От спектрального радиуса к основной теореме алгебры

Е. А. Горин

В рамках классического функционального анализа можно установить существование собственных векторов для линейных преобразований $\mathbb{C}^n$ в обход основной теоремы алгебры.

Введение

Основная теорема алгебры устанавливает, что каждый нетривиальный полином над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел имеет корень.

Историки математики утверждают, что основную теорему алгебры сформулировал А. Жирар ещё в 30-е годы XVII века. Принято считать, что первое строгое доказательство содержится в знаменитой диссертации К.-Ф. Гаусса 1799 года; не случайно основную теорему алгебры часто называют теоремой Гаусса. Между тем, известно, что в середине XVIII века доказательство основной теоремы алгебры опубликовал Ж. Даламбер, и в современных курсах алгебры обычно приводится доказательство, основанное на «лемме Даламбера», фактически устанавливающей открытость нетривиального полиномиального отображения комплексной плоскости.

Кто-то остроумно заметил, что каждый раздел математики имеет собственное доказательство основной теоремы алгебры. В самом деле, в теории аналитических функций основную теорему алгебры любят выводить из теоремы Лиувилля, в топологии — из общих фактов о вращении векторных полей, а алгебраист может начать с основ теории Галуа. Как бы то ни было, в один из решающих моментов материализуется поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел и привлекаются более или менее деликатные соображения, связанные с analysis situs (так раньше называли топологию).

Естественно спросить, реализуется ли сформулированный выше тезис в рамках элементарного функционального анализа (попросту говоря, —

линейной алгебры, которая не боится предельных переходов). Мы хотим показать, что это так. Приводимое ниже доказательство одного весьма общего утверждения не перегружено алгебраическими изысками, а из топологии использует лишь ограниченность вещественных непрерывных функций на отрезке. В качестве следствия (различными способами) можно получить основную теорему алгебры.

Напомним, что *алгеброй над полем* $\mathbb{C}$ *комплексных чисел* называется комплексное линейное пространство A, в котором дополнительно определено *умножение* $x \cdot y$, связанное с линейными операциями условиями

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z, \\ x(y+z) &= xy + xz, \\ (x+y)z &= xz + yz, \\ (\lambda x)y &= \lambda(xy) = x(\lambda y) \end{aligned}$$

для всех $x, y, z \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Мы будем рассматривать только алгебры с единицей 1 (не используя для единицы алгебры никаких шрифтовых выделений). Элемент $x \in A$ называется обратимым, если существует такой элемент $y \in A$, что $xy = yx = 1$. Такой элемент y, если он существует, однозначно определен по x и обычно обозначается через x^{-1}. Совокупность всех обратимых элементов образует группу (по умножению).

Комплексную алгебру будем называть *нормированной*, если она одновременно является нормированным (линейным) пространством над полем $\mathbb{C}$, причем эти структуры связаны условиями $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ и $\|1\| = 1$.

Существуют другие способы описания такой комбинации структур, но мы не будем здесь это обсуждать, поскольку ничего, кроме определения (в которое как раз и запрятана идеологическая бомба), нам не потребуется.

Введенный класс очень широк, поскольку мы не предполагаем полноты нормированного пространства. Скажем, в качестве A можно взять алгебру $\mathbb{C}[z]$ всех комплексных полиномов, понимая под нормой, например, сумму модулей коэффициентов.

С точки зрения анализа, значительно более интересны *банаховы алгебры*, в определение которых дополнительно включается требование полноты нормированного пространства. Основоположник абстрактной теории банаховых алгебр И. М. Гельфанд называл их нормированными кольцами, но со временем это наименование вышло из употребления.

Полнота не только заметно упрощает формулировки и доказательства, она приводит к классу с чрезвычайно красивой архитектурой и многочисленными плодотворными контактами с другими разделами математики. Вместе с тем, для справедливости некоторых исходных фактов полноты не требуется.

Пусть A — нормированная алгебра и $x \in A$. Совокупность всех таких $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых элемент $\lambda \cdot 1 - x$ *не является* обратимым, называется *спектром* элемента x. Для спектра элемента $x \in A$ используется обозначение $\mathrm{Spec}_A(x)$.

