств, которым удовлетворяют функция  $r(n)$  и другие, с ней связанные; мы сформулируем их в виде отдельных лемм.

ЛЕММА 1. Для любого  $k \in \mathbb{N}$  имеет место тождество:

$$r(4k+1) + r(4k+3) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, имеем:  $r(4k+1) + r(4k+3) = \frac{1}{r(2k)+1} + \frac{1}{r(2k+1)+1} = \frac{1}{r(k)+2} + \frac{1}{\frac{1}{r(k)+1} + 1} = \frac{1}{r(k)+2} + \frac{r(k)+1}{r(k)+2} = 1$ . ★

ЛЕММА 2. Для любого  $k \in \mathbb{N}$  имеет место тождество:

$$r(4k) + r(4k+1) + r(4k+2) + r(4k+3) = r(2k) + r(2k+1) + 3. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что  $r(4k) + r(4k+1) + r(4k+2) + r(4k+3) = r(2k) + 1 + r(2k+1) + 1 + 1 = r(2k) + r(2k+1) + 3$ . ★

Отсюда видно, что только число  $3/2$  может претендовать на роль среднего значения функции  $r(n)$ . Обозначая через  $\mathbf{R}(n)$  сумматорную функцию для  $r(n)$ , т. е.  $\mathbf{R}(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} r(k)$ , мы должны были бы рассмотреть теперь разность  $\mathbf{R}(n) - \frac{3}{2}n$ ; однако, поскольку мы собираемся вывести *точные* границы изменения остаточного члена, нам будет удобно взять его в несколько модифицированном виде, положив  $\mathbf{R}(n) = \frac{3n-1+\rho(n)}{2}$ , так что остаточным членом в собственном смысле этого слова будет не  $\rho(n)$ , а  $\frac{\rho(n)-1}{2}$ .

ЛЕММА 3. Для любого  $m \in \mathbb{N}$  имеют место тождества:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(4m) &= \mathbf{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2}, \\ \mathbf{R}(4m+1) &= \mathbf{R}(2m+1) + 3m + \frac{1}{2} - \frac{1}{(\mathbf{r}(m)+1)(\mathbf{r}(m)+2)}, \\ \mathbf{R}(4m+2) &= \mathbf{R}(2m+1) + 3m + \frac{3}{2} + \frac{1}{\mathbf{r}(m)+2}, \\ \mathbf{R}(4m+3) &= \mathbf{R}(2m+1) + 3m + \frac{5}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулу (2), для произвольного  $m \geq 1$  имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(4m+3) &= \mathbf{R}(3) + \sum_{1 \leq k \leq m} (\mathbf{r}(4k) + \mathbf{r}(4k+1) + \mathbf{r}(4k+2) + \mathbf{r}(4k+3)) = \\ &= \frac{7}{2} + \sum_{1 \leq k \leq m} (\mathbf{r}(2k) + \mathbf{r}(2k+1) + 3) = 3m + \frac{7}{2} + \sum_{1 \leq k \leq m} (\mathbf{r}(2k) + \mathbf{r}(2k+1)) = \\ &= 3m + \frac{5}{2} + \mathbf{r}(1) + \sum_{1 \leq k \leq m} (\mathbf{r}(2k) + \mathbf{r}(2k+1)) = 3m + \frac{5}{2} + \sum_{1 \leq k \leq 2m+1} \mathbf{r}(k) = \\ &= \mathbf{R}(2m+1) + 3m + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что полученная формула верна также и при  $m = 0$ ; поэтому, заменяя в ней  $m$  на  $m-1$ , для любого  $m \geq 1$  получим:  $\mathbf{R}(4m-1) = \mathbf{R}(2m-1) + 3(m-1) + \frac{5}{2} = \mathbf{R}(2m-1) + 3m - \frac{1}{2}$ . Отсюда последовательно получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(4m) &= \mathbf{R}(4m-1) + \mathbf{r}(m) = \mathbf{R}(2m-1) + 3m - \frac{1}{2} + \mathbf{r}(2m) + 1 = \\ &= \mathbf{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2}; \\ \mathbf{R}(4m+1) &= \mathbf{R}(4m) + \mathbf{r}(4m+1) = \mathbf{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{\mathbf{r}(2m)+1} = \\ &= \mathbf{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{\mathbf{r}(m)+2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(4m+2) &= \mathbf{R}(4m+1) + r(4m+2) = \\
&= \mathbf{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{r(m)+2} + r(2m+1) + 1 = \\
&= \mathbf{R}(2m+1) + 3m + \frac{3}{2} + \frac{1}{r(m)+2}.
\end{aligned}$$

