

## О некоторых топологических доказательствах основной теоремы алгебры

П. Е. Пушкарь\*

### ВВЕДЕНИЕ

Основная теорема алгебры утверждает, что в поле комплексных чисел любое алгебраическое уравнение имеет корень. Эквивалентная вещественная формулировка: любой вещественный полином раскладывается в произведение линейных и квадратичных сомножителей — может быть доказана без использования понятия комплексного числа (см., например, доказательство А. В. Пухликова [1]). В настоящей заметке мы обсуждаем топологические факты, лежащие в основе доказательства А. В. Пухликова и некоторых других доказательств основной теоремы алгебры, и предлагаем другое доказательство основной теоремы алгебры, также не использующее понятие комплексного числа (основанное на понятии степени отображения).

Приведенное в статье доказательство основной теоремы алгебры появилось в результате обдумывания доказательства А. В. Пухликова, которое было разбито на задачи, предложенные студентам второго курса МК НМУ на семинарах по математическому анализу.

Автор благодарен А. Г. Хованскому за помощь и внимание к этой заметке.

### 1. О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТАХ ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВЕ «ВЕЩЕСТВЕННОГО» ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ.

Сформулируем необходимые определения.

Напомним, что непрерывное отображение называется собственным, если прообраз любого компакта — компакт.

---

\*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проект 96-01-01104) и грантом INTAS-94-4373.

Пусть  $M^{n+k}, M^n$  — гладкие многообразия размерности  $n+k$  и  $n$  соответственно ( $k \geq 0$ ),  $f: M^{n+k} \rightarrow M^n$  — гладкое отображение.

Точку образа отображения  $f$  назовем сильно регулярным значением, если среди ее прообразов найдется точка, дифференциал отображения  $f$  в которой имеет максимальный ранг (равный  $n$ ).

Точку образа отображения  $f$  будем называть сильно особым значением, если во всех ее прообразах ранг дифференциала не максимальный (меньше  $n$ ).

Таким образом, мы разбили образ отображения  $f$  на два множества — множество сильно регулярных значений отображения  $f$  и множество сильно особых значений отображения  $f$ .

**УПРАЖНЕНИЕ.** *Каким может быть множество сильно особых значений отображения  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ?*

Сформулируем основной топологический факт, лежащий в основе приведенных ниже доказательств основной теоремы алгебры.

**ТЕОРЕМА 1.** *Пусть  $f: M^{n+k} \rightarrow M^n$  такое гладкое собственное отображение, что:*

- а) дополнение до множества сильно особых значений отображения  $f$  связно,*
- б) множество сильно регулярных значений отображения  $f$  непусто.*

*Тогда образ отображения  $f$  совпадает с многообразием  $M^n$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем, что множество сильно регулярных значений открыто и замкнуто в дополнении к множеству сильно особых значений.

1. Множество сильно регулярных значений открыто в  $M^n$ .

Это очевидное следствие из теоремы о неявной функции. Следовательно, это множество открыто и в подмножестве  $M^n$  — дополнении до множества сильно особых значений отображения  $f$ .

2. Множество сильно регулярных значений замкнуто в дополнении к множеству сильно особых значений.

Рассмотрим последовательность сильно регулярных значений  $(x_i)$  сходящуюся к точке  $a$ , не лежащей в множестве сильно особых значений отображения  $f$ . Объединение членов последовательности  $(x_i)$  и точки  $a$  — компакт в  $M^n$ . Так как отображение  $f$  собственное, его прообраз — компакт в  $M^{n+k}$ . Выберем по прообразу  $y_i$  точки  $x_i$ . У последовательности  $(y_i)$  есть сходящаяся подпоследовательность (здесь, собственно, и используется собственность отображения  $f$ ), сходящаяся к точке  $z$ . Отображение  $f$  непрерывно, следовательно  $f(z) = a$ .