Ясно, что спектр — понятие чисто алгебраическое, однако в случае банаховых алгебр существует тесная связь между спектральными, метрическими и топологическими инвариантами алгебры.

Теперь мы перечислим некоторые исходные факты теории банаховых алгебр. Заметим, что в основном тексте все они будут доказаны (и подчеркнём, что за рамками этого элементарного текста останутся почти все принципиальные понятия теории).

Теорема Гельфанда–Мазура. *Банахово поле состоит из элементов вида $\lambda \cdot 1$ и, следовательно, естественно изоморфно полю комплексных чисел.*

Теорема Гельфанда о непустоте спектра. *Спектр каждого элемента банаховой алгебры не пуст и компактен.*

Формула Гельфанда для спектрального радиуса. *Радиус наименьшего круга с центром в точке 0, содержащего спектр элемента x банаховой алгебры, может быть вычислен по формуле*

$$|x|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

(предел справа существует).

С. Мазур опубликовал первое из этих утверждений в 1938 г. Вскоре И. М. Гельфанд дал (среди прочего) полное доказательство всех трех. Ясно, что теорема о непустоте спектра покрывает теорему Гельфанда–Мазура. Кроме того, утверждение о непустоте спектра (но не о компактности) сохраняется без предположения о полноте, т. е. для всех нормированных алгебр. Наконец, если *определить* «спектральный радиус» указанной выше формулой Гельфанда, то получится, что на границе круга

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| \leqslant |x|_\infty\right\}$$

имеются точки спектра независимо от того, полна алгебра или нет.

Хотя доказательства И. М. Гельфанда существенно использовали основные факты теории аналитических функций (теорема Лиувилля, формула Коши–Адамара), последнее обстоятельство наводит на мысль поискать элементарное доказательство теоремы о непустоте спектра для произвольных нормированных алгебр.

Такие доказательства были найдены еще в середине 50-х годов, одно из них принадлежит Ч. Риккарту [3].

Здесь приводится упрощенный вариант этого доказательства. Сначала автор предполагал изложить собственное доказательство, не очень сложное в случае конечномерных алгебр, однако, еще раз обдумав доказательство Риккарта, понял, как его можно упростить, и решил отказаться от собственной песни.

Основная теорема алгебры фактически эквивалентна теореме о непустоте спектра для конечномерных алгебр. Действительно, пусть $M(n,\mathbb{C})$ — алгебра всех комплексных квадратных матриц порядка n. Согласно канонам линейной алгебры, матрица $T \in M(n,\mathbb{C})$ тогда и только тогда обратима, когда $\det(T) \neq 0$. Поэтому утверждение о непустоте спектра для алгебры $M(n,\mathbb{C})$ равносильно утверждению о разрешимости уравнений $\det(\lambda \cdot 1 - T) = 0$, и остается только заметить, что *каждый* полином со старшим коэффициентом, равным, 1 реализуется в виде $\det(\lambda \cdot 1 - T)$ при подходящих n и T. В частности, основная теорема алгебры *вытекает* из теоремы о непустоте спектра.

Наш дальнейший план таков.

В п. 1 мы объясняем, как свести проблему о непустоте спектра к случаю коммутативных алгебр и приводим элементарные алгебраические тождества (которые сохраняют смысл в контексте произвольных коммутативных колец).

В п. 2 приводятся факты, которые относятся к элементарному анализу и позволяют ввести понятие *спектрального индикатора*. Главный пример — спектральный радиус в случае нормированных алгебр, если последний *определять* формулой Гельфанда.

Суммируя это немногое, в п. 3 мы получаем вариант теоремы о непустоте спектра.

В п. 4 мы описываем два способа (один из них вкратце намечен выше) вывести основную теорему алгебры из теоремы о непустоте спектра для конечномерных алгебр (предварительно объясняется, почему для конечномерных алгебр утверждение о непустоте спектра вытекает из общей теоремы).

Наконец, п. 5 содержит небольшое ностальгическое «рассуждение по поводу».

В этом тексте леммы и формулы имеют сплошную нумерацию, а замечания не нумеруются вовсе. В ранг теоремы возведено только одно утверждение.