Теперь осталось выразить  $\mathbf{R}(4m+1)$  не через  $\mathbf{R}(2m)$ , а через  $\mathbf{R}(2m+1)$ ; имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(4m+1) &= \mathbf{R}(2m+1) - r(2m+1) + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{r(m)+2} = \\
&= \mathbf{R}(2m+1) - \frac{1}{r(m)+1} + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{r(m)+2} = \\
&= \mathbf{R}(2m+1) + 3m + \frac{1}{2} - \frac{1}{(r(m)+1)(r(m)+2)}.
\end{aligned}$$

★

ЛЕММА 4. Для любого  $m \in \mathbb{N}$  имеют место тождества:

$$\begin{aligned}
\rho(4m) &= \rho(2m) + 1, \\
\rho(4m+1) &= \rho(2m+1) + \frac{r(m)(r(m)+3)}{(r(m)+1)(r(m)+2)}, \\
\rho(4m+2) &= \rho(2m+1) + \frac{2}{r(m)+2}, \\
\rho(4m+3) &= \rho(2m+1) - 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается непосредственной подстановкой в формулы (3) всюду  $\frac{3n-1+\rho(n)}{2}$  вместо  $\mathbf{R}(n)$  и выполнением очевидных преобразований. ★

ТЕОРЕМА 3. Для любого целого  $l \geq 0$  при всех  $n$  из промежутка  $2^l \leq n < 2^{l+1}$  справедливо неравенство  $|\rho(n)| \leq l$ , причём равенство  $\rho(n) = l$  достигается только при  $n = 2^l$ , а равенство  $\rho(n) = -l$  — только при  $n = 2^{l+1} - 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывать теорему мы будем индукцией по  $l$ . Для  $l = 0$  и  $l = 1$  утверждение теоремы проверяется непосредственно: так как  $r(1) = 1$ ,  $r(2) = 2$ ,  $r(3) = 1/2$ , то  $\mathbf{R}(1) = 1$ ,  $\mathbf{R}(2) = 3$ ,  $\mathbf{R}(3) = 7/2$ , и, значит,  $\rho(1) = 0$ ,  $\rho(2) = 1$ ,  $\rho(3) = -1$ , так что в этих случаях теорема верна.

Пусть теперь  $l > 1$ , и пусть уже доказано, что  $|\rho(n)| \leq l - 1$  при  $2^{l-1} \leq n < 2^l$ , причём  $\rho(n) = l - 1$  только при  $n = 2^{l-1}$ , а  $\rho(n) = -(l - 1)$  только при  $n = 2^l - 1$ . Тогда, по формулам (4), имеем  $\rho(2^l) = \rho(2^{l-1}) + 1 = l$  и  $\rho(2^{l+1} - 1) = \rho(2^l - 1) - 1 = -l$ , так что в этой части утверждение теоремы верно. Если же  $2^l < n < 2^{l+1} - 1$ , то, в зависимости от вычета  $n \pmod 4$ , имеем следующие возможности:

0) при  $n = 4m$ , ввиду  $n > 2^l$ , будет  $2^l + 4 \leq n \leq 2^{l+1} - 4$ , откуда  $2^{l-1} < 2m < 2^l - 1$ , и, значит,  $-(l - 1) < \rho(2m) < l - 1$ , а так как по формулам (4) имеем  $\rho(n) = \rho(2m) + 1$ , то отсюда  $-(l - 2) < \rho(n) < l$ , так что  $|\rho(n)| < l$ ;

1) при  $n = 4m + 1$  будет  $2^l + 1 \leq n \leq 2^{l+1} - 3$ , откуда  $2^{l-1} < 2m + 1 \leq 2^l - 1$ , и, значит,  $-(l - 1) \leq \rho(2m + 1) < l - 1$ , а так как по формулам (4) имеем  $\rho(n) = \rho(2m + 1) + \theta_1$ , где  $0 < \theta_1 < 1$  (ибо  $\theta_1 = \frac{r(r+3)}{(r+1)(r+2)}$  при  $r = r(m)$ ), то отсюда  $-(l - 1) < \rho(n) < l$ , так что  $|\rho(n)| < l$ ;

2) при  $n = 4m + 2$  будет  $2^l + 2 \leq n \leq 2^{l+1} - 2$ , откуда  $2^{l-1} < 2m + 1 \leq 2^l - 1$ , и, значит,  $-(l - 1) \leq \rho(2m + 1) < l - 1$ , а так как по формулам (4) имеем  $\rho(n) = \rho(2m + 1) + \theta_2$ , где  $0 < \theta_2 < 1$  (ибо  $\theta_2 = \frac{2}{r+2}$  при  $r = r(m)$ ), то отсюда  $-(l - 1) < \rho(n) < l$ , так что  $|\rho(n)| < l$ ;

3) при  $n = 4m + 3$ , ввиду  $n < 2^{l+1} - 1$ , будет  $2^l + 3 \leq n \leq 2^{l+1} - 5$ , откуда  $2^{l-1} < 2m + 1 < 2^l - 1$ , и, значит,  $-(l - 1) < \rho(2m + 1) < l - 1$ , а так как по формулам (4) имеем  $\rho(n) = \rho(2m + 1) - 1$ , то отсюда  $-l < \rho(n) < l - 2$ , так что  $|\rho(n)| < l$ . ★

Следствие. Для всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливы неравенства:

$$\frac{3n - 1 - \lfloor \log_2 n \rfloor}{2} \leq R(n) \leq \frac{3n - 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor}{2}, \quad (5)$$

в которых как слева, так и справа равенство достигается при бесконечно многих  $n$ .