Таким образом,  $a$  лежит в образе  $f$  и не принадлежит множеству сильно особых значений отображения  $f$ . Следовательно  $a$  сильно регулярное значение отображения  $f$ . Утверждение о замкнутости доказано.

В силу условий теоремы 1 и доказанных утверждений множество сильно регулярных значений открыто, замкнуто и не пусто в дополнении до множества сильно особых значений отображения  $f$ .

Поскольку дополнение связно, то оно совпадает с множеством сильно регулярных значений отображения  $f$ . Теорема доказана.

Докажем при помощи теоремы 1 основную теорему алгебры.

1. «Комплексное» доказательство основной теоремы алгебры.

Рассмотрим отображение  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ .

Отображение  $f$  — собственное. Это следует из хорошо известной оценки абсолютной величины корней уравнения через коэффициенты уравнения (см. [2]). Множество сильно особых значений отображения  $f$  конечно, так как сильно особых значений не больше чем корней производной. Множество сильно регулярных значений, очевидно, не пусто.

Следовательно,  $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$  и теорема доказана.

2. Обсудим вещественное доказательство основной теоремы алгебры — доказательство А. В. Пушликова.

Сформулируем следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Любой вещественный полином степени  $n \geq 3$  представим в виде произведения двух полиномов меньшей степени.*

План доказательства: отождествим полиномы степени  $i$  со старшим коэффициентом равным единице с  $\mathbb{R}^i$  (отождествляем полином с его коэффициентами).

Рассмотрим отображение умножения  $\mu_i : \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(f, g) \rightarrow f \cdot g$ .

Определим отображение  $\mu : \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i} \rightarrow \mathbb{R}^n$  как отображение, совпадающее на каждой компоненте с соответствующим отображением умножения  $\mu_i$ .

Нам необходимо показать, что это отображение «на». Мы хотим воспользоваться теоремой 1.

Во-первых, для этого необходимо описать множество сильно особых значений отображения  $\mu$ .

Замечательный факт состоит в том, что дифференциал отображения  $\mu_i$  в точке  $(f, g)$  невырожден, если и только если наибольший общий делитель полиномов  $f$  и  $g$  равен 1 (см. [1]). Это позволяет описать множество сильно особых значений отображения  $\mu$ .

При нечетном  $n$  множество сильно особых значений отображения  $\mu$  совпадает с полиномами вида  $(x + a)^n$ , а при четном  $n$  содержится в множестве полиномов вида  $(x^2 + ax + b)^{n/2}$ . Дополнение до этих множеств связно (поучительное упражнение).

Во-вторых, нужно проверить, что отображение  $\mu$  — собственное (см. [1] и доказательство собственности подобного отображения в доказательстве теоремы 2 ниже).

Таким образом, мы можем применить теорему 1, что доказывает утверждение 1.

НЕФОРМАЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Возможность применения теоремы 1 в вещественной ситуации, в части касающейся связности дополнения до множества сильно особых значений отображения, вызывает некоторое удивление.

Так, множество особых значений для отображения общего положения одного многообразия в другое — гиперповерхность (с особенностями) (см. [4]) и, следовательно, может делить образ. Все дело в том, что множество сильно особых значений может быть существенно меньше (в смысле размерности), чем множество особых значений, а «на сколько меньше по размерности» — зависит от числа «листов» отображения. В комплексной же ситуации гиперповерхность не делит пространство и возможность применения теоремы 1 не вызывает вопросов.

## 2. О НЕКОТОРЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ, ОСНОВАННЫХ НА ПОНЯТИИ СТЕПЕНИ ОТОБРАЖЕНИЯ.

В этом параграфе мы обсудим комплексное и вещественное доказательства основной теоремы алгебры, основанные на следующем топологическом факте:

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** Пусть  $M^n, N^n$  — гладкие связные ориентированные многообразия,  $f : M^n \rightarrow N^n$  гладкое собственное отображение, степень которого не равна нулю.

Тогда  $f$  — отображение «на» ( $f(M^n) = N^n$ ).