Я хотел бы поблагодарить В. М. Тихомирова, без благожелательной настойчивости которого эта затея вряд ли была бы доведена до конца, и Н. Б. Васильева, замечания которого побудили меня отказаться от некоторых излишеств первоначального варианта. Я благодарю В. Я. Лина — на сей раз за щедрую TEX-ническую поддержку издалека. Наконец, я признателен М. Н. Вялому, который ухитрился привести мой TEX в пристойный вид.

1. Несколько алгебраических тождеств

В этом пункте, пока не будет оговорено противное, можно считать, что A — произвольное кольцо с единицей 1; это означает просто, что мы не будем использовать в доказательствах умножение на скаляры.

В теореме о непустоте спектра речь идет об обратимости элементов специального вида. Следующее стандартное рассуждение показывает, что (по крайней мере, теоретически) проблема обратимости сводится к рассмотрению коммутативных объектов.

Рассмотрим некоторое непустое подмножество $S \subset A$. *Централизатором* множества S называется множество

$$Z(S) \stackrel{\text{def}}{=} \bigl\{x \in A \bigm| xy = yx \text{ для всех } y \in S\bigr\}.$$

Легко видеть, что $Z(S)$ — кольцо с единицей 1. Далее, если $S_1 \subset S_2$, то $Z(S_2) \subset Z(S_1)$. Отсюда сразу следует

Лемма 1. *Если элементы подмножества S коммутируют между собой (например, если S состоит из одного элемента), то $Z(Z(S))$ — коммутативное подкольцо, и элемент из S тогда и только тогда обратим в A, когда он обратим в $Z(Z(S))$.*

Пусть теперь A — *коммутативное* кольцо с единицей 1. Ясно, что

$$a^{-1} - b^{-1} = -(a - b) \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \tag{1}$$

для всех обратимых элементов $a, b \in A$.

При фиксированном $x \in A$ положим

$$r_a = r_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} (a - x)^{-1},$$

если элемент $a - x$ обратим. В предположении, что элементы $a - x$ и $b - x$ оба обратимы, из тождества (1) вытекает тождество

$$r_a - r_b = -(a - b) \cdot r_a \cdot r_b, \tag{2}$$

которое называется *тождеством Гильберта.*

Фиксируем такой набор $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ элементов из A, что

$$z_k^n = 1 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{3}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^m = 0 \qquad (1 \leqslant m < n). \tag{4}$$

Ясно, что все элементы z_k обратимы и что соотношения (4) выполняются при всех m, положительных и отрицательных, кроме кратных n. В частности, если $w_k = z_k^{-1}$, то этот набор также удовлетворяет условиям (3) и (4). Разумеется, основной пример — набор корней n-й степени из 1; в этом случае выполнение соотношений (3) и (4) гарантируется известными формулами Ньютона.

При натуральном n положим

$$\varphi_n(u) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}.$$

Для доказательства следующей леммы достаточно переставить порядок суммирования справа.

Лемма 2 (О корнях из единицы). *Для любых $x, y \in A$ имеет место тождество*

$$n \cdot \sum_{0}^{n-1} x^k \cdot y^{n-k-1} = \sum_{z} z \cdot \varphi_n(zx) \cdot \varphi_n(zy), \tag{5}$$

в котором суммирование справа производится по всем $z = z_k$ из отмеченного набора.

Из тождества (5) при $x = y$ вытекает, что

$$n^2 \cdot x^{n-1} = \sum_{z} z \cdot \varphi_n(zx)^2. \tag{6}$$

Лемма 3. *Предположим, что для всех $z = z_k$ элементы $z - x$ обратимы. Тогда*

$$n^2 \cdot x^{n-1} = (1 - x^n)^2 \cdot \sum_z z \cdot r_z^2. \tag{7}$$

Доказательство. Будем писать w вместо z^{-1}. Поскольку набор $\{w\}$ удовлетворяет тем же соотношениям, что и набор $\{z\}$, из тождества (6) вытекает, что

$$n^2 \cdot x^{n-1} = \sum_w w \cdot \varphi_n(wx)^2.$$

Элементы $1 - wx$ обратимы, причем

$$(1 - wx)^{-1} = z(z - x)^{-1} = zr_z.$$

Так как $(1 - wx)\varphi_n(wx) = 1 - x^n$, то $\varphi_n(wx) = (1 - x^n)zr_z$.