## 5. ПРИНЦИП ИНДУКЦИИ

Построенная нами здесь нумерация  $\mathbb{Q}^+$  приводит нас к мысли о том, что вводимый ею, в некотором смысле, «естественный» порядок должен приводить нас к столь же «естественному» процессу индуктивного перехода. В самом деле, по сравнению с  $\mathbb{N}$  усложнение невелико: к операции увеличения на единицу добавилась операция взятия обратной величины, и они, слаженно действуя в паре, как хорошие молотобойцы, выковывают одно за другим в совершенном порядке все положительные рациональные числа, начиная с 1. Поэтому нам будет нетрудно сформулировать



и доказать следующее утверждение, которое мы вправе будем называть *принципом математической индукции* для положительных рациональных чисел.

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть для каждого положительного рационального числа  $r$  задано некоторое утверждение  $\Phi_r$ . Если утверждение  $\Phi_1$  истинно, и из истинности утверждения  $\Phi_r$  вытекает истинность утверждений  $\Phi_{r+1}$  и  $\Phi_{1/r}$ , то все утверждения  $\Phi_r$  истинны.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим последовательность утверждений  $\{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , где  $\Psi_n$  – это утверждение « $\Phi_r$  верно для  $r = \mathbf{r}(n)$ »; ясно, что, в свою очередь, утверждение  $\Phi_r$  – это, по существу, утверждение « $\Psi_n$  верно для  $n = \mathbf{n}(r)$ ». Докажем индукцией по  $n$ , что все утверждения  $\Psi_n$  верны. База индукции очевидна –  $\Psi_1$  верно, так как  $\mathbf{r}(1) = 1$ , а по условию  $\Phi_1$  верно. Пусть теперь  $n > 1$ ; предположим, что утверждения  $\Psi_m$  уже доказаны для  $1 \leq m < n$ . Если  $n$  чётно, то  $n = 2m$ , где  $m < n$ ; пусть  $r = \mathbf{r}(n)$  и  $r' = \mathbf{r}(m)$ . По индуктивному предположению,  $\Psi_m$  верно, т. е. верно  $\Phi_{r'}$ , а так как по условию из этого следует, что верно  $\Phi_{r'+1} = \Phi_r$ , то верно и  $\Psi_n$ . Если же  $n$  нечётно, то  $n = m + 1$ , где  $m$  чётно и  $m < n$ ; пусть  $r = \mathbf{r}(n)$  и  $r' = \mathbf{r}(m)$ . По индуктивному предположению,  $\Psi_m$  верно, т. е. верно  $\Phi_{r'}$ , а так как по условию из этого следует, что верно  $\Phi_{1/r'} = \Phi_r$ , то верно и  $\Psi_n$ . ★

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Заметим, что в доказательстве условием «из  $\Phi_r$  следует  $\Phi_{1/r}$ » мы пользовались *только при  $r > 1$* : действительно, для чётного  $m$  имеем  $\mathbf{r}(m) = \mathbf{r}(\frac{m}{2}) + 1 > 1$ . Поэтому формулировку теоремы можно слегка ослабить: *если истинно  $\Phi_1$ , из истинности  $\Phi_r$  вытекает истинность  $\Phi_{r+1}$ , и из истинности  $\Phi_r$  при  $r > 1$  вытекает истинность  $\Phi_{1/r}$ , то все  $\Phi_r$  истинны.*

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение предлагаем читателю несколько задач для самостоятельного решения; содержащиеся в них результаты проливают, как нам кажется, дополнительный свет на причины столь замечательных свойств построенной нами нумерации  $\mathbb{Q}^+$ .

**ЗАДАЧА 1.** Доказать, что для любого  $h \in \mathbb{N}$  имеется ровно  $2^{h-1}$  положительных рациональных чисел высоты  $h$ , а их номера  $\mathbf{n}(r)$  удовлетворяют неравенствам  $2^{h-1} \leq \mathbf{n}(r) < 2^h$ .

**ЗАДАЧА 2.** Доказать, что для любого  $r \in \mathbb{Q}^+$ ,  $0 < r < 1$ , имеем  $\mathbf{h}(1-r) = \mathbf{h}(r)$  и  $\mathbf{n}(1-r) = \mathbf{n}(r) + 2 \operatorname{sgn}(\frac{1}{2} - r)$ .