Напомним, что для гладких собственных отображений ориентированных многообразий степень определяется обычным образом: нужно взять регулярную точку в образе и подсчитать число ее прообразов с учетом знака определителя дифференциала отображения (см. подробности в [3]). То, что степень определена корректно — довольно сложно доказываемая

(в отличие от теоремы 1) теорема. Утверждение 2 — очевидно (по модулю корректности определения степени) и общеизвестно.

Выведем из утверждения 2 основную теорему алгебры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО([3]): Рассмотрим отображение  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ . Отображение  $f$  — собственное. Степень отображения  $f$  равна  $n$ , так как  $f$  собственное гомотопное отображению  $z \rightarrow z^n$ , степень которого легко вычисляется. Таким образом, мы находимся в рамках утверждения 2. Основная теорема алгебры доказана.

Докажем теперь основную теорему алгебры в следующей эквивалентной «вещественной» формулировке

**ТЕОРЕМА 2.** *Любой вещественный полином степени  $2n$  раскладывается в произведение  $n$  полиномов второй степени.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. отождествим полином  $x^2 + ax + b$  с точкой  $(a, b)$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Рассмотрим отображение умножения

$$u : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad (f_1, f_2, \dots, f_n) \mapsto f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n.$$

Мы хотим доказать, что  $u$  — отображение «на».

1. Отображение  $u$  собственное.

Отождествим пространство отличных от нуля полиномов второй степени по модулю умножения на отличные от нуля числа с проективной плоскостью  $\mathbb{R}P^2$ . Рассмотрим отображение умножения

$$\hat{u} : (\mathbb{R}P^2)^n \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}, \quad ([f_1], \dots, [f_n]) \mapsto [f_1 \cdot \dots \cdot f_n].$$

Отображение  $\hat{u}$  собственное, так как оно определено на компактном многообразии и непрерывно.

Отображение  $\hat{u}$  естественно «компактифицирует» отображение  $u$ .  $(\mathbb{R}P^2)^n$  можно представить в виде объединения  $\mathbb{R}^{2n}$  и «бесконечно удаленной части»  $B_1$ , а  $\mathbb{R}P^{2n}$  можно представить в виде объединения  $\mathbb{R}^{2n}$  и «бесконечно удаленной части»  $B_2$ . При этом на  $(\mathbb{R}^2)^n$   $\hat{u}$  совпадает с  $u$  и, очевидно,  $\hat{u}(B_1) \subset B_2$ .

Следовательно, умножение  $u$  собственное, так как прообраз компакта при отображении  $u$  совпадает с прообразом компакта при отображении  $\hat{u}$ .

2. Степень отображения  $u$  по модулю равна  $n!$ .

Ориентируем пространство полиномов второй степени со старшим коэффициентом 1 (мы обозначаем это пространство через  $\mathbb{R}^2$ ) как-нибудь, а  $(\mathbb{R}^2)^n$  ориентируем как произведение ориентированных многообразий.

ЛЕММА. Полином  $p = \prod_{i=1}^n (x^2 + i)$  — регулярное значение отображения  $u$ .

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите лемму.

УКАЗАНИЕ: Воспользуйтесь описанием регулярных точек отображения  $\mu_i$  из плана доказательства утверждения 1.

У полинома  $p$  есть  $n!$  прообразов — все упорядоченные наборы полиномов  $(x^2 + i), i = 1, \dots, n$ . Докажем, что они вносят в степень один знак.

Отображение умножения  $u$  инвариантно относительно перестановок сомножителей. Отображение перестановки сомножителей сохраняет ориентацию (упражнение), следовательно знак определителя дифференциала во всех прообразах совпадает.

Применяя утверждение 2 к отображению  $u$ , заканчиваем доказательство теоремы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пушликов А. В. «Вещественное» доказательство основной теоремы алгебры. — Статья в этом номере.
- [2] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука. 1975.
- [3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука. 1979.
- [4] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982.