Таким образом,

$$n^2 \cdot x^{n-1} = \sum_w w \cdot \varphi_n(wx)^2 = \\ = (1 - x^n)^2 \cdot \sum_z z \cdot r_z^2,$$

и лемма доказана.

Если A — алгебра над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а $z_k = \lambda_k$ — корни из 1, то формула (7) может быть записана в виде

$$n \cdot x^{n-1} = (1 - x^n)^2 \cdot \int_{\mathbb{T}} \lambda \cdot {r_\lambda}^2 \, d\mu_n. \tag{8}$$

Здесь

$$\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$$

— единичная окружность, μ_n — мера Хаара группы корней n-й степени из 1, т. е. единичная мера на $\mathbb{T}$, сопоставляющая корню массу $1/n$. Относительно элемента x предполагается, что $\operatorname{Spec}_A(x)$ не пересекается с этой группой.

Как и полагается в данном контексте, при $\lambda \in \mathbb{C}$ через r_λ здесь обозначается *резольвента* элемента $x \in A$, т. е. элемент $(\lambda \cdot 1 - x)^{-1}$, если такой элемент существует. Это обозначение используется и в дальнейшем.

Многие факты элементарной теории аналитических функций вытекают из теоремы о среднем, которая получается из интегральной формулы Коши в применении к центру единичного диска. Конечные усреднения типа (8) довольно часто позволяют обойтись без интегрирования, а то и дополнить результат. Наш сюжет — на эту тему.

2. Спектральный индикатор

Следующая простая, но весьма полезная лемма иногда называется леммой Фекете.

Лемма 4. *Пусть $\{\alpha_k\}$ — такая последовательность неотрицательных чисел, что*

$$\alpha_{k+l} \leqslant \alpha_k \cdot \alpha_l \tag{9}$$

для всех натуральных k и l. Тогда

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \alpha_k^{1/k} = \inf_k \alpha_k^{1/k} \tag{10}$$

и, в частности, последовательность $\{\alpha_k^{1/k}\}$ имеет предел.

Доказательство. Для удобства будем считать, что $\alpha_0 = 1$. Фиксируем натуральное m. Если $k > m$, то $k = ms + r$, где $0 \leqslant r < m$. Поэтому, согласно (9),

$$\alpha_k^{1/k} \leqslant \alpha_r^{1/k} \cdot \alpha_m^{s/k}.$$

При $k \to \infty$ последнее неравенство приводит к равенству (10) с заменой правой части на $\alpha_m^{1/m}$, и теперь остается взять нижнюю грань по m справа. Лемма доказана.

Пусть A — алгебра с единицей 1 над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Неотрицательную функцию p на A будем называть *субнормой*, если выполняются следующие условия:
1. *Невырожденность:* $p(1) > 0$.
2. *Однородность:* $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$ для всех $x, y \in A$ и всех $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. *Субаддитивность:* $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in A$.
4. *Субмультипликативность:* $p(xy) \leqslant p(x) \cdot p(y)$ для всех $x, y \in A$.

Неотрицательную функцию σ на A будем называть *спектральным индикатором*, если
1. $\sigma(1) = 1$.
2. $\sigma(x^n) = \sigma(x)^n$ для всех $x \in A$ и натуральных n.
3. Сужение σ на каждую коммутативную подалгебру — субнорма.

Лемма 5. *Пусть p — субнорма на алгебре A. Тогда для каждого элемента $x \in A$ существует предел*

$$\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} p(x^n)^{1/n},$$

и этот предел σ — спектральный индикатор.

Доказательство. Существование предела является следствием предыдущей леммы. Условия невырожденности и однородности очевидны.

Из существования предела вытекает, что $\sigma(x^k) = \sigma(x)^k$. Если $xy = yx$, то из существования предела и аналогичного неравенства для p получается неравенство $\sigma(xy) \leqslant \sigma(x) \cdot \sigma(y)$. Наконец, для доказательства неравенства треугольника надо дополнительно использовать «бином Ньютона».

Замечание. Если A — нормированная алгебра, то спектральный индикатор, порожденный нормой, — это в точности «спектральный радиус», если последний *определять* формулой Гельфанда. Стандартный пример матриц

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показывает, что спектральный индикатор, порожденный субнормой, вообще говоря, субнормой не является. Этот пример типичен. Вместе с тем, для (некоммутативной) алгебры верхних треугольных матриц второго порядка спектральный индикатор, порожденный стандартной нормой, будет субнормой.

3. Теорема о непустоте спектра

Пусть A — коммутативная алгебра и σ — спектральный индикатор. Согласно определению, σ является субнормой. Заметим, что условие $\sigma(a) < 1$ (в отличие от стандартной ситуации), вообще говоря, *не гарантирует* обратимости элемента $1 - a$. С точностью до этой оговорки следующая лемма тривиальна.

Лемма 6. *Если* $(1 - a) \cdot b = 1$ *и* $\sigma(a) < 1$, *то*

$$\sigma(b) < \frac{1}{1 - \sigma(a)}.$$

Действительно, $b = 1 + ab$, так что

$$\sigma(b) \leqslant 1 + \sigma(a) \cdot \sigma(b).$$

Фиксируем некоторый элемент $x \in A$. Предположим, что множество $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Spec}_A(x)$ не пусто. Это множество называется множеством регулярных точек элемента x и является областью определения резольвенты

$$r_\lambda = (\lambda \cdot 1 - x)^{-1}.$$

Лемма 7. *Функция $\lambda \to \sigma(r_\lambda)$ непрерывна на множестве регулярных точек элемента x и, следовательно, равномерно ограничена на каждом компактном подмножестве этого множества.*

Доказательство. Если λ, μ — регулярные точки, то, согласно тождеству Гильберта,

$$r_\mu = (1 - (\mu - \lambda) r_\lambda)^{-1} \cdot r_\lambda.$$

Поэтому, если $|\mu - \lambda|\,\sigma(r_\lambda) < 1$, то, используя еще раз тождество Гильберта и, кроме того, лемму 6, получаем

$$\begin{aligned} \bigl|\sigma(r_\mu) - \sigma(r_\lambda)\bigr| &\leqslant \sigma(r_\mu - r_\lambda) = \\ &= \bigl|\mu - \lambda\bigr| \cdot \sigma(r_\mu \cdot r_\lambda) \leqslant \\ &\leqslant \frac{|\mu - \lambda|\,\sigma(r_\lambda)^2}{1 - |\mu - \lambda|\,\sigma(r_\lambda)}, \end{aligned}$$

и доказательство закончено.

Напомним, что через $\mathbb{T}$ мы обозначаем стандартную единичную окружность на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Теорема. *Пусть A — комплексная алгебра с единицей. Предположим, что на A существует спектральный индикатор σ.*

Тогда $\mathrm{Spec}_A(x) \neq \varnothing$ *для всех $x \in A$. В частности, спектр каждого элемента не пуст, если алгебра обладает субнормой.*

Доказательство. По лемме 1, мы можем предположить, что алгебра A коммутативна. Пусть $x \in A$. Если $\sigma(x) = 0$, то x не может быть обратимым, так что $0 \in \mathrm{Spec}_A(x)$.

Поэтому мы можем считать, что $\sigma(x) = 1$. Покажем, что в этом случае на окружности $\mathbb{T}$ имеется хотя бы одна точка спектра элемента x. Действительно, в противном случае все точки окружности $\mathbb{T}$ будут точками регулярности. По лемме 7, найдется такое $c > 0$, что для всех $\lambda \in \mathbb{T}$ будет выполняться неравенство $\sigma(r_\lambda) \leqslant c$. Но так как $\sigma(x) = 1$, то это сразу приводит к противоречию с леммой 3.

По лемме 5, второе утверждение теоремы является следствием первого. Теорема доказана.

Замечание. Для банаховых алгебр теорема Гельфанда устанавливает больше — спектр не пуст и компактен. Однако в условиях доказанной теоремы спектр не обязательно замкнут или ограничен. Вместе с тем, эту теорему можно редуцировать к теореме Гельфанда: каждая коммутативная алгебра со спектральным индикатором имеет нетривиальный гомоморфизм в банахову, тогда как никакая алгебра, в которой есть элементы с пустым спектром, не может иметь нетривиальных гомоморфизмов в алгебру без таких элементов (имеются в виду гомоморфизмы, «сохраняющие единицу»). Впрочем, и добавления, которые надо сделать, чтобы вывести из установленной теоремы названные выше теоремы Гельфанда, не велики. Действительно, если A — банахова алгебра и $|x|_\infty < 1$, то ряд Неймана

$$y = 1 + x + x^2 + \ldots$$

сходится и $(1-x)y = y(1-x) = 1$. Вместе с приведенными выше неравенствами это позволяет установить, что группа обратимых элементов алгебры A открыта в A и что групповые операции в ней непрерывны. Отсюда следует, что дополнение к спектру каждого элемента открыто. Кроме того, используя еще раз ряд Неймана, легко проверить, что элемент $\lambda \cdot 1 - x$ обратим, если $|\lambda| > |x|_\infty$.

4. ... И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

Основная теорема алгебры выводится из теоремы о непустоте спектра для конечномерных алгебр. Разумеется, мы должны убедиться, что к таким алгебрам теорема о непустоте спектра применима. Для этого достаточно установить существование нетривиальной субнормы на каждой конечномерной алгебре (фактически все такие алгебры наделяются структурой банаховой алгебры).

Мы начнем с рассмотрения примера, в котором всё достаточно очевидно, однако вскоре выяснится, что общий случай сводится к этому.

Снабдим $\mathbb{C}^n$ стандартной евклидовой нормой; норму вектора $\xi \in \mathbb{C}^n$ будем обозначать через $|\xi|$. Пусть $B = B(\mathbb{C}^n)$ — алгебра всех линейных операторов $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Эта алгебра естественно изоморфна алгебре $M(n, \mathbb{C})$ квадратных матриц порядка n. Все операторы $T \in B$ непрерывны, и легко убедиться, что все они имеют конечную *норму*

$$\|T\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|\xi|=1} |T\xi|\,,$$

и, снабженная этой нормой, B становится банаховой алгеброй. Мы не привели здесь подробных доказательств, потому что все они проводятся «непосредственно».

Для одного из вариантов доказательства основной теоремы алгебры (см. ниже) достаточно нормируемости алгебры B. Однако для полноты картины (и для большей свободы действий), мы поясним, как можно нормировать произвольную конечномерную алгебру A (с единицей).

Пусть $\dim(A) = n$. Тогда в качестве линейного пространства алгебра A изоморфна $\mathbb{C}^n$. Сопоставим элементу $a \in A$ оператор $T_a\colon x \to xa$. Используя указанный изоморфизм, мы можем «перенести» эти операторы в алгебру $B = B(\mathbb{C}^n)$; в результате получится точное представление алгебры A в B, и A наделяется нормой.

Прежде чем переходить к доказательствам основной теоремы алгебры, сделаем еще несколько замечаний общего характера.

В пространстве $\mathbb{C}^n$ мы (молчаливо) зафиксировали базис, в результате чего и возник изоморфизм между $B = B(\mathbb{C}^n)$ и $M(n, \mathbb{C})$. Отождествляя оператор $T \in B$ с соответствующей матрицей, мы можем писать выражения вроде $\det(T)$; на самом деле это число от выбора базиса не зависит.

В соответствии с правилами линейной алгебры, оператор T тогда и только тогда будет обратимым, когда $\det(T) \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{Spec}_B(T)$ составляют корни (характеристического) уравнения

$$\det(\lambda \cdot 1 - T) = 0.$$

Согласно тем же правилам, эти корни — «собственные значения линейного преобразования», и, как известно, стандартный метод доказательства существования собственных значений использует разрешимость характеристического уравнения.

У нас есть возможность обратить этот путь. Действительно, из сказанного выше по поводу алгебры $B = B(\mathbb{C}^n)$ вытекает, что к этой алгебре применима теорема о непустоте спектра.

Таким образом, спектр каждого оператора $T \in B$ не пуст, у оператора есть собственные числа, а характеристическое уравнение имеет корни.

Чтобы вывести отсюда основную теорему алгебры, остается заметить, что *каждый* полином

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

является характеристическим для некоторого линейного оператора. Например, при $n = 4$ достаточно рассмотреть матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \alpha_4 \\ -1 & \lambda & 0 & \alpha_3 \\ 0 & -1 & \lambda & \alpha_2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda + \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Теперь мы хотим вкратце описать ещё один способ получить основную теорему алгебры из теоремы о непустоте спектра.

Обозначим через $\mathbb{C}[z]$ алгебру всех комплексных полиномов. Хорошо известно, что полиномы можно делить с остатком. Это означает, что если $f, g \in \mathbb{C}[z]$, то существуют такие однозначно определенные полиномы h и q, что $g = fh + q$, причем $\deg(q) < \deg(f)$ (полиному, тождественно равному 0, приписывается степень $-\infty$).

Фиксируем некоторый нетривиальный полином f и обозначим через (f) совокупность всех полиномов, делящихся на f без остатка. Множество (f) составляет *идеал* в том смысле, что (f) есть подалгебра (без единицы) с дополнительным свойством: если $g \in (f)$, то $gh \in (f)$, для каждого полинома $h \in \mathbb{C}[z]$.

Говорят, что полиномы g_1, g_2 эквивалентны (точнее, *сравнимы по модулю* (f)), если $g_1 - g_2 \in (f)$.

Возникающие классы эквивалентности составляют алгебру относительно естественных операций, которая обычно обозначается $\mathbb{C}[z]/(f)$.

Из описанной выше процедуры деления с остатком легко вытекает, что размерность этой алгебры равна $\deg(f)$. Повторное применение процедуры деления с остатком (алгоритм Евклида) позволяет установить, что $\mathbb{C}[z]/(f)$ — поле, если полином f неприводим, т. е. не представляется в виде нетривиального произведения полиномов.

По теореме Гельфанда — Мазура, возникающее поле одномерно. Следовательно, если f неприводим, то $\deg(f) = 1$, и основная теорема алгебры ещё раз доказана.

В курсе коммутативной алгебры второй способ может оказаться более предпочтительным: во-первых, привлекаются полезные дополнительные общие понятия, а во-вторых, не надо выходить за рамки коммутативных объектов.

5. Небольшое послесловие

Конкретные алгебры операторов в гильбертовом пространстве начали рассматривать ещё в начале 30-х годов. В частности, исследования фон Неймана по математическим основам квантовой механики — это теория самосопряженных операторов гильбертова пространства.

Вскоре после того как прояснились основные принципы теории банаховых пространств, рядом авторов было введено (под разными названиями) и понятие банаховой алгебры, однако новым направлением в математике, настоящей теорией, связавшей многочисленные разрозненные факты классического и комплексного анализа, алгебры и топологии, эта наука стала благодаря решающему вкладу И. М. Гельфанда. Характерная особенность творчества И. М. Гельфанда проявилась здесь очень ярко: он услышал ключевое слово. В общей коммутативной алгебре, главной моделью которой служит теория чисел, центральное понятие, являющееся естественным обобщением понятия простого числа, — простой идеал. Открытие И. М. Гельфанда состояло в том, что для «коммутативных колец», естественно возникающих в различных задачах анализа, решающую роль играет понятие *максимального* идеала. В этом смысле перечисленные выше результаты — это всего лишь подъездные пути к строительству. В упомянутой выше монографии Ч. Риккарта [3] дана, в частности, практически полная библиография по банаховым алгебрам к началу 60-х годов. К настоящему времени составить подобный список не представляется возможным. С основами теории теперь можно познакомиться практически по любому более или менее современному курсу функционального анализа (см., например, Рудин [4]). Есть, однако, особая прелесть в прикосновении к классическим источникам. Мне в своё время повезло: сначала (по случайным обстоятельствам) я прочел основную работу И. М. Гельфанда [1], затем, просидев месяц в библиотеке мехмата, купил в киоске на Моховой номер «Успехов» со статьей И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова и Г. Е. Шилова [2]. Этот экземпляр дожидался своего часа около 10 лет.

Список литературы

[1] *Gelfand I.* Normierte Ringe // Мат. сб. 9 (51):1, 1941. С. 3–23.

[2] *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца // УМН. I, 2(12), 1946. С. 48–146.

[3] *Rickart C. E.* General Theory of Banach Algebras. Princeton, N.J.: D. van Nostrand. 1960.

[4] *Rudin W.* Functional Analysis. N. Y.: McGraw-Hill. 1973.
Рудин У. Функциональный анализ / пер. с англ. В. Я. Лина под ред. Е. А. Горина. М.: Мир. 1975.